Математические основы искусственного интеллекта
Условная вероятность. Формула полной вероятности

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021

Задачи чуть посложнее

1. В одном маленьком французском городке полиция разыскивает бродягу. Вероятность того, что он находится в одном из восьми баров этого городка, безразлично в каком, равна 0,8. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. С какой вероятностью он будет найден в восьмом баре?
2. В вершинах правильного тетраэдра сидят муравьи (по одному в каждой вершине). В некоторый момент времени они начинают ползти по ребрам в одну из соседних вершин. Какова вероятность того, что какие-то два муравья встретятся на ребре (не в вершине)?

Задачи чуть посложнее

3. Двое по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадут подряд два орла. Найдите вероятность выигрыша для первого игрока.
4. Монету подбрасывают несколько раз до тех пор, пока не выпадут подряд три орла или две решки. Какова вероятность того, что бросания завершатся выпадением трех орлов? Вероятности выпадения орла и решки равны $1/2$, результаты бросков независимы один от другого.
5. По паутине, имеющей вид правильного шестиугольника, разбитого на правильные треугольники, двигается муха. В середине паутины (точка O) сидит паук. На каждой развилке нитей паутины муха выбирает маршрут случайным образом, в частности, может повернуть назад. Если муха попадает в точку O, то паук её съедает. Какова вероятность того, что начав прогулку по паутине в вершине шестиугольника, муха в нее вернется?

Решение задачи № 1

В одном маленьком французском городке полиция разыскивает бродягу. Вероятность того, что он находится в одном из восьми баров этого городка, безразлично в каком, равна 0,8. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. С какой вероятностью он будет найден в восьмом баре?

Решим более общую задачу, заменив в условии 8 на n, а 0,8 на p. Рассмотрим события A_i: «бродяга находится в i-м баре», $i = 1, \dots, n$, и B: «бродяга не в баре». Вычислим условную вероятность

$$\mathrm{P}(A_n \,/\, \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_{n-1}}) = \mathrm{P}(A_n \,/\, (A_n + B)) = \frac{\mathrm{P}(A_n)}{\mathrm{P}(A_n + B)} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}(A_n)}{\mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(B)} = \frac{p/n}{p/n + 1 - p} = \frac{p}{n(1-p) + p}.$$

Решение задачи № 2

Пусть A_i — событие, состоящее в том, что на i-м ребре состоится встреча муравьев, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Нужно найти вероятность суммы этих событий. Одновременно может произойти не более двух из них. Поэтому

$$P(A1 + A2 + \ldots + A6) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j).$$

Очевидно, $\forall i \; P(A_i) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
Если события A_i и A_j совместны (а таких пар ровно три), то $P(A_i A_j) = 1/81$. Стало быть,

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_6) = 6/9 - 3/81 = 17/27.$$

Решение задачи № 3

Пусть событие A означает победу первого игрока, а $P(A) = p$
Существование вероятности события А обосновывается стандартным образом — как предела монотонной ограниченной последовательности вероятностей победы после первых n бросков.

Рассмотрим полную группу событий $H_1, H_2, \dots, H_6$ (эти события описаны в приводимой ниже таблице последовательностью результатов подбрасывания монеты).

Для каждого i вычислим $P(H_i)$ и $P(A/H_i)$.

H_i	ООО	ООРО	ООРР	ОРО	ОРР	Р
$P(H_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$P(A/H_i)$	1	0	p	1	$1-p$	$1-p$

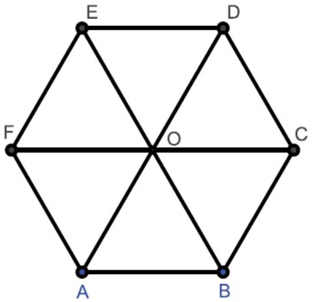
Решение задачи № 3

По формуле полной вероятности,

$$p = P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{8} + \frac{p}{16} + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)(1-p).$$

Отсюда p = 14/25.

Решение задачи № 5



Пусть паук сидел в вершине A. Обозначим через r вероятность интересующего нас события, а через P_{XY} вероятность попадания из точки X в точку Y.

Пусть $P_{BA} = x$, $P_{CA} = y$, $P_{DA} = z$.

Из соображений симметрии следует, что

$P_{FA} = P_{BA} = x$, $P_{EA} = P_{CA} = y$.

Ясно также, что $P_{OA} = 0$.

По формуле полной вероятности

$$r = \frac{1}{3}P_{BA} + \frac{1}{3}P_{FA} + \frac{1}{3}P_{OA} = \frac{2}{3}x;$$

$$P_{BA} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}P_{CA}; \quad P_{CA} = \frac{1}{3}P_{BA}+\frac{1}{3}PDA; \quad P_{DA} = \frac{1}{3}PCA+\frac{1}{3}P_{EA}.$$

Значит, имеем систему уравнений

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y; \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z; \quad z = \frac{2}{3}y.$$

Решив эту систему, получим $x = 7/18$, откуда $r = 7/27$.