Математические основы искусственного интеллекта
Функция и плотность распределения двумерной случайной величины. Условные законы распределения

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021

Задачи

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения

$\eta \mid \xi$	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
$y_1 = 3$	0.15	0.06	0.25	0.04
$y_2 = 6$	0.30	0.10	0.03	0.07

   Найти условное распределение и условное математическое ожидание случайной величины η при $\xi = x_1$

2. Двумерная случайная величина задана плотностью распределения

$$f_{\xi\eta}(x, y) = Ce^{-x^2-2xy-4y^2}.$$

   Найти: а) постоянный множитель C; б) плотности распределения составляющих; в) условные плотности распределения составляющих.

Задачи

3. Определить плотность вероятности, математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин ξ, η, заданных на отрезках $0 \leq x \leq \pi/2$ и $0 \leq y \leq \pi/2$, если функция распределения системы

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \sin x \ \sin y.$$

4. Плотность вероятности системы случайных величин равна

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = C(R - \sqrt{x^2 + y^2}), \quad x^2 + y^2 < R^2.$$

Определить:
А) постоянную C;
Б) вероятность попадания в круг радиуса $a < R$, если центры обоих кругов совпадают с началом координат.

Решение задачи № 1

Найдем $P(\xi = x_1)$, для чего сложим вероятности, помещенные в первом столбце талицы:

$$P(\xi = x_1) = 0.15 + 0.3 = 0.45.$$

$$P(\eta = y_1 | \xi = x_1) = \frac{P(\xi = x_1, \eta = y_1)}{P(\xi = x_1)} = \frac{0.15}{0.45} = \frac{1}{3}.$$

$$P(\eta = y_2 | \xi = x_1) = \frac{P(\xi = x_1, \eta = y_2)}{P(\xi = x_1)} = \frac{0.3}{0.45} = \frac{2}{3}.$$

Условное распределение $\eta \mid \xi = x_1$:

$\eta \mid \xi = x_1$	
$y_1 = 3$	$1/3$
$y_2 = 6$	$2/3$

Решение задачи № 1

Найдем искомое условное математическое ожидание по формуле

$$\mathbb{E}(\eta|\xi = x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j \,\mathsf{P}(\eta = y_j|\xi = x_1) =$$

$$= y_1 \,\mathsf{P}(\eta = y_1|\xi = x_1) + y_2 \,\mathsf{P}(\eta = y_2|\xi = x_1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

Решение задачи № 2

Найдем константу C из условия нормировки:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_{\xi\eta}(x,y)\;dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} C\,e^{-x^2-2xy-4y^2}\;dx\,dy =$$

$$= C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}x^2-2xy-4y^2}\,dy =$$

$$= C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}x+2y\right)^2}\,dy =$$

Здесь можно сделать заммену переменных во втором интеграле и воспользоваться тем, что интегрируем в бесконечных пределах (в потому $1/2x$ выбросить!)

$$= C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{4y^2}\,dy = C\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = C\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1.$$

Откуда $C = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$.

Интеграл Пуассона

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Для сведения $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Найдем плотности распределения составляющих.
Найдем плотность вероятности $f_\xi(x)$

$$f_\xi(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}\, dy = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{3}{4}x^2}.$$

$$f_\eta(y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-3y^2}.$$

Найдем условные плотности распределения составляющих.

$$f_\xi(x|\eta = y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\pi}\, e^{-x^2-2xy-4y^2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-3y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x+y)^2}.$$

$$f_\eta(y|\xi = x) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\xi(x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\pi}\, e^{-x^2-2xy-4y^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{4}(x+4y)^2}.$$