Непрерывные случайные величины - II

Математические основы искусственного интеллекта

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики
и компьютерных наук

УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

На данном практическом занятии разбираются темы: Непрерывные случайные величины (НСВ). Функция и плотность распределения НСВ. Вероятностный смысл функции и плотности распределения. Числовые характеристики НСВ: моменты, математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, асимметрия, эксцесс.

Задание № 1

Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [1;4]. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ. Построить графики найденных функций.

Решение. Найдем сначала плотность распределения. Поскольку случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке [1;4], ее плотность задается следующим образом

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ a, & \text{если } 1 < x \leqslant 4, \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Задача сводится к отысканию параметра a. Воспользуемся свойством плотности распределения

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1.$$

Получим

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = \int\limits_{1}^{4} a\,dx = a(4-1) = 3a.$$

Откуда $a = \frac{1}{3}$. Значит, плотность распределения имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}, & \text{если } 1 < x \leqslant 4, \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Предложим два способа найти функцию распределения.

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$$

Поскольку плотность распределения задана по разному на трех интервалах, рассмотрим эти интервалы последовательно. При $x \in (-\infty; 1]$ имеем

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

При $x \in (1; 4]$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int\limits_{1}^{x} \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}t\Big|_{1}^{x} = \frac{1}{3}(x-1).$$

При $x \in (4; \infty)$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int\limits_{1}^{4} \frac{1}{3}\,dt + \int\limits_{4}^{+\infty} 0\,dt =$$

$$0 + \frac{1}{3}(4-1) + 0 = 1.$$

Второй способ основан на знании свойств функции распределения равномерной случайной величины.
При $x \in (-\infty; 1]$ $F_\xi(x) = C_0$, где $C_0 = const$. Исходя из того, что $F_\xi(-\infty) = 0$, получаем $C_0 = 0$. При $x \in (4; +\infty)$ $F_\xi(x) = C_1$, где $C_1 = const$. Исходя из того, что $F_\xi(+\infty) = 1$, получаем $C_1 = 1$. Найдем теперь функцию распределения на промежутке (1;4], где она имеет вид $F_\xi(x) = kx + b$. График функции $F_\xi(x)$ на промежутке (1;4] представляет из себя часть прямой. Данная прямая проходит через точки с координатами (1;0) и (4;1). Напомним, что уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Значит, в нашем случае имеем

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-0}{1-0}, \ \frac{x-1}{3} = y.$$

Откуда $F_\xi(x) = \frac{x-1}{3}, \ x \in (1; 4]$.Значит, функция распределения имеет вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}(x-1), & \text{если } 1 < x \leqslant 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Задание № 2

Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x \leqslant 1, \\ a\sqrt{x} + b, & \text{если } 1 < x \leqslant 4, \\ d, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Найти параметры a, b, c, d и плотность распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; 2)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

Решение. Известно, что $F_\xi(-\infty) = 0$. По условию $F_\xi(-\infty) = c$, сопоставляя эти два равенства, получаем $c = 0$. Так же известно, что $F_\xi(+\infty) = 1$. По условию $F_\xi(+\infty) = d$, откуда получаем $d = 1$.

Напомним определение непрерывной функции. *Функция $f(x)$ определенная на множестве действительных чисел называется непрерывной в точке x_0, если предел функции при стремлении аргумента к x_0 совпадает со значением функции в этой точке.* Краткая запись: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

В силу непрерывности функции распределения случайной величины ξ

$$\lim_{x\to 1+0} F_\xi(x) = F_\xi(1), \text{ т.е. } a\sqrt{1} + b = 0,$$

$$\lim_{x\to 4+0} F_\xi(x) = F_\xi(4), \text{ т.е. } a\sqrt{4} + b = 1.$$

Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a + b & = 0 \\ 2a + b & = 1. \end{cases}$$

Получаем $a = 1$, $b = -1$.

Теперь найдем плотность распределения. Плотность распределения непрерывной случайной величины есть производная функции распределения этой случайной величины. Краткая запись: $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{если } 1 < x \leqslant 4, \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания в заданный промежуток. Как указывалось в решении задач №1 и №2, *вероятность появления случайной величины ξ в интервале $[a; b)$, полузамкнутом слева, равна разности значений функции распределения в концах интервала*, т. е.

$$P(a \leqslant \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

В нашем случае получим

$$P(0 \leqslant \xi < 2) = F_\xi(2) - F_\xi(0) = \sqrt{2} - 1 - 0 = \sqrt{2} - 1.$$

Математическое ожидание

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int\limits_1^4 x \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - M^2(\xi) = \int\limits_1^4 x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx - \left(\frac{7}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^4 x^{3/2}\,dx - \frac{49}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_1^4 - \frac{49}{9} = \frac{1}{5}(32-1) - \frac{49}{9} = \frac{34}{45}.$$

Задание для самостоятельной работы

1. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [-1;2]. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ. Построить графики найденных функций.

2. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x \leqslant -1, \\ ax + b, & \text{если } -1 < x \leqslant 2, \\ d, & \text{если } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

   Найти параметры a, b, c, d и плотность распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; 1+\sqrt{5})$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

3. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [-2;1]. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ. Построить графики найденных функций.

4. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x \leqslant 1, \\ ax^2 + b, & \text{если } 1 < x \leqslant 9, \\ d, & \text{если } x > 9. \end{cases}$$

Найти параметры a, b, c, d и плотность распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(1-\sqrt{5}; 2)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.