Математические основы искусственного интеллекта
Основные понятия теории вероятностей

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021

Определение

Пространством элементарных исходов называется множество Ω, содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента. Элементы множества Ω называются элементарными исходами и обозначаются буквой ω.

«Определение»

Событиями называются подмножества множества Ω. Говорят, что произошло событие A, если эксперимент завершился одним из элементарных исходов, входящих в множество A.

Замечание. Вообще говоря, можно называть событиями не любые подмножества множества Ω, а лишь элементы некоторого набора подмножеств. О смысле такого ограничения мы поговорим позднее.

Операции над событиями

Определение

Объединением $A \cup B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что из двух событий A и B случилось хотя бы одно. Это событие включает как элементарные исходы из множества A, так и элементарные исходы из множества B.

Определение

Пересечением $A \cap B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошли сразу оба события A и B. Это событие содержит элементарные исходы, каждый из которых принадлежит и множеству A, и множеству B. Вместо $A \cap B$ часто пишут просто AB.

Операции над событиями

Определение

Дополнением $A \setminus B$ события B до A называется событие, состоящее в том, что произошло A, но не произошло B. Событие $A \setminus B$ содержит элементарные исходы, входящие в множество A, но не входящие в B.

Определение

Противоположным (или дополнительным) к событию A называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$, состоящее в том, что A не произошло. Событие $\overline{A}$ состоит из элементарных исходов, не входящих в множество A.

Пример, когда Ω конечно

Кидают игральный кубик.

Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Можно определить события A — выпало четное число, B — результат меньше трех.

Можно определить вероятности элементарных исходов:
$p_i = 1/6,\ i = 1, \ldots, 6$.

Можно определить вероятности событий:
$P(A) = 3/6,\ P(B) = 2/6$.
$P(A \cap B) = 1/6$.

Если Ω конечное, то «Определение» работает безупречно.

Два человека договорились о встрече с 12-00 до 13-00. Первый пришедший ждет 15 минут, и если не дождался, то уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Особеннность задачи в том, что множество элементарных исходов бесконечно (имеет мощность континуум).

Мотивировка формализации

Анри Леон Лебег (1875—1941)

Наш план

Пусть Ω — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.
1. Определим набор подмножеств Ω, которые будут называться событиями.
2. Зададим вероятность как функцию, определенную только на множестве событий.

Итак, событиями мы будем называть не любые подмножества Ω, а лишь элементы некоторого выделенного набора подмножеств множества Ω. При этом необходимо, чтобы этот набор подмножеств был замкнут относительно обычных операций над событиями, т. е. чтобы объединение, пересечение, дополнение событий снова давало событие.

Определение

Множество $\mathcal{A}$, элементами которого являются подмножества множества Ω (не обязательно все) называется алгеброй, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$ (алгебра содержит достоверное событие);

(A2) если $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$ (вместе с любым множеством алгебра содержит противоположное к нему);

(A3) если $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$ (вместе с любыми двумя множествами алгебра содержит их объединение).

Пример алгебры событий

Пусть $\Omega = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ — пространство элементарных исходов. Следующие наборы подмножеств Ω являются алгебрами:

$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\} = \{\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}, \emptyset\}$ — тривиальная алгебра;

$\mathcal{A} = \{\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}, \emptyset, \{\diamondsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}\}$;

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ — множество всех подмножеств Ω.

Является ли алгеброй такой набор
$\mathcal{A} = \{\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}, \emptyset, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}\}$;

Мотивировка

В теории вероятностей часто возникает необходимость объединять счетные наборы событий и считать событием результат такого объединения. При этом свойства (A3) алгебры оказывается недостаточно: из него не вытекает, что объединение счетной последовательности множеств из алгебры снова принадлежит алгебре. Поэтому разумно наложить более жесткие ограничения на класс событий.

Сигма-алгебра событий

Определение

Множество $\mathcal{F}$, элементами которого являются подмножества множества Ω (не обязательно все) называется σ-алгеброй (σ-алгеброй событий), если выполнены следующие условия:

(S1) $\Omega \in \mathcal{F}$ (σ-алгебра событий содержит достоверное событие);

(S2) если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$ (вместе с любым событием σ-алгебра содержит противоположное событие);

(S3) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$ (вместе с любым счетным набором событий σ-алгебра содержит их объединение).

Пусть $\Omega = \mathbb{N}$. Множество, состоящее их всех подмножеств наутрального ряда, которые либо конечны (т. е. состоят из конечного числа наутральных чисел), либо имеют конечное дополнение.

Пусть $\Omega = [0,\ 1]$. Множество, состоящее их подмножеств отрезка $[0, 1]$, представляющих собой объединение конечного числа промежутков вида $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$.

Брелевская σ-алгебра

Определение

Минимальная σ-алгебра, содержащая множество всех интервалов на вещественной прямой, называется борелевской σ-алгеброй в $\mathbb{R}$ и обозначается $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Замечание. Разумеется, σ-алгебры, содержащие все интервалы, существуют. Например, множество всех подмножеств $\mathbb{R}$ — это σ-алгебра, и она содержит все интервалы.

Минимальная σ-алгебра, содержащая все интервалы, — результат пересечения всех возможных σ-алгебр, содержащих все интервалы.

Следующий шаг: определим вероятности событий

Итак, мы определили специальный класс $\mathcal{F}$ подмножеств Ω, названный σ-алгеброй событий. Применение счетного числа любых операций (объединений, пересечений, дополнений) к множествам из $\mathcal{F}$ снова дает множество из $\mathcal{F}$, т. е. не выводит за рамки этого класса. Событиями будем называть только множества $A \in \mathcal{F}$.

Определим теперь понятие вероятности как функции, определенной на множестве событий (функции, которая каждому событию ставит в соответствие число — вероятность этого события).

Вероятностная мера

Определение

Пусть Ω — некоторое непустое множество, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра его подмножеств. Функция $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется вероятностной мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$, если она удовлетворяет условиям:

(μ1) $\mu(A) \geq 0$ для любого множества $A \in \mathcal{F}$;

(μ2) для любого счетного набора попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ (т. е. $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$) мера их объединения равна сумме их мер: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$;

(μ3) $\mu(\Omega) = 1$.

Условие μ2 называется «счетная аддитивность» меры или «σ-аддитивность».

Вероятностное пространство

Определение

Тройка $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P} \rangle$, в которой Ω — пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра его подмножеств и P — вероятностная мера на $\mathcal{F}$, называется вероятностным пространством.

Свойства вероятности

Вероятность обладает следующими свойствами.

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
2. Для любого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ имеет место равенство: $\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$.
3. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
4. Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$.
5. Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$ (монотонность вероятности).
6. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
7. $\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$.

Задача о рассеянной секретарше

Есть n писем и n подписанных конвертов. Секретарша, будучи в расстроенных чувствах, случаным образом разложила письма в конверты по одному. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в предназначенный ему конверт.

Пусть событие $A_i, i = 1, \ldots, n$, означает, что i-е письмо попало в свой конверт. Тогда

$$A = \{\textit{хотя бы одно письмо попало в свой конверт}\} =$$

$$= A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

События $A_1, \ldots, A_n$ совместны, поэтому используем формулу (??). По классическому определению вероятности вычислим вероятности всех событий A_i и их пересечений.

Элементарными исходами будут всевозможные перестановки n писем по n конвертам. Их общее число есть $|\Omega| = n!$.

Событию A_i благоприятны $(n-1)!$ исходов, а именно перестановки всех писем, кроме i-го, лежащего в своем конверте. Поэтому $\mathsf{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ — одна и та же для всех i.

Аналогично получаем

$\mathsf{P}(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$,

$\mathsf{P}(A_i A_j A_m) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ и т. д.

Вычислим количество слагаемых в каждой сумме в формуле (??). Например, сумма по $1 \leq i < j < m \leq n$ состоит из C_n^3 слагаемых — ровно столько троек индексов можно образовать из n номеров событий. Подставляя все вероятности в формулу (??), получаем:

$$\mathrm{P}(A) = C_n^1 \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Замечание. $\mathrm{P}(A) \longrightarrow 1 - e^{-1}$ при $n \to \infty$.

Парадокс Бертрана

Для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Найти вероятность того, что хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

Сколько существует строк длины 30, состоящих из нулей и единиц, таких, что никакие два нуля не стоят рядом?

Сколько слов длины 10 можно составить из букв a, b и c так, чтобы буквы a и b не стояли рядом?

Из вершин правильного n-угольника ($n \geq 6$) наугад выбираются две тройки различных точек. Какова вероятность того, что два треугольника, вершинами которых являются выбранные тройки, не пересекаются?

Что читатать

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей
   Фундаментальная книга. Первоисточник.
2. Ширяев А.Н. Вероятность
   Фундаментальная книга. Университетский учебник.
3. Чернова Н.И. Введение в теорию вероятностей
   https://intuit.ru/studies/courses/2263/219/info
   Обычный учебник, много незамысловатых примеров.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика
   Для тех, кто вобоще не знает математику и кому надо понять самые простые идеи.

Что читатать

1. Разъяснение понятий алгебры и σ-алгебры, вероятностных пространств и случаных величин. Ясно, наглядно и одновременно с тем строго. https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/c1f/tv-1911-arph0dyidz5.pdf
2. Неплохие олимпиадные задачи по комбинаторие. Объяснение доступно даже школьнику. https://mathus.ru/math/kombinatorika.pdf