

一. 计算题 (共 60 分)。

1. 求整数 s 和 t , $1 < t < 127$, 使得 $sa + tb = (a, b)$, 其中 $a = 127$, $b = 833$ 。

解: 因为 $833 = 127 \cdot 6 + 71$, $127 = 71 \cdot 1 + 56$, $71 = 56 + 15$,

$56 = 15 \cdot 3 + 11$, $15 = 11 + 4$, $11 = 4 \cdot 3 - 1$;

所以 $1 = 4 \cdot 3 - 11 = 15 \cdot 3 - 11 \cdot 4 = 15 \cdot 15 - 56 \cdot 4 = 15 \cdot 71 - 56 \cdot 19 =$

$71 \cdot 34 - 127 \cdot 19 = 833 \cdot 34 - 127 \cdot 223$,

即 $t = 34$, $s = -223$ 。

2. 求解同余式 $x^2 + x + 7 \equiv 0 \pmod{27}$ 。

解 因为 $(4, 27) = 1$, 所以由同余式的性质可以得到

$4x^2 + 4x + 28 \equiv 0 \pmod{27}$, 即 $4x^2 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod{27}$, 于是

$(2x+1)^2 \equiv 0 \pmod{27}$, 因此 $2x+1 \equiv 0 \pmod{9}$, 利用一次同余式的求解方法得 $x \equiv 4 \pmod{9}$, 所以原同余式的解为

$x \equiv 4, 13, 22 \pmod{27}$ 。

3 求同余式 $x^2 \equiv 13 \pmod{101}$ 的解。

解 因为 $101 = 4 \cdot 25 + 1$, 所以同余式 $x^2 \equiv 13 \pmod{101}$ 的解为

$x \equiv \pm 35 \pmod{101}$ 。

4. 求 $F_{2^4} = F_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$ 中的生成元 $g(x)$, 并且计算出所有的生成元。

解: 首先证明 $g(x) = x$ 是一个生成元, $(k, 15) = 1$, 则 $g(x)^k$ 为所有的生成元。

$K = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$, $g(x)^k$ 分别为:

$x, x^2, x^3 + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + x, x^3 + x^2 + 1, x^2 + x, x^3 + x^2$

二. 证明题 (共 20 分)

(1) 已知 $N=pq$, p, q 是两个素数, 证明如下等式

$$q \cdot q^{-1} \bmod p + p \cdot p^{-1} \bmod q = N + 1$$

证明: 由乘法逆元素的含义, 有

$$q \cdot q^{-1} \bmod p = 1 + kp$$

即

$$p | (q \cdot q^{-1} \bmod p - 1)$$

而

$$p | (p \cdot p^{-1} \bmod q)$$

所以

$$p | (q \cdot q^{-1} \bmod p + p \cdot p^{-1} \bmod q - 1)$$

同理可证

$$q | (q \cdot q^{-1} \bmod p + p \cdot p^{-1} \bmod q - 1)$$

因为 p, q 互素, 且 $N=pq$, 从而有

$$N | (q \cdot q^{-1} \bmod p + p \cdot p^{-1} \bmod q - 1)$$

进一步, 因为

$$0 < q \cdot q^{-1} \bmod p \leq q \cdot p = N$$

$$0 < p \cdot p^{-1} \bmod q \leq p \cdot q = N$$

$$0 < q \cdot q^{-1} \bmod p + p \cdot p^{-1} \bmod q - 1 \leq 2N - 1$$

从而结论成立。

(2) 设 G 是有限交换群, 对任意 $a, b \in G$, 若 $(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = 1$, 则

$$\text{ord}(a \cdot b) = \text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)。$$

证明: 假设 $\text{ord}(a) = m, \text{ord}(b) = n, \text{ord}(a \cdot b) = k$, 则 $(m, n) = 1$ 。

首先由 $\text{ord}(a) = m, \text{ord}(b) = n$ 可得 $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = e$, 从而由群中元素指数的性质得

$$k \mid m \cdot n;$$

其次由 $\text{ord}(a \cdot b) = k$ 可得 $(a \cdot b)^k = e$, 因为 G 是有限交换群, 所以得到 $a^k = b^{-k}$, 从而

$$\text{ord}(a^k) = \text{ord}(b^{-k}) = \text{ord}(b^k)。$$

根据指数阶的性质

$$\text{ord}(a^k) = \text{ord}(a) / (\text{ord}(a), k)$$

得

$$m / (m, k) = n / (n, k)$$

由于 $(m, n) = 1$, 所以 $m \mid (m, k)$, 从而 $m \mid k$; 同理可得 $n \mid k$, 由 $(m, n) = 1$ 得

$$m \cdot n \mid k。$$

由此得 $k = m \cdot n$, 即 $\text{ord}(a \cdot b) = \text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)。$

三. 简述题 (20 分)

如果一个集合的元素个数不超过 5 个, 该集合在某种运算下构成一个群, 试在同构意义下给出该集合可能的运算表。(提示: 集合元素个

数可以为 1, 2, 3, 4, 5; 同构意义下的运算表属于同一种运算表)

答: (1) 如果集合元素个数为 1, 即 $G = \{e\}$, $e * e = e$;

(2) 如果集合元素个数为 2, 即 $G = \{e, a\}$, $e * e = e = a * a$, $e * a = a * e = a$;

(3) 如果集合元素个数为 3, 即 $G = \{e, a, b\}$, 则运算表为

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(4) 如果该集合的元素个数为 4, 而该代数系统能够成为一个群, 所以元素 a, b, c 的阶为 2 或者 4, 如果存在元素的阶为 4, 不妨设 $|a| = 4$, 则该运算表为

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

如果不存在元素的阶为 4, 则 a, b, c 的阶都为 2, 于是, $ab = ba = c$, $bc = cb = a$, $ac = ca = b$, 则该运算表为

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c

a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(5) 如果集合元素个数为 5，即 $G=\{e, a, b, c, d\}$ ，则存在 5 阶元，不妨设 $a^2=b, a^3=c, a^4=d$ ，则运算表为

*	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c