二维离散型随机变量

主要概念

二维离散型随机变量的联合分布率

二维离散型随机变量的边缘分布率

二维离散型随机变量的联合分布律

设(X, Y)为二维离散型随机变量，X 取值x_1，$x_2, \cdots$；Y 取值y_1，$y_2, \cdots$ 令

$$p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right), \qquad i \geq 1, j \geq 1,$$

称p_{ij} $(i \geq 1, j \geq 1)$为(X, Y)的联合分布律或X和Y的联合分布列

其中 $p_{ij} \geq 0 \ (i \geq 1, j \geq 1), \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

二维离散型随机变量的联合分布律

二维随机变量（X,Y）的分布律也可表示为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

二维离散型随机变量的联合分布律

例1 设随机变量X在$1,2,3,4$四个整数中等可能地取值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一个整数值，试求(X,Y)的联合分布律

解：(X,Y)的可能取值为 $(i,j), i=1,2,3,4,\ j$取不大于i的一个正整数.

$$P(X=i,Y=j)=P(Y=j|X=i)P(X=i)=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},\ \ 1\le j\le i\le 4$$

$$P(X=i,Y=j)=P(Y=j|X=i)P(X=i)=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},\quad 1\le j\le i\le 4$$

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

二维离散型随机变量的联合分布律

二维离散型随机变量(X,Y) 的联合分布函数用联合分布律表示为:

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{\{i:x_i\le x\}}\sum_{\{j:y_j\le y\}}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$F_X(x)=P(X\le x,Y\le\infty)=\sum_{\{i:x_i\le x\}}\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$F_Y(x)=P(X\le\infty,Y\le y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\{j:y_j\le y\}}P(X=x_i,Y=y_j)$$

二维离散型随机变量的联合分布律

例2　一个袋中有三个球，依次标有数字 1, 2, 2，从中任取一个，不放回并再任取一个，设每次取球时，各球被取到的可能性相等，以 X, Y 分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字，求(X, Y)的联合分布律与联合分布函数.

1　2　2

解 (X, Y) 的可能取值为 (1,2), (2,1), (2,2).　$p_{12} = p_{21} = p_{22} = \dfrac{1}{3}$

Y \ X	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3

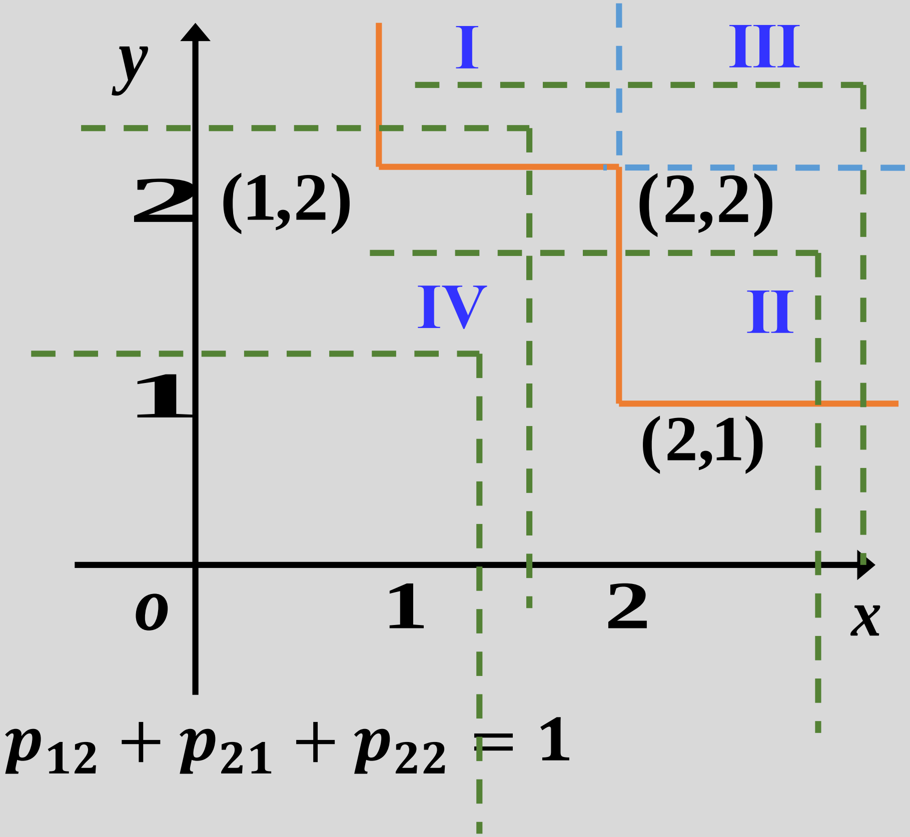
$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{\{i:x_i\le x\}}\sum_{\{j:y_j\le y\}}P(X=x_i,Y=y_j)$$

1. 当 $1\le x<2, y\ge 2$ 时，

$$F(X,Y)=p_{12}=\frac{1}{3}$$

2. 当 $x\ge 2, 1\le y<2$ 时，

$$F(X,Y)=p_{21}=\frac{1}{3}$$



3. 当 $x\ge 2,\ y\ge 2$ 时， $F(X,Y)=p_{12}+p_{21}+p_{22}=1$

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 1\le x<2, y\ge 2 \text{ 或 } x\ge 2, 1\le y<2;\\ 1, & x\ge 2, y\ge 2;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

二维离散型随机变量的边缘分布律

设 p_{ij} $(i \geq 1, j \geq 1)$为二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律，

分别用$p_i(X)$ $(i \geq 1)$, $p_j(Y)$ $(j \geq 1)$ 表示X 和Y的分布律，则

$$p_i(X) = P(X = x_i) = P(X = x_i, -\infty < Y < \infty)$$

$$= P\left(\sum_{j\geq 1}\{X = x_i, Y = y_j\}\right) = \sum_{j\geq 1} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j\geq 1} p_{ij}$$

$$p_j(Y) = P\left(Y = y_j\right) = P(-\infty < X < \infty, Y = y_j)$$

$$= P\left(\sum_{i\geq 1}\{X = x_i, Y = y_j\}\right) = \sum_{i\geq 1} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i\geq 1} p_{ij}$$

二维离散型随机变量的边缘分布律

设 p_{ij} $(i \geq 1, j \geq 1)$为二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律，

$$p_i(X) = \sum_{j \geq 1} p_{ij} \qquad i \geq 1$$

$$p_j(Y) = \sum_{i \geq 1} p_{ij} \qquad j \geq 1$$

分别称$p_i(X)$，$p_j(Y)$为(X, Y)关于X和Y的边缘分布律

二维离散型随机变量的边缘分布律

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_j(Y)$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_1(Y)$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_2(Y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_j(Y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_i(X)$	$p_1(X)$	$p_2(X)$	$\cdots$	$p_i(X)$	$\cdots$	1

$$p_i(X) = \sum_{j \geq 1} p_{ij} \quad i \geq 1 \qquad p_j(Y) = \sum_{i \geq 1} p_{ij} \quad j \geq 1$$

二维离散型随机变量的边缘分布律

例3　一个袋中有两只红球，三只白球，令

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第一次取到红球} \\ 0, & \text{第一次取到白球} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{第二次取到红球} \\ 0, & \text{第二次取到白球} \end{cases}$$

分不放回和放回两种情形摸球两次，求(X,Y)的联合分布律与边缘分布律

二维离散型随机变量的边缘分布律

不放回

$Y \backslash X$	0	1	$p_j(Y)$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_i(X)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

放回

$Y \backslash X$	0	1	$p_j(Y)$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$p_i(X)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

二维离散型随机变量的边缘分布律

X	0	1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y	0	1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

$\not\Rightarrow$ 求(X,Y)的联合分布律

联合分布 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 边缘分布

小　　结

(X, Y)为二维离散型随机变量

联合分布律	$p_{ij}=P\left(X=x_i,Y=y_j\right),\qquad i\geq 1,j\geq 1$
边缘分布律	$p_i(X)=\sum_{j\geq 1}p_{ij}\qquad i\geq 1$ $p_j(Y)=\sum_{i\geq 1}p_{ij}\qquad j\geq 1$