Математические основы искусственного интеллекта
Комбинаторика - II

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021

1. Сколько существует строк длины 10, состоящих из нулей и единиц, таких, что никакие два нуля не стоят рядом?
2. Сколько слов длины 5 можно составить из букв a, b и c так, чтобы буквы a и b не стояли рядом?
3. Из вершин правильного n-угольника ($n \geq 6$) наугад выбираются две тройки различных точек. Какова вероятность того, что два треугольника, вершинами которых являются выбранные тройки, не пересекаются?
4. Джордж, Гаррис и Джей выбирают один из трёх маршрутов своего будущего путешествия. Каждый упорядочивает маршруты по своему предпочтению. Они договорились считать вариант a лучше варианта b, если a предпочтительнее b по мнению большинства. С какой вероятностью найдется маршрут, который по мнению путешественников лучше двух других, если их предпочтения равновероятны и независимы?

Решение задачи № 1

Обозначим через x_n число строк длины n. Ясно, что $x_1 = 2$ (это строки 0 и 1), $x_2 = 3$ (это строки 01, 10 и 11).
Будем искать рекуррентное соотношение, задающее последовательность x_n. Предположим, что $n > 3$.
Пусть N_1 — число строк длины n, которые начинаются с единицы. Вторым числом такой строки может быть либо 0, либо 1; иными словами, к первой цифре 1 «пристыковывается» любая строка длины $n - 1$. Поэтому строк, начинающихся с единицы, столько же, сколько существует строк длины $n - 1$, то есть $N_1 = x_{n-1}$.
Пусть теперь N_0 — число строк длины n, которые начинаются с нуля. Вторым числом такой строки обязательно служит единица, а к этой единице уже «пристыковывается» любая строка длины $n - 2$. Поэтому $N_0 = x_{n-2}$.

Решение задачи № 1

В результате получаем:

$$x_n = N_1 + N_0 = x_{n-1} + x_{n-2}, \qquad (n > 3).$$

Теперь с учетом начальных условий $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ находим:

$$x_3 = x_2 + x_1 = 5; \qquad x_4 = x_3 + x_2 = 8; \qquad x_5 = x_4 + x_3 = 13,$$

и так далее вплоть до интересующего нас значения $x_{10} = 144$.

Таким образом, строк длины 10 получается 144.

Это последовательность Фибоначчи.

Пусть x_n — число слов длины n (описанных в условии). Ясно, что $x_1 = 3$ (это слова a, b и c). Если $n = 2$, то все возможные слова суть aa, ac, bb, bc, ca, cb, cc; таким образом, $x_2 = 7$. Обозначим a_n, b_n и c_n число слов длины n, начинающихся с буквы a, b и c соответственно. Тогда, очевидно,

$$x_n = a_n + b_n + c_n \qquad (1).$$

Предположим, что $n > 3$. Пусть слово длины n начинается с буквы a. Поскольку на втором месте не может быть b, к букве a «пристыковывается» любое слово длины $n-1$, начинающееся с a или c. Поэтому

$$a_n = an - 1 + c_{n-1} \qquad (2)$$

Аналогично:

$$b_n = b_{n-1} + c_{n-1} \qquad (3)$$

$$c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = x_{n-1} \qquad (4)$$

Решение задачи № 2

Сложим (2) и (3), после чего используем (4):

$a_n + b_n = (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) + c_{n-1} = x_{n-1} + c_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-2}.$

Подставляем это в (1):

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + c_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Последовательно вычисляем: $x_3 = 17$, $x_4 = 41$ и $x_5 = 99$.
Итак, слов длины 5 получается 99 штук.

Решение задачи № 3

Выделим произвольную шестерку точек, а в ней какую-то точку A. Число способов добавить к A две точки, чтобы получить тройку, равно $C_2^5 = 10$ (оставшиеся три точки образуют другую тройку).

Число способов, при которых треугольники с вершинами в этих тройках не пересекаются, равно 3 (точки в треугольниках должны идти в порядке их следования по часовой стрелки, при этом точка A в своём треугольнике будет первой, второй или третьей).

Значит, для выделенной шестерки точек вероятность того, что треугольники не пересекаются, равна 3/10. Поскольку это верно для любой шестёрки точек, искомая вероятность также равна 0.3.

Решение задачи № 4

Проще найти вероятность того, что предпочтительного маршрута не окажется. Если какой- то маршрут был на первом месте у двоих или троих, то он окажется предпочтительным. Поэтому можно считать, что на первом месте каждый маршрут встречался по одному разу. Если при этом какой-то маршрут будет вторым в списках предпочтений путешественников дважды, то он (всякий раз по мнению двух из трёх) будет лучше каждого из двух других маршрутов.

Таким образом, если выбор первого (a, b, c), то второй и третий должны в каком-то порядке выбрать (b, c, a) и (c, a, b). Вероятность этого

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

А вероятность противоположного события, которую и требуется найти в задаче, равна 17/18.