Математические основы искусственного интеллекта
Дискретные случайные величины

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук,
УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Октябрь 2021

Простой пример на иллюстрацию теории

Дискретная случайная величина задана законом распределения

ξ	-1	0	2	4
P	0.1	0.3	0.5	0.1

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ. Построить график функции распределения случайной величины ξ.

Простой пример

Математическое ожидание дискретной случайной величины рассчитывается по формуле

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i).$$

В нашем случае

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(x_i) = -1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.1 = 1.3.$$

Простой пример

По определению дисперсия дискретной случайной величины равна $D(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p(x_i)$. Удобнее, однако, рассчитывать дисперсию по формуле

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 p(x_i)\right) - M^2(\xi).$$

В нашем случае

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{4} \left(x_i^2 p(x_i)\right) - (1,3)^2 =$$

$$= (-1)^2 \cdot 0.1 + 0^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.5 + 4^2 \cdot 0.1 - 1.69 = 2.01$$

1. При приеме в старшую группу детского сада проводится следующий экзамен. Перед ребенком случайной стороной раскладываются в ряд 35 карточек, на одной стороне карточек написана буква «м», на другой «а». Ребенок должен найти 4 подряд идущие карточки, на которых написано слово «мама». Сколько в среднем перед ним таких слов?
2. В группе детского сада n человек разного роста. Они встали в круг. Ребенок скажет, что он высокий, если он выше двух своих соседей. Сколько в среднем детсадовцев назовут себя высокими?

Задачи

3. В комнате n ящиков, в каждом лежит по одному подарку. По очереди в комнату заходит m детей, каждый из которых случайным образом выбирает ящик и забирает оттуда подарок, если таковой там еще есть. Сколько в среднем детей уйдут без подарка?
4. Пусть $(a1, a2, ..., an)$ — случайная перестановка чисел от 1 до n. Найдите среднее число инверсий в этой перестановке (инверсия — это пара чисел $a_j > a_k$, для которой $j < k$).

Рассмотрим случайную величину ξ_i, которая равна 1, если 4 карточки с номерами i, $i+1$, $i+2$, $i+3$ составляют слово «мама», и 0 в противном случае.
Вероятность того, что $\xi_i = 1$, есть $1/16$.

Искомое количество способов есть сумма

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{32}.$$

Поскольку математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их матожиданий,

$$\mathbb{E}\xi_{=}\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2 + \ldots + \mathbb{E}\xi_{32} = 32\left(1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{15}{16}\right) = 2.$$

Решение задачи № 2

Пусть ξ_i — случайная величина, равная 1, если детсадовец, стоящий на i-м месте, назовет себя высоким, и нулю в противном случае.

Самый высокий из трех человек, стоящих на i-м месте и двух соседних с ним, с равной вероятностью может быть на любом из этих трех мест. Поэтому $\xi_i = 1$ с вероятностью $1/3$ и $\xi_i = 0$ с вероятностью $2/3$. Следовательно, математическое ожидание ξ_i равно $1/3$.

Общее число назвавших себя высокими равно

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Из линейности математического ожидания получаем

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2 + \ldots + \mathbb{E}\xi_n = n/3.$$

Решение задачи № 3

Пусть ξ_i — случайная величина, равная 1, если подарок из i-го ящика взят, и 0, если не взят.
Очевидно,

$$P\{\xi_i = 0\} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m,$$

$$P\{\xi_i = 1\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\xi_i = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right).$$

Решение задачи № 3

Мы нашли среднее число взятых подарков. Но число взятых подарков в нашей задаче совпадает с количеством детей, их получивших. Значит, без подарков уйдут в среднем

$$m - n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right)$$

детей.

Простое решение получилось за счет случайных величин, связанных с подарками, несмотря на то, что вопрос задачи касался детей. Найти вероятность того, что заходящий i-м ребенок уйдёт с подарком значительно сложнее и для решения задачи этого не требуется.

Решение задачи № 4

Пусть $\xi_{i,j} = 1$, если числа a_i и a_j образуют инверсию, и $\xi_{i,j} = 0$ в противном случае. Оба указанных события равновероятны. Поэтому $\mathbb{E}\xi_{i,j} = 1/2$.

Общее число инверсий в случайной перестановке равно $\xi = \sum_{i<j} \xi_{i,j}$. В данной сумме C_n^2 слагаемых.

Из свойства линейности математического ожидания случайной величины имеем $\mathbb{E}\xi = C_n^2/2$.