

Esercizi sulla trasformata di Fourier (FFT).

Roberto Dionisio, Francesco Zazzu, Monica Cesario, Rebecca Gazzetti.

May 4, 2019

1 Analisi di Fourier

La trasformata di Fourier è definita come:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \tilde{g}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(2\pi i f t) dt \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

dove $g(t)$ rappresenta una generica funzione nel dominio dei tempi. L'Analisi di Fourier in Python è implementata tramite il pacchetto `scipy.fftpack`. La FFT produce un array di $2^{n-1} + 1$ punti dove l'ultimo rappresenta il valore della trasformata a frequenza 0. Tuttavia nel seguito tale punto è stato omesso in quanto di poco interesse per i nostri scopi. L'array delle frequenze è composto da valori da 0 Hz a $f_{max} = 1/2\Delta t_c$ dove Δt_c è l'intervallo di campionamento.

2 Forme d'onda

Per le forme d'onda generate con serie di Fourier, per l'onda sinusoidale, nello spettro delle frequenze, osserviamo un unico picco che corrisponde alla frequenza propria del segnale (armonica principale) monocromatico. Nel caso di onda quadra e triangolare, essendo queste combinazioni di seni e coseni, oltre al picco rappresentate l'armonica principale osserviamo anche i picchi che costituiscono le armoniche superiori; rispettivamente dispari per l'onda quadra e pari per la triangolare.

Nel caso di segnale acquisito dal generatore di funzioni (figura 2), oltre ad un picco principale ne notiamo altri, corrispondenti al "rumore", in quanto non è praticamente possibile generare un segnale perfettamente monocromatico come quello dell'onda sinusoidale (figura 1). Nonostante ciò lo spettro in frequenza dei segnali acquisiti rispetta l'andamento atteso.

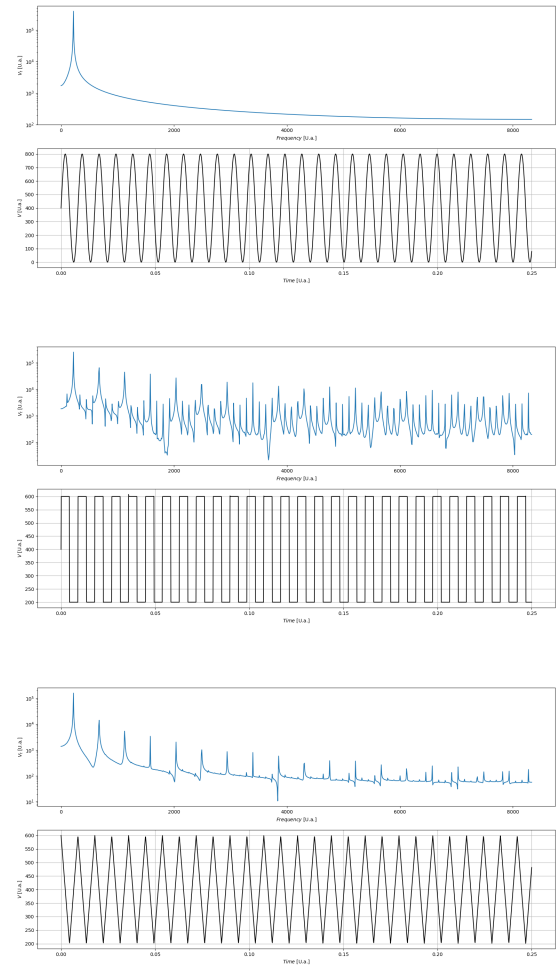


Figure 1: I grafici con la traccia di colore nero corrispondono alle forme d'onda, rispettivamente: sinusoidale, quadra e triangolare, generate numericamente con serie di Fourier (10000 iterazioni, 2048 punti). Quelli di traccia blu, spettro delle frequenze, sono i rispettivi segnali trasformati secondo Fourier.

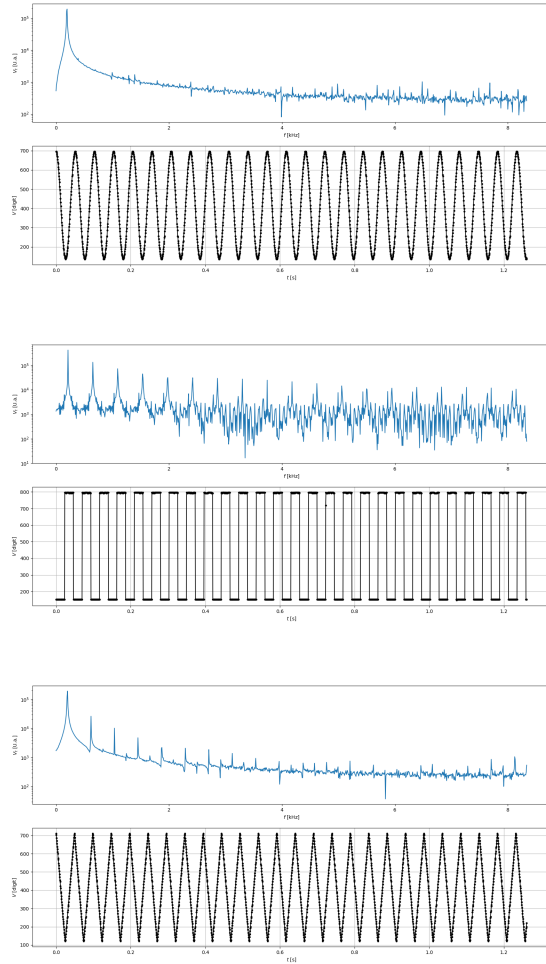


Figure 2: Grafici analoghi di figura 1 per dei segnali (frequenza ~ 20.3 Hz) acquisiti direttamente con il generatore di funzioni.

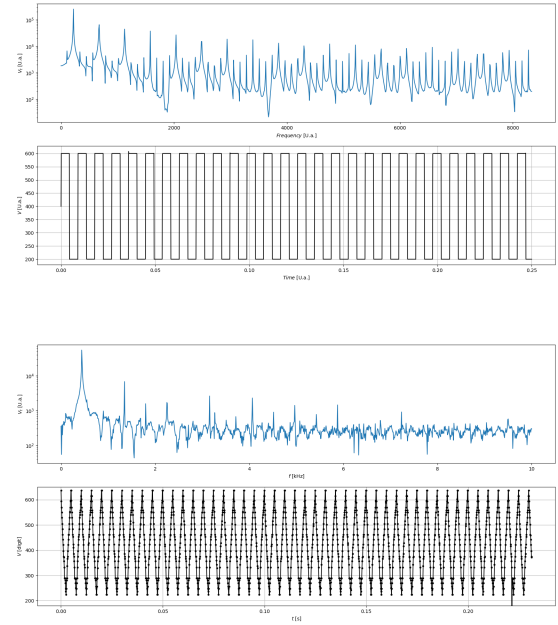


Figure 3: Analogo della figura 1 per una forma d'onda a pinna di squalo. Il primo è stato generato mentre il secondo acquisito costruendo un filtro passa-basso (circuitto derivatore) ad una frequenza di lavoro (~ 250 Hz) inferiore a quella di taglio (~ 453 Hz).

3 Oscillatore a reazione

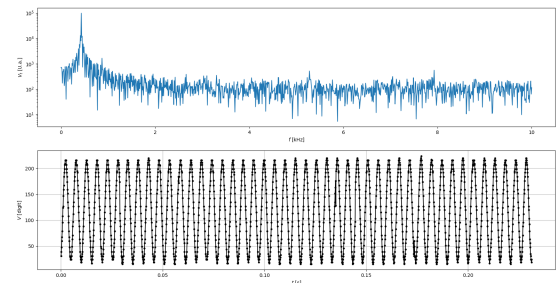


Figure 4: Grafico dei dati acquisiti relativi all'esperienza dell'oscillatore a reazione (transistor) che rappresenta appunto l'oscillazione del segnale nel circuito dopo la fase d'innescio. L'andamento nel tempo dell'oscillatore si presenta con un andamento pressappoco sinusoidale. Lo spettro in frequenza invece è totalmente diverso da quello in figura 1; infatti esso ci mostra che il sistema possiede una frequenza di autooscillazione (picco principale ~ 430 Hz), ma anche la presenza di armoniche superiori, in contraddizione con il comportamento monocromatico del segnale sinusoidale. A ciò si somma la dipendenza non lineare tra tensione e corrente di base nella configurazione a emettitore comune, che tende a distorcere il segnale.

4 Oscillatore RLC (vuoto)

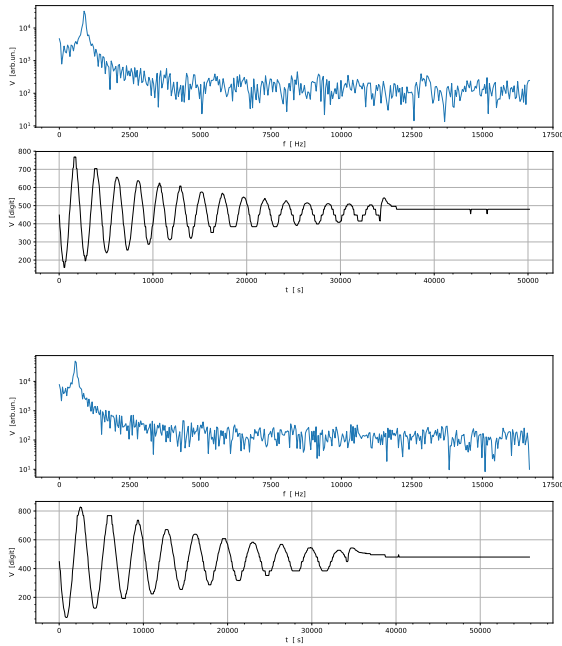


Figure 5: Grafici analoghi di figura 1 per i segnali acquisiti relativi all'esperienza dell'oscillatore smorzato RLC, usando per il primo e per il secondo due condensatori di capacità rispettivamente $0.22 \mu\text{F}$ e $0.47 \mu\text{F}$ e un'induttanza di $\sim 0.5 \text{ H}$.

5 Oscillatore RLC (materiali)

La pulsazione ω delle oscillazioni smorzate risulta essere:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$$

Ma nelle nostre condizioni il termine $1/\tau^2$ con $\tau = 2L/r$ è trascurabile in quanto $r = (40.3 \pm 0.4) \Omega$. Dunque essendo $1/\tau^2 \ll \omega_0^2$ avremo che $\omega = \omega_0$ con:

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad L \sim 0.5\text{H} \quad C = (0.22 \pm 10\%)\mu\text{F}$$

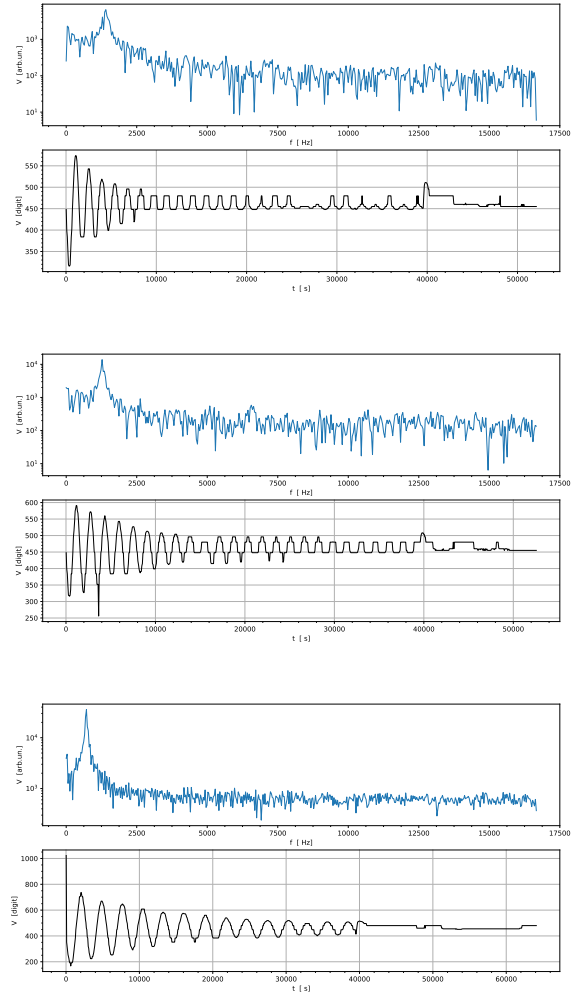


Figure 6: Analogo di figura 5 con diversi materiali inseriti nel nucleo dell'induttore. Rispettivamente sbarra di alluminio pieno, sbarra di alluminio laminata e sbarra di ferro laminata.

Di seguito riportiamo i valori riassuntivi per ciascun materiale in termini di fattore di qualità e della frequenza del picco principale nello spettro delle frequenze:

<i>Fattore di qualità (Q_f) e frequenza picco principale (f)</i>		
Materiale	$Q_f = \omega\tau/2$	$f \text{ [Hz]}$
All. pieno	~ 23	~ 1384
All. lamin.	~ 21.8	~ 1286
Ferro lamin.	~ 15.8	~ 717