Непрерывные случайные величины

Математические основы искусственного интеллекта

Солодушкин Святослав Игоревич

Кафедра вычислительной математики
и компьютерных наук

УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

На данном практическом занятии разбираются темы: Непрерывные случайные величины (НСВ). Функция и плотность распределения НСВ. Вероятностный смысл функции и плотности распределения. Числовые характеристики НСВ: моменты, математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, асимметрия, эксцесс.

Задание № 1

Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ a\cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти параметр a и функцию распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; \frac{\pi}{4})$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

Решение. Для определения параметра a воспользуемся тем свойством, что *интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице.*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1.$$

По условию плотность распределения отлична от нуля лишь на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, а значит интегрировать следует лишь на этом интервале:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx =$$

$$= a\sin x\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})\right) = 2a$$

Откуда $a = \frac{1}{2}$.

Найдем теперь функцию распределения. Известно, что *функция распределения* $F_\xi(x)$ *случайной величины* ξ *равна интегралу от плотности распределения в интервале от* $-\infty$ *до* x, т. е.

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$$

Поскольку плотность распределения задана по разному на трех интервалах, рассмотрим эти интервалы последовательно. При $x \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}]$ имеем

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

При $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,dt + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2}\cos t\,dt = 0 + \frac{1}{2}\sin t\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin x - \sin(-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{1}{2}(\sin x + 1).$$

Наконец, при $x \in (\frac{\pi}{2}; +\infty)$ имеем

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,dt + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos t\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0\,dt =$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \frac{1}{2}\left(\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})\right) = 1.$$

Собрав полученные результаты, получим аналитическую запись функции распределения случайной величины ξ.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Теперь определим вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; \frac{\pi}{4})$. Воспользуемся тем свойством, что *вероятность появления случайной величины ξ в интервале $[a; b)$, полузамкнутом слева, равна разности значений* *функции распределения в концах интервала*, т.е. $P(a \leqslant \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$. Заметим, однако, что для абсолютно непрерывной случайной величины, как в нашем случае, включение границ интервала не принципиально.

$$P(0 \leqslant \xi < \frac{\pi}{2}) = F_\xi(\frac{\pi}{2}) - F_\xi(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(\frac{\pi}{4}) + 1 - (\sin(0) + 1)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Теперь найдем математическое ожидание случайной величины ξ. Воспользуемся формулой $M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$, получим

$$M(\xi) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\frac{1}{2}\cos x\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x(\sin x)'\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x\sin x)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x)'\sin x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{-\pi}{2}\sin(\frac{-\pi}{2})\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\cos x\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Здесь, мы воспользовались формулой интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b f'g\,dx = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b fg'\,dx.$$

Найдем дисперсию случайной величины ξ. Известно, что

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - M^2(\xi).$$

Так как $M(\xi) = 0$, имеем

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - M^2(\xi) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{1}{2}\cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin x)'\,dx = \frac{1}{2}(x^2\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2)'\sin x\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \left(x(-\cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x'(-\cos x)\, dx \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \frac{\pi^2}{4} - \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Отметим тот факт, что дисперсия — величина неотрицательная. В нашем случае это действительно так, $D(\xi) \approx 0.467011$.

Задание № 2

Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\sqrt{3}, \\ \frac{a}{1+x^2}, & \text{если } -\sqrt{3} < x \leqslant \sqrt{3}, \\ 0, & \text{если } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Найти параметр a и функцию распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; 2+\sqrt{3})$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

Решение. Данная задача абсолютно аналогична предыдущей.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1.$$

$$1 = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{a}{1+x^2}\,dx = a\arctan x\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = a(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{3}) = a\frac{2\pi}{3}.$$

Отсюда $a = \frac{3}{2\pi}$.

Функция распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\sqrt{3}, \\ \frac{3}{2\pi}\arctan x, & \text{если } -\sqrt{3} < x \leqslant \sqrt{3}, \\ 1, & \text{если } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Вероятность попасть в заданный промежуток

$$P(0 \leqslant \xi < 2+\sqrt{3}) = P(0 \leqslant \xi < \sqrt{3}) = \frac{1}{2}.$$

Как и при решении задачи №1 для нахождения математического ожидания воспользуемся формулой $M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$

$$M(\xi) = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2\pi}\frac{1}{2}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 0$$

Для вычисления дисперсии применяем формулу $D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - M^2(\xi)$, получаем

$$D(\xi) = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx - M^2(\xi) = \frac{3}{\pi}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Задание для самостоятельной работы

1. Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ a\cos x, & \text{если } 0 < x \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

   Найти параметр a и функцию распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; \pi/4)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

2. Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\sqrt{3}, \\ \frac{a}{1+x^2}, & \text{если } -\sqrt{3} < x \leqslant \sqrt{3}, \\ 0, & \text{если } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

   Найти параметр a и функцию распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; 2+\sqrt{3})$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

3. Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ a\sin x, & \text{если } 0 < x \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти параметр a и функцию распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; \pi/4)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

4. Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\sqrt{3}/3, \\ \frac{a}{1+x^2}, & \text{если } -\sqrt{3}/3 < x \leqslant \sqrt{3}/3, \\ 0, & \text{если } x > \sqrt{3}/3. \end{cases}$$

Найти параметр a и функцию распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(0; 1+\sqrt{3})$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.