Математические основы искусственного интеллекта
Условные математические ожидания. Зависимые и независимые случайные величины. Ковариация, корреляция

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021

2. Пусть ξ и η — координаты точки, брошенной наудачу в треугольник D с вершинами (2,0), (0,0) и (0,1). Показать, что коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$ отрицателен.
3. Игральный кубик подбрасывают n раз. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений единицы и числом выпадений шестерки при подбрасываниях правильной игральной кости.
4. Двумерная дискретная случайная величина задана законом распределения

$\eta \mid \xi$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$y_1 = 1$	0.25	0.10	0.05	0
$y_2 = 3$	0.05	0.10	0.10	0.05
$y_2 = 5$	0	0.05	0.05	0.20

   Найти коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.
5. Вычислить математическое ожидание и дисперсию гипергеометрического распределения.

Решение задачи № 1

Пусть ξ и η — координаты точки, брошенной наудачу в треугольник D с вершинами (2,0), (0,0) и (0,1). Их коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$ отрицателен. Это можно объяснить так: чем больше ξ, тем меньше у η возможностей быть большой.
Вычислим математические ожидания для ξ и η :

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \quad f_\eta(y) = \begin{cases} 2 - 2y, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

а вычисленные по этим плотностям средние равны соответственно $\mathrm{E}\,\xi = 2/3$ и $\mathrm{E}\,\eta = 1/3$.

Решение задачи № 1

Далее, по определению многомерного равномерного распределения в области D,

$$\mathrm{E}\,(\xi\,\eta) = \iint\limits_D x \cdot y \cdot 1 \; dx\, dy = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{1-x/2} x\, y\; dy \;\; dx = \frac{1}{6}.$$

Ковариация (а с ней и коэффициент корреляции) отрицательна.

$$\mathrm{cov}_{\xi_1,\xi_6} = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{18}.$$

Решение задачи № 2

Обозначим для $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ через ξ_i случайную величину, равную числу выпадений грани с i очками при n подбрасываниях кубика.

Посчитаем $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_6)$.

Каждая из случайных величин ξ_i имеет биномиальное распределение с параметрами n и $1/6$, поэтому $\mathbb{E}\xi_i = n/6$, $\mathrm{D}\xi_i = 5n/36$.

Далее заметим, что $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_6 = n$.

Из-за симметрии кубика математические ожидания $\mathbb{E}\xi_1\xi_2$, $\mathbb{E}\xi_1\xi_3$, ...,$\mathbb{E}\xi_1\xi_6$ одинаковы (но, надо полагать, отличаются от $\mathbb{E}\xi_1\xi_1$).

$$\mathbb{E}\xi_1\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathrm{D}\xi_i + (\mathbb{E}\xi_i)^2 = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{36}.$$

Решение задачи № 2

Посчитаем $\mathbb{E}\xi_1(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_6)$.
С одной стороны, это равно

$$\mathbb{E}\xi_1(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_6) = \mathbb{E}\xi_1 n = \frac{n^2}{6},$$

с другой стороны,

$$\mathbb{E}\xi_1(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_6) = \mathbb{E}\xi_1^2 + 5\mathbb{E}\xi_1\xi_6 = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{36} + 5\mathbb{E}\xi_1\xi_6.$$

Следовательно,

$$\frac{n^2}{6} = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{36} + 5\mathbb{E}\xi_1\xi_6, \qquad \mathbb{E}\xi_1\xi_6 = \frac{n^2 - n}{36}.$$

В итоге,

$$r_{\xi_1,\xi_6} = \frac{\mathbb{E}\xi_1\xi_6 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_6}{\sqrt{\mathrm{D}\xi_1\mathrm{D}\xi_6}} = -\frac{1}{5}.$$