

一. 计算题 (每小题 10 分, 共 60 分)。

1. 进制转换: (1) 将二进制 $(10100101)_2$ 分别转换为十进制和十六进制;

(2) 将十进制 $(153)_{10}$ 分别转换为二进制和十六进制

$$(10100101)_2 = (165)_{10} = (A5)_{16}$$

$$(153)_{10} = (10011001)_2 = (99)_{16}$$

2. 2018 年 6 月 27 日是星期三, 问过 $2^{20180628}$ 天后是星期几?

$$\text{星期 7 天一周期; } 2^{20180628} \pmod{7} = 1$$

所以, 是星期四

3. 求群 $(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^* = \{1, 2, \dots, 22\}$ 的所有生成元。

$(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}^*)$ 是模 23 的简化剩余系, 对于乘法 $\otimes: a \otimes b = a \cdot b \pmod{23}$ 构成群

而 23 是素数, 所以 $\varphi(23) = 22$, 而根据的原根 g 性质, $\{g^0, g, \dots, g^{\varphi(23)-1}\}$ 构成模 23 的简化剩余系

查原根表得到模 23 的原根有 $g = 5$, 因此 5 是一个生成元, 由于群阶 22, 所以 $(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}^*)$ 有 $\varphi(22) = 10$ 个生成元。

生成元形如 $g^j, (j, 22) = 1, j = 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21$

所以生成元是 $g^j \pmod{23} = 5, 10, 20, 17, 11, 21, 19, 15, 7, 14$.

4. 求解同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{9} \\ 3x \equiv 4 \pmod{5} \\ 4x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

注意到 9, 5, 7 两两互素, 但是方程左边不相同。

$$3x \equiv 4 \pmod{5}, \text{解得 } x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$4x \equiv 3 \pmod{7}, \text{解得 } x \equiv 6 \pmod{7}$$

因此原方程组化为：

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{9} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

由 9, 5, 7 两两互素, 可运用中国剩余定理;

$$M_1 = 35, M'_1 = 8,$$

$$M_2 = 63, M'_2 = 2,$$

$$M_3 = 45, M'_3 = 5;$$

$$m = m_1 m_2 m_3 = 315$$

$$\text{原方程组的解就是 } x \equiv 2 \cdot 35 \cdot 8 + 3 \cdot 63 \cdot 2 + 6 \cdot 45 \cdot 5 = 2288 \pmod{315}$$

$$x \equiv 83 \pmod{315}$$

满绩小铺: 1433397577