中山大學 软件工程学院
SUN YAT-SEN UNIVERSITY SCHOOL OF SOFTWARE ENGINEERING

Lecture 06：空间变换

SSE315：计算机图形学
Computer Graphics

陈壮彬
软件工程学院
chenzhb36@mail.sysu.edu.cn

Today’s topics

- □线性变换的基本介绍

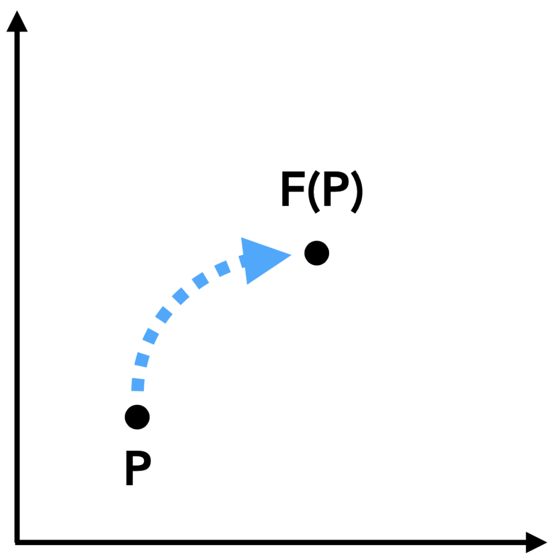
- □常见的线性变换

- □齐次坐标系

空间变换 Spatial transformation

□任何为每个点**分配新位置**的函数

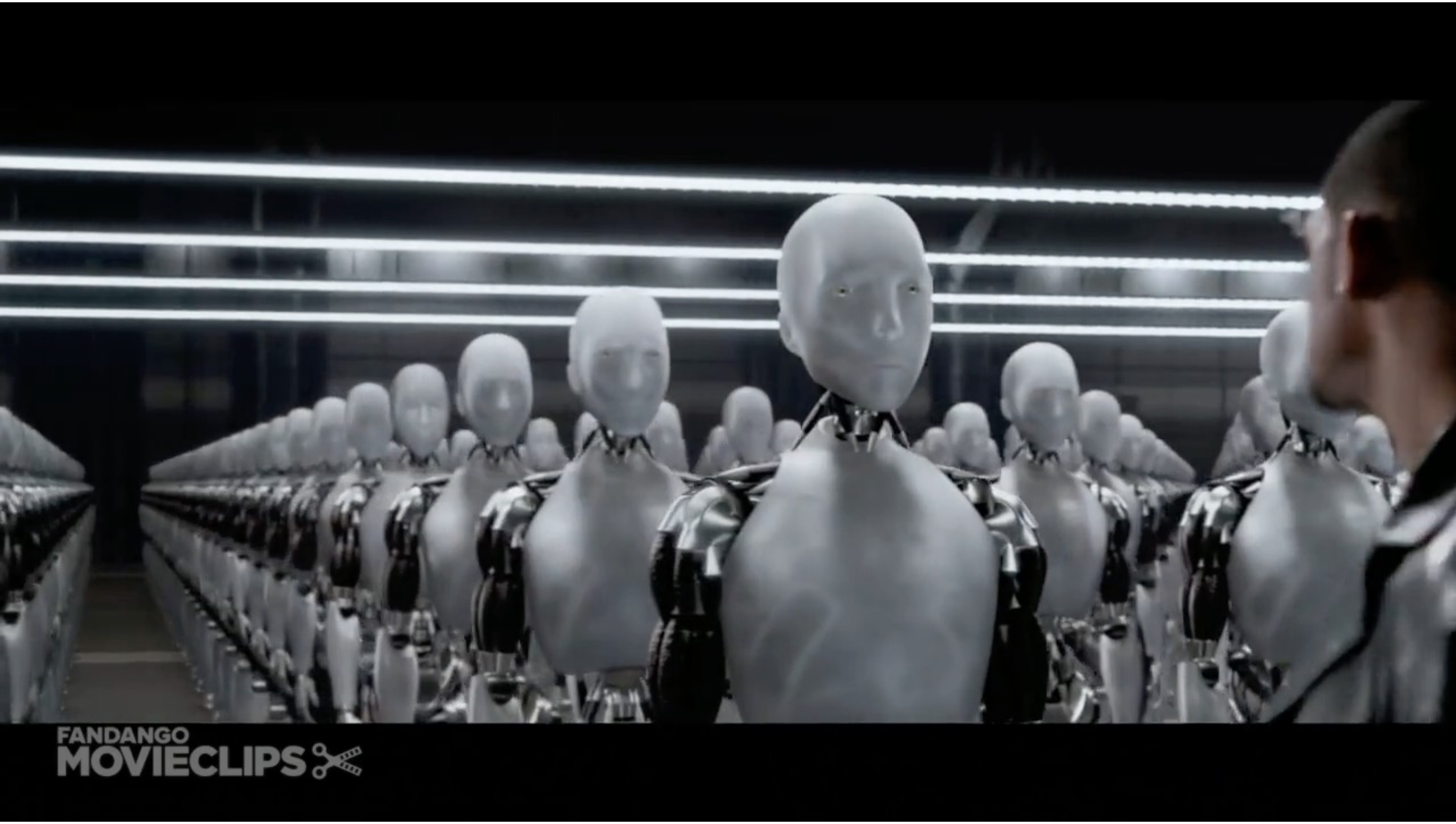
□关注常见的**基于线性映射 (linear maps) 的空间变换**，如旋转 (rotation)、缩放 (scaling) 等



- (x′,y′,z′) = F(x,y,z)
- P′ = F(P)

为什么要学习线性变换？

在空间中移动物体



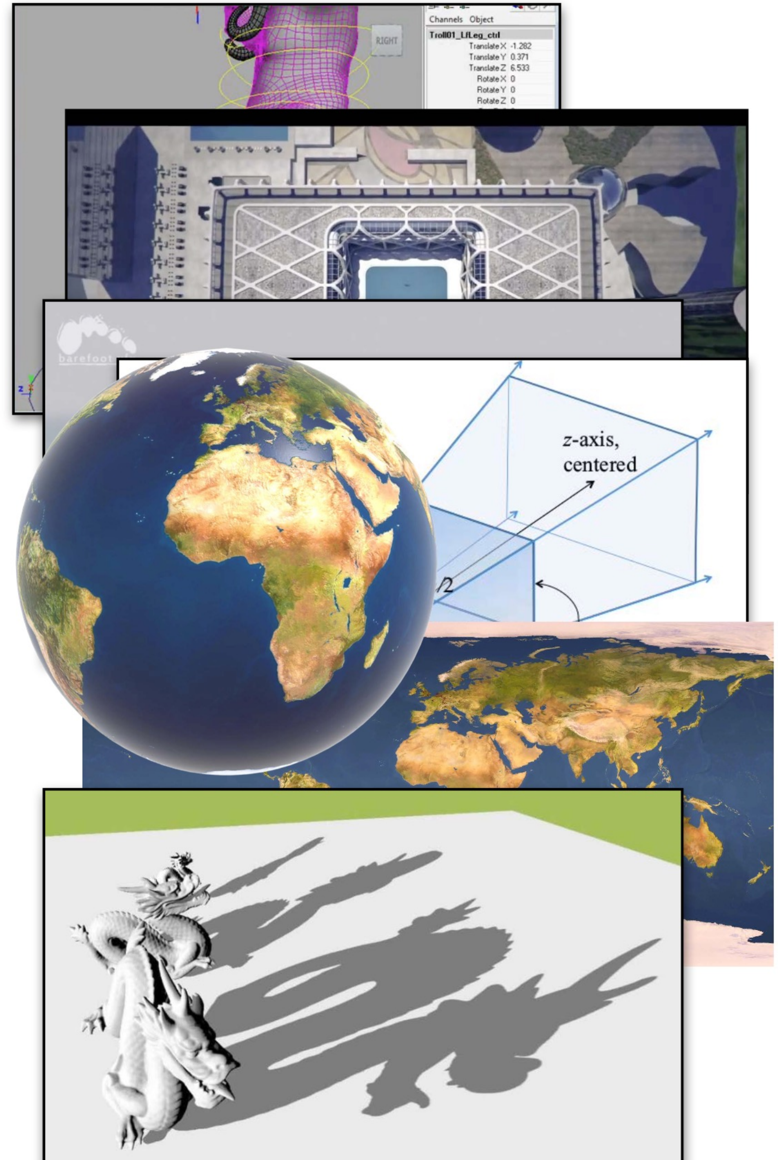
3D 物体建模

游戏设计

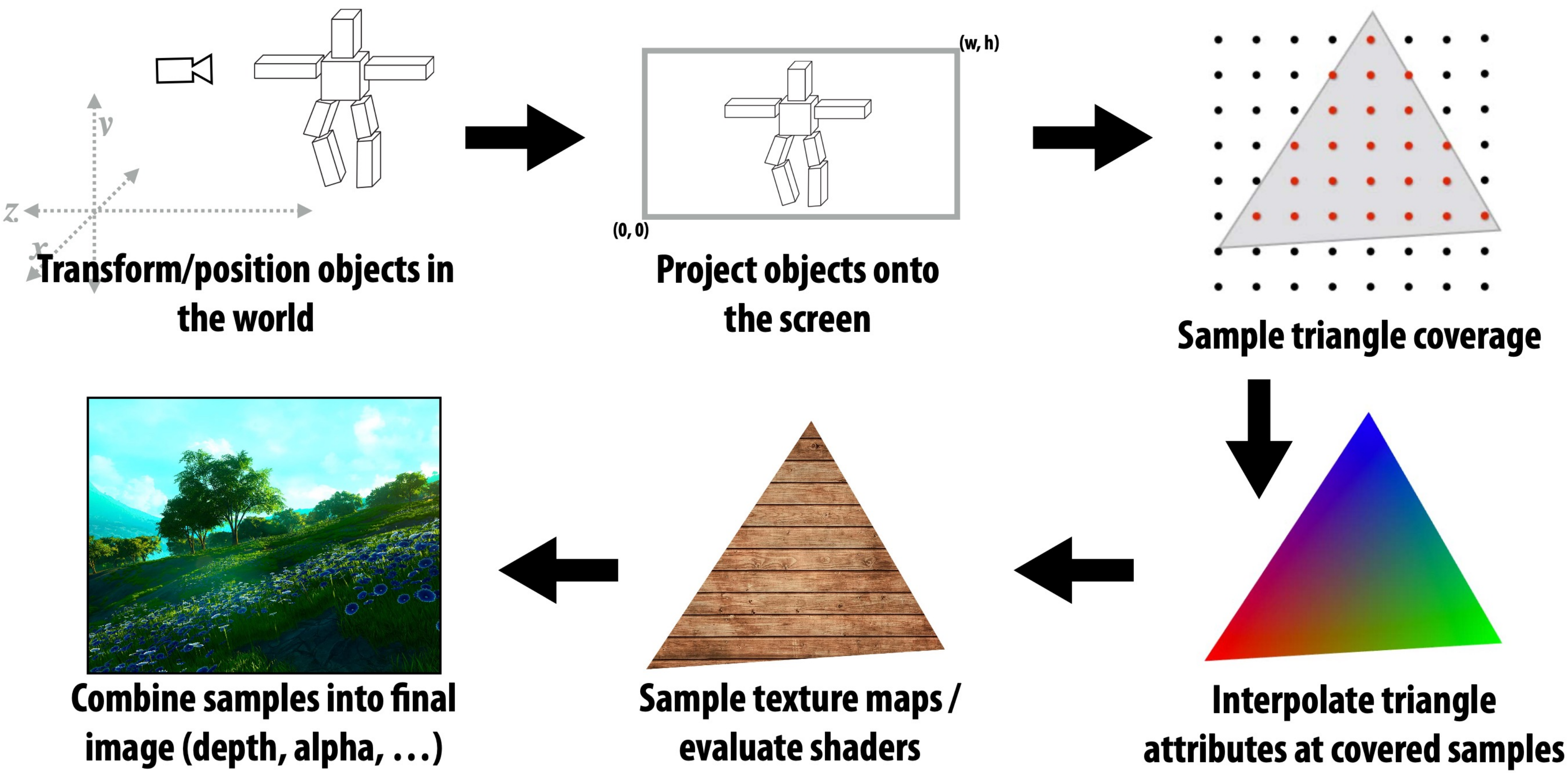
计算机图形学中的空间变换

□All over the place!

- 在空间中定位/变形对象
- 移动相机
- 随时间设置对象动画
- 将 3D 对象投影到 2D 图像上
- 将 2D 纹理映射到 3D 对象上
- 将 3D 对象的阴影投影到其他 3D 对象上
- …



光栅化流程



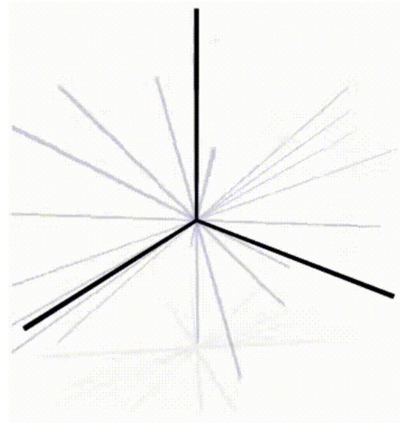
y
z
x
Transform/position objects in the world
(w, h)
(0, 0)
Project objects onto the screen
Sample triangle coverage
Interpolate triangle attributes at covered samples
Sample texture maps / evaluate shaders
Combine samples into final image (depth, alpha, …)

光栅化流程

(w, h)
(0, 0)
Transform/position objects in the world
TODAY!
Project objects onto the screen
Sample triangle coverage
Interpolate triangle attributes at covered samples
Sample texture maps / evaluate shaders
Combine samples into final image (depth, alpha, …)

线性映射回顾

- Q: 一个映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性的意味着什么?
- **几何上**：它将直线映射为直线，并保持原点



- **代数上**：保持向量空间运算（加法和缩放）

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x}, \mathbf{y} \arrow[r, "\text{add first}"] \arrow[d, "\text{apply f first}"] & \mathbf{x}+\mathbf{y} \arrow[d, "\text{then apply f}"] \\
f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \arrow[r, "\text{then add}"] & \begin{array}{c} f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}) \\ = \\ f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \end{array}
\end{tikzcd}
$$

为什么关注线性变换?

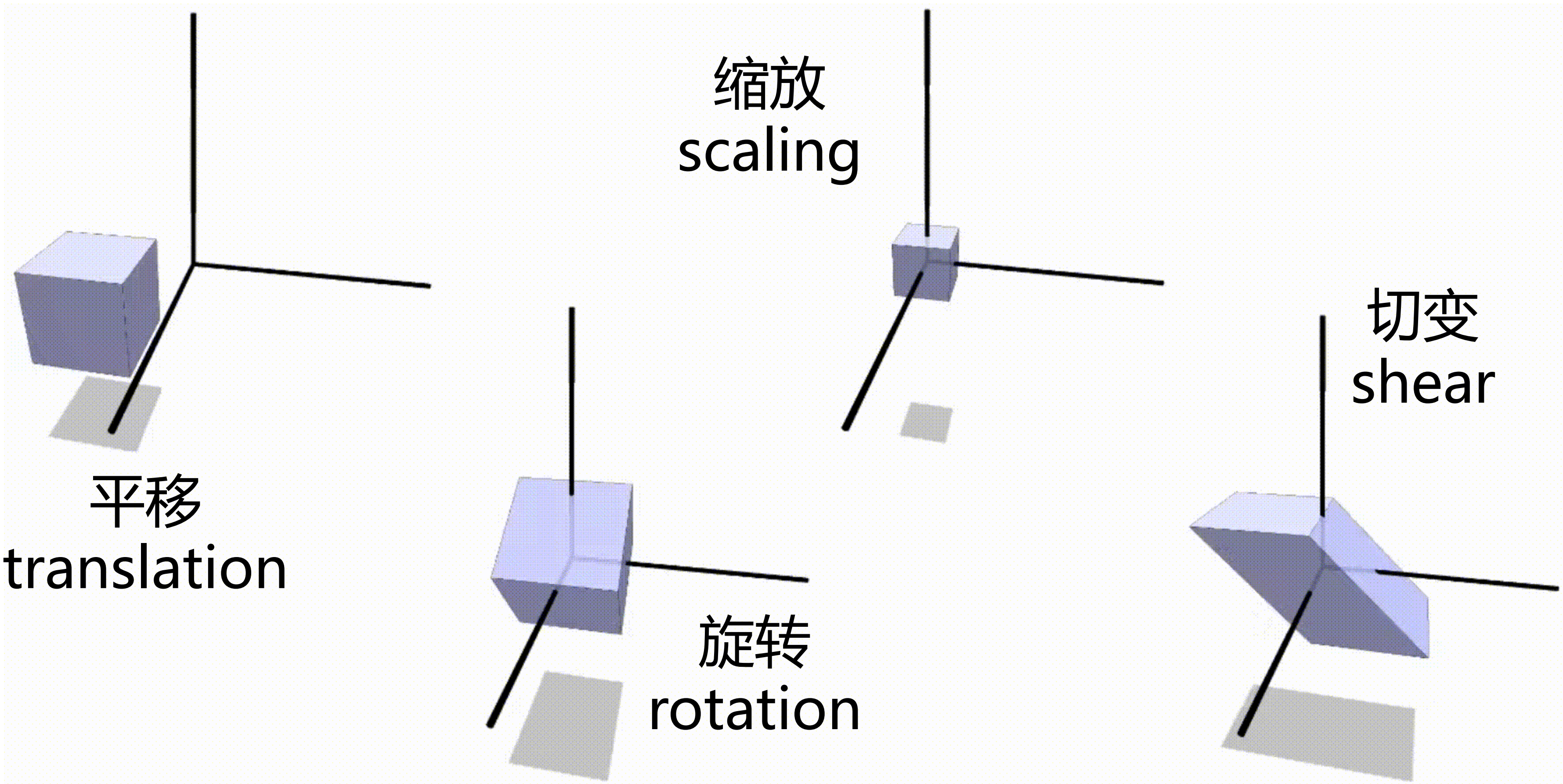
- □廉价/高效的操作
- □通常很容易求解（线性系统）
- **□线性变换的组合还是线性的**
  - 多个矩阵的乘积是一个矩阵
  - 给出变换的统一表示 (uniform representation)
  - 简化图形算法和相关系统（例如 GPU 和 API）

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{rotation} \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{scale} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}_{rotation} \cdots = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}}_{composite\ transformation}$$

我们有哪些线性变换?

变换的种类

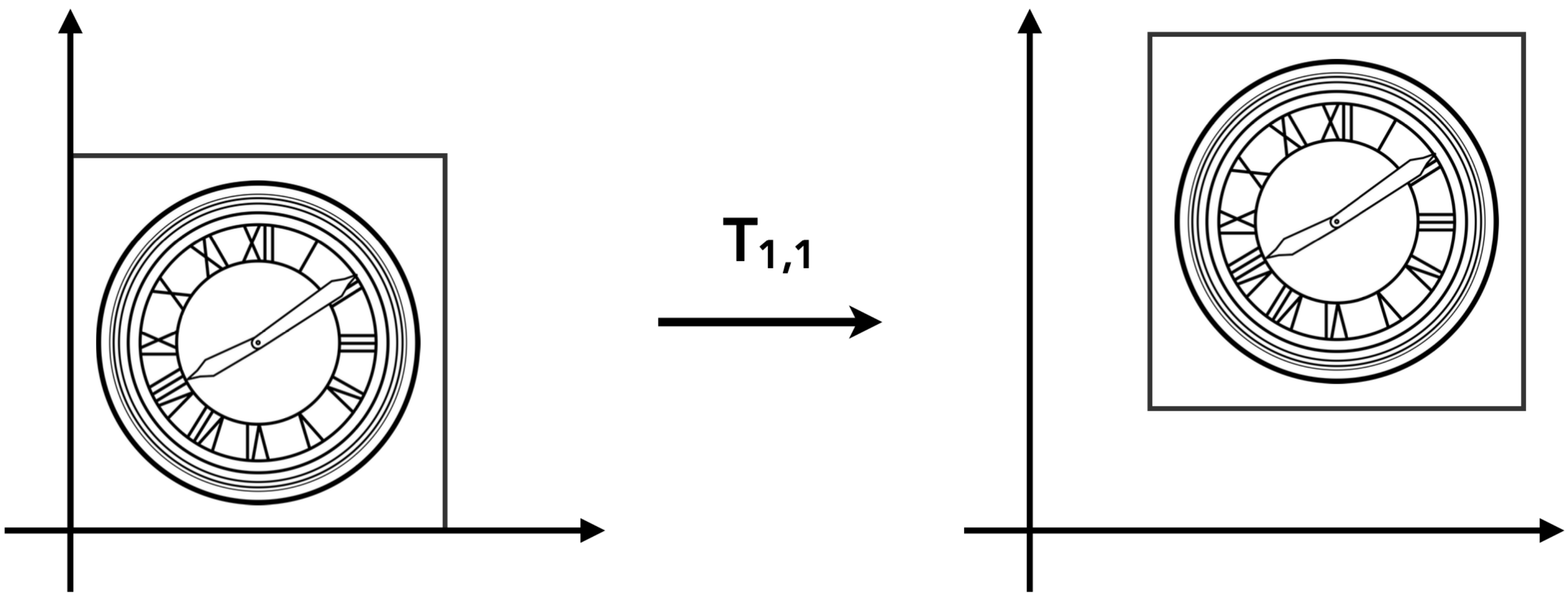
- 你能说出下列每种变换的名字吗?



- Q: 你是怎么知道的? (在没有看到具体公式的情况下)

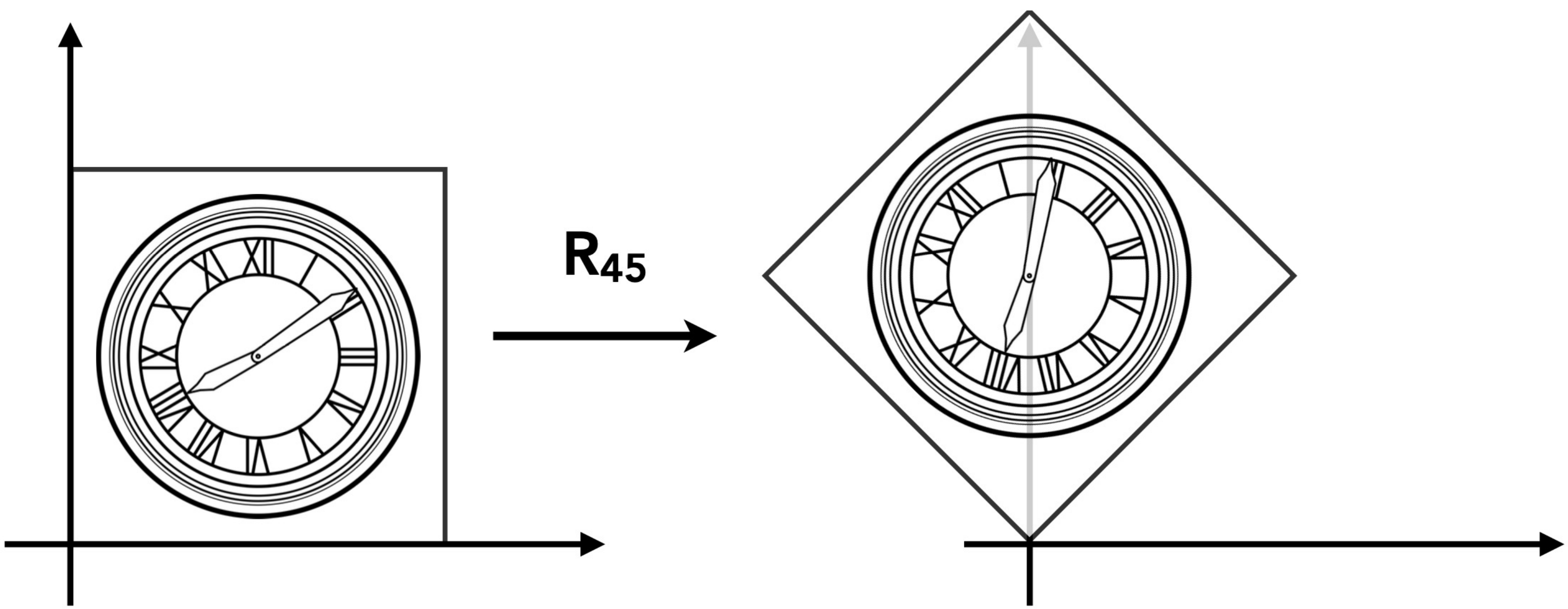
2D 视角的变换

□平移 Translation



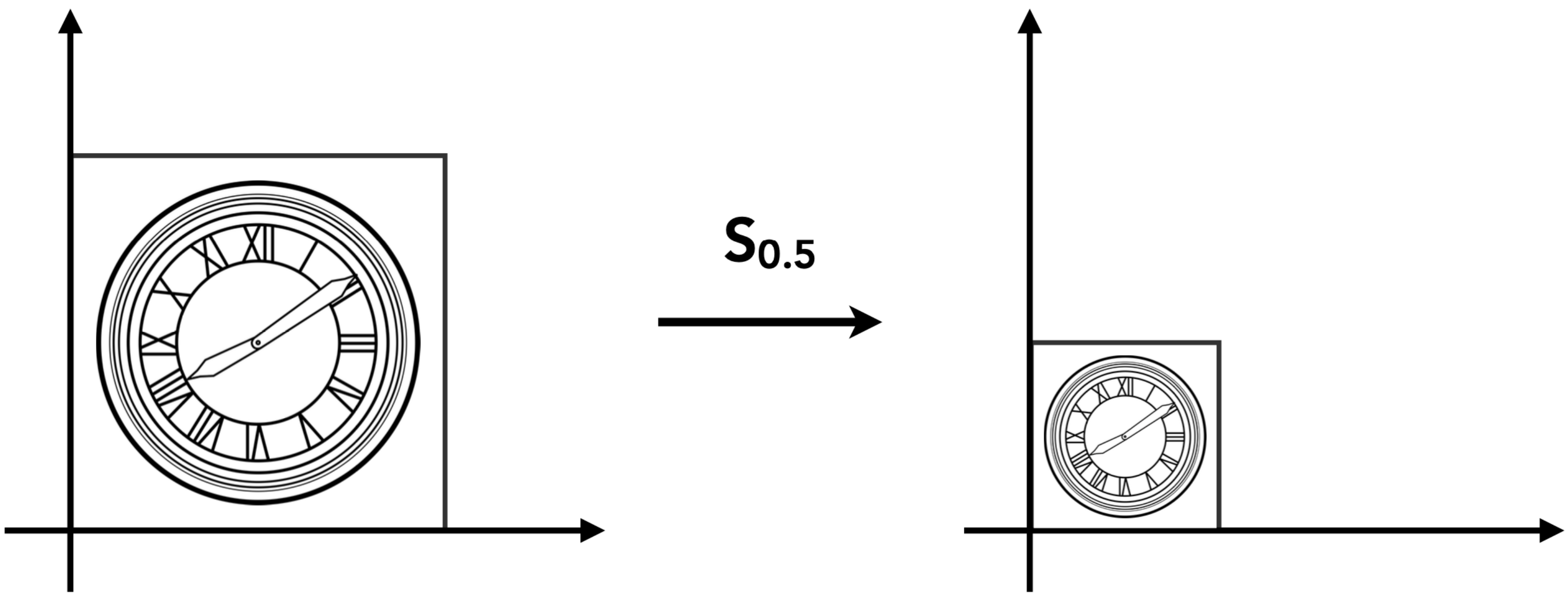
2D 视角的变换

□旋转 Rotation



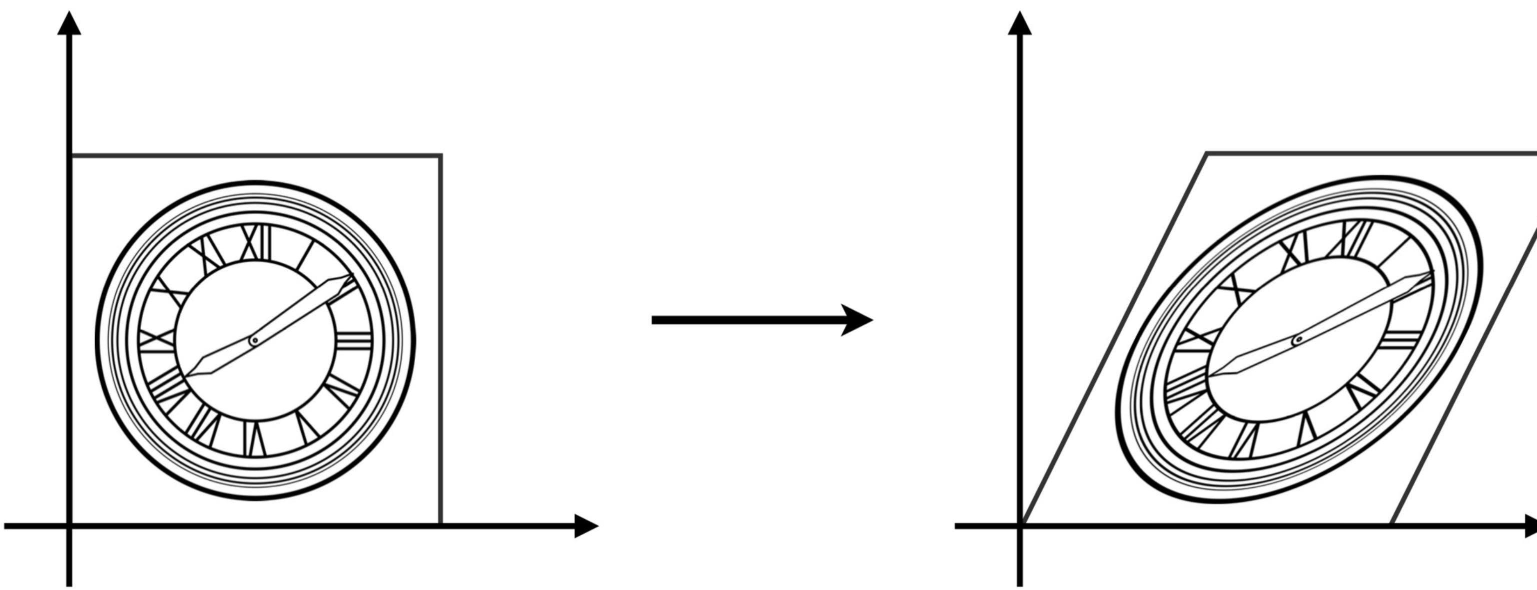
2D 视角的变换

□缩放 Scaling



2D 视角的变换

□切变 Shear



变换的不变性 invariants

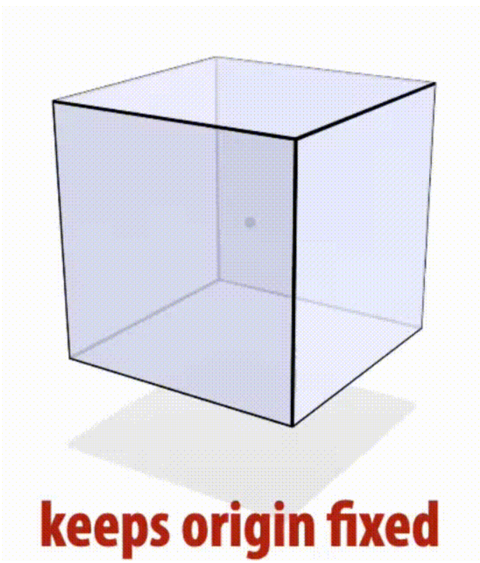
- 一个变换是由它保留的不变性决定的

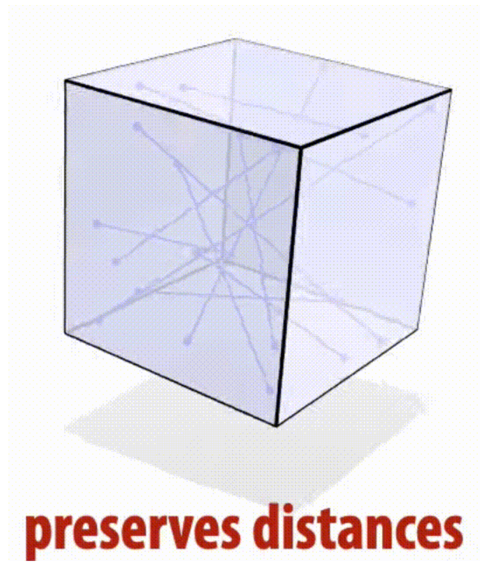
transformation	invariants	algebraic description
linear	*straight lines / origin*	$f(a\mathbf{x}+\mathbf{y}) = af(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, $f(0) = 0$
translation	*differences between pairs of points*	$f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}-\mathbf{y}$
scaling	*lines through the origin / direction of vectors*	$f(\mathbf{x})/\lvert f(\mathbf{x})\rvert = \mathbf{x}/\lvert\mathbf{x}\rvert$
rotation	*origin / distances between points / orientation*	$\lvert f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})\rvert = \lvert\mathbf{x}-\mathbf{y}\rvert$, $\det(f) > 0$
…	…	…

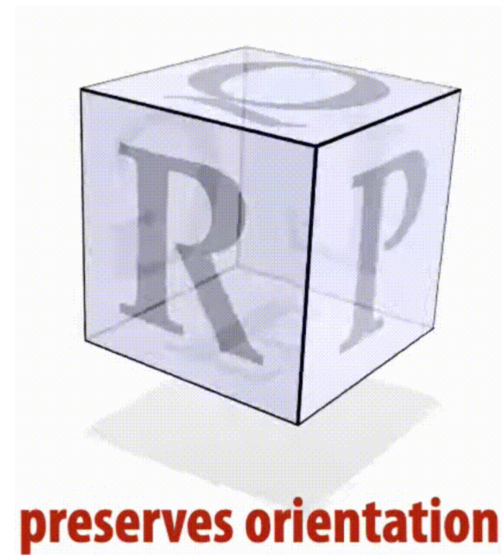
- 这是本质上你的大脑能认出上述变换的原因

旋转 Rotation

- 旋转由三个基本特性定义：





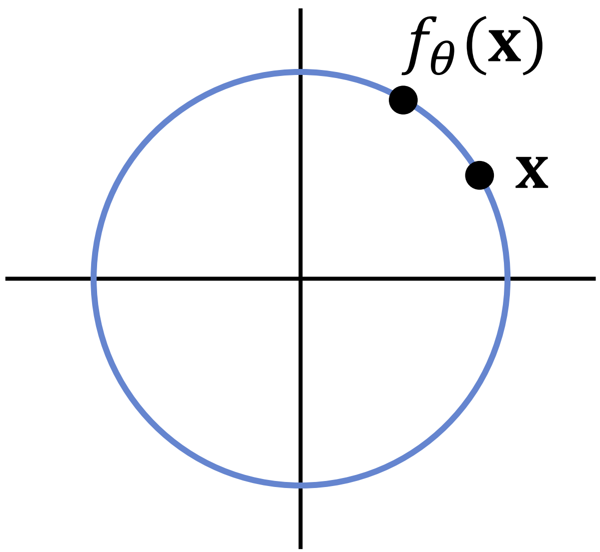


- 前两个性质已表明旋转是线性 (linear) 的

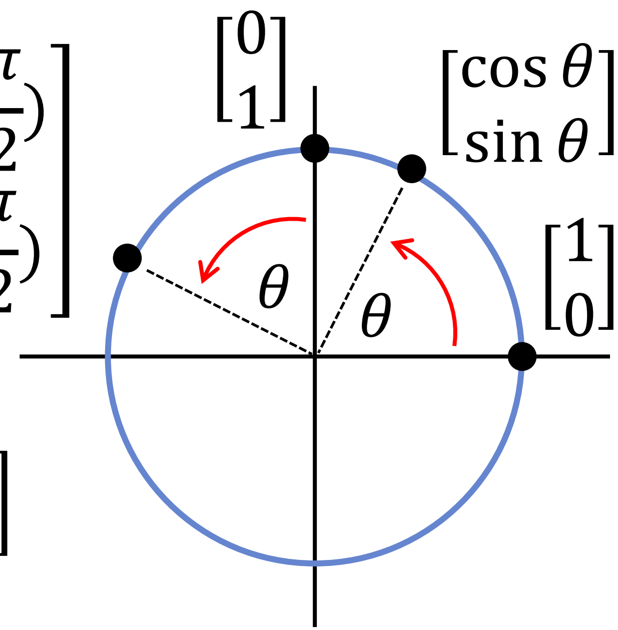
下节课将讨论更多关于旋转的内容

2D 旋转 – 矩阵表示

- 旋转保留了长度和原点，因此，角度为 θ 的 2D 旋转将点 $\mathbf{x}$ 映射到点 $f_\theta(\mathbf{x})$，且 $f_\theta(\mathbf{x})$ 处在半径为 $|\mathbf{x}|$ 的圆上



$$\begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

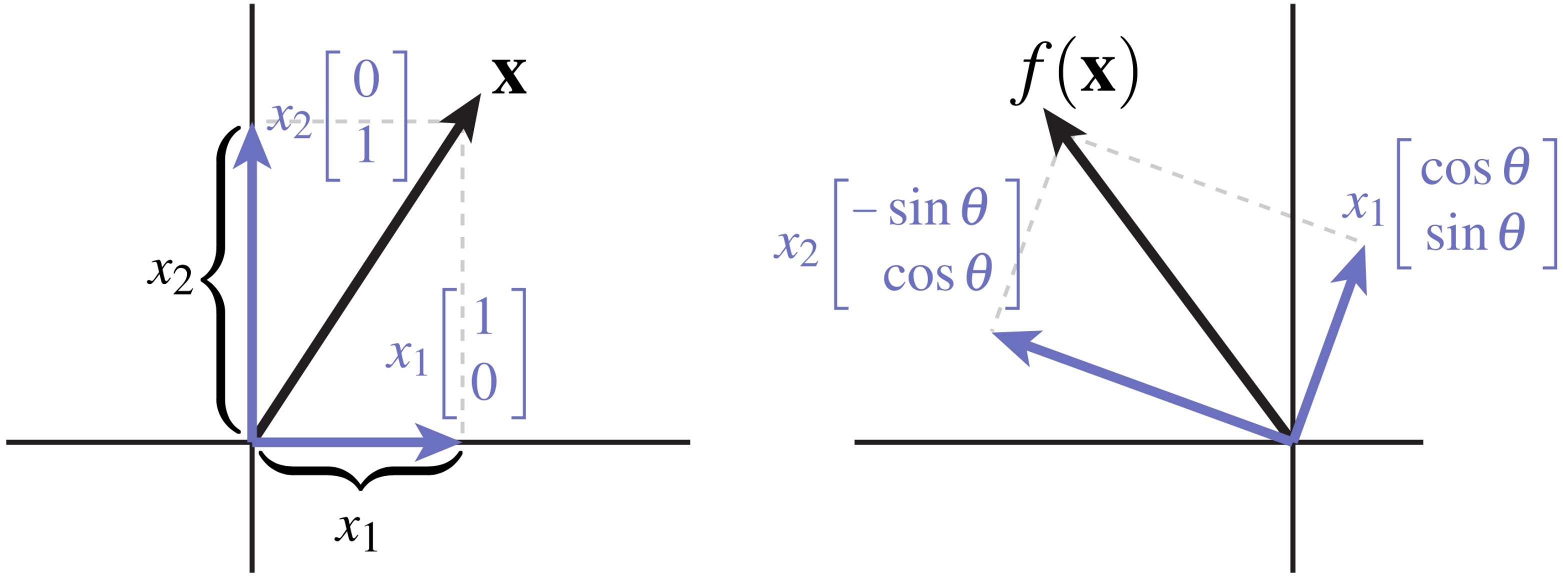


circle x
circle y

- 如果我们逆时针旋转 θ，$\mathbf{x} = (1, 0)$ 将映射到哪个点?
- $x = (0, 1)$ 呢?

更一般的向量 $x = (x_1, x_2)$ 呢?

2D 旋转 – 矩阵表示



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad f(\mathbf{x}) = x_1 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

□我们要如何用矩阵表示一个 2D 旋转函数 $f_\theta(x)$?

即用矩阵表示
一个线性映射

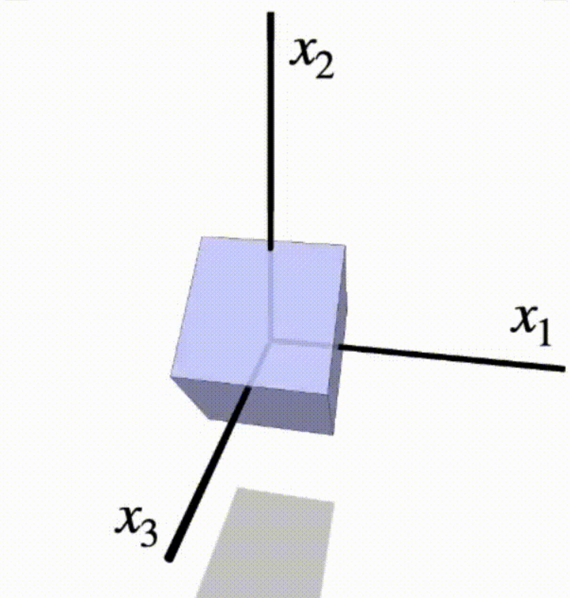
$$f_\theta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin(\theta) \\ \sin\theta & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

3D 旋转

- Q：在 3D 中，我们如何沿着 x_3 坐标轴旋转?
- A：对 x_1 和 x_2 应用相同的转换，保持 x_3 不变

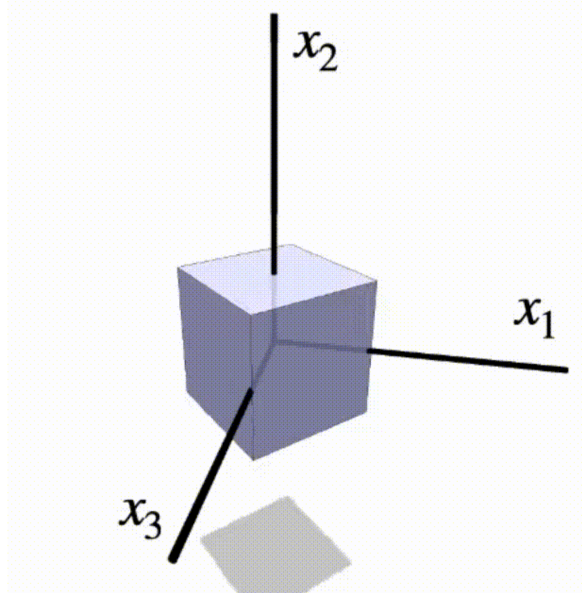
rotate around x_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin\theta & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



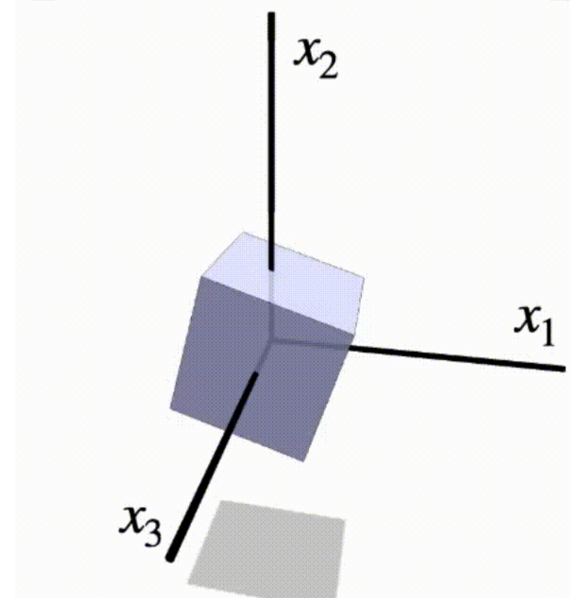
rotate around x_2

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



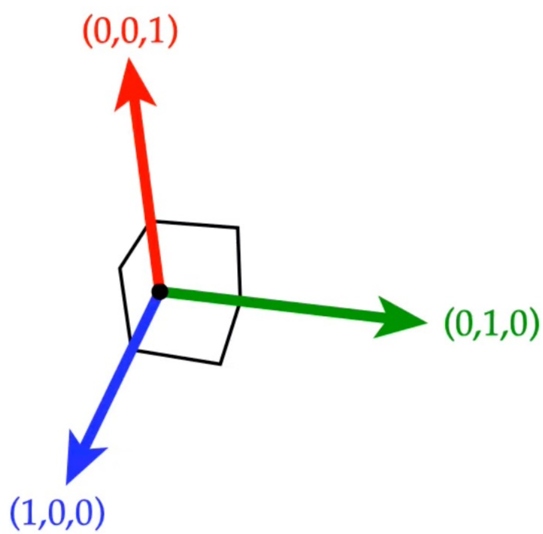
rotate around x_3

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin\theta & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



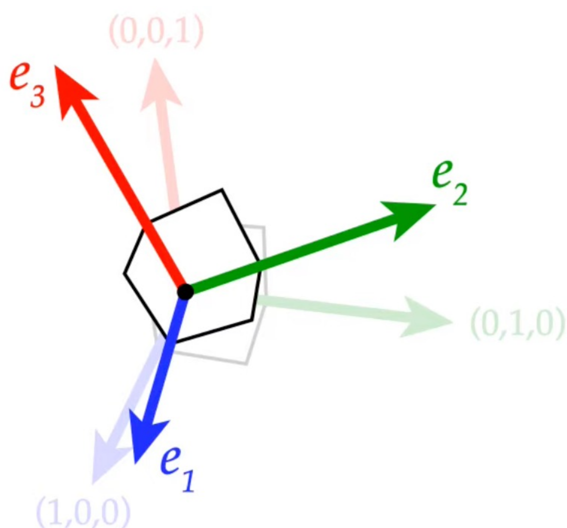
旋转矩阵的转置等于其逆矩阵

- 旋转将标准基 (standard basis) 映射到另一个正交基 (orthonormal basis) e_1, e_2, e_3



旋转矩阵的转置等于其逆矩阵

- 旋转将标准基 (standard basis) 映射到另一个正交基 (orthonormal basis) e_1, e_2, e_3

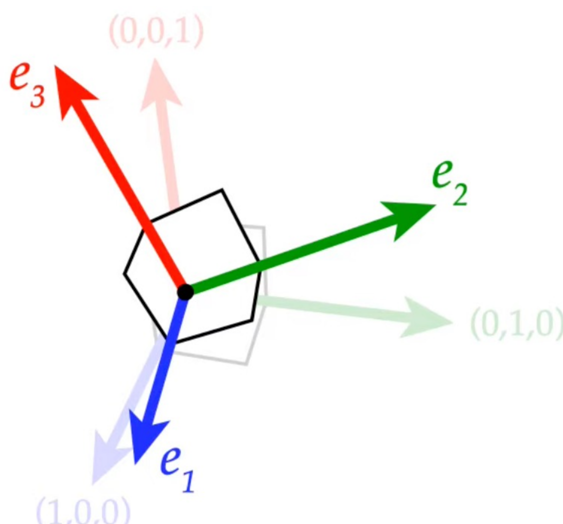


$$
\underbrace{\begin{bmatrix} — & e_1^T & — \\ — & e_2^T & — \\ — & e_3^T & — \end{bmatrix}}_{R^{\mathsf{T}}}
\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{R}
$$

$$
= \begin{bmatrix} e_1^T e_1 & e_1^T e_2 & e_1^T e_3 \\ e_2^T e_1 & e_2^T e_2 & e_2^T e_3 \\ e_3^T e_1 & e_3^T e_2 & e_3^T e_3 \end{bmatrix}
$$

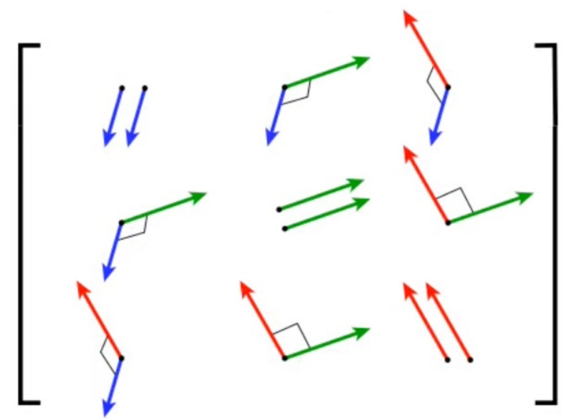
旋转矩阵的转置等于其逆矩阵

- 旋转将标准基 (standard basis) 映射到另一个正交基 (orthonormal basis) e_1, e_2, e_3



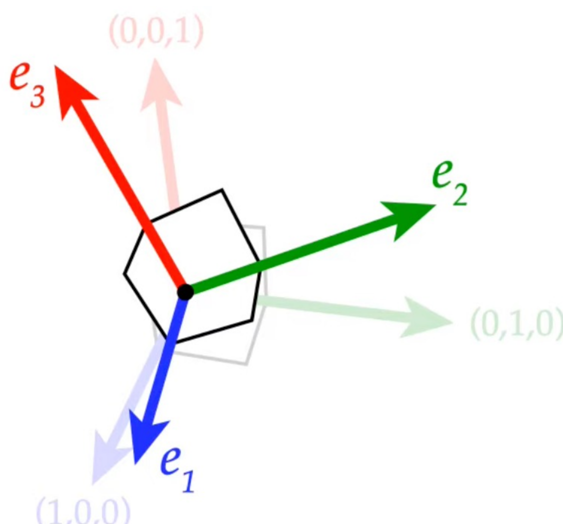
$$\begin{array}{cc} R^\top & R \\ \begin{bmatrix} — & e_1^T & — \\ — & e_2^T & — \\ — & e_3^T & — \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \end{array}$$

$=$



旋转矩阵的转置等于其逆矩阵

- 旋转将标准基 (standard basis) 映射到另一个正交基 (orthonormal basis) e_1, e_2, e_3

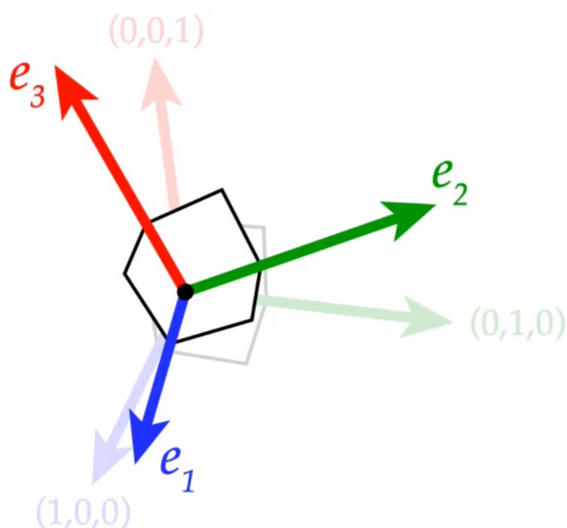


$$\overset{R^{\top}}{\begin{bmatrix} — & e_1^T & — \\ — & e_2^T & — \\ — & e_3^T & — \end{bmatrix}} \overset{R}{\begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

旋转矩阵的转置等于其逆矩阵

- 旋转将标准基 (standard basis) 映射到另一个正交基 (orthonormal basis) e_1, e_2, e_3



$$\underbrace{\begin{bmatrix} — & e_1^T & — \\ — & e_2^T & — \\ — & e_3^T & — \end{bmatrix}}_{R^{\mathsf{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{R}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

- 因此，$R^T R = I$，或者 $R^T = R^{-1}$

反射 Reflection

□Q：是否所有满足 $Q^TQ = I$ 的正交矩阵均描述了一个旋转？

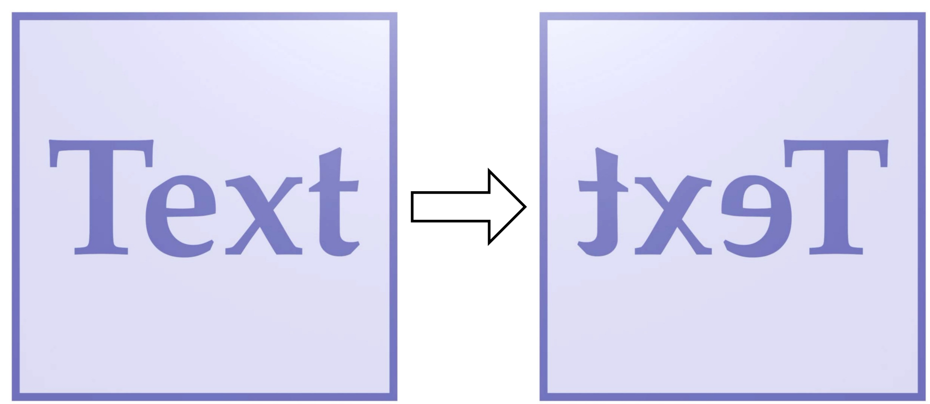
□旋转必须保持**原点 origin**、**距离 distance** 和**方位 orientation**

□考虑如下的矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q^{\mathsf{T}}Q = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

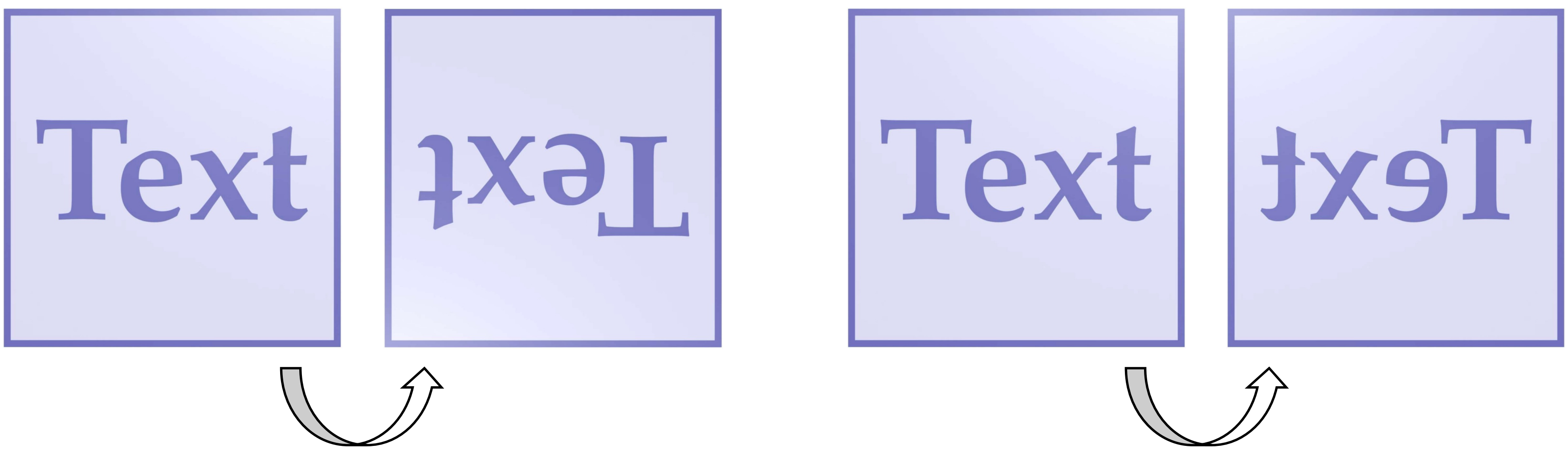
□Q：这个矩阵是否描述了一个旋转？如果不是，哪个量未能保持？

□A：No！它代表了一个沿着 y 轴的反射，因此未能保持方位



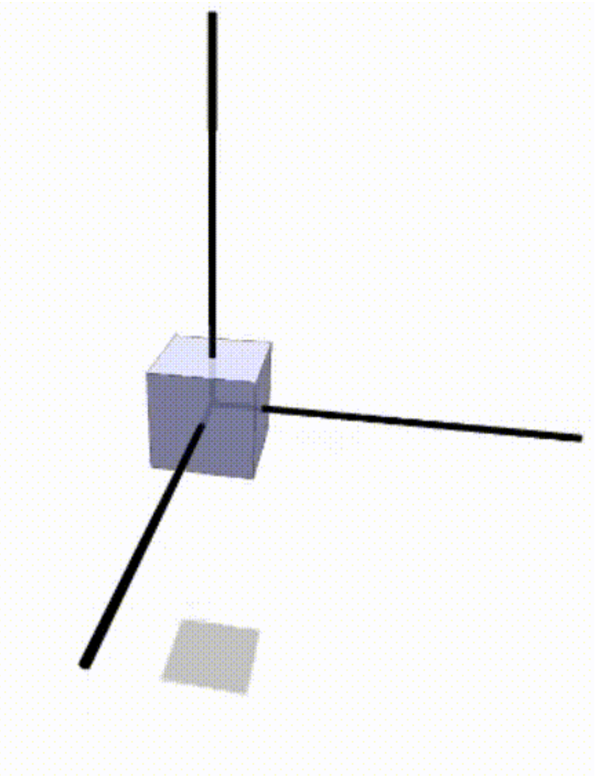
正交变换 Orthogonal transformations

- 保持**距离 distance** 和**原点 origin** 的变换称为正交变换
- 用矩阵 $Q^TQ = I$ 表示
  - Rotations additionally <u>preserve</u> orientation: $\det(Q) > 0$
  - Reflections <u>reverse</u> orientation: $\det(Q) < 0$



rotation　　　　reflection

缩放 Scaling



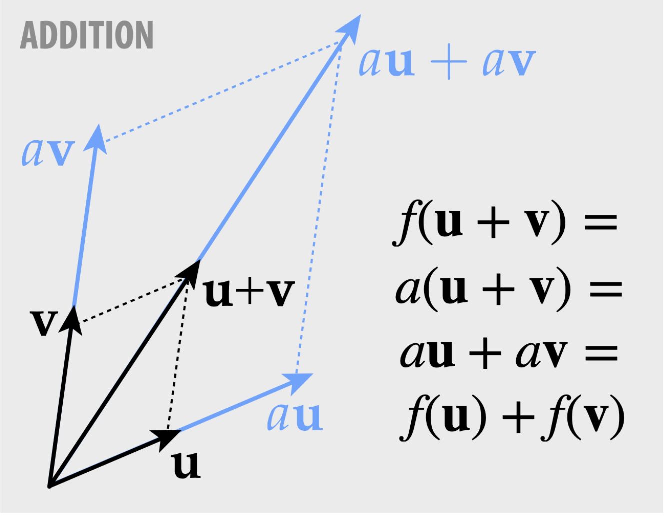
- 每个向量 $\mathbf{u}$ 映射到标量倍数

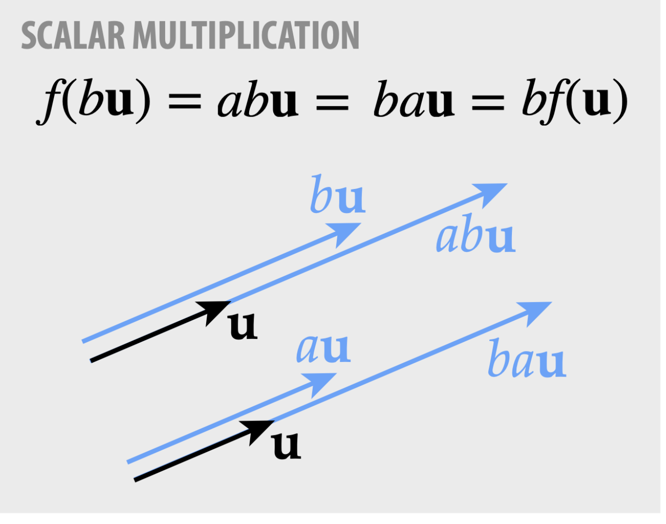
$$f(\mathbf{u}) = a\mathbf{u}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- 保持了所有向量的方向 direction*

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{a\mathbf{u}}{|a\mathbf{u}|} \quad \text{*假定 } a \neq 0, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

- Q：缩放是线性变换吗?
- A：是的





缩放 – 矩阵表示

- 假设我们想以倍数 a 缩放向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$，应该如何用矩阵表示此操作?
- 只需构建一个对角矩阵 D，其对角线上的元素为 a

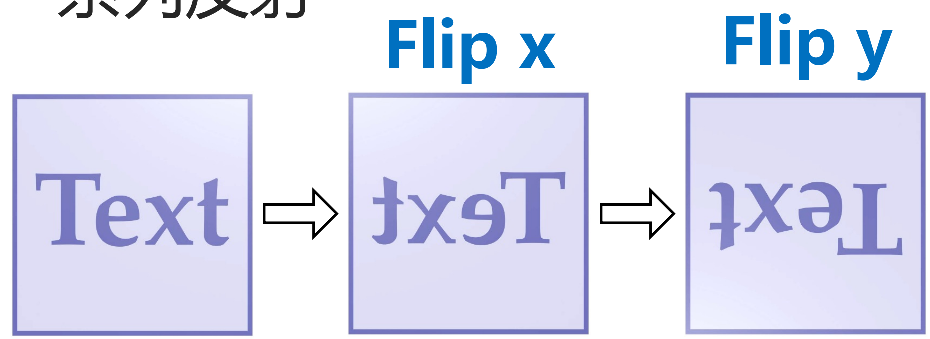
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} au_1 \\ au_2 \\ au_3 \end{bmatrix}}_{a\mathbf{u}}$$

Q: What happens if a is negative?

负缩放 Negative scaling

- 若 $a=-1$，可以把缩放当成是一系列反射
- 例如，在 2D 中

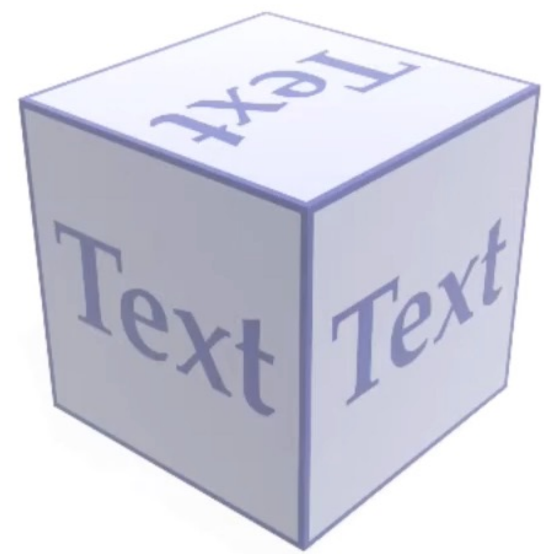
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



- 每次反射均颠倒方位 orientation，因此最终方位保持
- 3D 呢?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



- 我们反射了三次，因此方向颠倒了！

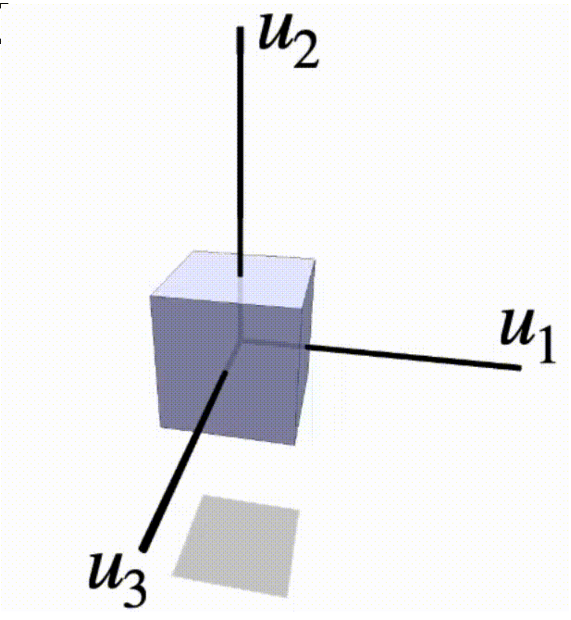
非均匀缩放（轴对齐的）

- 我们还可以按不同的倍数缩放每个轴

$$f(u_1, u_2, u_3) = (au_1, bu_2, cu_3), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

- Q: 对应的矩阵表示是什么?
- A: 只需把 a, b, c 放到矩阵的对角线上

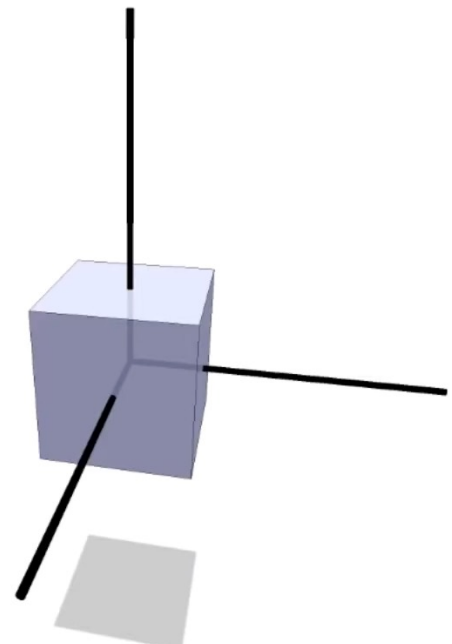
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_1 \\ bu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}$$



如果我们想沿着其他非标准轴缩放呢?

非均匀缩放

- 我们可以
  - 旋转到新的坐标轴 (R)
  - 应用对角缩放 diagonal scaling (D)
  - 旋转回到原来的坐标轴* (R^T)



$$f(\mathbf{x}) = R^{\mathsf{T}} D R \mathbf{x}$$

- 注意到整体的变换可以用一个对称矩阵 (symmetric matrix) 表示

$$A := R^{\mathsf{T}} D R$$

Q：是否所有对称矩阵都表示基于某些坐标轴的非均匀缩放?

*回忆一下对于旋转矩阵 R，我们有 $R^{-1} = R^T$

谱定理 Spectral Theorem

- A: 是的！**谱定理 (Spectral theorem)** 表明，对于一个对称矩阵 $A = A^T$，其有
  - 正交特征向量 (orthonormal eigenvectors) $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$
  - 实特征值 (real eigenvalues) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\boxed{Ae_i = \lambda_i e_i}$$

- 可将此关系写为 $AR = RD$，其中

$$R = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- 亦即，$A = RDR^T$
- 因此，每个对称矩阵都表示沿着**某组**正交轴的非均匀缩放
- 如果是正定的 (positive definite)，即$\lambda_i > 0$，那么缩放是正的 (i.e., non-negative scaling)

https://en.wikipedia.org/wiki/Definite_matrix

切变 Shear

- 切变将沿着方向 $\mathbf{u}$ 移动 $\mathbf{x}$，移动的大小由 $\mathbf{x}$ 沿着固定向量 $\mathbf{v}$ 的距离决定：

$$f_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$$

点积计算 $\mathbf{x}$ 沿着 $\mathbf{v}$ 的距离

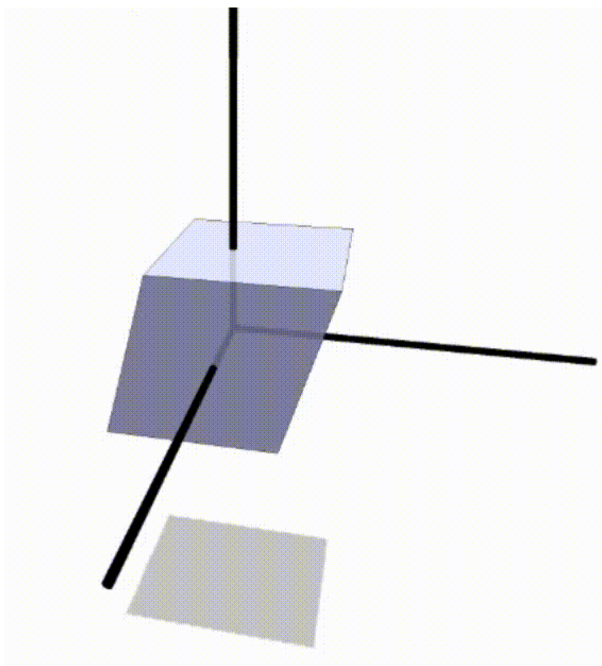
- Q：此变换是否线性?
- A：Yes，可用如下矩阵表示

$$A_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = I + \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$$

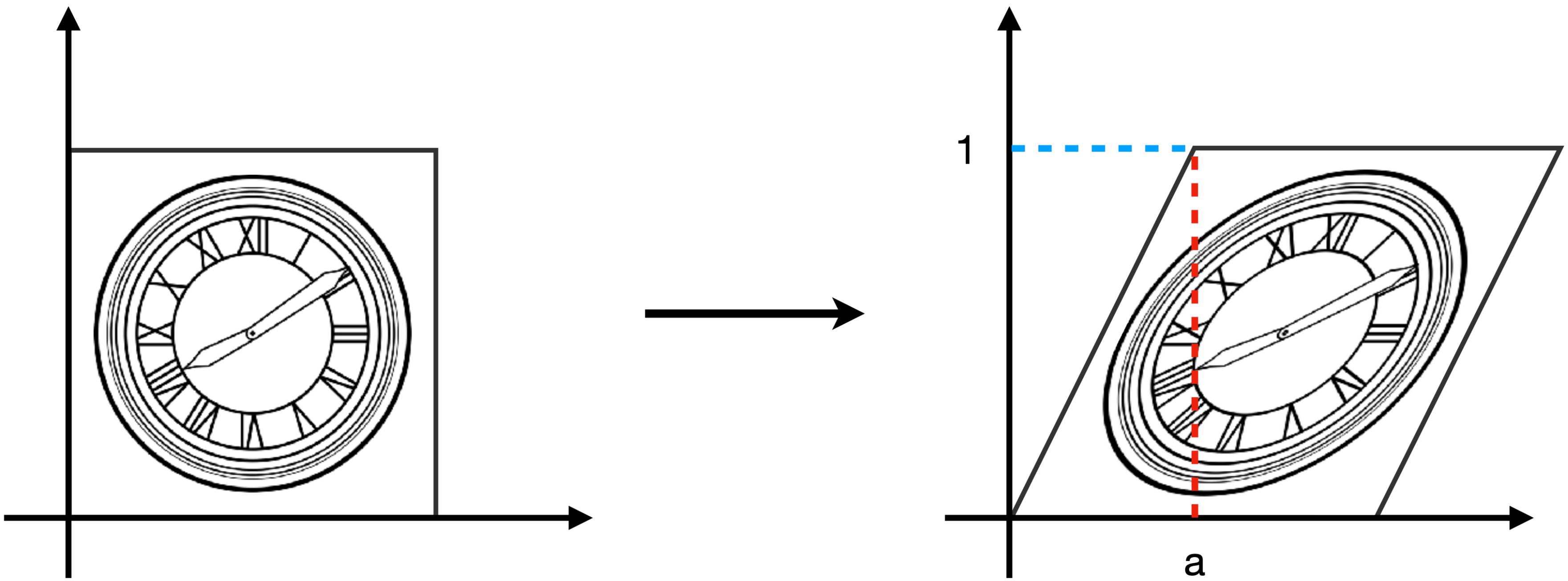
- 例子

$$\mathbf{u} = (\cos(t), 0, 0)$$
$$\mathbf{v} = (0, 1, 0)$$

$$A_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



切变 Shear – 2D



Hints:

Horizontal shift is 0 at y=0

Horizontal shift is a at y=1

Vertical shift is always 0

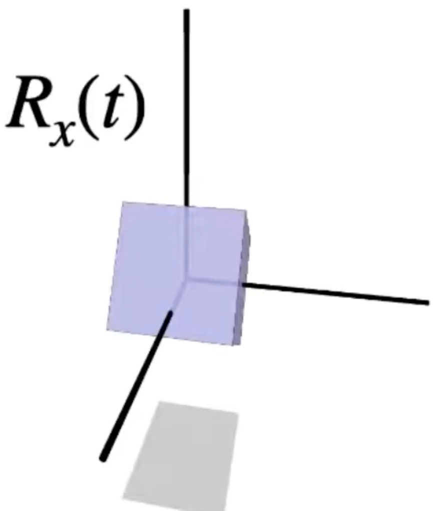
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$f_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = [1, 0] \\ \mathbf{v} = [0, a] \end{cases}$$

复合变换 Composite Transformations

- 根据这些基本变换 (旋转、反射、缩放、切变...)，我们现在可以通过**矩阵乘法**进行复合变换



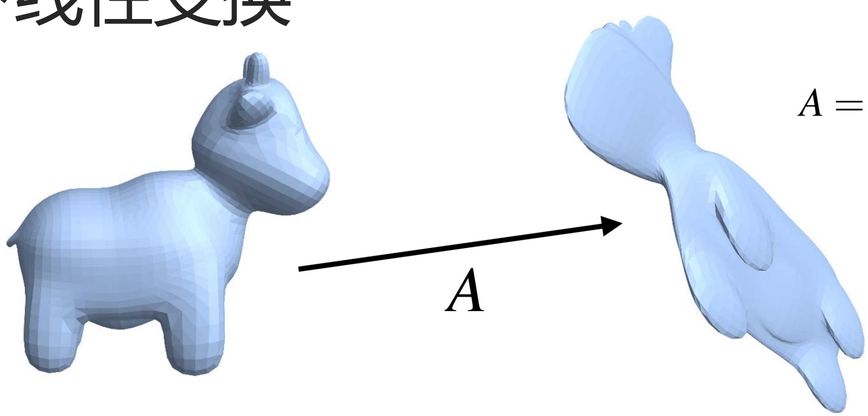
The last matrix gets applied first!

How do we decompose a linear transformation into pieces?

(rotations, reflections, scaling, ...)

线性变换的分解

- 一般来说，没有唯一的方法可以将给定的线性变换分解成基本变换的组合！
- 然而，存在很多有用的分解
  - 奇异值分解 (singular value decomposition), 适合信号处理
  - LU 分解 (LU factorization), 适合求解线性系统
  - 极性分解 (polar decomposition), 适合空间变换
  - ...
- 考虑如下线性变换



$$A = \begin{bmatrix} .34 & -.11 & -.89 \\ -.65 & .52 & -.70 \\ .25 & .23 & -.69 \end{bmatrix}$$

极性和奇异值分解

#Both Q and V are orthogonal, so is U

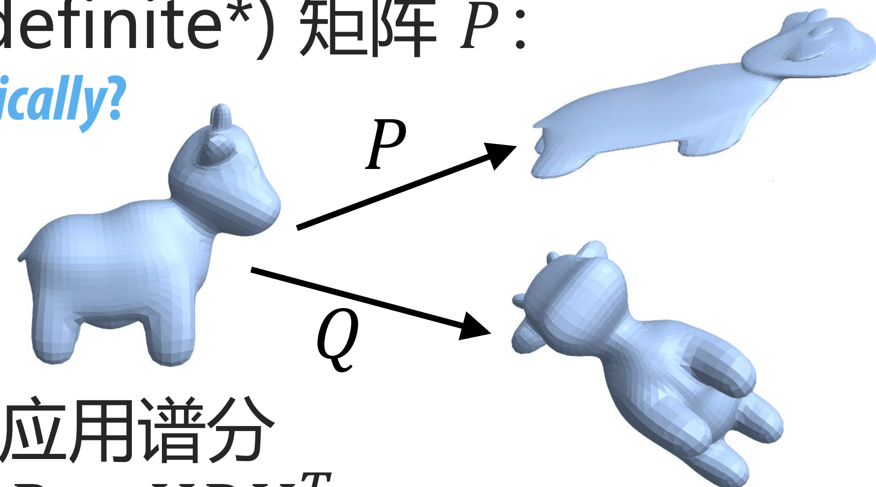
- 极性分解将任何矩阵 A 分解为正交 (orthogonal) 矩阵 Q 和对称半正定 (positive-semidefinite*) 矩阵 P:

Q: What do each of the parts mean *geometrically*?

rotation/reflection

nonnegative nonuniform scaling

$$A = QP$$



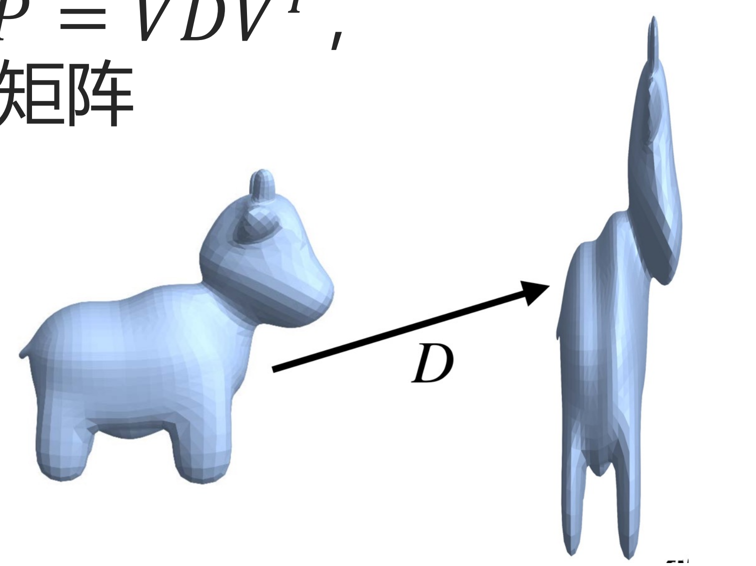
- 由于 P 是对称的，可以进一步应用谱分解 (spectral decomposition) $P = VDV^T$，其中 V 为正交矩阵#，D 为对角矩阵

$$A = \underbrace{QV}_{U}DV^{\mathsf{T}} = UDV^{\mathsf{T}}$$

rotation ③

axis-aligned ② scaling

rotation ①

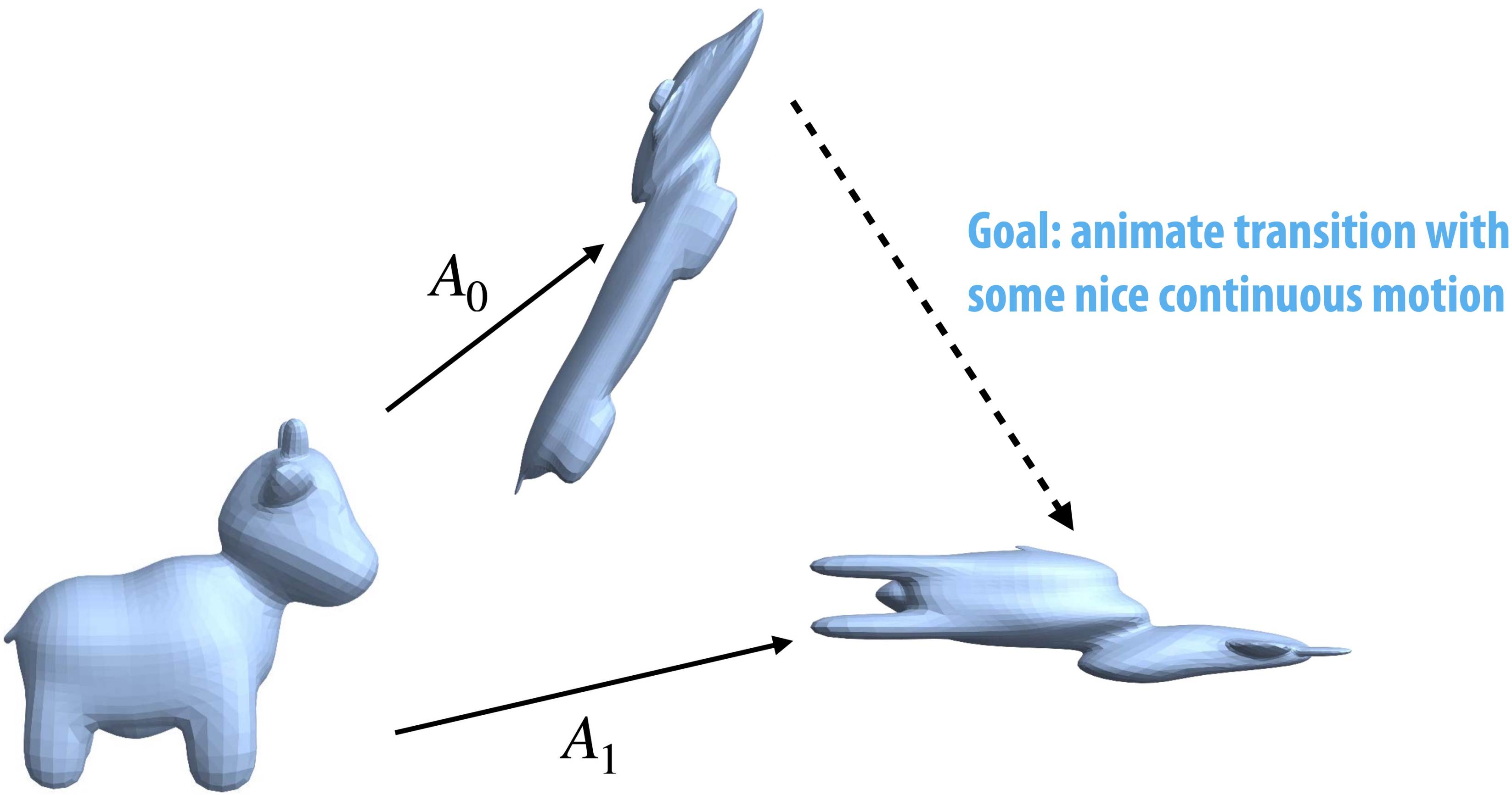


- $A = UDV^T$ 也称奇异值分解

* https://en.wikipedia.org/wiki/Positive_semidefinite

插值变换 Interpolating Transformations

- 这些分解对图形变换有什么用?
- 比如在某个模型的两个线性变换 A_0, A_1 之间进行插值



插值变换 – 线性的

- 一个想法是：将两个矩阵进行线性组合，按当前时间加权 $t \in [0, 1]$

$$A(t) = (1 - t)A_0 + tA_1$$

正确命中了起点和终点，但中间的变换看起来很糟糕...

插值变换 – 极性的

□更好的想法是：单独插值极性分解的不同分量

$$A_0 = Q_0 P_0, \quad A_1 = Q_1 P_1$$

scaling

$$P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

rotation

$$\widetilde{Q}(t) = (1-t)Q_0 + tQ_1$$

$$\widetilde{Q}(t) = Q(t)X(t)$$

final interpolation

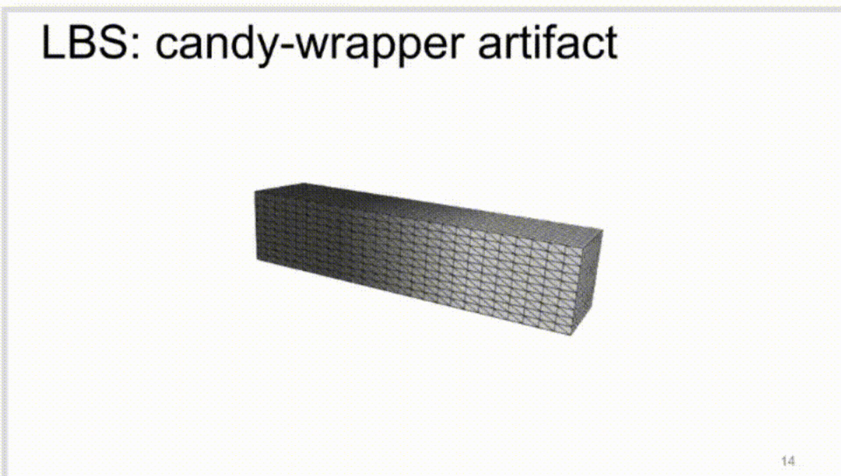
$$A(t) = Q(t)P(t)$$

looks better...

See: Shoemake & Duff, “Matrix Animation and Polar Decomposition”

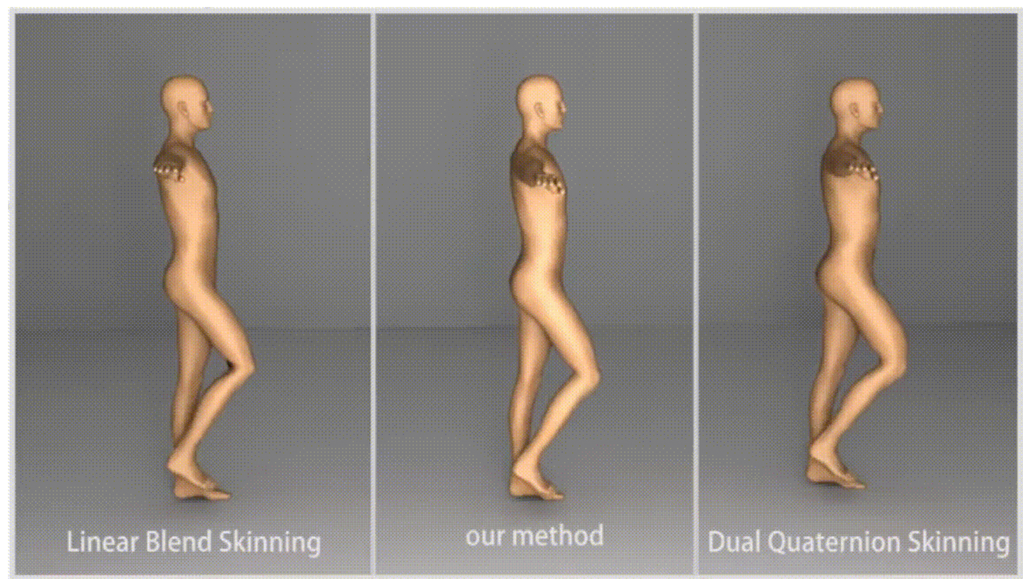
示例：线性混合蒙皮（Skinning）

- 朴素的线性插值在角色变换之间进行混合时也会导致伪影，即“糖果包装效应”
- 关于变换混合的替代方法有很多研究



Jacobson, Deng, Kavan, & Lewis (2014)
“Skinning: Real-time Shape Deformation”

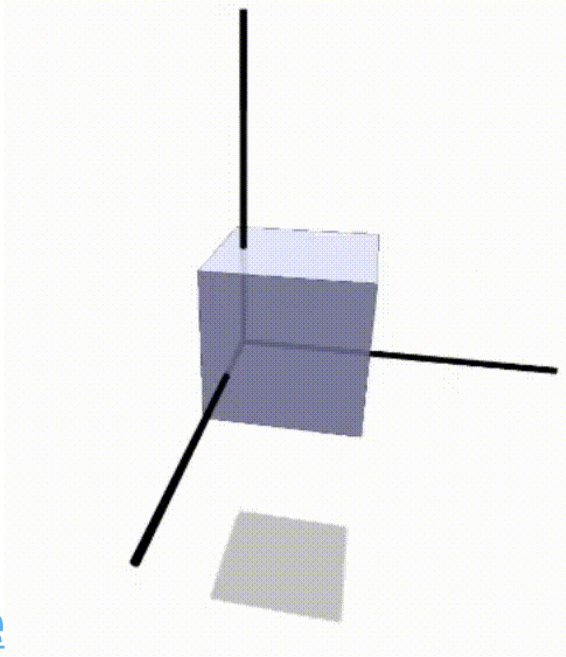
Rumman & Fratarcangeli (2015)
“Position-based Skinning for Soft Articulated Characters”



平移 Translations

- 到目前为止，我们忽略了一个基本的变换 – 平移
- 平移只是在给定点 $\mathbf{x}$ 上加一个偏移 $\mathbf{u}$

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}$$



- Q: 此变换是否线性?
- 让我们检查其是否符合定义

additivity

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{u}$$

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})+f_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}+2\mathbf{u}$$

homogene

$$f_{\mathbf{u}}(a\mathbf{x}) = a\mathbf{x}+\mathbf{u}$$

$$af_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}+a\mathbf{u}$$

A：No，平移是仿射，而不是线性的

变换的组成

□我们可以通过矩阵乘法来组成线性变换

$$A_3(A_2(A_1\mathbf{x})) = (A_3A_2A_1)\mathbf{x}$$

□组成平移很简单 – 仅需把向量加起来

$$f_{\mathbf{u}_3}(f_{\mathbf{u}_2}(f_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}))) = f_{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3}(\mathbf{x})$$

□如何混合平移以及其他线性变换（旋转、缩放、切变等）？

$$A_2(A_1\mathbf{x}+\mathbf{b}_1)+\mathbf{b}_2 = (A_2A_1)\mathbf{x}+(A_2\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)$$

□现在我们必须跟踪一个矩阵和一个向量

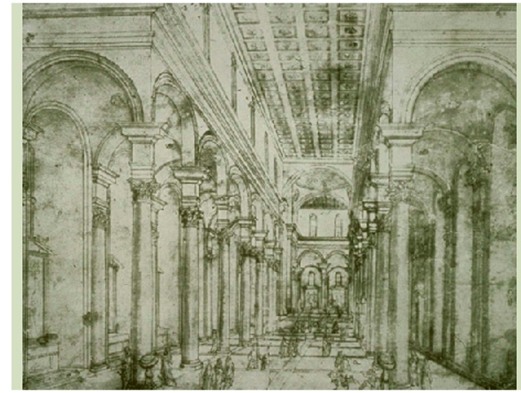
□此外，我们还将看到，这种编码不适用于其他重要情况，例如透视转换 (perspective transformations)

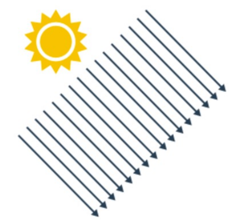
There must be a better way…

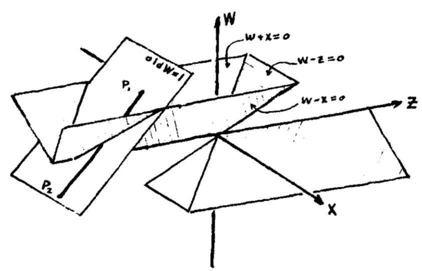
Strange idea: 如果我们进入四维，那么平移可能就是线性变换了…

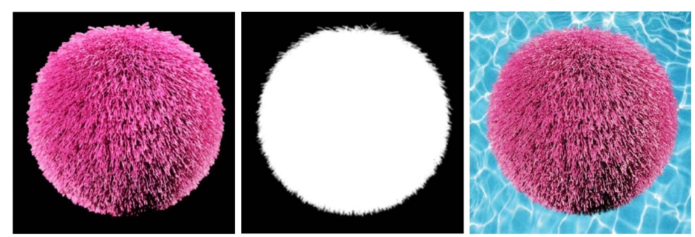
齐次坐标 Homogeneous Coordinates

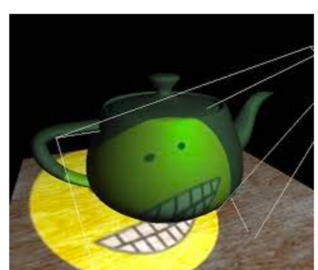
- 源于透视的相关研究
- 一种为直线指定坐标的自然方式 (由 Möbius 引入)
- 在图形学中有大量应用
  - 三维变换
  - 透视投影
  - 二次误差简化
  - 预乘 alpha
  - 阴影映射
  - 投影纹理映射
  - 离散共形几何
  - 双曲几何
  - 剪裁
  - 方向灯

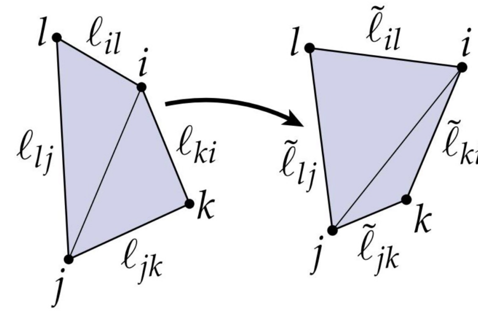






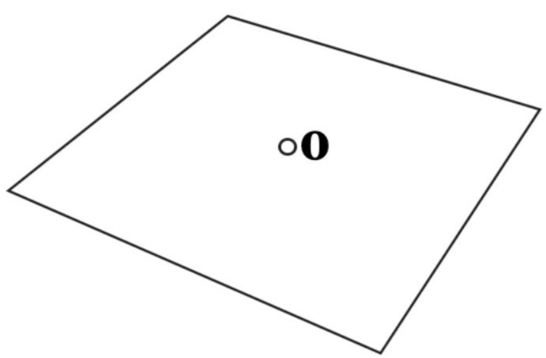






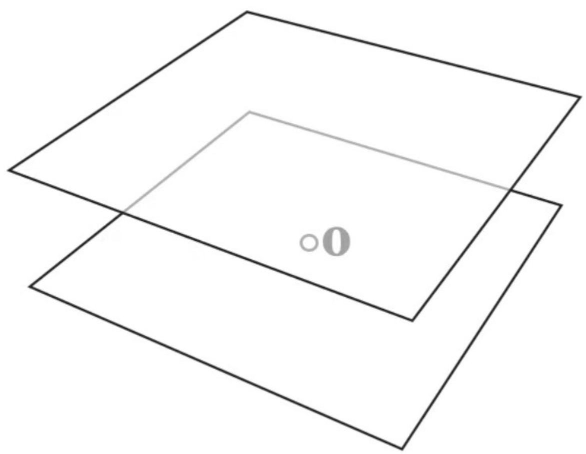
齐次坐标 – 基本理念

- 考虑任何不通过 3D 原点 o 的 2D 平面



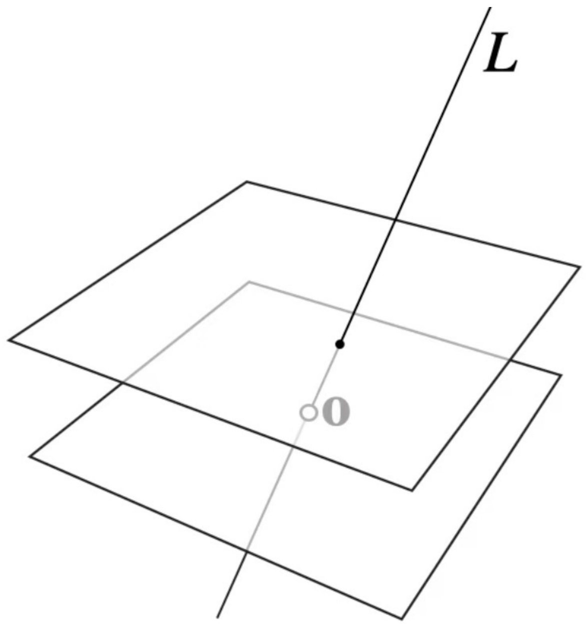
齐次坐标 – 基本理念

- 考虑任何不通过 3D 原点 o 的 2D 平面



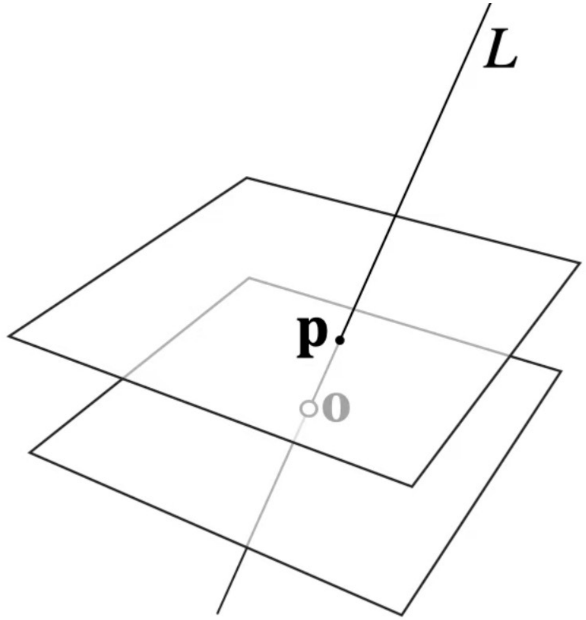
齐次坐标 – 基本理念

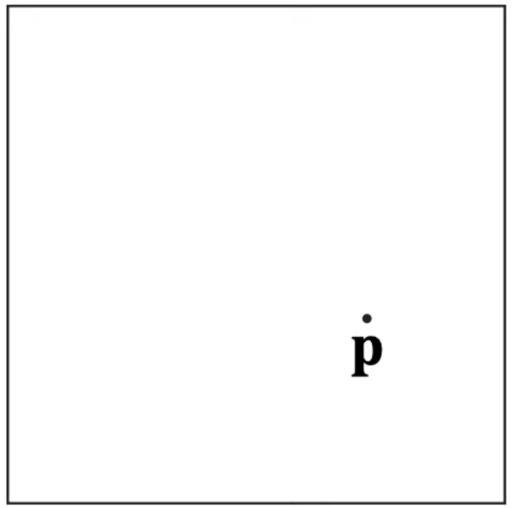
- 考虑任何不通过 3D 原点 o 的 2D 平面
- 通过 3D 原点的线将穿过 2D 平面中的一个点



齐次坐标 – 基本理念

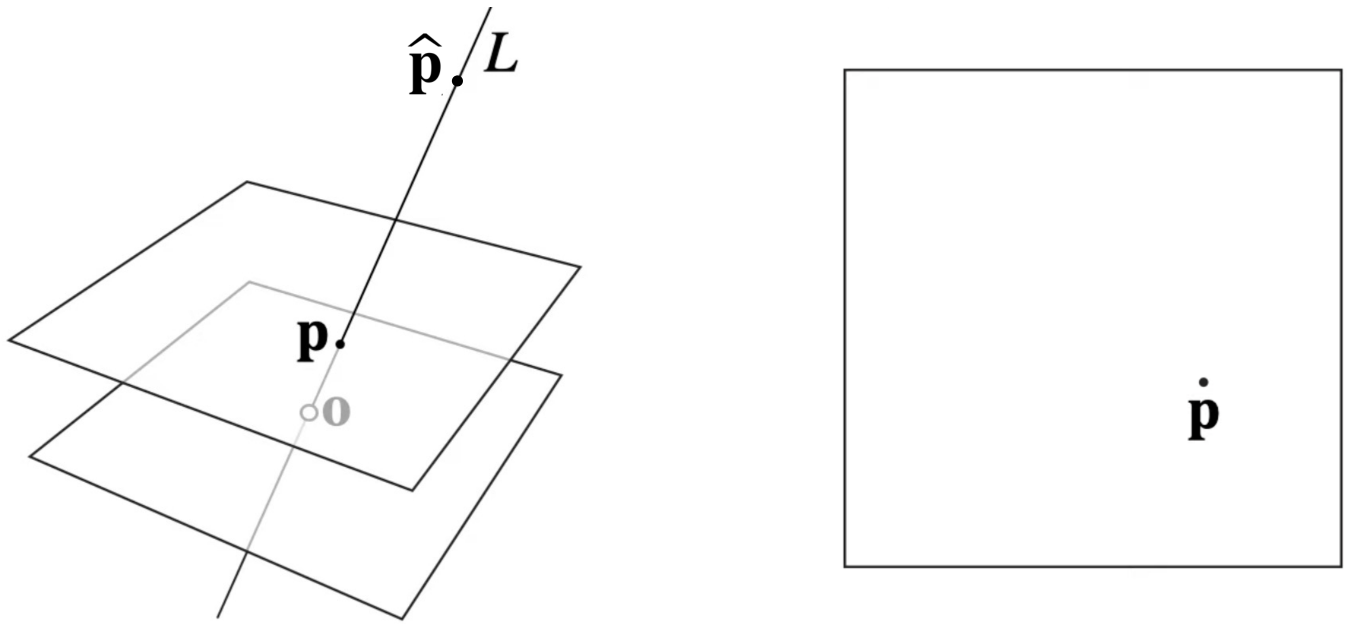
- 考虑任何不通过 3D 原点 o 的 2D 平面
- 通过 3D 原点的线将穿过 2D 平面中的一个点
  - 找到直线 L 穿过平面的点 p





齐次坐标 – 基本理念

- 考虑任何不通过 3D 原点 o 的 2D 平面
- 通过 3D 原点的线将穿过 2D 平面中的一个点
  - 找到直线 L 穿过平面的点 p

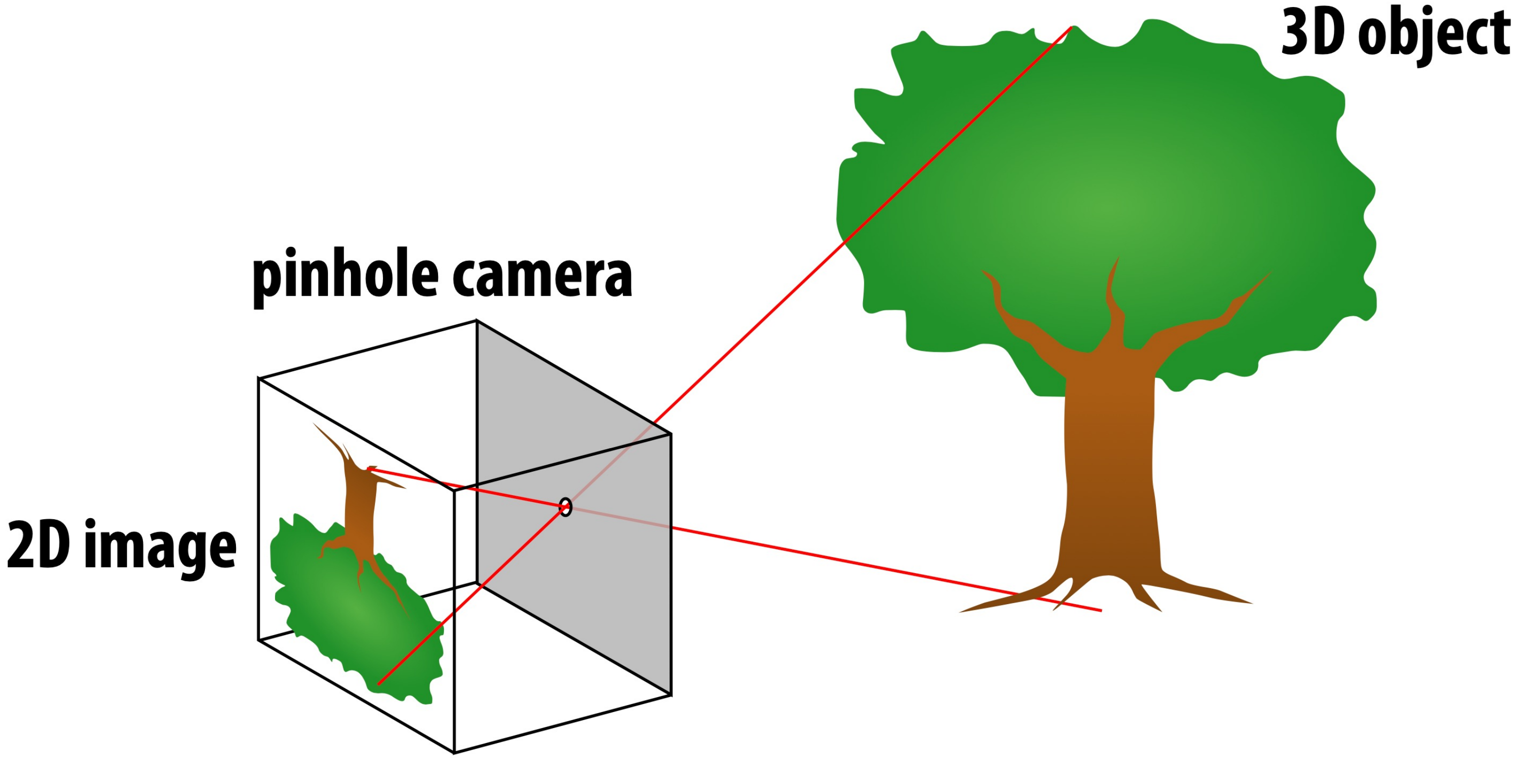


- L 上的任何点 $\hat{p}$ 都可以用来表示点 p

Q: 这个做法有没有让你回想起什么?

回顾：透视投影

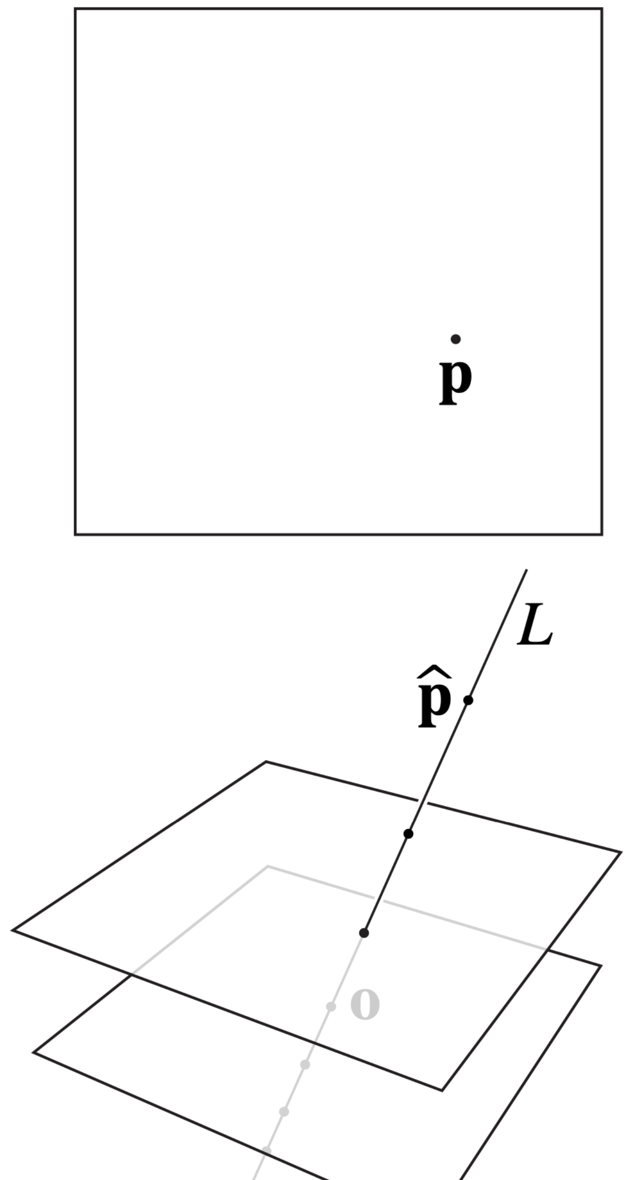
- 希望有让你回忆起我们的“针孔相机”
- 在同一条线的物体都将投影到同一点



图像上的点是不能知道它的具体位置的，只能知道它属于哪一条线

齐次坐标 (2D)

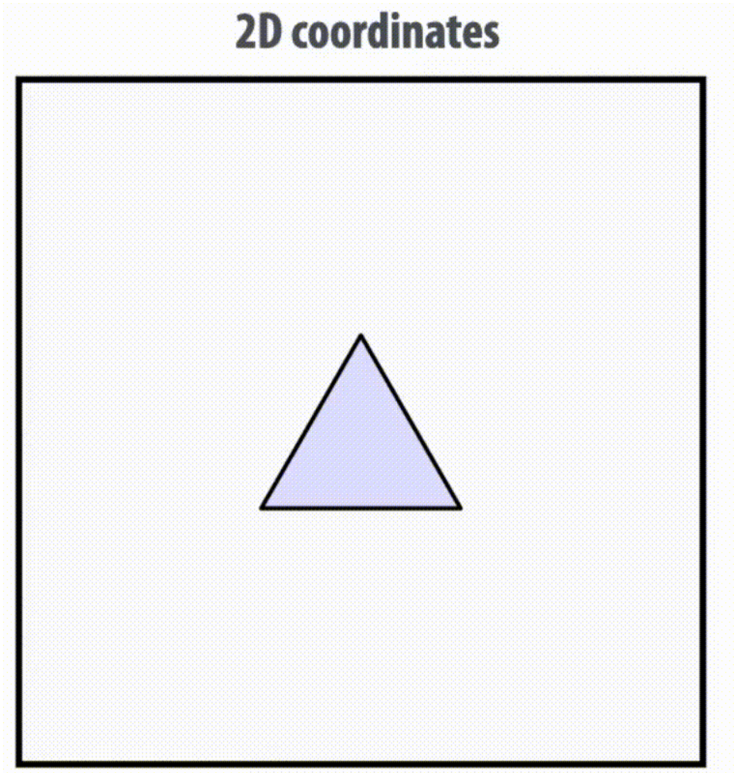
- 更直接地，考虑 3D 中的点 $p = (x, y)$ 和平面 $z = 1$
- 任意三个数 $\hat{p} = (a, b, c)$ 使得 $(a/c, b/c) = (x, y)$ 即为 p 点的齐次坐标
  - 比如 $(x, y, 1)$
  - 更一般的，$(cx, cy, c)\ for\ c \neq 0$
- Hence, two points $\hat{p}, \hat{q} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$ describe the same point in 2D (and line in 3D) if $\hat{p} = \lambda \hat{q}$ for some $\lambda \neq 0$



Great，但是这个对我们的变换有什么用?

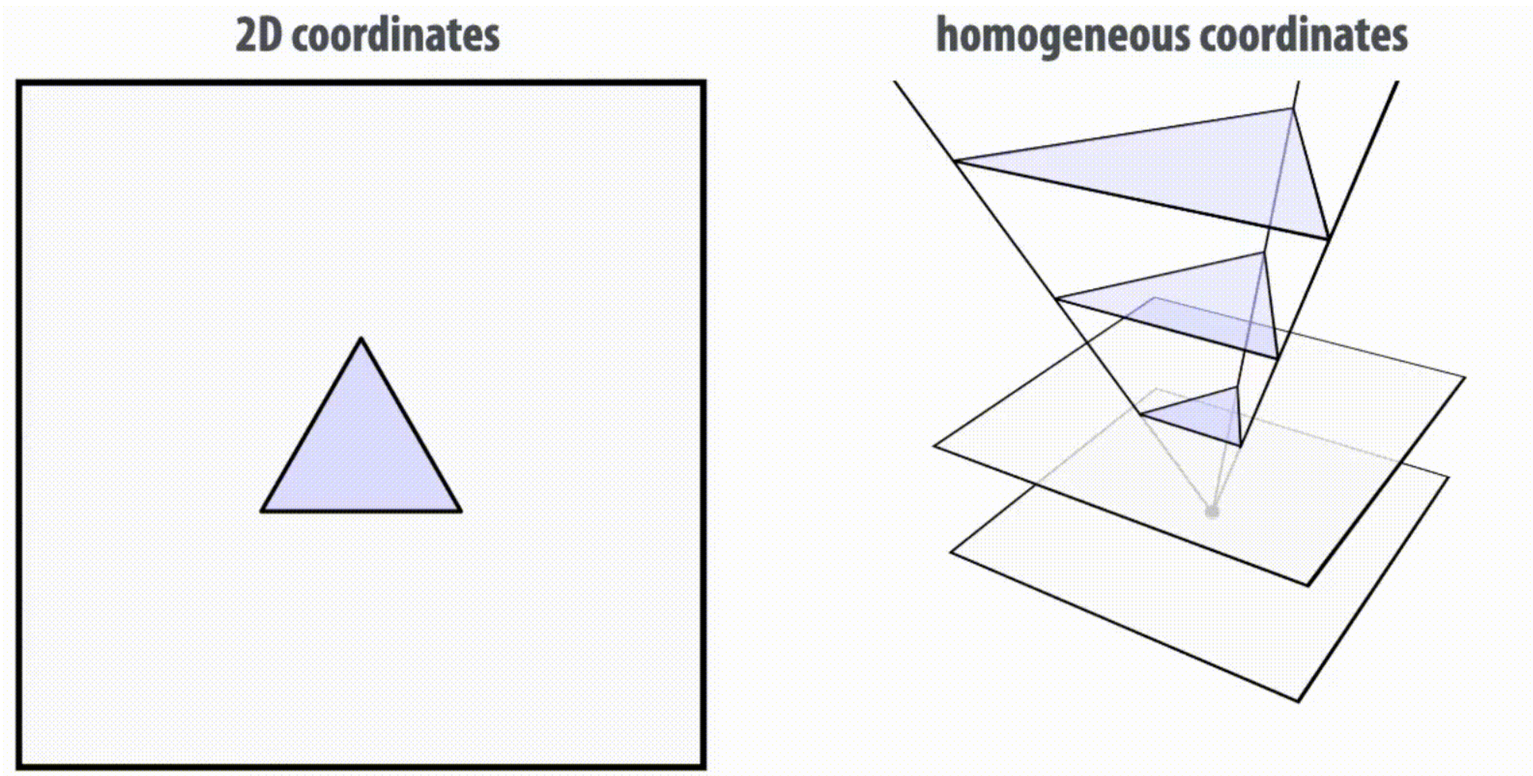
齐次坐标中的平移

- 让我们思考一下，如果我们对二维坐标 p 进行平移，齐次坐标 $\hat{p}$ 会发生什么



齐次坐标中的平移

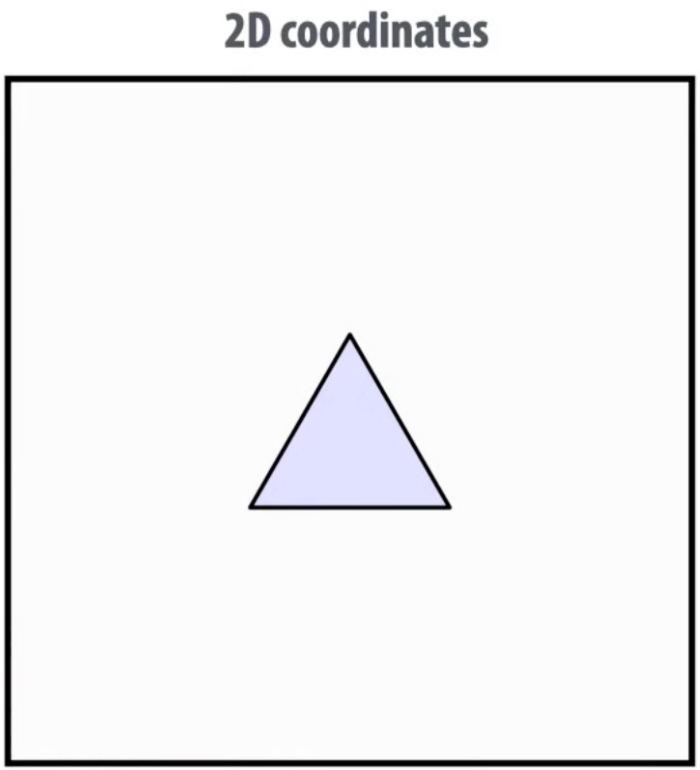
- 让我们思考一下，如果我们对二维坐标 p 进行平移，齐次坐标 $\hat{p}$ 会发生什么

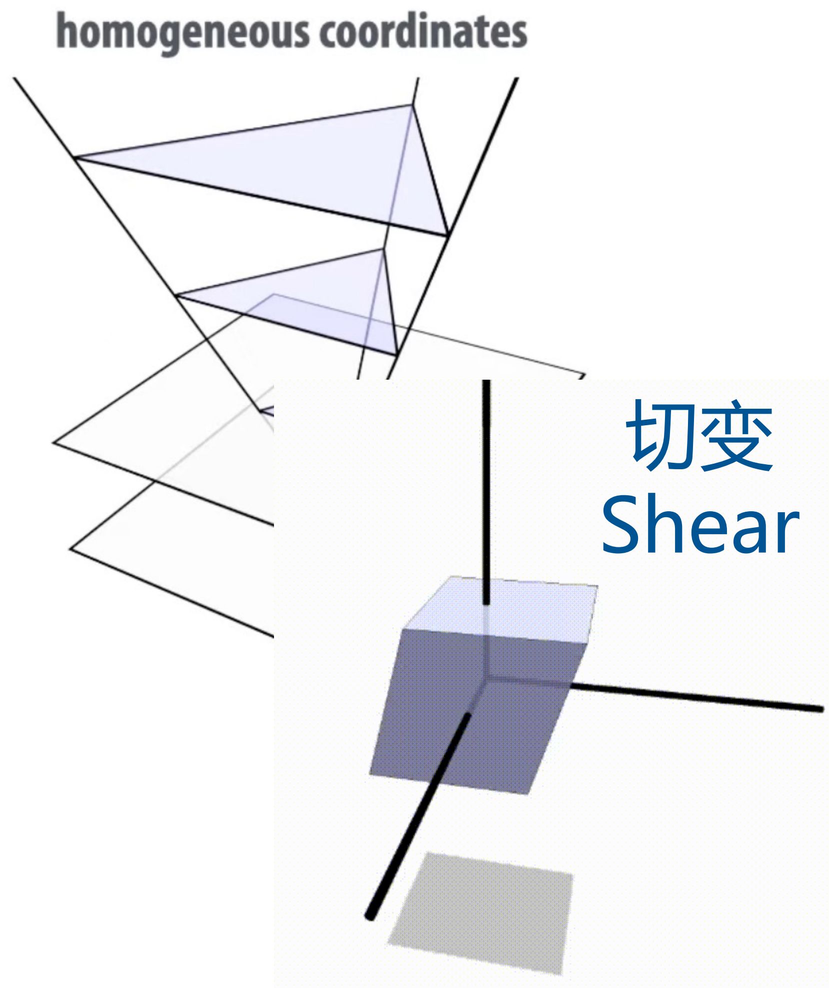


这个看起来像哪种变换?

齐次坐标中的平移

- 让我们思考一下，如果我们对二维坐标 p 进行平移，齐次坐标 $\hat{p}$ 会发生什么





这个看起来像哪种变换?

齐次坐标中的平移

- 但是，切变 shear 是一个线性变换！
- 这正确吗？让我们检查一下坐标
- 假设我们用向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 平移点 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$，得到 $\mathbf{p}' = (p_1 + u_1, p_2 + u_2)$
- 齐次坐标 $\hat{\mathbf{p}} = (cp_1, cp_2, c)$ 变成 $\hat{\mathbf{p}}' = (cp_1 + cu_1, cp_2 + cu_2, c)$
- 注意我们将 $\hat{\mathbf{p}}$ 移动了一个量 $c\mathbf{u}$，这个量与沿着第三轴的距离 c 成正比，此操作即为切变

Using homogeneous coordinates, we can represent an affine transformation in 2D as a linear transformation in 3D

齐次坐标 – 矩阵表示

- 写成矩阵的形式，切变沿着方向 $\mathbf{u} = (u_1, \mathrm{u}_2)$ 移动 $\mathbf{x}$，移动的大小由 $\mathbf{x}$ 沿着固定向量 $\mathbf{v}$ 的距离决定：

$$f_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$$

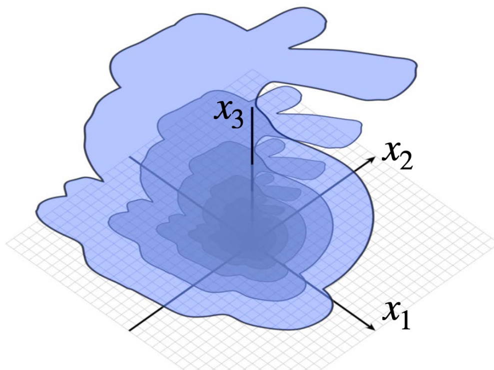
- 矩阵表示为

$$f_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \left(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\right) \mathbf{x}$$

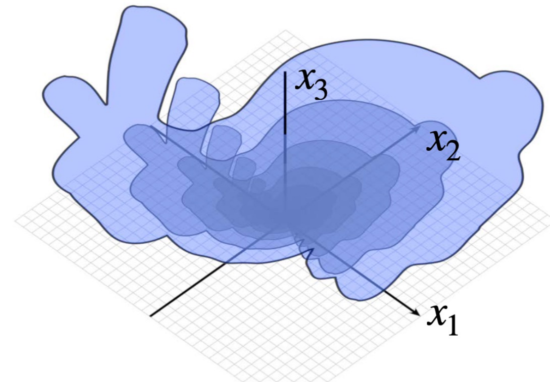
- 在齐次坐标中，$\mathbf{v}$ 总是 $(0, 0, 1)$，因此我们得到矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cp_1 \\ cp_2 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(p_1 + u_1) \\ c(p_2 + u_2) \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{1/c} \begin{bmatrix} p_1 + u_1 \\ p_2 + u_2 \end{bmatrix}$$

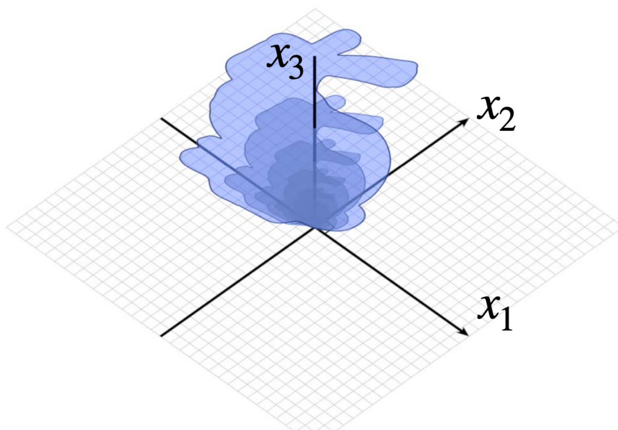
齐次坐标中的其他 2D 变换



Original shape in 2D can be viewed as many copies, uniformly scaled by x_3

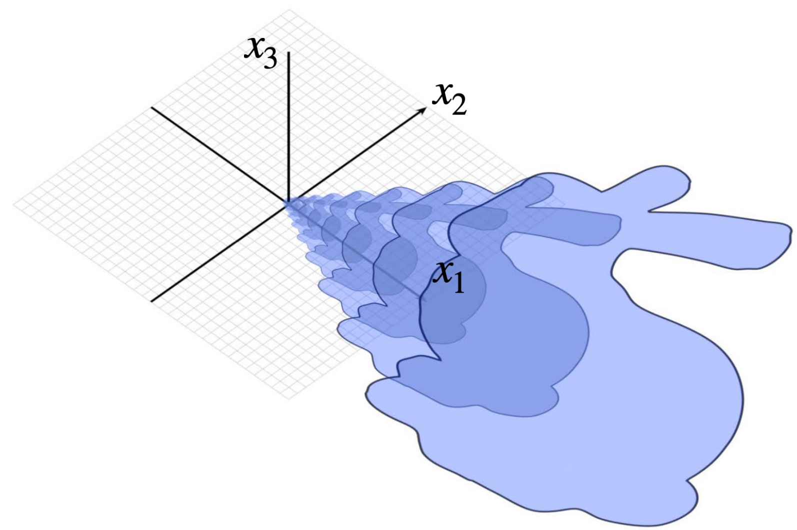


2D rotation ↔ rotate around x_3



2D scale ↔ scale x_1 and x_2; preserve x_3

(Q: what happens to 2D shape if you scale x_1, x_2, <u>and</u> x_3 uniformly?)



2D translate ↔ shear

现在可以很容易地组合这些变换了！

齐次坐标中的 3D 变换

- 3D (或更高维度) 的情况类似，只需附加一个齐次坐标轴
- 3D 线性变换的矩阵表示只增加一个额外的单位行/列 (identity row/column)；平移同样是切变

rotate (x, y, z) around y by θ

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

shear (x, y) by z in (s, t) direction

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

point in 3D

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

scale x, y, z by a, b, c

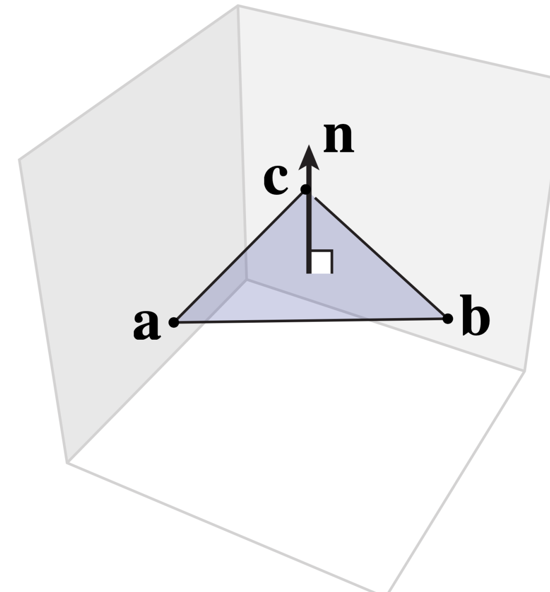
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

translate (x, y, z) by (u, v, w)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

点 Points vs. 向量 Vectors

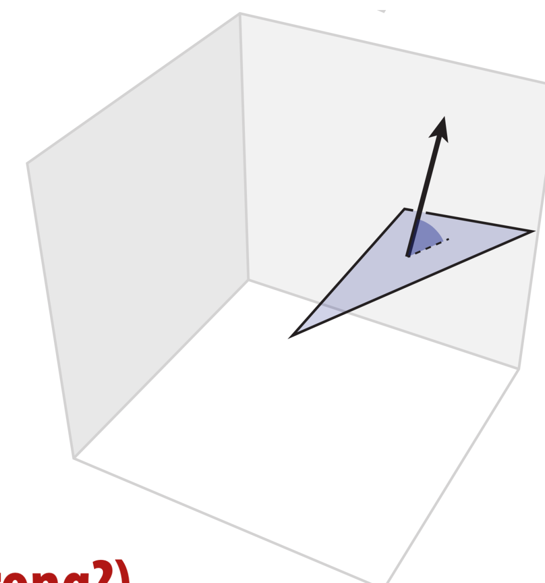
- 齐次坐标有另一个有用的特征：帮助区分点和向量
- 考虑一个三角形
  - 点 Vertices $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$
  - 法向量 Normal vector $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$



- 我们应用如下变换：在点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{n}$ 后附加一个 1，然后分别乘以下面的矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation translation



Normal is not orthogonal to triangle! (What went wrong?)

点 Points vs. 向量 Vectors

- 让我们想想当我们把法向量 $\mathbf{n}$ 乘以矩阵时会发生什么

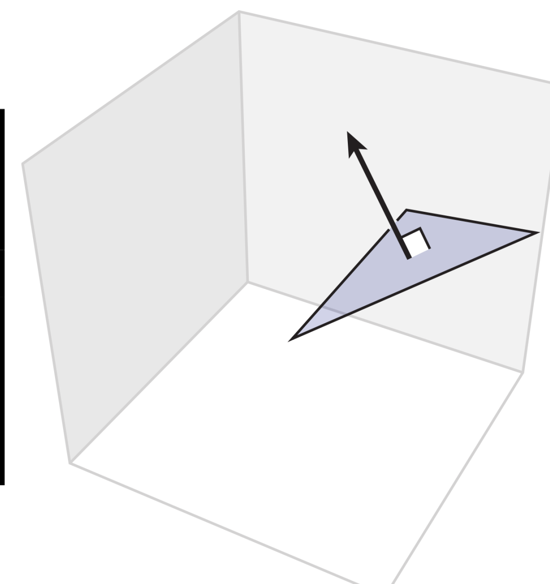
rotate normal around y by θ

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

translate normal by (u, v, w)

- 但是当我们旋转/平移三角形时，它的法线应该只是旋转*！
- 解决方案：将齐次坐标设置为零！
- 平移现在被忽略了；法线与三角形正交

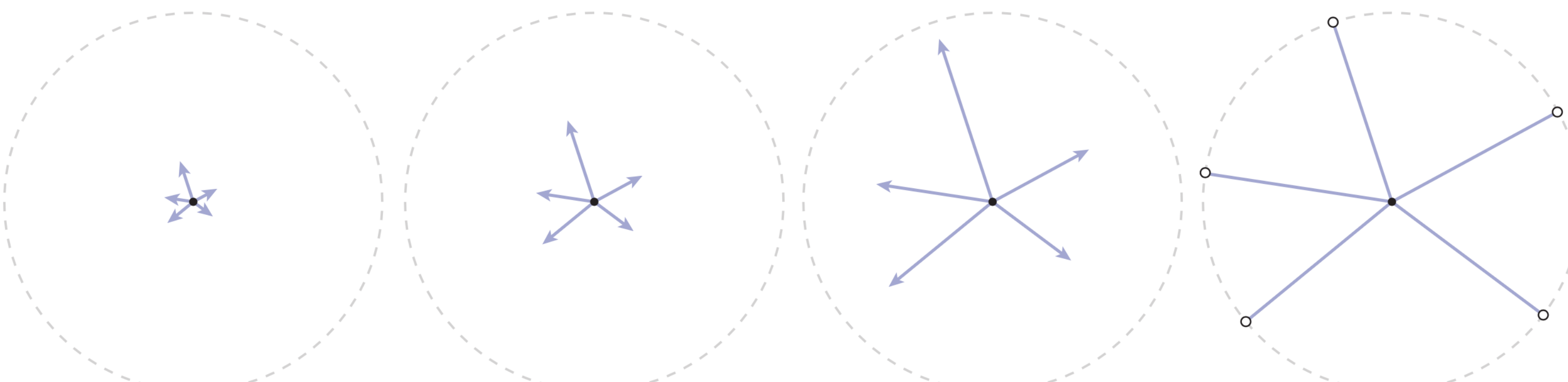
$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



*回想一下，向量只有方向和大小，而没有“基点”

齐次坐标中的点 vs. 向量

- 一般而言
  - 点具有非零齐次坐标 ($c = 1$)
  - 向量的齐次坐标为零 ($c = 0$)
- 当时 $c = 0$ 时，除以它意味着什么?
- 我们可以逐步考虑 $c \to 0$



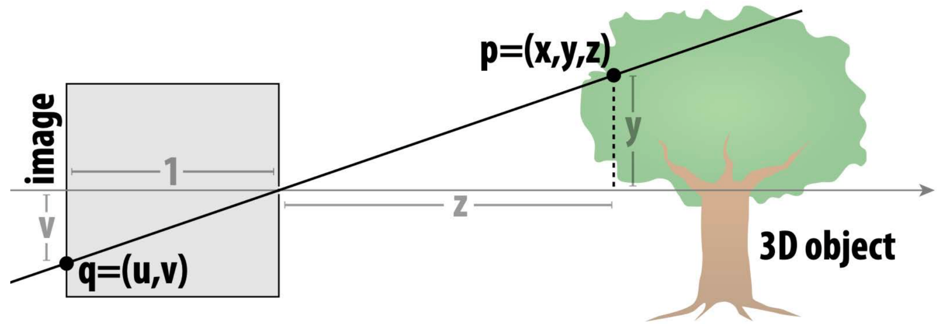
$(x, y)/1$ $(x, y)/0.5$ $(x, y)/0.25$ $(x, y)/0.001$

Can think of vectors as "points at infinity" (sometimes called "ideal points")

(In practice: still need to check for divide by zero!)

齐次坐标中的透视投影

- 如何使用齐次坐标进行透视投影*?
- 我们的针孔相机模型的基本思想是“除以 z”
- 因此，我们可以构造一个矩阵，将 z 坐标“复制”到齐次坐标中
- 通过齐次坐标的除法，我们现在可以得到在 $z = 1$ 平面上的透视投影



$$(x, y, z) \mapsto (x/z, y/z)$$

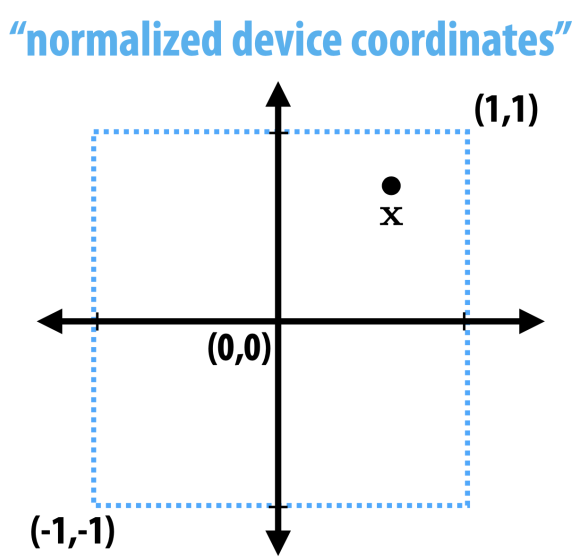
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z \end{bmatrix}$$

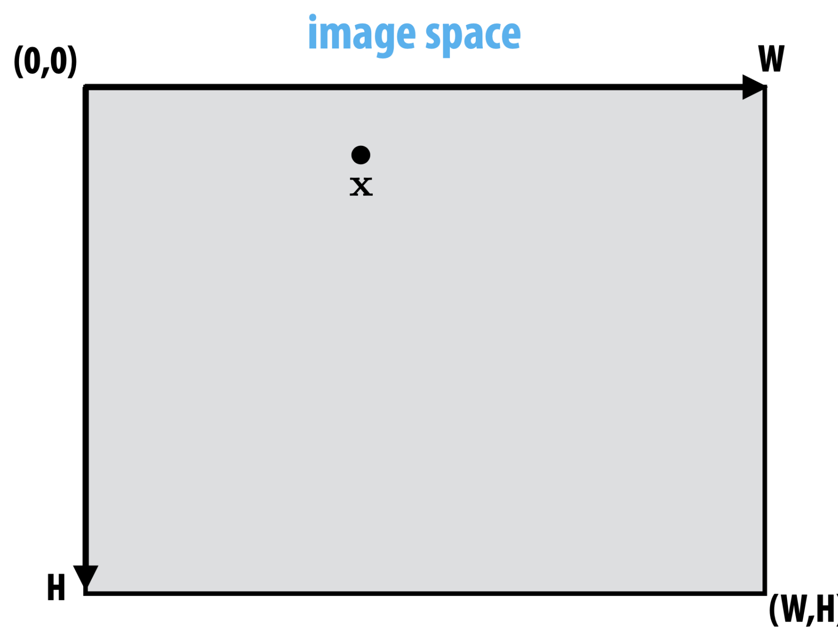
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{bmatrix}$$

*假设针孔相机在 (0, 0, 0) 处向负方向观察 z 轴

屏幕变换 Screen transformation

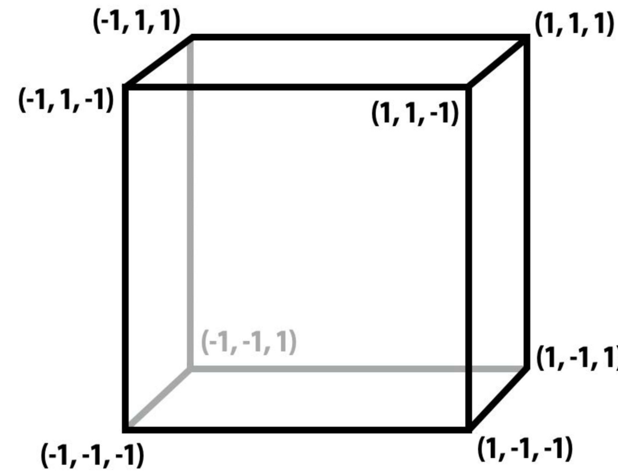
- 光栅化流程中需要的最后一个变换：从观察平面到像素坐标的变换 (viewing plane -> pixel coordinates)
- 假设我们想将 $z = 1$ 平面上的正方形 $[0, 1]\times[0, 1]$ 内的所有点绘制成 W×H 像素的图像



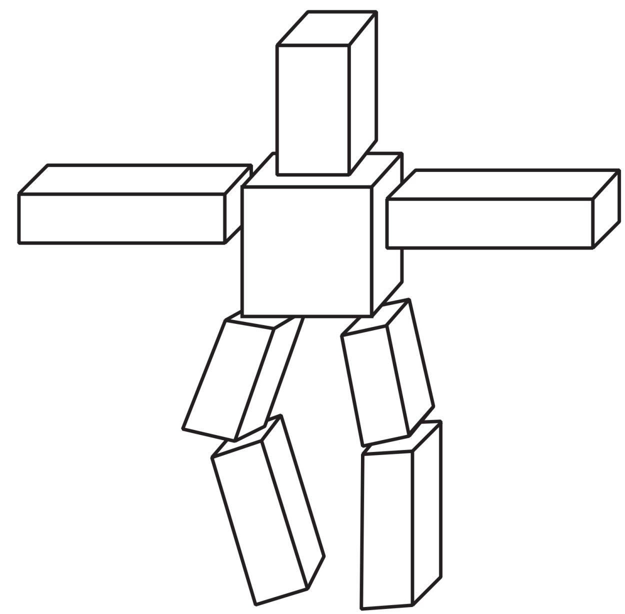


Q: What transformation(s) would you apply? (Careful: y is now *down!*)

场景图 Scene graph

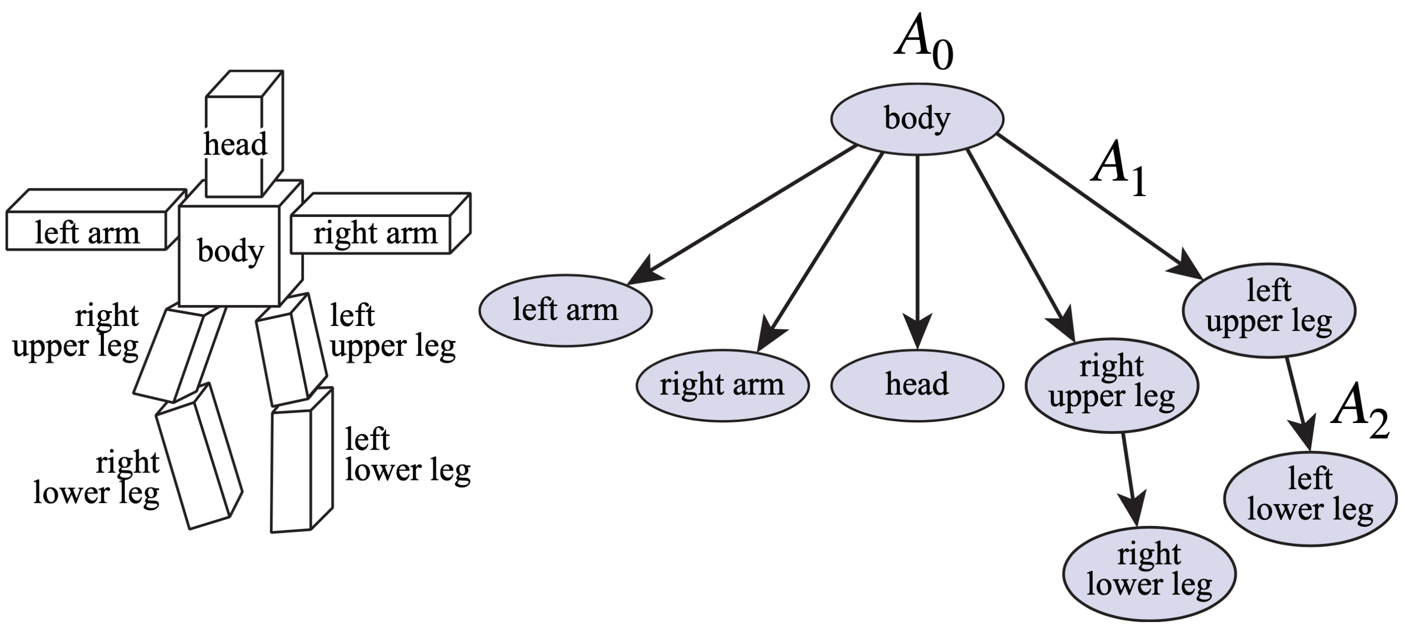


- 对于一些复杂的场景 (比如多个立方体)，场景图能帮助管理不同的变换
- 假设我们像通过变换一个单位立方体来创造一个立方体生物
- 很难直接指定具体的变换
- 相反地，我们可以利用底层的变换来进一步构建上层的变换
  - 比如说，先指定身体
  - 然后变换身体以构建上肢
  - 接着变换上肢以构建下肢
  - …



场景图

□场景图在有向图中存储相对变换（relative transformation）
□每条边（加上根）存储一个线性变换（例如，4x4矩阵）
□变换的组合应用于节点



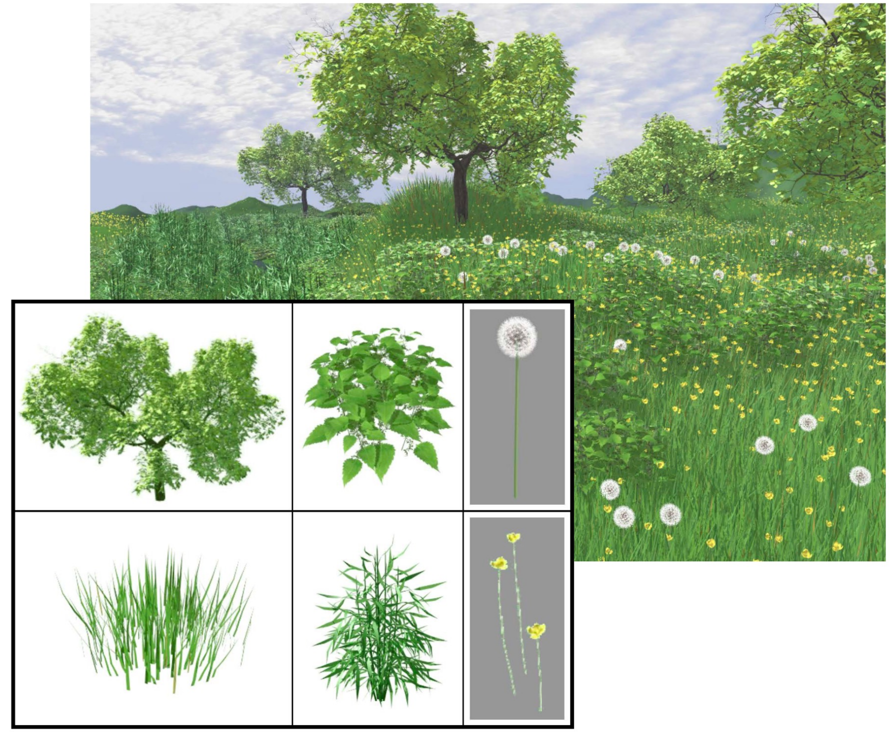
□比如，A_1A_0 产生左大腿，$A_2A_1A_0$ 产生左小腿
□用堆栈存储变换，以减少冗余乘法

场景图 – 例子

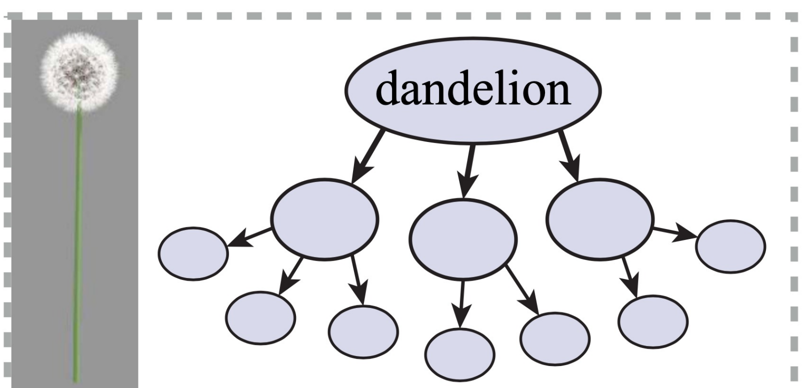
- 通常用于构建复杂的“操控”，不同部位相互影响

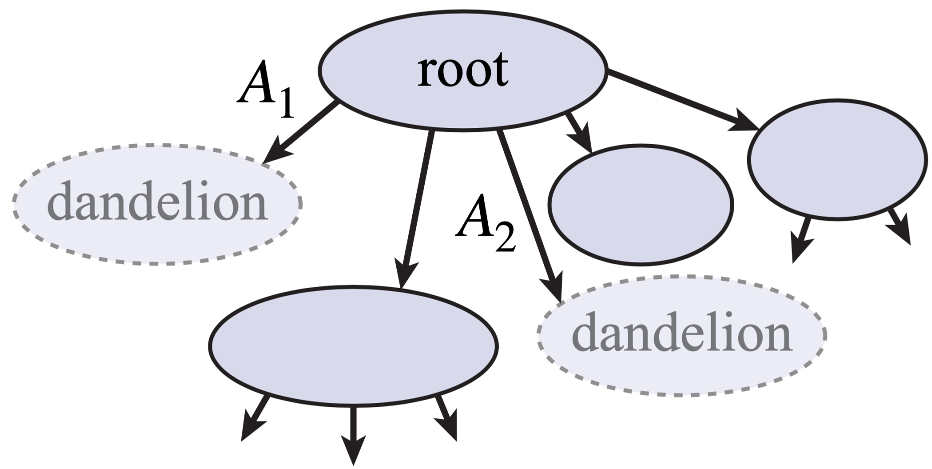
Deussen et al, “Realistic modeling and rendering of plant ecosystems”

实例化渲染

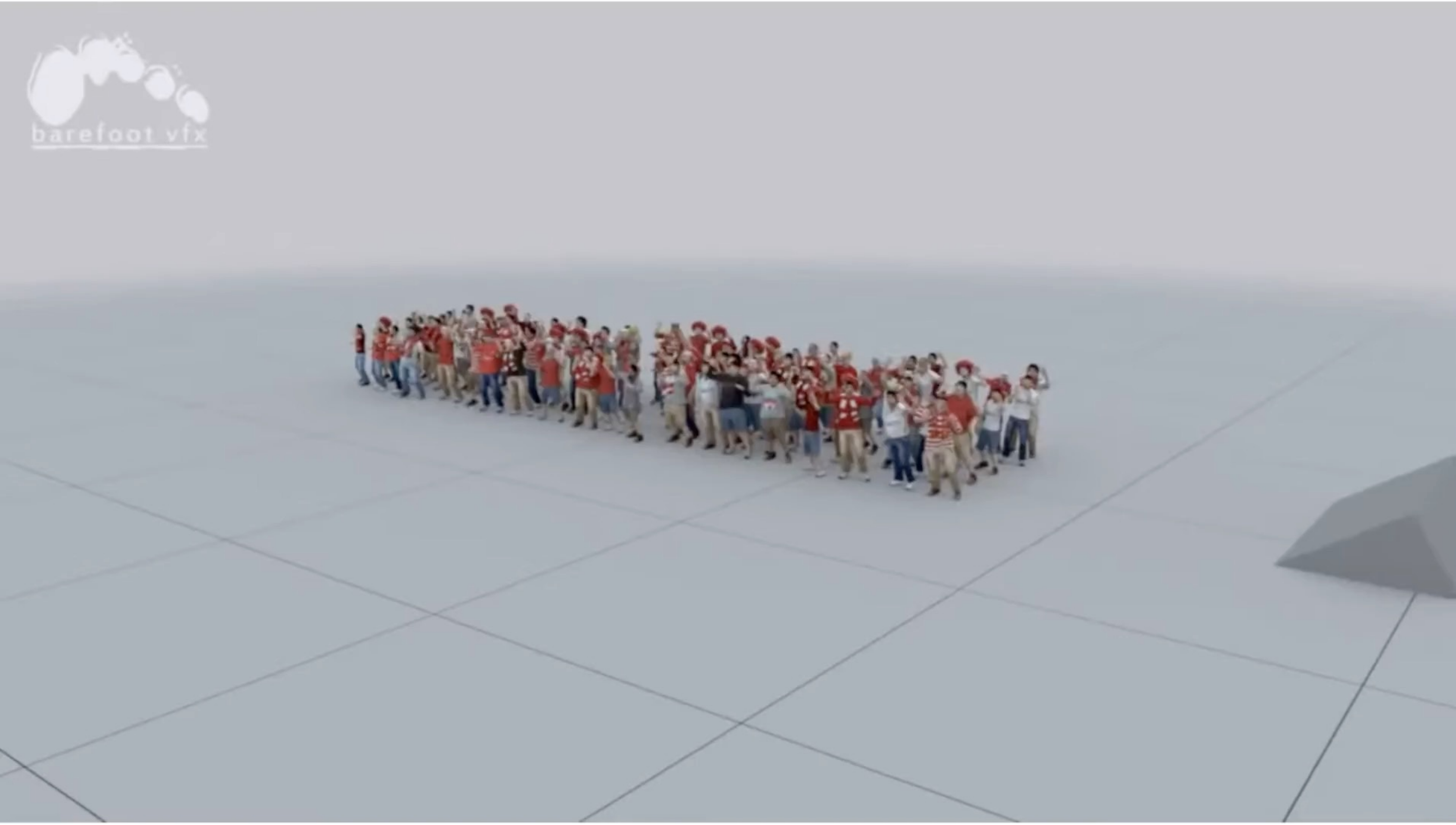


- 如果我们想要场景中同一对象的多个副本，该怎么办？
- 与其存储多个几何体的副本，不如在场景图中放置一个“指针”节点
- 与任何其他节点一样，可以在每个传入边上指定不同的变换

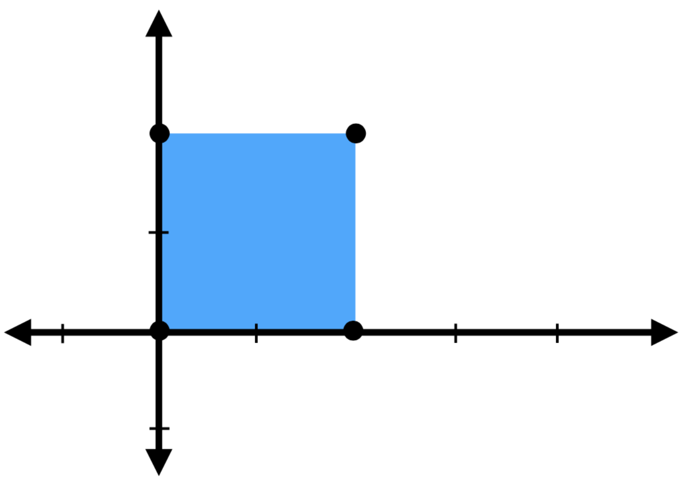




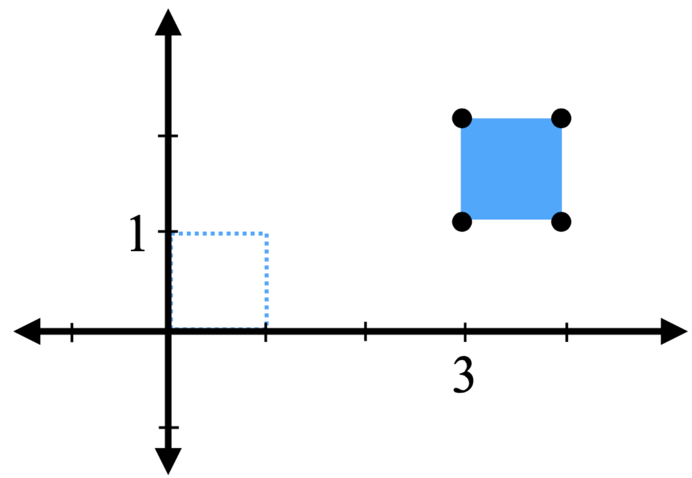
实例化渲染



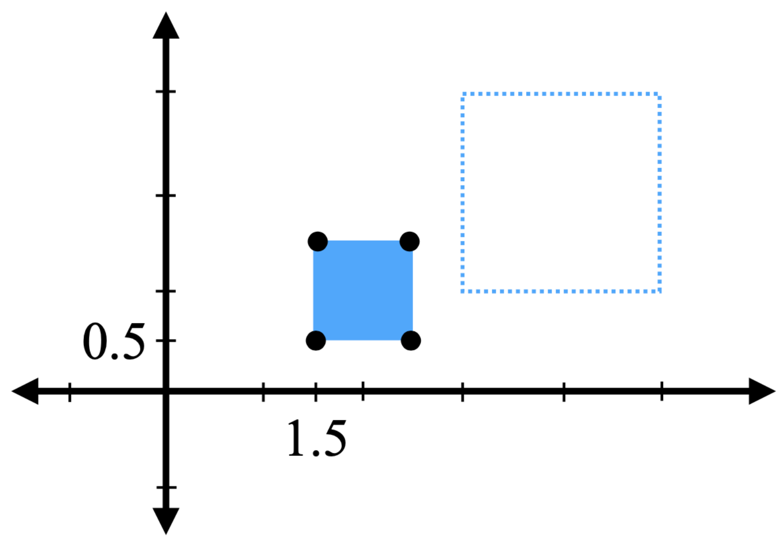
组成变换时顺序很重要



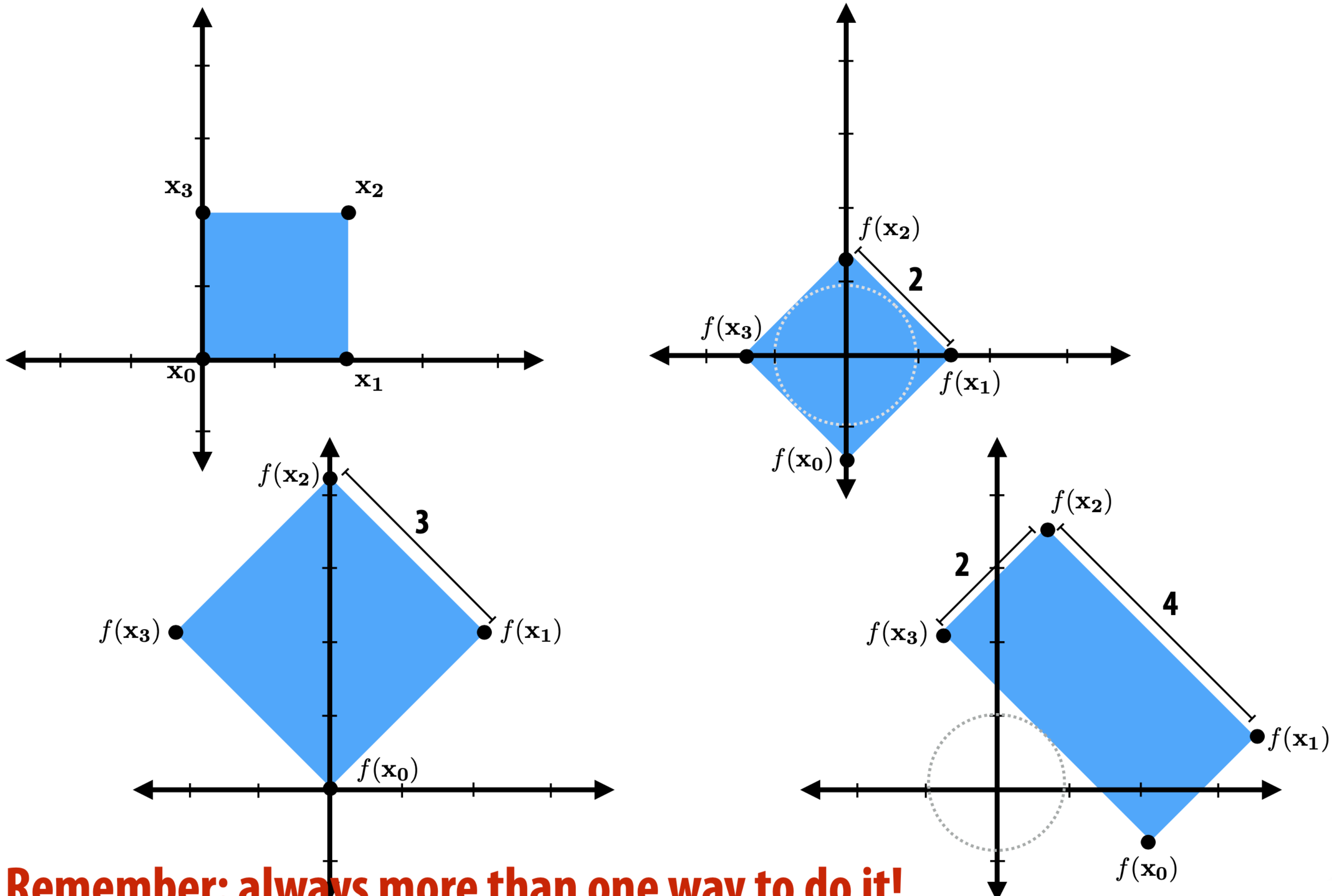
scale by 1/2, then translate by (3,1)



translate by (3,1), then scale by 1/2

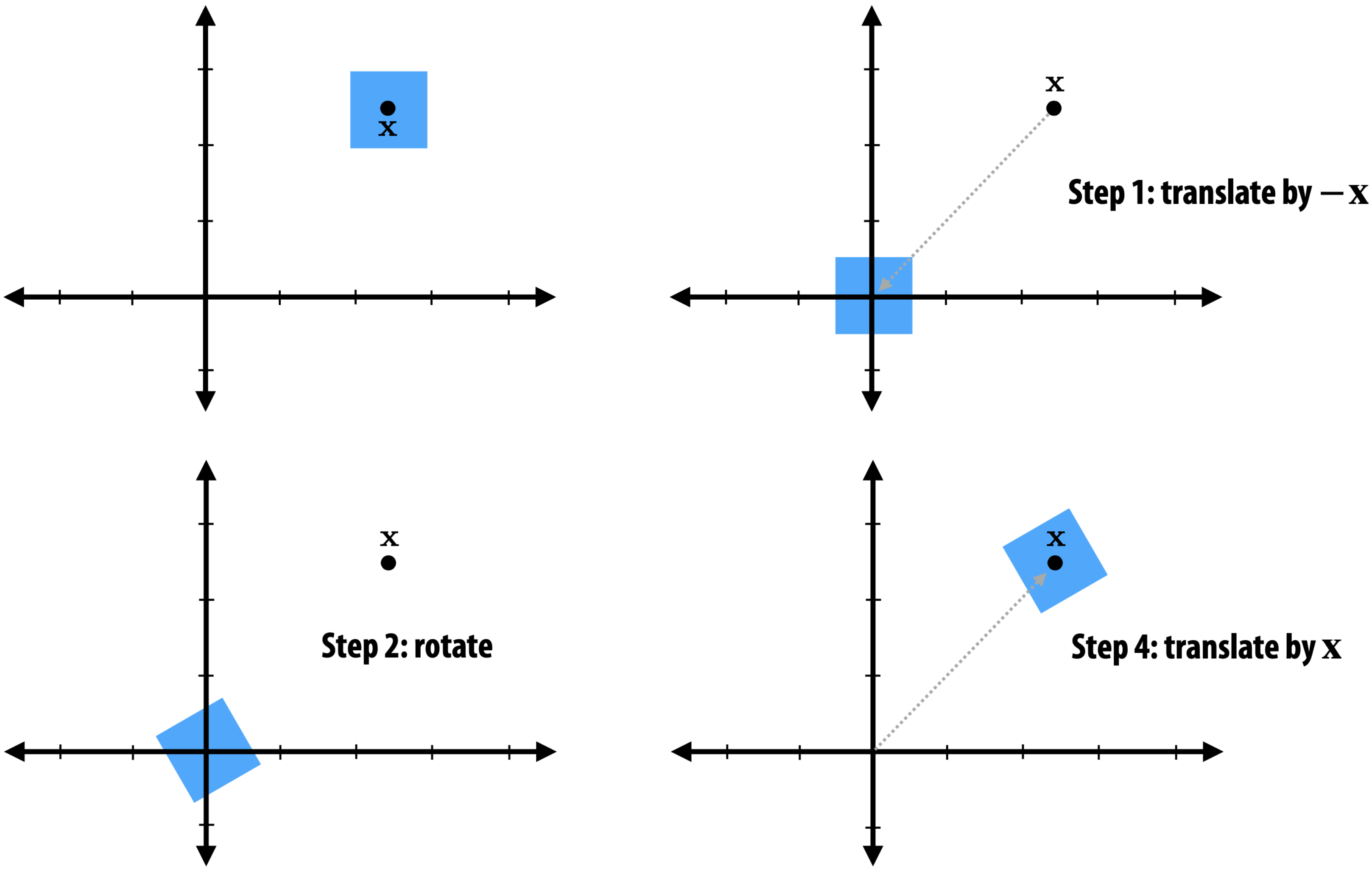


如何组成下面的变换?



Remember: always more than one way to do it!

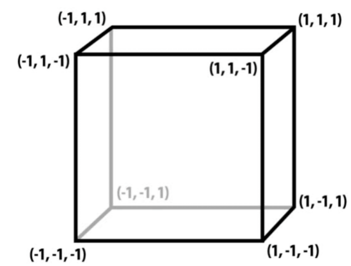
基于某一点做旋转

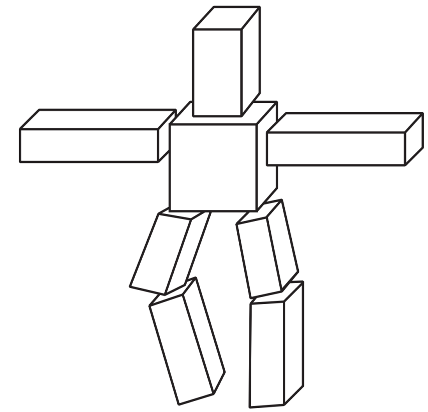


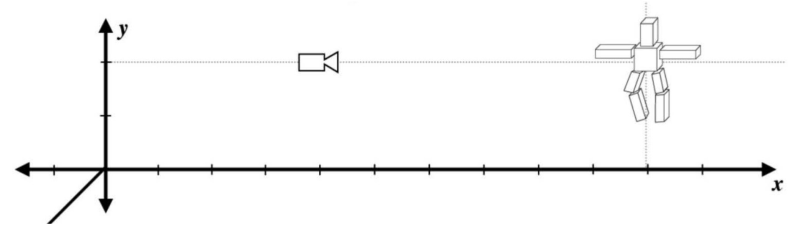
Q: What happens if we just rotate without translating first?

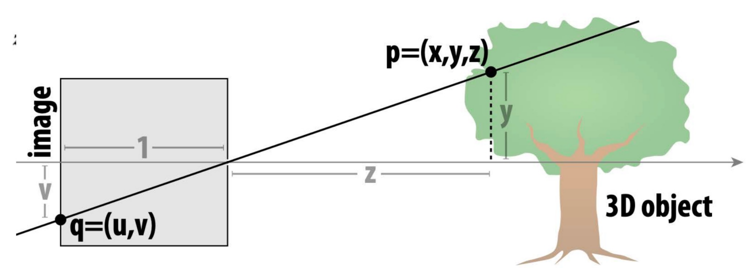
画一个立方体生物

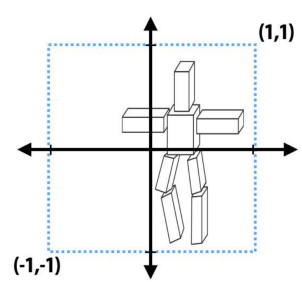
- 从我们的 3D 立方体开始，我们想制作一个“立方体生物”的 2D、透视正确的图像
- 首先，我们使用场景图将 3D 变换应用于立方体的几个副本
- 然后我们应用 3D 变换来定位我们的相机
- 然后是透视投影
- 最后，我们转换为图像坐标并光栅化
- Easy, right?

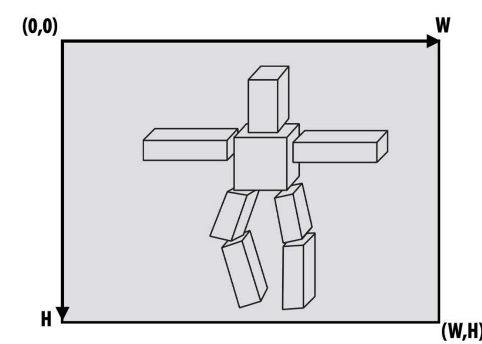












谢谢

陈壮彬
软件工程学院
chenzhb36@mail.sysu.edu.cn