带约束：$\begin{cases} \min\limits_{w,b} = \frac{1}{2}\|w\|^2 \\ s.t.\ \ y_i(w^T x_i + b) \geq 1 \quad i = 1, 2, \cdots n \end{cases}$

todo：带约束不好求 → 无约束 <拉格朗日>

$$L(w,b,\alpha) = \frac{1}{2}\|w\|^2 - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i(w^T x_i + b) - 1)}_{\geq 0}$$

why ?

无约束：

$$\begin{cases} \min\limits_{w,b} \max\limits_{\alpha} L(w,b,\alpha) \\ s.t.\ \ \alpha_i \geq 0 \end{cases}$$

若 $y_i(w^T x_i + b) - 1 < 0$ ； $\alpha_i \geq 0$

$\therefore \max\limits_{\alpha} L(w,b,\alpha) = \frac{1}{2}\|w\|^2 + \infty = \infty$ <无意义>

若 $y_i(w^T x_i + b) - 1 \geq 0$ ； $\alpha_i \geq 0$

此时 $\max\limits_{\alpha} L(w,b,\alpha) = \frac{1}{2}\|w\|^2 - 0 = \frac{1}{2}\|w\|^2$

综上：$\min\limits_{w,b} \{ \infty, \frac{1}{2}\|w\|^2 \}$

无约束 → 对偶问题：

对偶关系：

$\min \max f \geq \max \min f$ <弱对偶性>

如果对偶，该问题是凸二次优化问题，

必有：$\min \max f = \max \min f$ <强对偶性>

$\begin{cases} \max\limits_{\alpha} \min\limits_{w,b} L(w,b,\alpha) \quad ① \end{cases}$

s.t. $\alpha_i \geq 0$

由上面极大.极小值问题，可求出 w^*, b^*, α^*

进而求出 超平面。