# Математические основы искусственного интеллекта

Проверка статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода. Статистический критерий. Уровень значимости. Критические области. Мощность критерия

#### Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук, УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021



# Что такое проверка статистической гипотезы?

Рассмотрим забавных пример, который иллюстрирует практическую сторону вопроса. Однажды в Неаполе преподобный Галиани увидел человека, который, встряхивая 3 игральные кости в чашке, держал пари, что выбросит три шестерки; и действительно, он немедленно получил три шестерки.

Конечно, такая удача возможна. Однако человеку это удалось во второй раз, и пари повторилось. Он клал кости назад в чашку 3, 4, 5 раз и каждый раз выбрасывал 3 шестерки. «Черт возьми, – закричал преподобный, – кости налиты свинцом». И так оно и было.

Объясние, как Галиани, сам того не ведая, применил метод проверки гипотезы.

В данном случае гипотезой было то, что кости симметричные. И если это так, то вероятность выкинуть 3 шестерки 5 раз подряд равна  $(1/6^3)^5$  или  $2.13\cdot 10^{-12}$ , т. е. настолько маловероятно, что практически невозможно.

Следовательно, предположение о симметричности костей, скорее всего, неверно.

# Как выборки отражают генеральную совокупность

В большинстве случаев аналитик имеет дело с выборкой, распределение которой отличается от распределения генеральной совокупности. Например, выборочное среднее как правило не в точности равно среднему в генеральной совокупности.

По выборке можно получить только оценку, т. е. приближенное значение параметра. Как правило, при большом объеме (репрезентативной!) выборки такие оценки достаточны для практического использования.

# Как выборки отражают генеральную совокупность

Представим, что мы много раз извлекаем выборки из некоторой генеральной совокупности и в каждой из них рассчитываем среднее арифметическое. Если выборки достаточны большие (хотя бы более 30 наблюдений), то в силу действия центральной предельной теоремы выборочные средние будут распределены по нормальному закону с истинным средним в центре.

Проведите следующий эксперимент. Пусть X — генеральная совокупность, т. е. случайная величина с равномерным распределением от 0 до 1000. Извлеките из нее 1000 выборок по 30 наблюдений и отобразите распределение средних на гистограмме.



В 95% выборочное среднее окажется в пределах  $m\pm 1.96\sigma$ , где m — среднее (матожидание),  $\sigma$  — среднее квадратичное отклонение. В остальных 5% средние отклонятся дальше.

При однократном эксперименте вероятность получить выборку со средней, выходящей за пределы  $m\pm1.96\sigma$ , довольно малы. И гораздо меньше шансов получить выборку со средней, выходящей за пределы  $m\pm3\sigma$  (всего 3 случая из 1000).

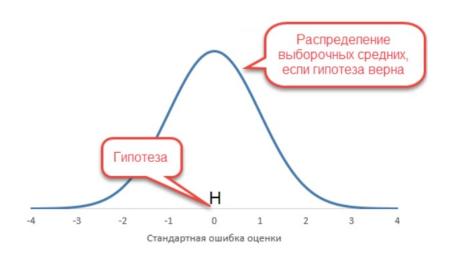
Это известные свойства нормального распределения.

#### Метод проверки гипотез

В реальности истинная средняя по генеральной совокупности неизвестна и ее значение можно только предполагать. Такое предположение называется статистической гипотезой, обозначается  $H_0$ .

Если предположение противоречит наблюдаемым данным, то гипотезу отклоняют, как ложную; если не противоречит, то не отклоняют.

Степень противоречия определяется вероятностью, которая в свою очередь зависит от того, как далеко фактическая выборочная средняя отклоняется от гипотетической. Если эта вероятность достаточно маленькая, то противоречие считается доказанным (не забывая о возможной ошибке). Для расчета вероятности выбирают вероятностно-статистическую модель, которая описывает поведение оценки при многократном повторении эксперимента.



### Задачи № 3

- Мы сказали «Если эта вероятность достаточно маленькая».
  Определите формально, что это означает.
- ② Изобразите графически область принятия гипотезы  $H_0$  и критическую лбласть для рассматриваемого примера о проверке равенстве маожидания m заданной величине a. Изобразите графически критическую область  $H_1$ .

Нужно определить, какова вероятность извлечь из такой генеральной совокупности имеющуюся выборочную среднюю. Если она окажется в зоне близкой к центру, то это не противоречит гипотезе, ведь такое вполне может произойти в силу случайности. Но если она окажется далеко, например, выйдет за пределы  $\pm 1.96$  стандартные ошибки, то это будет означать что, либо произошло маловероятное событие, либо выдвинутая гипотеза ложна и ее следует отклонить.

