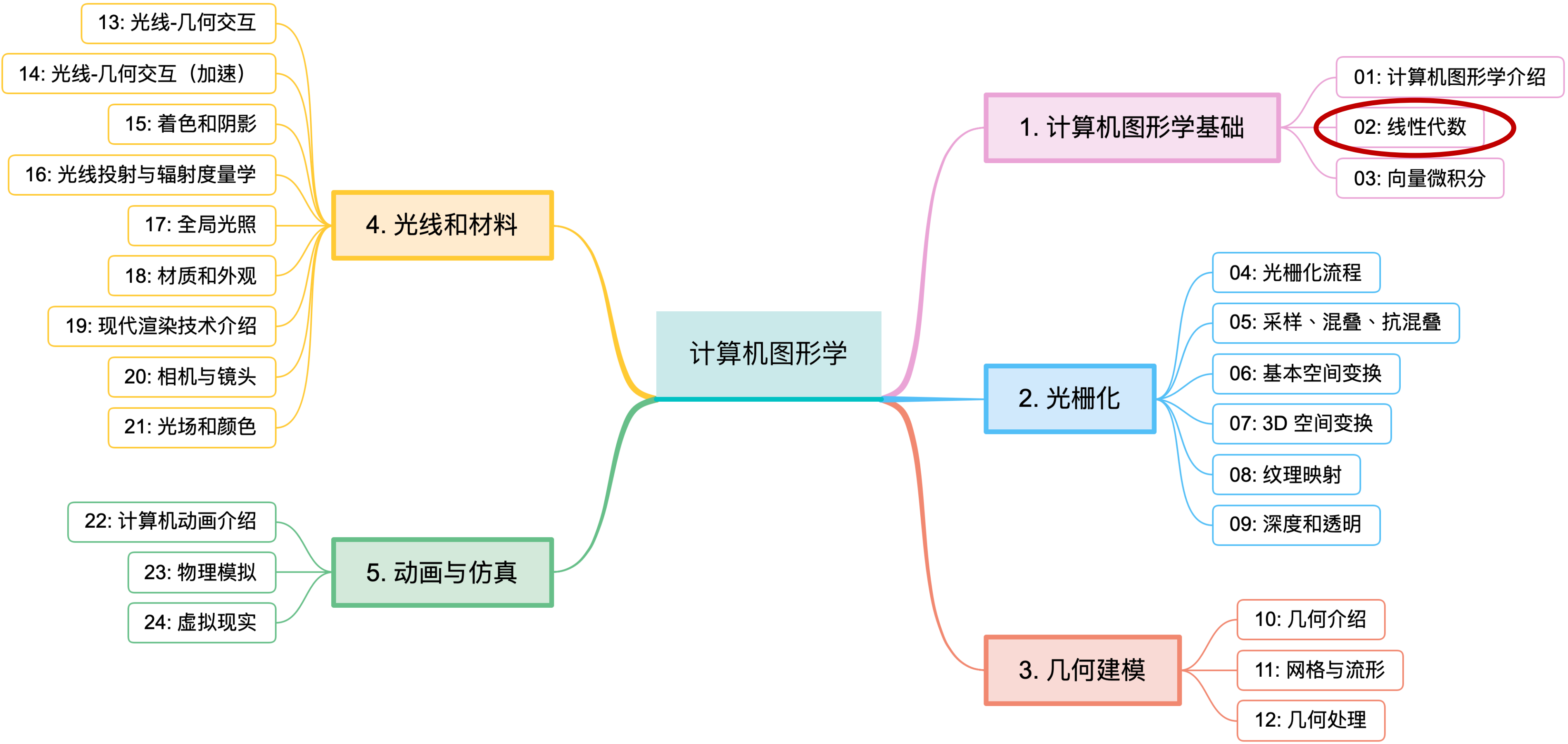
中山大學 软件工程学院
SUN YAT-SEN UNIVERSITY SCHOOL OF SOFTWARE ENGINEERING

Lecture 02：线性代数

SSE315：计算机图形学
Computer Graphics

陈壮彬
软件工程学院
chenzhb36@mail.sysu.edu.cn


计算机图形学
1. 计算机图形学基础
01: 计算机图形学介绍
02: 线性代数
03: 向量微积分
2. 光栅化
04: 光栅化流程
05: 采样、混叠、抗混叠
06: 基本空间变换
07: 3D 空间变换
08: 纹理映射
09: 深度和透明
3. 几何建模
10: 几何介绍
11: 网格与流形
12: 几何处理
4. 光线和材料
13: 光线-几何交互
14: 光线-几何交互（加速）
15: 着色和阴影
16: 光线投射与辐射度量学
17: 全局光照
18: 材质和外观
19: 现代渲染技术介绍
20: 相机与镜头
21: 光场和颜色
5. 动画与仿真
22: 计算机动画介绍
23: 物理模拟
24: 虚拟现实

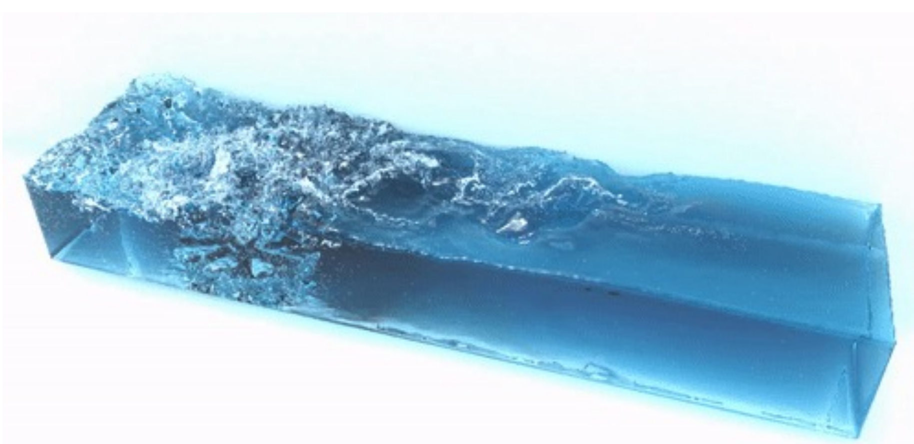
Today’s topics

- □从几何角度认识向量空间
- □向量空间的测量
  - 范数 Norm
  - 内积 Inner product
- □线性映射

计算机图形学中的线性代数

□为什么线性代数对计算机图形学很重要？

- **几何**、**物理**等与**计算**之间的桥梁
- 在图形的许多领域，一旦你能用线性代数表达问题的解决方法，你就基本上得到答案了：让计算机求解 $Ax = b$
- **高效的线性代数求解器/工具**使现代计算机图形学成为可能（图像处理、基于物理的动画、几何处理...）



线性代数定义

□线性代数研究**向量空间 (vector spaces)** 及其之间的 **线性映射 (linear maps)**，正式定义：

For all vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ and scalars a, b:

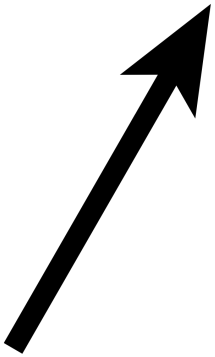
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- There exists a *zero vector* "$\mathbf{0}$" such that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- For every $\mathbf{v}$ there is a vector "$-\mathbf{v}$" such that $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

□上述规则是怎么来的?

□让我们试着理解它们!

向量 Vectors

- 首先，**向量**是什么？
- 直观地看，向量就是一个小箭头

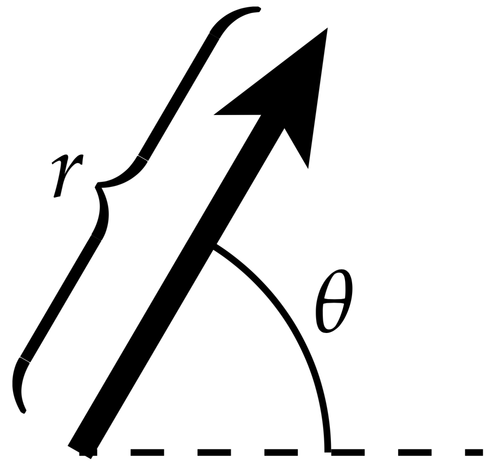


A vector.

- 在计算机图形学中，我们处理的许多数据可能看起来不像小箭头，如多项式、图像、辐射度…
- 但它们仍在很多方面呈现出向量的特性；因此，这个小箭头仍然是一个有用的模型

向量 - 我们能测量什么?

- 向量编码了什么信息?
- **方向 (direction)** 和**大小 (magnitude)***



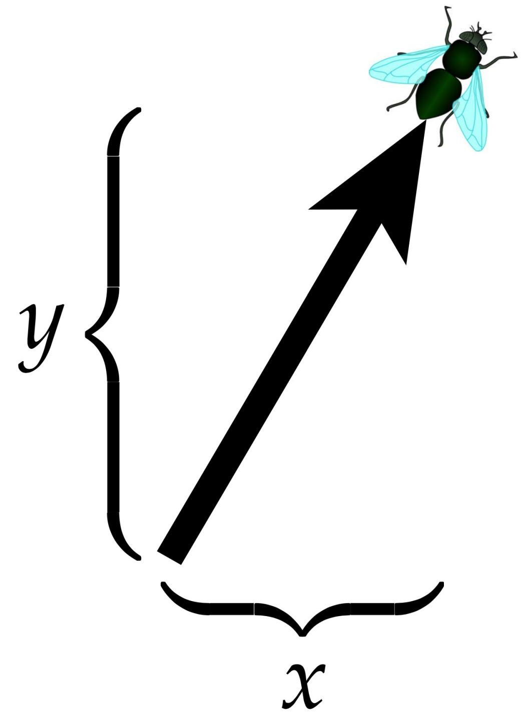
- 例如，2D 中的向量可以通过相对于某个固定方向的**长度**和**角度**进行编码，即**极坐标 (polar coordinates)**
- 还有其他方式编码向量吗?

***传统上，向量不包括“基点”；带基点的向量有时被成为切向量（tangent vector）**

笛卡尔坐标系中的向量

- 我们同样可以在**笛卡尔坐标系**中描述向量的信息

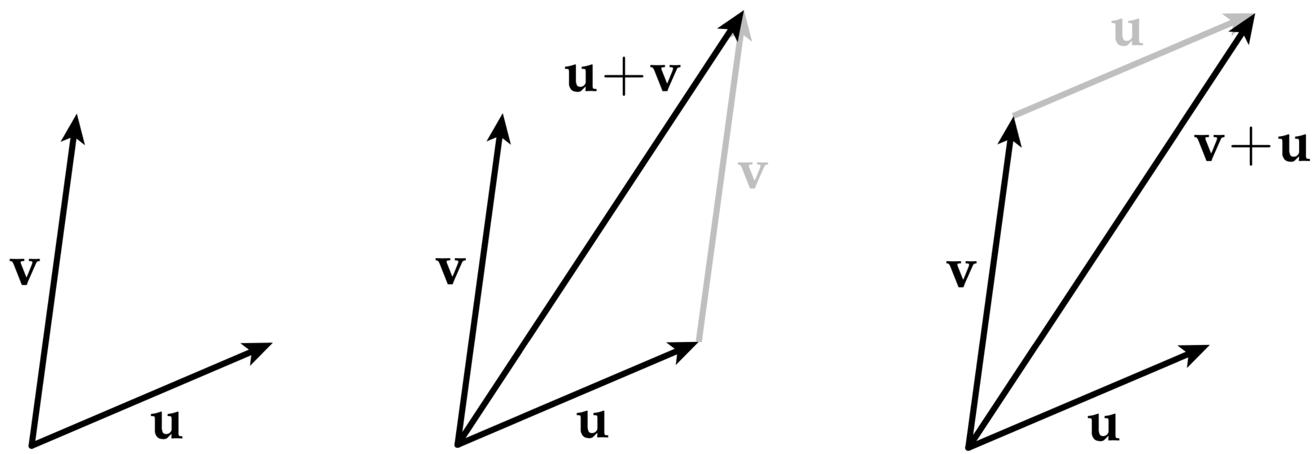
René Descartes, Est. 1596



- 注意⚠️： 不能直接比较不同系统中的坐标！
  - 比如不能比较 (r, θ) 和 (x, y)

向量操作

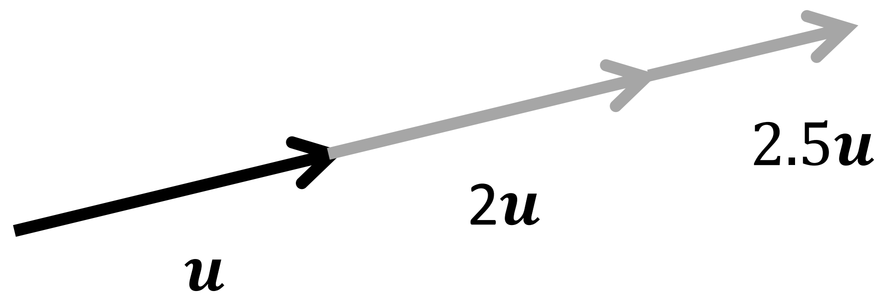
- 两个基本操作
- 首先，我们可以“端到端”地把它们加起来 (addition)：



- 如果我们先沿着 $\mathbf{v}$ 走，然后沿着 $\mathbf{u}$ 走呢？
- 事实上，顺序没有关系： $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
- 专业术语：向量加法是**可交换的 (commutative)**

向量操作

- 另一个基本操作：缩放 (Scaling)

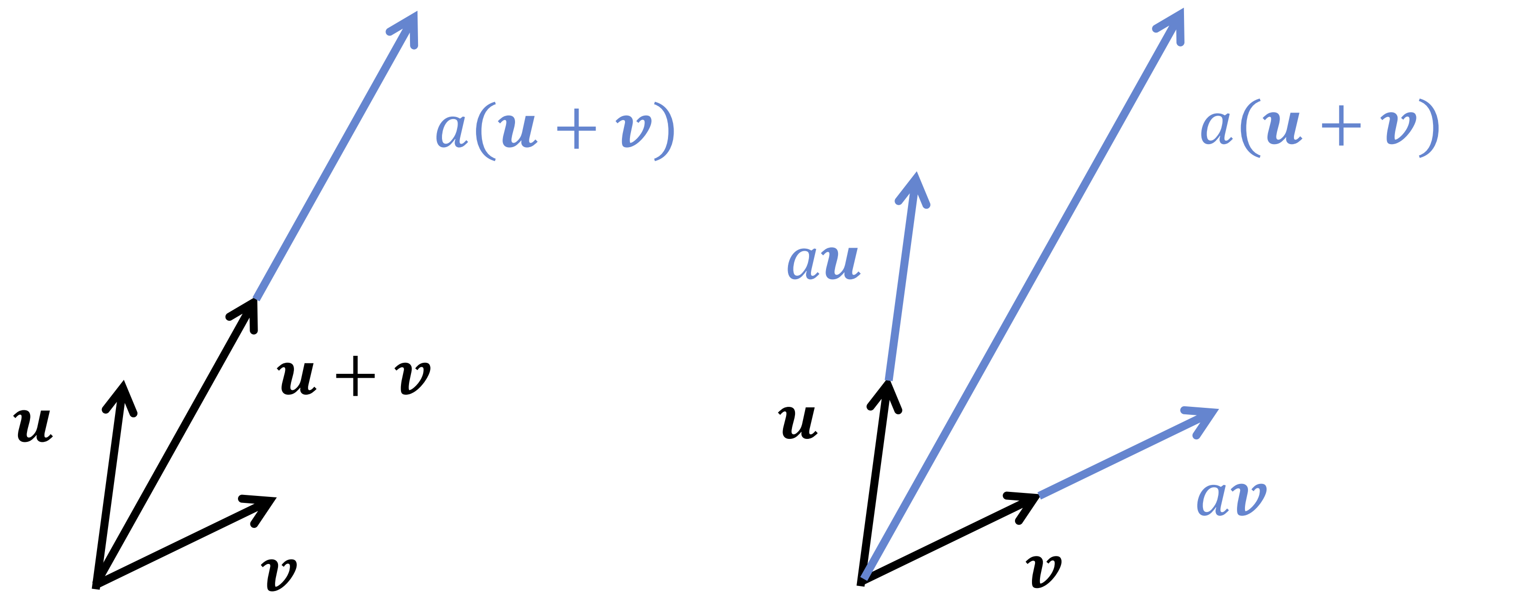


- 通常，我们可以将向量 $\mathbf{u}$ 乘以一个数字或“标量” a，得到一个新的向量 $a\mathbf{u}$
- 根据缩放“小箭头”的几何行为，容易推测出向量乘法具有如下性质：

$$a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$$

加法和缩放的组合顺序

□缩放已相加的两个向量？或者将两个已缩放的向量相加？



□两种顺序得到的结果是一样的

$$a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$$

向量空间 - 正式定义

- 重复组合不同操作，可以得到完整的向量应遵守的“规则”

For all vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ and scalars a, b:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- There exists a *zero vector* “$\mathbf{0}$” such that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- For every $\mathbf{v}$ there is a vector “$-\mathbf{v}$” such that $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

- 这些规则并不是“从天而降”的，每一条都来自“小箭头”的几何行为

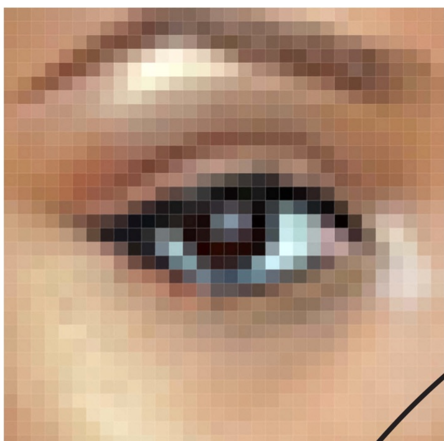
任何满足所有这些属性的对象集合都是向量空间（即使它们看起来不像小箭头）

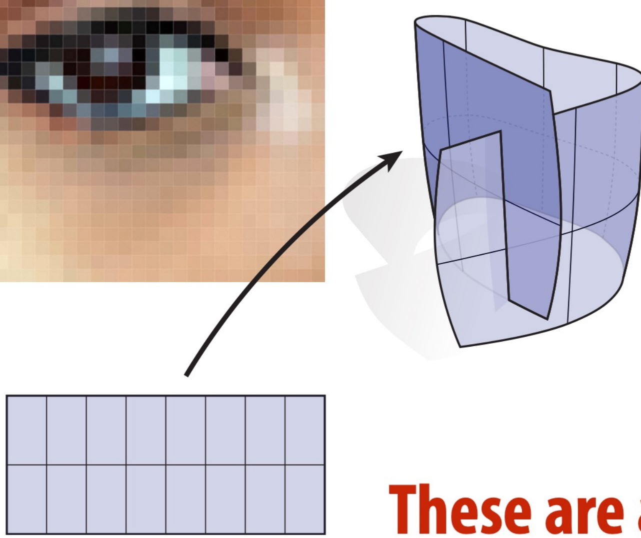
欧几里德向量空间

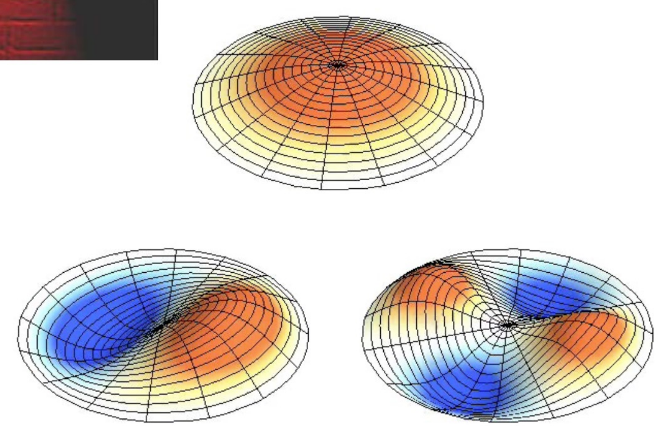
- 最常见的例子：欧几里得 n 维空间 (Euclidean n-dimensional space)
- 通常记为为 $\mathbb{R}^n$，表示"n 个实数"
- $(1.23, 4.56, \pi/2)$ 即为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个点
- 为什么欧几里德 n 维空间很常见?
  - 基于我们生存的世界建模的
  - 容易在计算机中编码 (即浮点数列表)

函数向量 Functions as vectors

- 计算机图形学中向量空间的另一个非常重要的例子是**函数空间 (function space)**
- 为什么？因为图形中的许多对象都可以看作是函数，如图像、光源的辐射度、表面、模态振动等





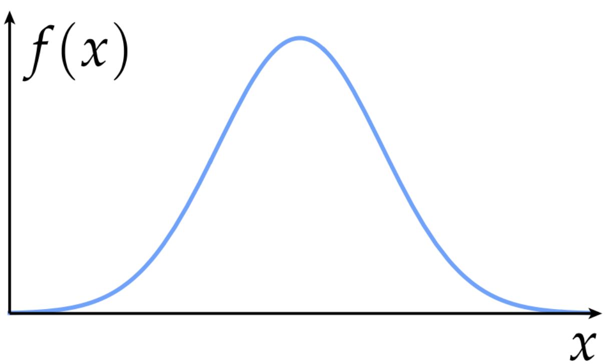


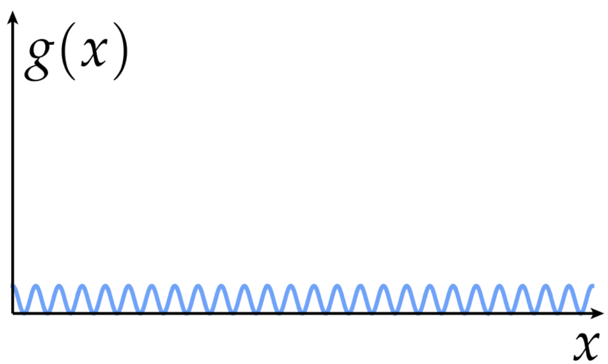
These are all vectors! :-)

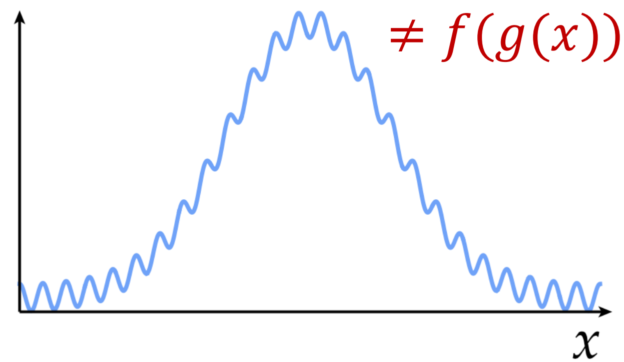
函数向量

- 函数是否表现出与“小箭头”相同的行为？
- 我们可以将两个函数相加（例如重叠两张图片）：

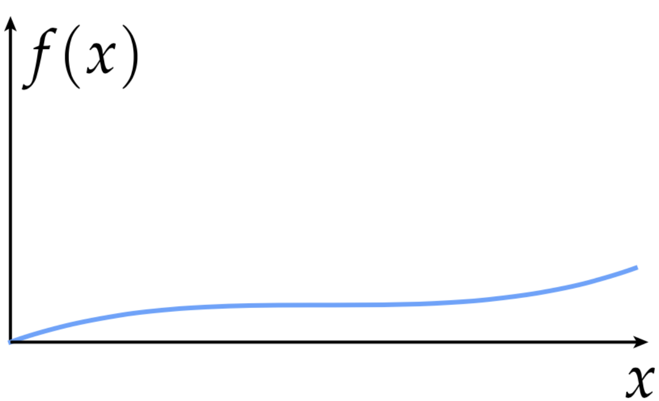
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$



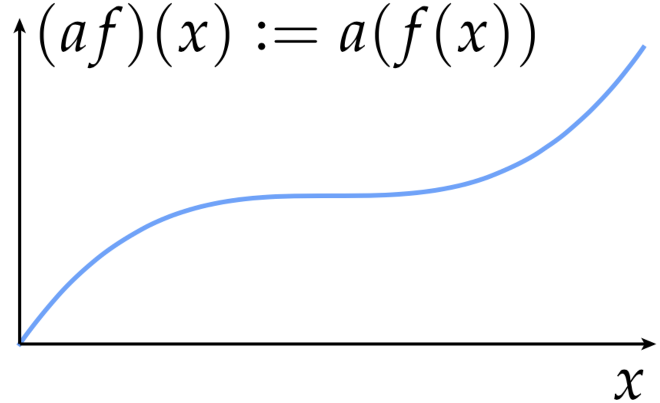




- 我们同样可以缩放一个函数：



$$(af)(x) := a(f(x))$$



函数向量

□其他的属性呢?

For all vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ and scalars a, b:

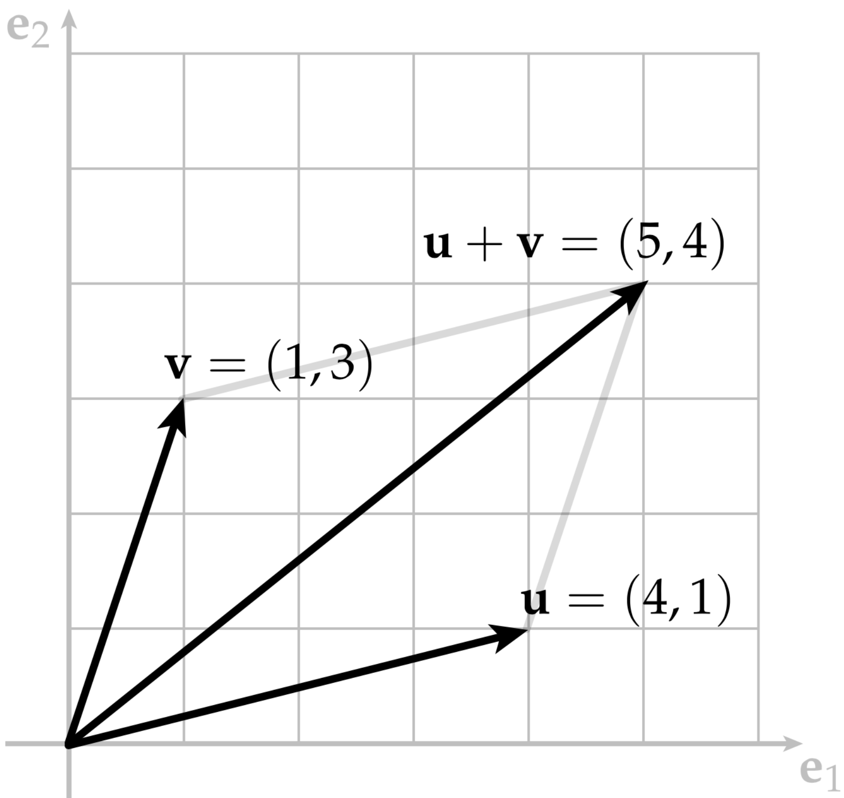
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- There exists a *zero vector* "$\mathbf{0}$" such that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- For every $\mathbf{v}$ there is a vector "$-\mathbf{v}$" such that $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

□比如说，"零向量"是对所有 x 等于 0 的函数

□答案是肯定的，函数也满足所有向量属性，即便它们看起来并不像一个"小箭头"

坐标系中的向量

- 到目前为止，我们仅以图片的形式展示向量运算
- 我们如何用数字对向量进行计算?
- 向量的坐标表示:

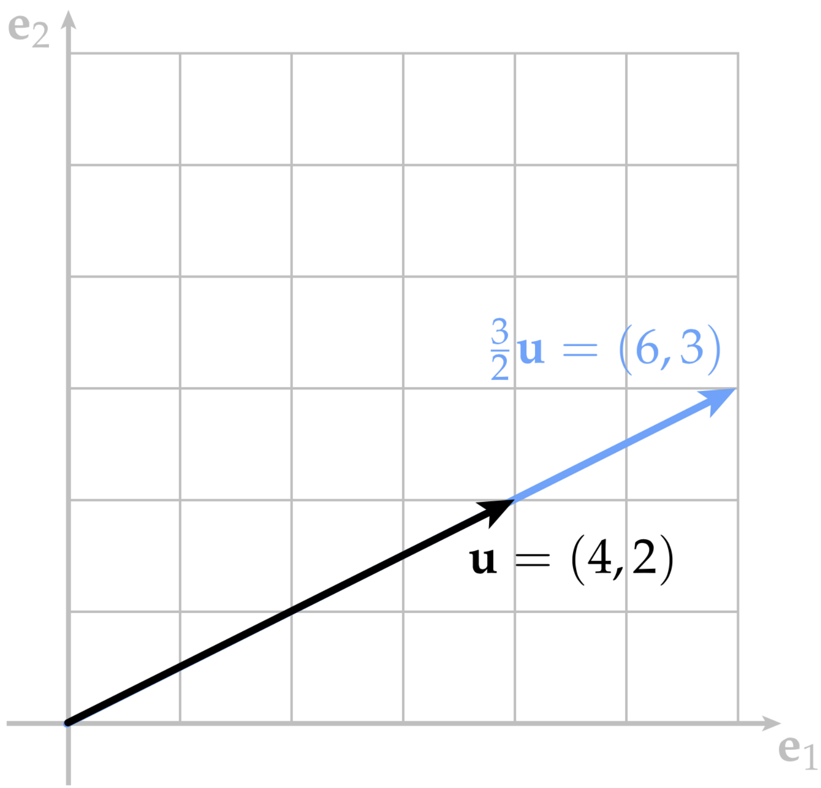


$$\begin{aligned}&\mathbf{u}+\mathbf{v}\\&=(1,3)+(4,1)\\&=(1+4,3+1)\\&=(5,4)\end{aligned}$$

*Side note: does it make sense to add vectors encoded as (r,θ)?

在坐标系中缩放向量

□我们同样可以在坐标中缩放向量



$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{2}\mathbf{u} \\
&= \frac{3}{2}(4,2) \\
&= (4 \cdot 3/2, 2 \cdot 3/2) \\
&= (12/2, 6/2) \\
&= (6,3)
\end{aligned}
$$

从几何到代数

□上述计算是否满足下列向量应遵守的“规则？”

For all vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ and scalars a, b:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- There exists a *zero vector* “$\mathbf{0}$” such that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- For every $\mathbf{v}$ there is a vector “$-\mathbf{v}$” such that $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

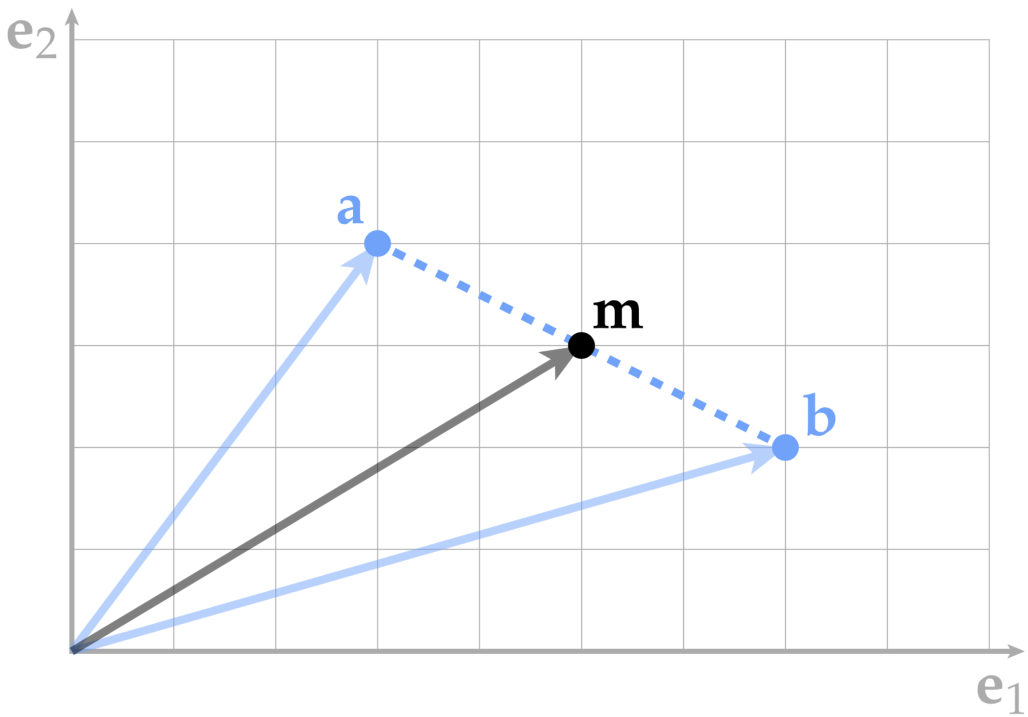
□例如，对于任意两个向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$：

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

计算中点

□**将几何观测转化为代数规则**便于**符号操作**和**数值计算**

□例如，我如何计算 $a = (3,4)$ 和 $b = (7,2)$ 的中点 m?

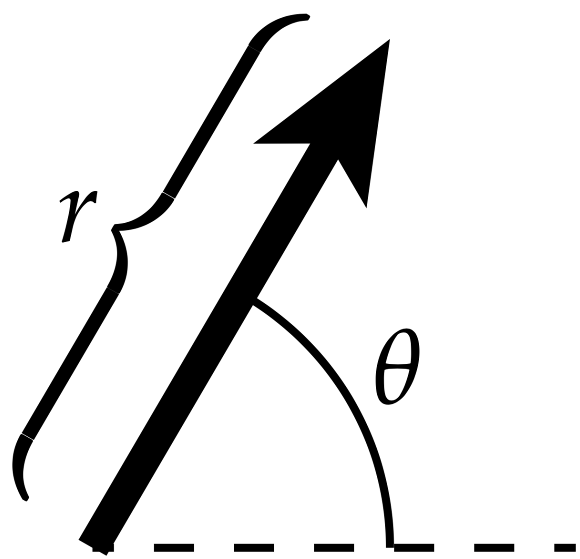


$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\\ &= \frac{1}{2}((3,4)+(7,2))\\ &= \frac{1}{2}(10,6)\\ &= (5,3)\end{aligned}$$

Questions?

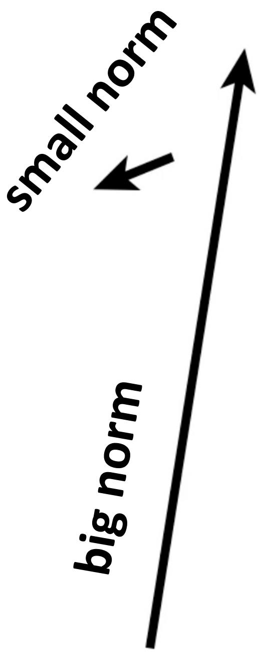
测量向量

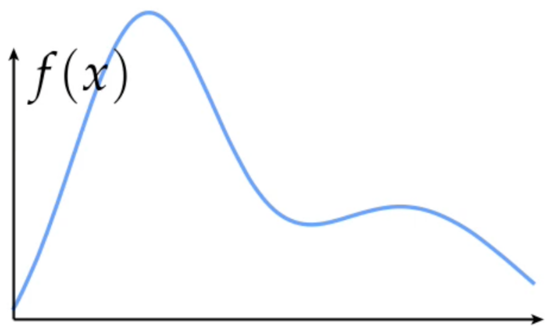
- 早些时候我们问，“向量编码了什么信息？”
- **方向 (orientation)** 和**大小 (magnitude)**
- 我们如何测量这些值?



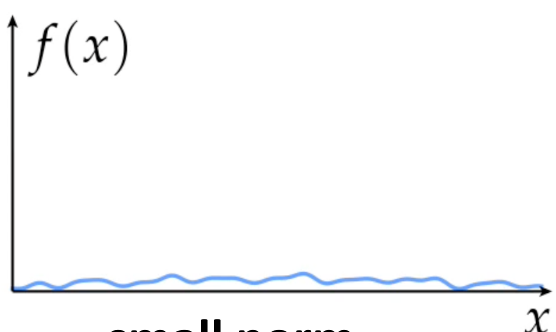
向量的范数 Norm

- **大小 (magnitude)**：对于给定的向量 **v**，我们想给它关联一个数字 |**v**|，称为它的**长度 (length)**或**范数 (norm)**
- 直观地说，范数应该捕捉向量“大”的程度



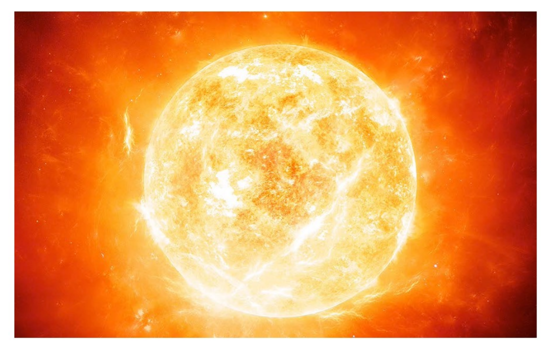


big norm



small norm

small norm



big norm

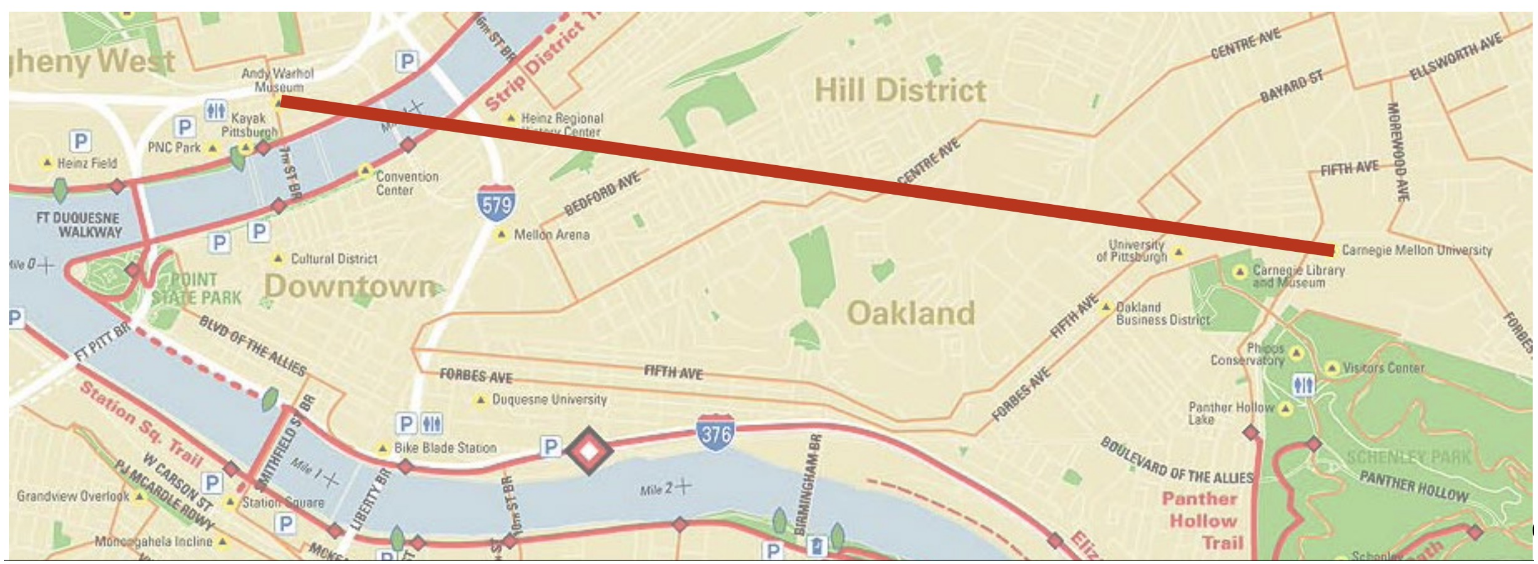
长度的自然属性 - 非负性

- 向量的范数（或长度）满足什么性质?
- 首先，它不应该是负数

$$|\mathbf{u}| \geq 0$$

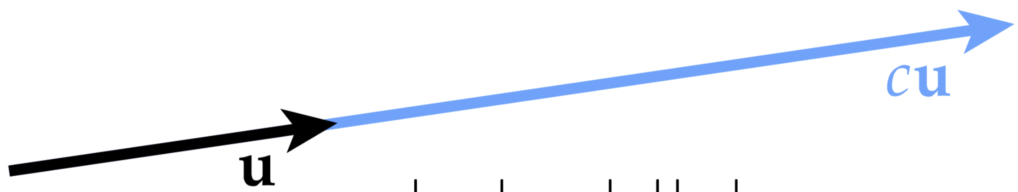
- 并且只有零向量的长度是 0

$$|\mathbf{u}| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$$



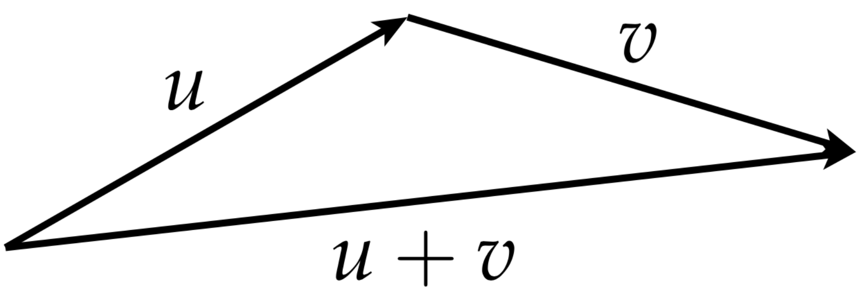
长度的自然属性

□然后，用因子 c 缩放向量，其范数应该按相同的量缩放



$$|c\mathbf{u}| = |c||\mathbf{u}|$$

□最后，我们知道两点之间的最短路径总是沿着一条直线



$$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u} + \mathbf{v}|$$

□该性质也被称为“三角不等式 (Triangle inequality)”

范数 - 正式定义

- 范数是一个可以为任意向量分配一个数值并满足以下性质的函数，适用于所有向量 $\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ 和所有标量 a

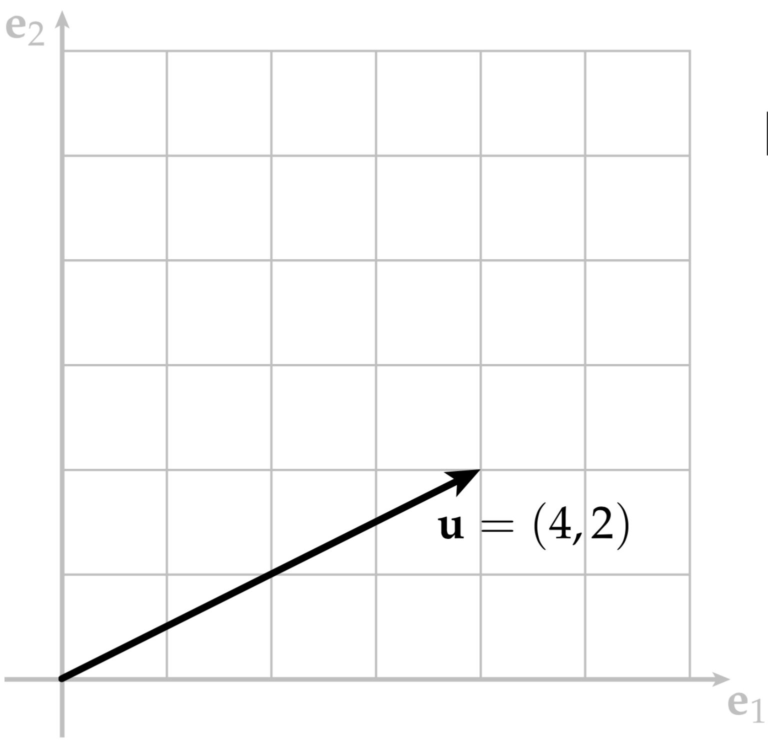
  - $|\mathbf{v}| \geq 0$
  - $|\mathbf{v}| = 0 \quad \iff \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$
  - $|a\mathbf{v}| = |a||\mathbf{v}|$
  - $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u} + \mathbf{v}|$

- 每一条规则都可以通过画一幅具体的几何图来解释

笛卡尔坐标系中的欧氏范数

- **标准范数 (standard norm)** 是 n 维向量的**欧几里得范数 (Euclidean norm)**

$$|\mathbf{u}| = |(u_1, \ldots, u_n)| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$



Example: $\mathbf{u} = (4, 2)$

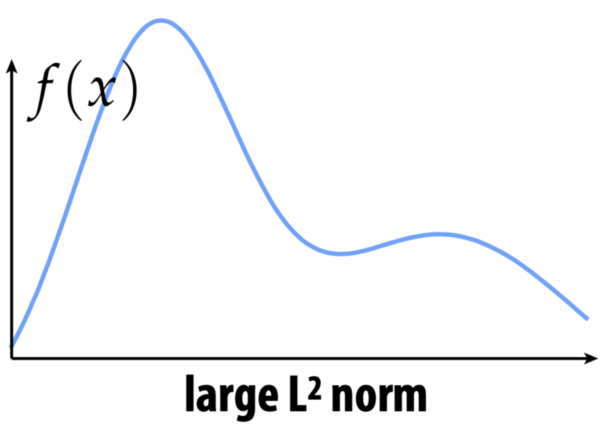
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

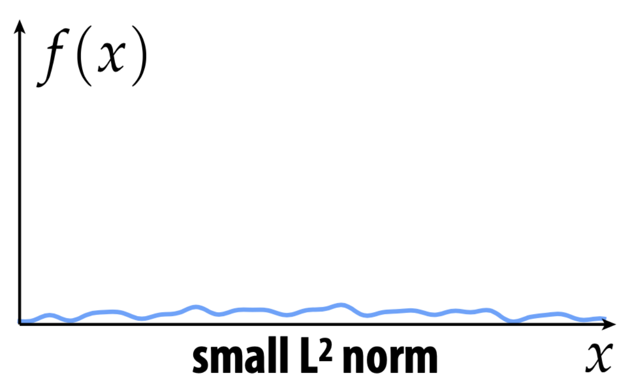
函数的 L^2 范数

- 一个更少见的范数，L^2 范数，其测量了一个函数的“大小”
- 考虑单位区间 [0,1] 上的实值函数，其平方具有定义良好的积分。其 L^2 范数定义为：

$$||f|| := \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 \, dx}$$

- 与欧式范数没有太大区别，只是用积分代替了和





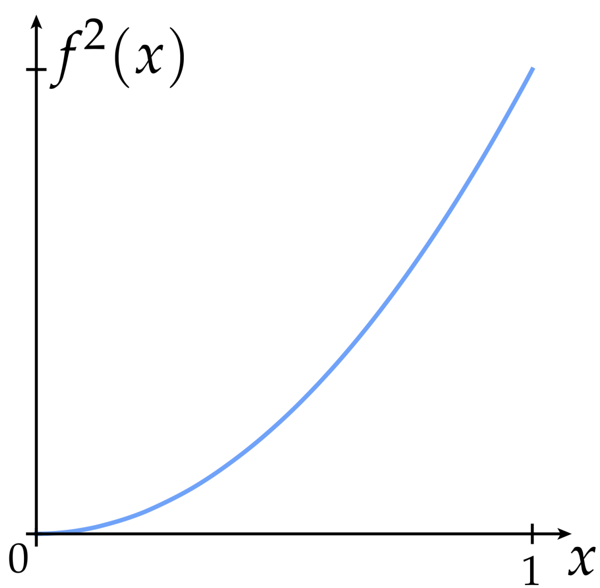
函数的 L^2 范数 - 举例

- 考虑一个定义在单位区间 [0, 1] 的函数 $f(x) := x\sqrt{3}$

$$||f|| := \sqrt{\int_0^1 f(x)^2\, dx}$$

- Q: 该函数的 L^2 范数是什么?
- A:

$$||f||^2 = \int_0^1 3x^2\, dx = \left[\, x^3 \,\right]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$$

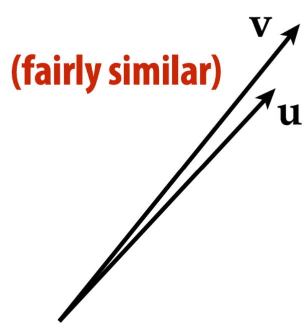


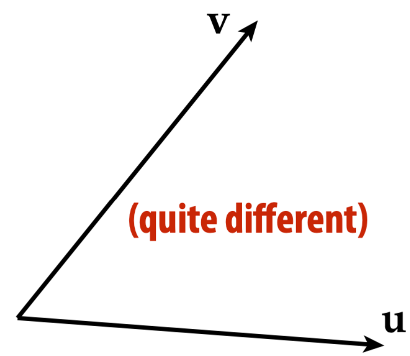
$$\Rightarrow ||f|| = \sqrt{1} = 1.$$

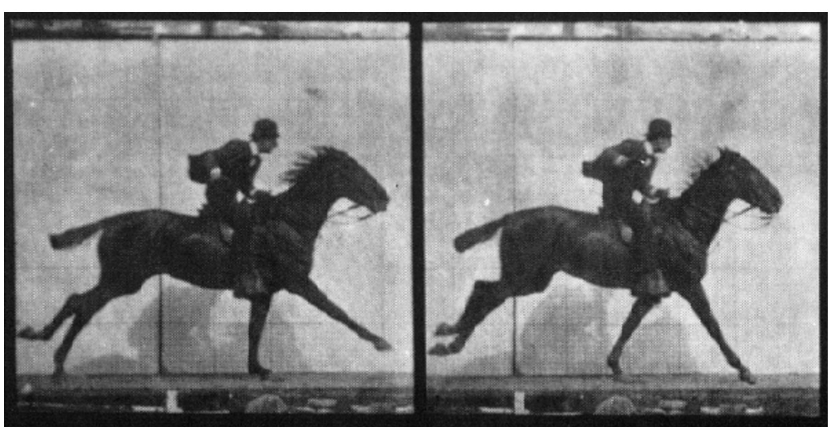
为清楚起见，我们使用 $\|\cdot\|$ 表示函数的范数，使用 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 空间中向量的范数

内积 Inner product - 动机

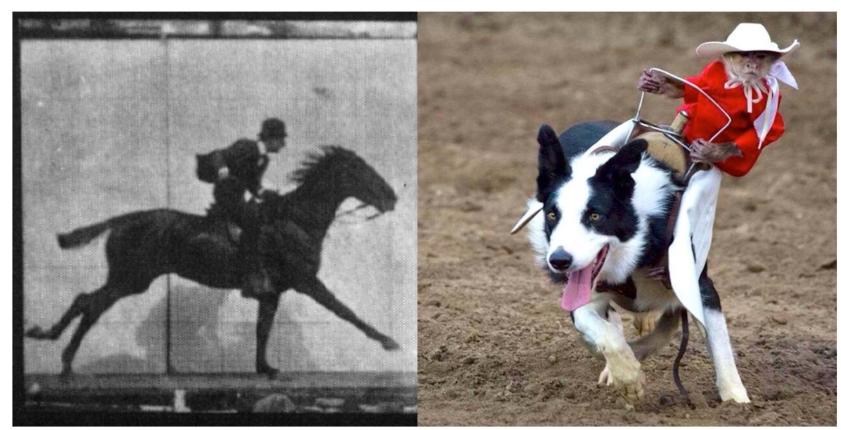
- 我们还能测量什么？
- 除了长度，我们说向量还有方向属性
- 正如**范数**测量长度一样，**内积**测量向量“对齐”的程度







(fairly similar)



(quite different!)

这两张图相似吗?

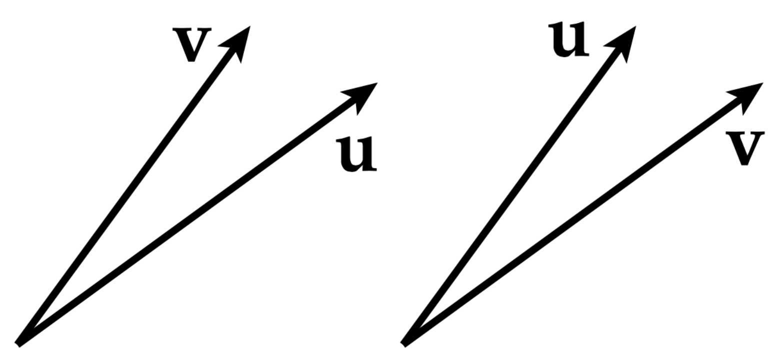

50%
10:04 am
女朋友
Today
今晚一起去吃火锅？！
嗯嗯


50%
10:04 am
女朋友
Today
今晚一起去吃火锅？！
嗯

内积 - 对称性

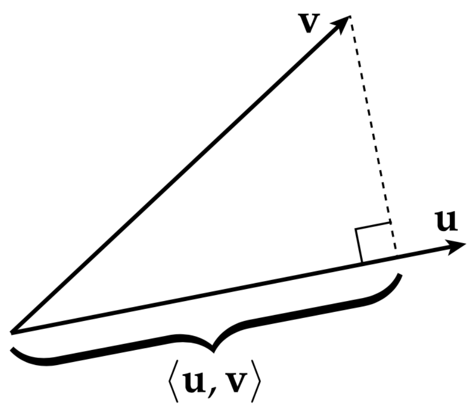
- 使用符号 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (有些也写成 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$) 来表示内积，有时也称为**标量积 scalar product** 或**点积 dot product**
- 当测量两个向量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 的对齐 (alignment) 程度时，你会期望哪些性质?
- 一个显而易见的性质是：**顺序不重要**
  - $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的对齐和 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{u}$ 的对齐是一样的：

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$



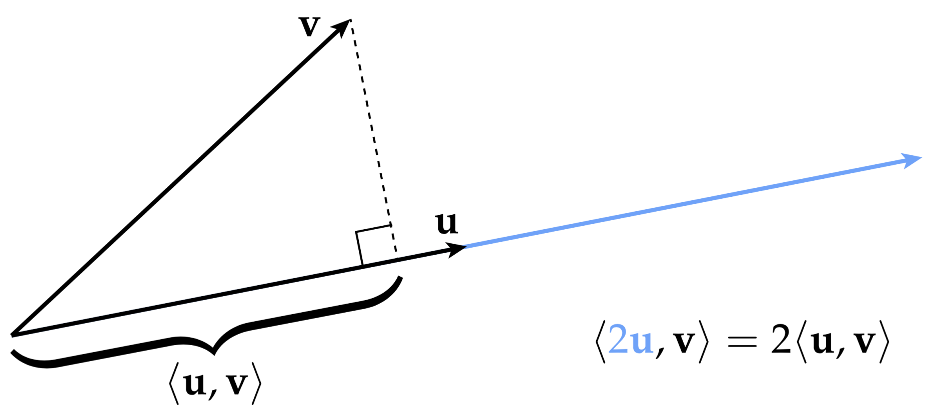
内积 - 投影和伸缩

- 对于单位向量 $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$，内积测量一个向量沿另一个向量方向的程度



这个属性是不是对称的?

- 如果我们缩放任一向量，内积也会缩放



内积 - 非负性

□此外，**向量应始终与自身对齐**

- 向量与自身的内积是正的（或至少是非负的）

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$$

□对于单位长度的向量，我们有

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1$$

□**Q**：一般来说，$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ 必须等于什么？

□**A**：令 $\hat{\mathbf{u}} := \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$ (单位向量)，我们有

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle |\mathbf{u}|\hat{\mathbf{u}}, |\mathbf{u}|\hat{\mathbf{u}} \rangle = |\mathbf{u}|^2 \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = |\mathbf{u}|^2 \cdot 1 = |\mathbf{u}|^2$$

内积 - 正式的定义

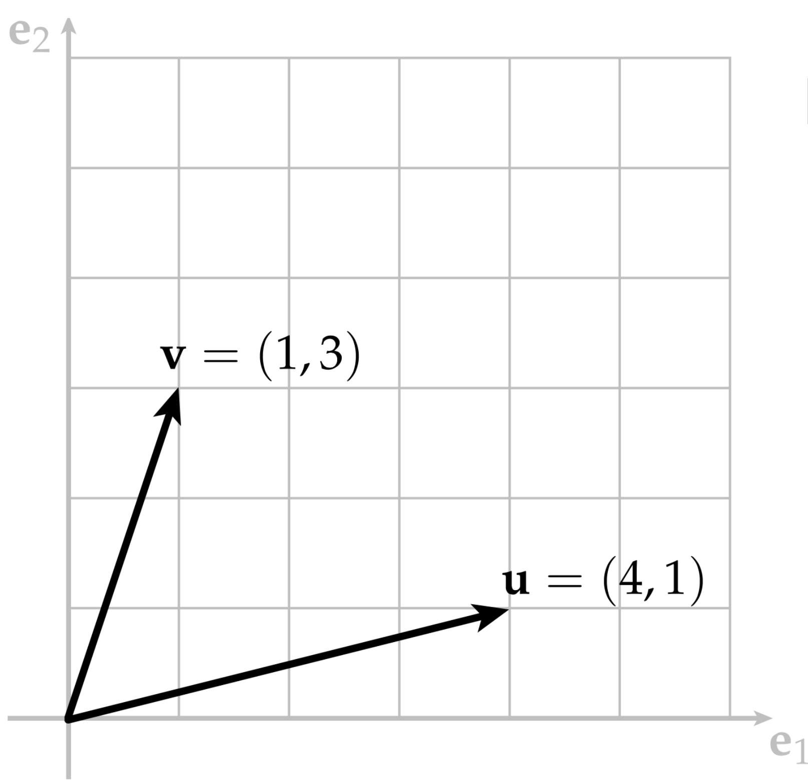
- 内积是将任意两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 映射到一个数字 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 的函数，满足以下属性

  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$
  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$
  - $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
  - $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

笛卡尔坐标系中的内积

- 标准内积 (standard inner product)，即欧几里得内积 (Euclidean inner product)，对两个 n 维向量进行运算

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$



Example:

$$\mathbf{u} = (4, 1)$$
$$\mathbf{v} = (1, 3)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 7$$

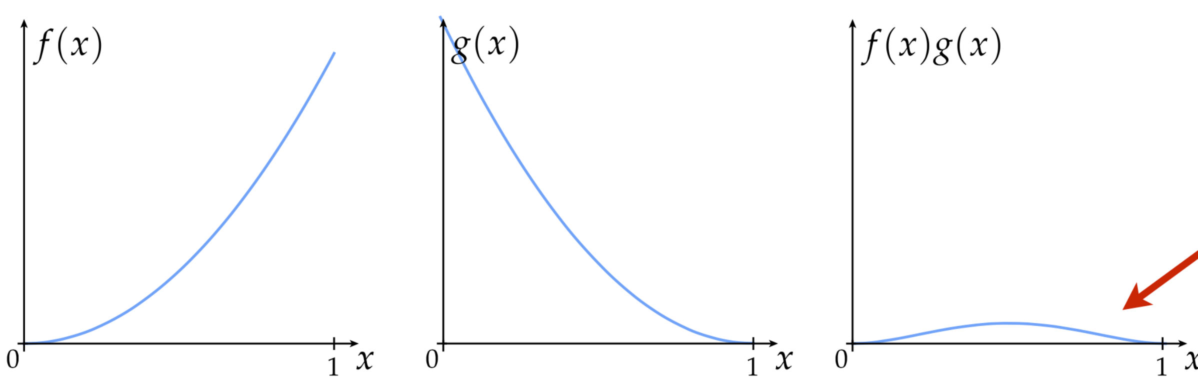
函数的 L^2 内积 - 例子

- 就像函数有范数一样，我们也可以定义一个内积来衡量两个函数“对齐”的程度
- 例如，对于单位区间上的平方可积函数：

$$\langle\langle f, g\rangle\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

Example: $f(x) := x^2, \quad g(x) := (1-x)^2$

$$\langle\langle f, g\rangle\rangle = \int_0^1 x^2(1-x)^2\, dx = \cdots = \frac{1}{30}$$

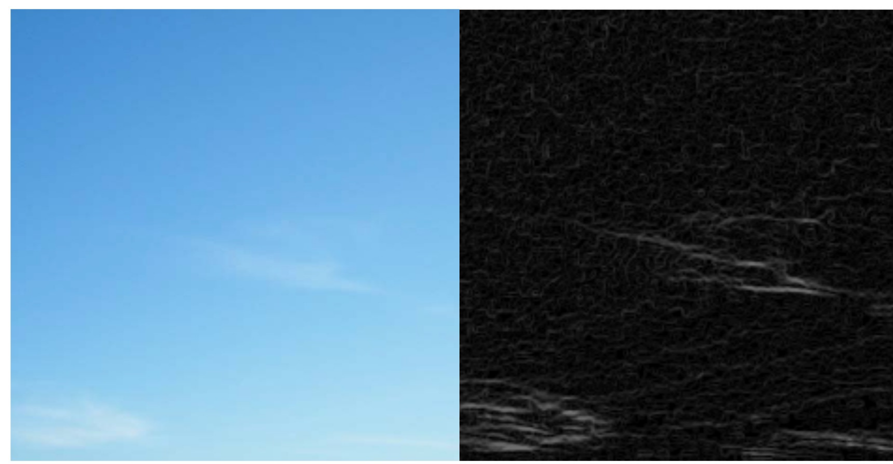


small number; functions don't "line up" much!

其他范数和内积

- 有多种方法测量一个信号“有多大”（范数）或两个信号“对齐得有多好”（内积）
- 范数或内积的选择取决于具体的应用
- 例如，假设我们想要判断图像是否包含“有趣的东西”
- 可以尝试测量**导数的范数（捕捉边缘）**：

暗淡的　**大**



明亮的　**小**

Questions?

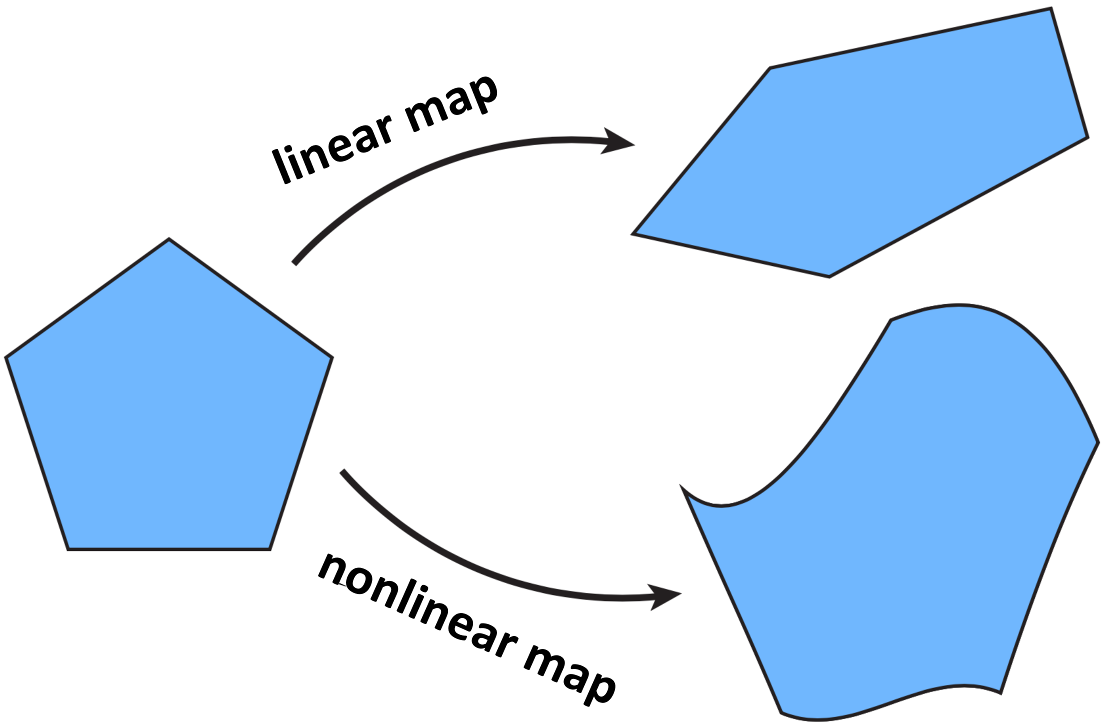
线性映射

- 一开始我们说线性代数研究**向量空间 (vector spaces)** 及其之间的**线性映射 (linear maps)**
- 我们已经学习了如何处理向量空间：范数、内积...
- 那什么是线性映射？它对图形学有什么用？

- 先回答第二个问题：
  - 计算机易于求解线性方程组
  - 基本变换（旋转、平移、缩放）可以表示为线性映射
  - 所有映射都可以近似为短距离/短时间内的线性映射（泰勒定理，Taylor’ theorem）
    - 这种近似适用于所有几何体、动画、渲染和图像处理

线性映射 - 几何定义

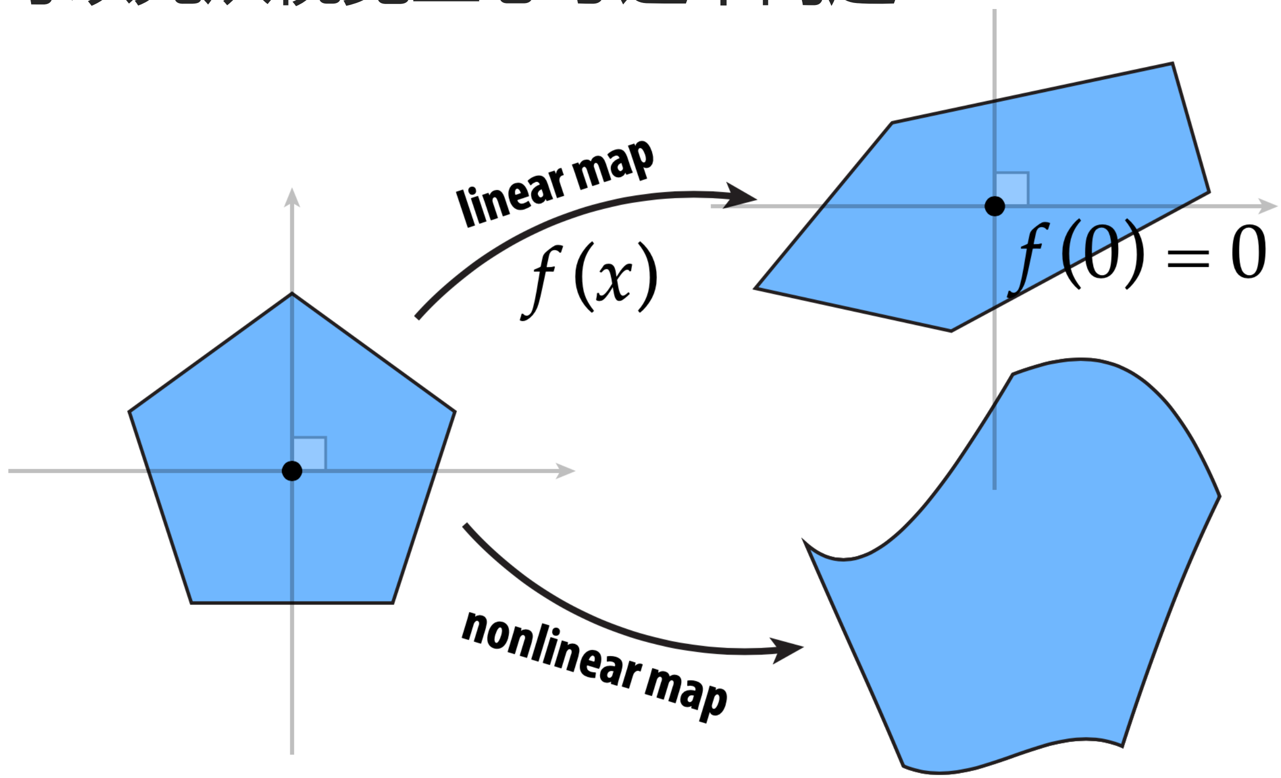
- 线性映射是什么？
- 我们可以先从视觉上思考这个问题



Key idea: *linear maps take lines to lines**

线性映射 - 几何定义

- 线性映射是什么?
- 我们可以先从视觉上思考这个问题



Key idea: *linear maps take lines to lines**

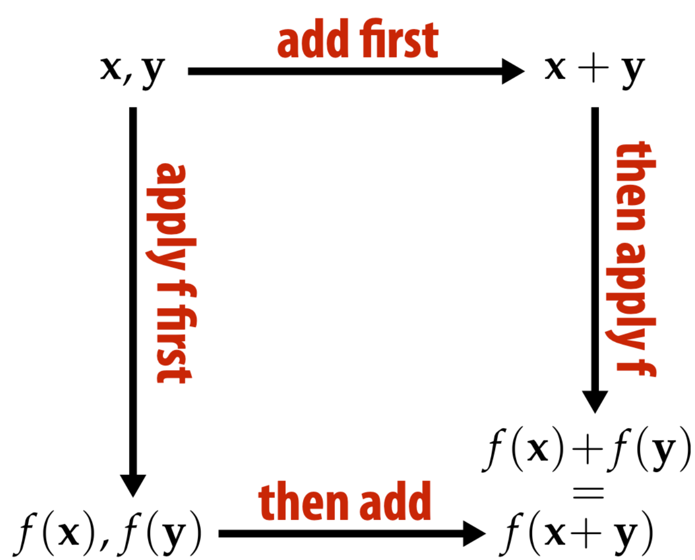
***...while keeping the origin fixed.**

线性映射 - 代数定义

- 映射 f 是线性的，如果它将向量映射到向量（不一定是相同维度），并且对于所有向量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 和标量 a，有

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$
$$f(a\mathbf{u}) = af(\mathbf{u})$$

- 即，不管是先将向量相加再应用映射，还是先映射再相加（缩放也一样），结果都相同：

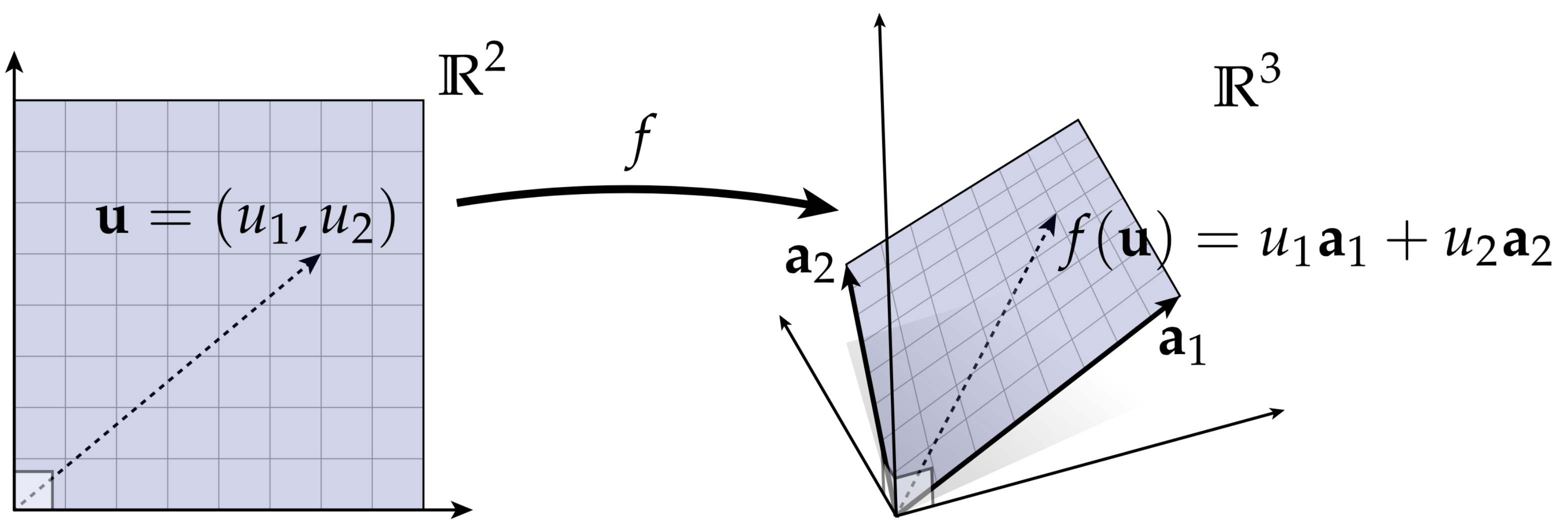


坐标系中的线性映射

- 对于 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 之间的映射（例如 2D 到 3D 的映射），我们可以给出更明确的定义
- 一个映射是线性的，当且仅当它可以表示为

$$f(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{i=1}^{m} u_i \mathbf{a}_i$$

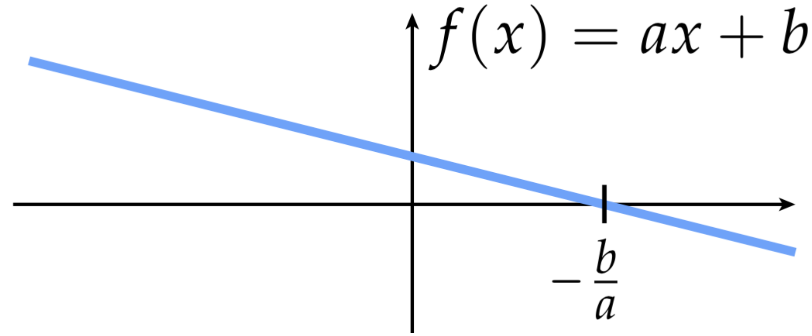
- 换句话说，它是一组固定向量 $\boldsymbol{a}_i$ 的线性组合



Q: Is $f(x) := ax + b$ a linear function?

线性 (linear) 映射和仿射 (affine) 映射

- 答案是**否定**的（但很容易出错），因为该函数是一条直线



- 然而，它不是一条穿过原点的线，即 $f(0) \neq 0$
- 另一种判断不是线性的方式：$f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$

$$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) + b = ax_1 + ax_2 + b$$

$$f(x_1) + f(x_2) = (ax_1 + b) + (ax_2 + b) = ax_1 + ax_2 + 2b$$

- 这个函数被称为 affine 函数，而不是 linear 函数
- 之后我们将学习通过**齐次坐标**将仿射函数转换为线性函数

线性方程组

- 线性方程组 (System of linear equations)：一组方程，左边是线性函数，右边是常数，比如

$$\begin{aligned} x+2y &= 3 \\ 4x+5y &= 6 \end{aligned}$$

- 未知变量有时被称为**自由度 (degrees of freedom)**；方程有时被称为**约束 (constraints)**
- 目标：求解同时满足所有约束的自由度：

$$x = 3-2y$$

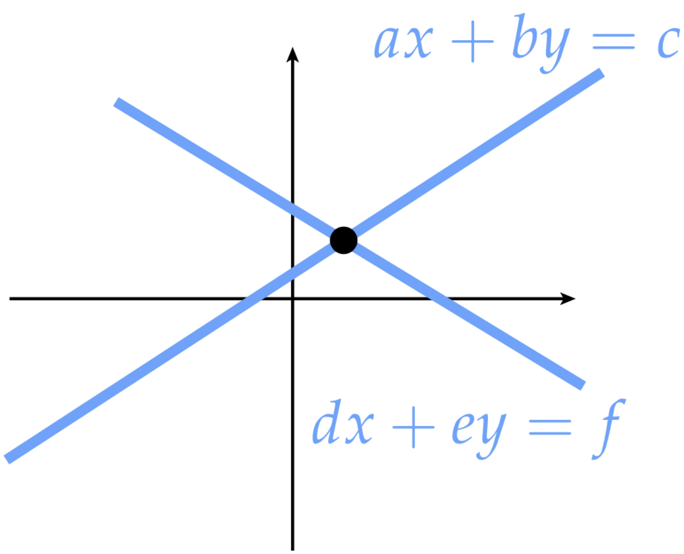
$$4(3-2y)+5y = 6$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}}$$

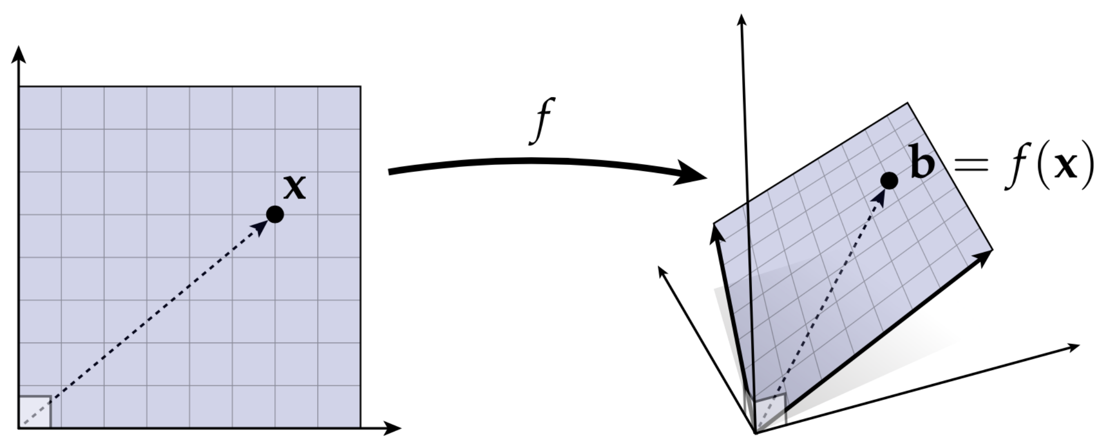
可视化的线性系统

- 线性系统可以表示许多不同的任务（模拟、图像处理等）
- 对于任何线性系统，都存在一些很好的可视化模型：

Find the point where two lines meet:



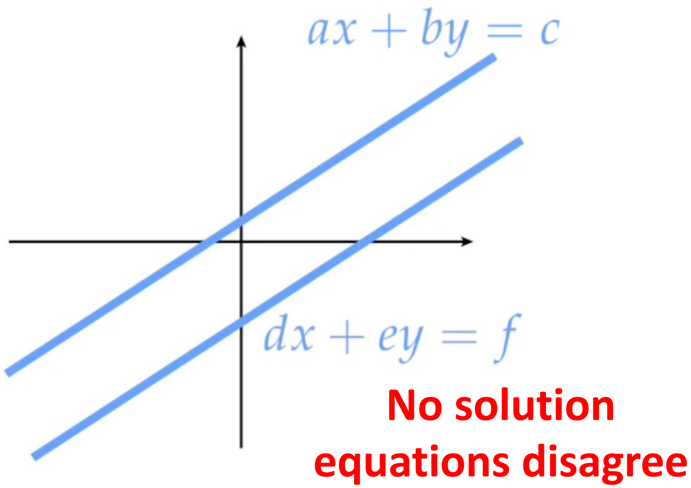
GIVEN a point b, FIND the point x that maps to it:

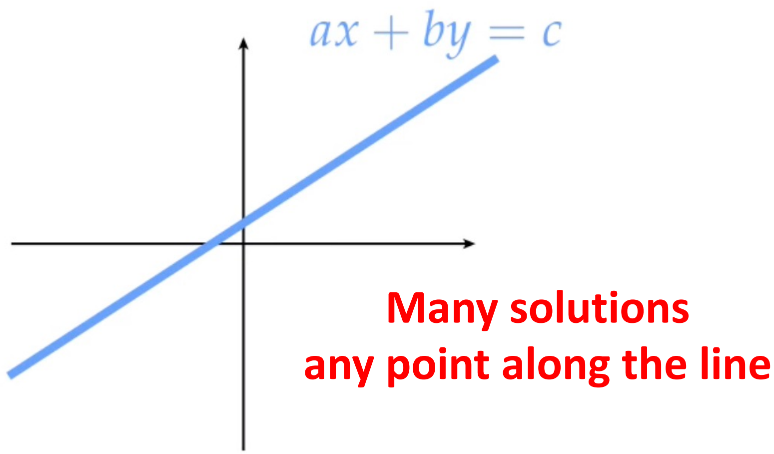


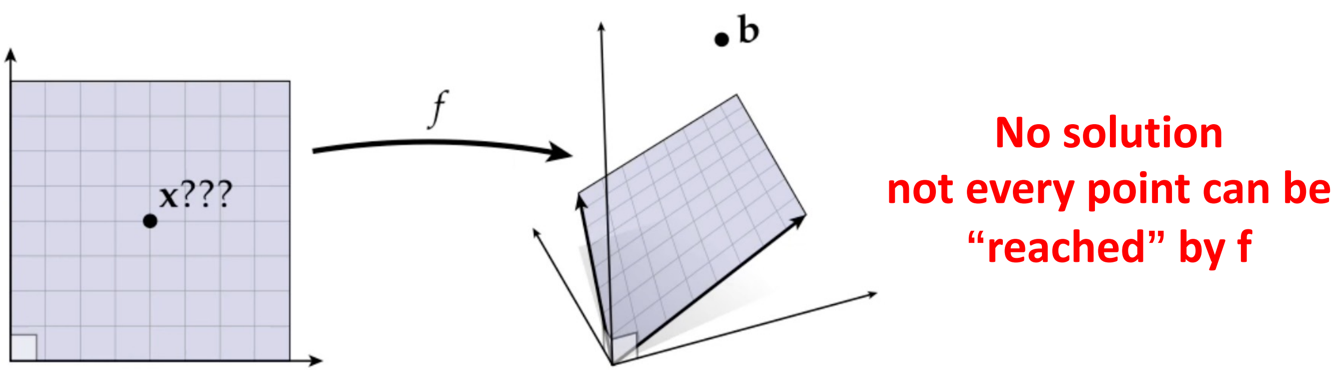
求解线性系统

解的唯一性 uniqueness 和存在性 existence

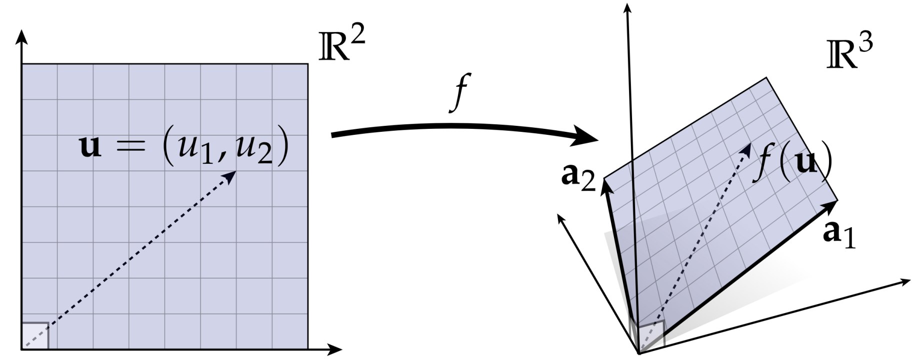
- 并不是所有的线性系统都能求解
- 线性系统也可能有多个解







用矩阵表示线性映射



□假设我有如下线性变换

$$f(\mathbf{u}) = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2$$

□Q：如何把它编码成矩阵？

□A：直接向量 **a** 变成矩阵的列：

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \\ a_{1,z} & a_{2,z} \end{bmatrix}$$

转换成矩阵乘法的优点：
- **符号操作**
- **数值计算加速**

□原本的线性映射可以用矩阵乘法表示

$$\begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \\ a_{1,z} & a_{2,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,x}u_1 + a_{2,x}u_2 \\ a_{1,y}u_1 + a_{2,y}u_2 \\ a_{1,z}u_1 + a_{2,x}u_2 \end{bmatrix} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2$$

中山大學 软件工程学院
SUN YAT-SEN UNIVERSITY SCHOOL OF SOFTWARE ENGINEERING

谢谢

陈壮彬
软件工程学院
chenzhb36@mail.sysu.edu.cn