Математические основы искусственного интеллекта
Условная вероятность

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021

Условная вероятность. Определение

Определение

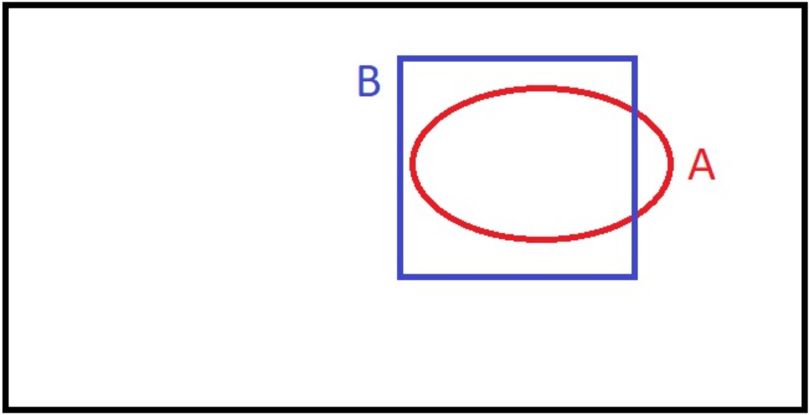
Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Условная вероятность определена только в случае, когда $\mathrm{P}(B) > 0$.

Следует отличать условную вероятность одного события при осуществлении другого от вероятности им одновременно произойти.

Условная вероятность. Геометрический смысл



Какая геометрическая интерпретация $\mathrm{P}(A|B)$ и $\mathrm{P}(B|A)$?

Условная вероятность. Пример

Игральная кость подбрасывается один раз. Известно, что выпало менее трех очков. Какова при этом вероятность того, что выпало четное число очков?

Пусть событие $B = \{1, 2, 3\}$ состоит в том, что выпало менее трех очков, событие $A = \{2, 4, 6\}$ — выпало четное число очков. Как понимать вероятность события A, если известно, что B случилось? Знаем, что произошло событие B, но все равно не знаем, что именно выпало на кости. Однако теперь возможностей осталось только три: могло выпасть 1, 2 или 3 очков.
Событию A из этих равновозможных исходов благоприятен единственный исход: выпадение двух очков. Поэтому искомая вероятность равна $1/3$.

Тоеремы об условной вероятности

Теорема

Если $\mathrm{P}(B) > 0$ и $\mathrm{P}(A) > 0$, то

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B \mid A).$$

Теорема

Для любых событий $A_1, \ldots, A_n$ верно равенство:

$$\mathrm{P}(A_1 \ldots A_n) =$$

$$= \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1}),$$

если все участвующие в нем условные вероятности определены.

Все условные вероятности в теореме определены тогда и только тогда, когда $\mathrm{P}(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$.

Определение

События A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Из колоды в 36 карт наугад берут одну. Независимы ли события «вынут туз» и «вынута пиковая карта»?

Игральный кубик бросают шесть раз. Независимы ли события «выпала ровно одна единица» и «выпала ровно одна тройка»?

Бросают один раз игральный кубик и монетку. Независимы ли события «выпал орел» и «выпала цифра три»?

Естественно считать события A и B независимыми, когда условная вероятность A при условии, что B произошло, остается такой же, как и безусловная.

Утверждение

Пусть $\mathrm{P}(B) > 0$. Тогда события A и B независимы тогда и только тогда, когда $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$.

Утверждение

Пусть события A и B несовместны. Тогда независимыми они будут только в том случае, если $\mathrm{P}(A) = 0$ или $\mathrm{P}(B) = 0$.

Утверждение

Если события A и B независимы, то независимы и события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Доказательство. Так как $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, и события $A \cap B$ и $A \cap \overline{B}$ несовместны, то $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B})$. Поэтому

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) =$$

$$= \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(\overline{B}).$$

Остальные утверждения вытекают из первого.

Если событий не два, а большее число, то выполнение равенства $\mathrm{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n)$ не означает независимости этих событий. Например, события A_1 и A_2 вполне могут оказаться зависимыми.

Пусть $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = \emptyset$ и пусть $0 < \mathrm{P}(A) < 1$.

Имеем

$$0 = \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(A_3) = 0,$$

однако события A_1 и A_2 зависимые:

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A) \neq \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) = \big(\mathrm{P}(A)\big)^2.$$

Естественно, хотелось бы независимостью нескольких событий считать такое свойство, при котором произвольные комбинации этих событий будут независимы между собой: например, независимы $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ и $A_1 \cap A_2$.

Независимость в совокупности

Определение

События $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого $1 \leq k \leq n$ и любого набора различных между собой индексов $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ имеет место равенство

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_{i_k}).$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то они попарно независимы, т. е. любые два события A_i и A_j независимы. Обратное неверно: из попарной независимости не вытекает независимость в совокупности.

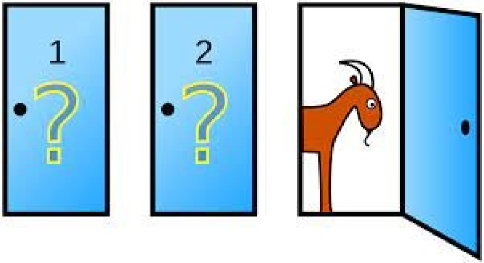
Пример Бернштейна

Рассмотрим правильный тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, синий, зеленый цвета, а четвертая грань содержит все три цвета. Событие A (B, C) означает, что выпала грань, содержащая красный (соответственно синий, зеленый) цвета.

Вероятность каждого из этих событий равна $\frac{1}{2}$, так как каждый цвет есть на двух гранях из четырех. Вероятность пересечения любых двух событий равна $\frac{1}{4}$, так как только одна грань из четырех содержит два цвета. Поэтому любые два события из трех независимы, так как $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

Но вероятность события ABC (на грани есть все три цвета) тоже равна $\frac{1}{4}$, а не $\frac{1}{8}$, т. е. события не являются независимыми в совокупности.

Американская телеигра «Let's Make a Deal»

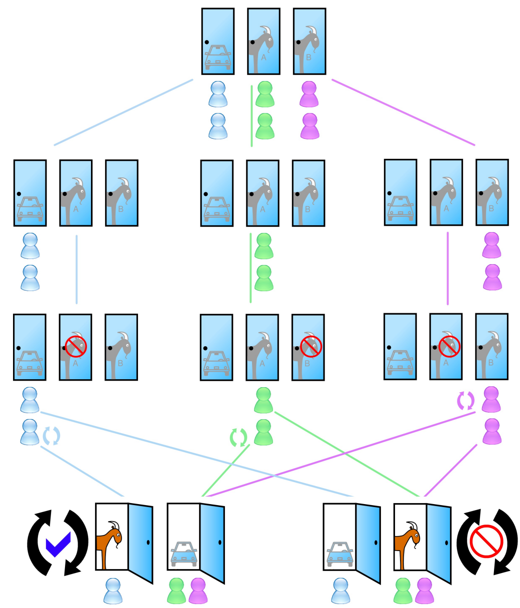


Нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями – козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2?
Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Уточняющие условия:

1. автомобиль равновероятно размещен за любой из трtx дверей;
2. ведущий знает, где находится автомобиль;
3. ведущий в любом случае обязан открыть дверь с козой (но не ту, которую выбрал игрок) и предложить игроку изменить выбор;
4. если у ведущего есть выбор, какую из двух дверей открыть (то есть, игрок указал на верную дверь, и за обеими оставшимися дверями — козы), он выбирает любую из них с одинаковой вероятностью.

Решение «Let's Make a Deal»



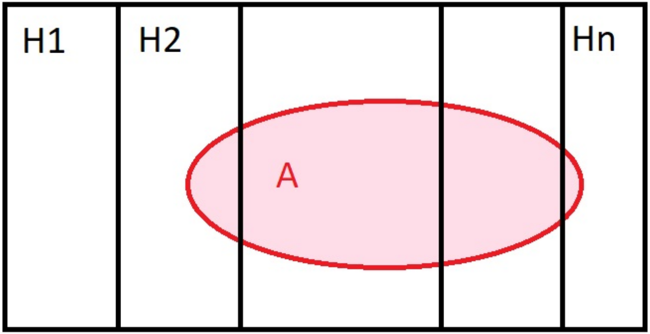
Разбиение пространства Ω

Конечный или счетный набор попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots$ таких, что $\mathrm{P}(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots,$ и $H_1 \cup H_2 \cup \ldots = \Omega$, называется полной группой событий или разбиением пространства Ω.

События $H_1, H_2, \ldots,$ образующие полную группу событий, часто называют гипотезами. При подходящем выборе гипотез для любого события A могут быть сравнительно просто вычислены как $\mathrm{P}(A|H_i)$ так и $\mathrm{P}(H_i)$.

Как, используя эти данные, посчитать вероятность события A?

Формула полной вероятности



Формула полной вероятности

Теорема

Пусть дана полная группа событий $H_1, H_2, \ldots$. Тогда вероятность любого события A равна

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(H_i)\, \mathrm{P}(A|H_i).$$

Доказательство. $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i)$,

События $A \cap H_1, A \cap H_2, \ldots,$ попарно несовместны. Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(H_i)\, \mathrm{P}(A|H_i).$$

Во втором равенстве мы использовали σ-аддитивность вероятностной меры, а в третьем — теорему умножения вероятностей.

Формула Байеса

Теорема

Пусть $H_1, H_2, \ldots$ — полная группа событий, и A — некоторое событие, вероятность которого положительна. Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k, если в результате эксперимента наблюдалось событие A, равна

$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(H_k)\,\mathrm{P}(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A|H_i)}.$$

Доказательство. По определению условной вероятности,

$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(H_k \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H_k)\,\mathrm{P}(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A|H_i)}.$$

Задача про медведя

Три охотника на медведя (дедушка, папа и внучек) пошли в лес. У каждого остался один патрон. Вдруг в кустах зашевелился медведь — все выстрелили. Вероятность попасть у охотников равна 0.9, 0.8 и 0.7, соответственно.

Если медведь останется жив (никто не попал), он в ярости бросается ловить охотников, которые в ужасе разбегаются в рассыпную. Медведь выбирает объект преслеования случайно, равновероятно. Вероятность убежать от медведя равны 0.3, 0.5 и 0.7, соответственно.

Какова вероятность, что дедушка с охоты не вернется?

Три охотника на медведя (дедушка, папа и внучек) пошли в лес. Вероятность попасть у охотников равна 0.9, 0.8 и 0.7, соответственно. Вдруг в кустах что-то зашевилилось — все выстрелили. Судебно медицинский эксперт в теле грбника нашел две пули. На суде внучек заявл:

— Я стреляю хуже всех, а потому вероятность того, что я попал меньше 0.5.

Прав ли внучек?

Задачи простые

1. Из 30 стрелков 12 попадает в цель с вероятностью 0,6, 8 — с вероятностью 0,5 и 10 – с вероятностью 0,7. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?
2. В первой и в третьей группах одинаковое число студентов, а во второй – в 1,5 раза меньше, чем в первой. Количество отличников составляет 9% в первой, 4% во второй и 6% в третьей группе.
   а) Найти вероятность того, что случайно вызванный студент – отличник.
   б) Случайно вызванный студент оказался отличником. Найти вероятность того, что студент учится в третьей группе.

1. В одном маленьком французском городке полиция разыскивает бродягу. Вероятность того, что он находится в одном из восьми баров этого городка, безразлично в каком, равна 0,8. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. С какой вероятностью он будет найден в восьмом баре?
2. В вершинах правильного тетраэдра сидят муравьи (по одному в каждой вершине). В некоторый момент времени они начинают ползти по ребрам в одну из соседних вершин. Какова вероятность того, что какие-то два муравья встретятся на ребре (не в вершине)?

3. Двое по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадут подряд два орла. Найдите вероятность выигрыша для первого игрока.
4. Монету подбрасывают несколько раз до тех пор, пока не выпадут подряд три орла или две решки. Какова вероятность того, что бросания завершатся выпадением трех орлов? Вероятности выпадения орла и решки равны $1/2$, результаты бросков независимы один от другого.
5. По паутине, имеющей вид правильного шестиугольника, разбитого на правильные треугольники, двигается муха. В середине паутины (точка O) сидит паук. На каждой развилке нитей паутины муха выбирает маршрут случайным образом, в частности, может повернуть назад. Если муха попадает в точку O, то паук её съедает. Какова вероятность того, что начав прогулку по паутине в вершине шестиугольника, муха в нее вернется?

Байесовская таблица обновления

англ. Bayesian update table

В ящике лежат пять костей, у которых соответственно 4, 6, 8, 12 и 20 грани. Из ящика взяли одну кость (неизвестно какую), бросили ее. Выпало 13. Как оценить вероятности вытаскивания каждого вида костей.
Тот же вопрос, если выпало 5.
Какова вероятность того, что во втором броске выпадет 5, если в первом броске выпало 4?

Пусть A — событие состоящее в том, что выпало 13.

H	$\mathrm{P}(H)$	$\mathrm{P}(A\|H)$	$\mathrm{P}(A\|H)\,\mathrm{P}(H)$	$\mathrm{P}(H\|A)$
H_4	$1/5$	0	0	0
H_6	$1/5$	0	0	0
H_8	$1/5$	0	0	0
H_{12}	$1/5$	0	0	0
H_{20}	$1/5$	$1/20$	$1/100$	1
Итого	1		$1/100$	1

Байесовская таблица обновления

Пусть A — событие состоящее в том, что выпало 5.

H	$\mathrm{P}(H)$	$\mathrm{P}(A \mid H)$	$\mathrm{P}(A \mid H)\,\mathrm{P}(H)$	$\mathrm{P}(H \mid A)$
H_4	$1/5$	0	0	0
H_6	$1/5$	$1/6$	$1/30$	0.392
H_8	$1/5$	$1/8$	$1/40$	0.294
H_{12}	$1/5$	$1/12$	$1/60$	0.196
H_{20}	$1/5$	$1/20$	$1/100$	0.118
Итого	1		0.085	1

Пусть A_1 — событие состоящее в том, что выпало 5. Пусть A_2 — событие состоящее в том, что выпало 4.

H	$\mathrm{P}(H)$	$\mathrm{P}(A_1 \mid H)$	$\mathrm{P}(A_1 \mid H)\,\mathrm{P}(H)$	$\mathrm{P}(H \mid A_1)$	$\mathrm{P}(A_2 \mid H, A_1)$	$\mathrm{P}(A_2 \mid H, A_1)\,\mathrm{P}(H \mid A_1)$
H_4	1/5	0	0	0	-	
H_6	1/5	1/6	1/30	0.392	1/6	0.329 1/6
H_8	1/5	1/8	1/40	0.294	1/8	0.294 1/8
H_{12}	1/5	1/12	1/60	0.196	1/12	0.196 1/12
H_{20}	1/5	1/20	1/100	0.118	1/20	0.118 1/20
Итого	1		0.085	1		0.124