Математические основы искусственного интеллекта
Комбинаторика

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021

Задачи простые

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 3 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправки письма?
2. Из 10 различных книг выбирают 4 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?
3. Сколько «слов» (из 10 букв) можно получить, переставляя буквы слова «математика»?
4. Отрезок длиной L делится случайным образом на три части. Какова вероятность, что из полученных частей можно составить треугольник?

Задачи чуть посложнее

1. Сколько чисел среди первых 1000 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
2. Василий выписал все различные делители числа 2016. Сколько чисел выписал Василий?
3. Пусть $m \leq n$. Найти число возрастающих функций $f : 1, \dots, m \longrightarrow 1, \dots, n$, т. е. функций удовлетворяющих условию $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$.
4. Сколько 6-значных чисел можно получить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если число должно состоять из 3 четных и 3 нечетных цифр и никакие две цифры не повторяются?
5. Сколькими способами можно переставить буквы слова «вероятность», чтобы две одинаковые буквы не стояли рядом?

Решение задачи № 1

Имеется 5 видов конвертов без марок и 3 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправки письма?

Теорема 1. Пусть множество $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ состоит из k элементов, а множество $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — из m элементов. Тогда можно образовать ровно km пар (a_i, b_j), взяв первый элемент из множества A а второй — из множества B.

В данном случае A — множество конвертов B — множество марок. Следовательно, $k = 5$, а $m = 3$. В результате имеем число способами, которыми можно выбрать конверт и марку для отправки письма $km = 15$.

Из 10 различных книг выбирают 4 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?

Теорема 3. Общее количество различных наборов при выборе k элементов из n без возвращения и без учета порядка равняется $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.
Число C_n^k называется числом сочетаний из n элементов по k элементов, а сами результаты выбора — сочетаниями.

В данном случае $n = 10$ — число различных книг, $k = 4$ — число книг для отправки. В результате получаем

$$C_n^k = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Решение задачи № 3

Сколько «слов» (из 10 букв) можно получить, переставляя буквы слова «математика»?

Задача решается аналогично предыдущей. Всего в слове «математика» букв 10, из них 3 буквы а, 2 буквы м, 2 буквы т. Следовательно, всего вариантов

$$\frac{10!}{3!\,2!\,2!}.$$

Решение задачи № 4

Отрезок длиной L делится случайным образом на три части. Какова вероятность, что из полученных частей можно составить треугольник?

Элементарный исход для данного опыта — две случайные точки на отрезке $[0, L]$. Точнее два случайных числа x и y. Каждому элементарному исходу сопоставим упорядоченную пару – точку на плоскости с координатами (x, y). Пространство элементарных исходов Ω — квадрат со стороной длиной L.

В рамках данной модели опишем событие A — «из полученных частей можно составить треугольник». Для того чтобы $\omega \in A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство треугольника во всех трех возможных комбинациях для полученных трех частей: $c = \min\{x, y\}$, $a = |x - y|$, $b = L - \max\{x, y\}$.

Решение задачи № 4

Множество A на плоскости задается системой неравенств:

$$\begin{cases} a+b>c, \\ a+c>b, \\ b+c>a. \end{cases}$$

Вычислим отношение площадей множества A и множества Ω.
Ответ: 0.25.