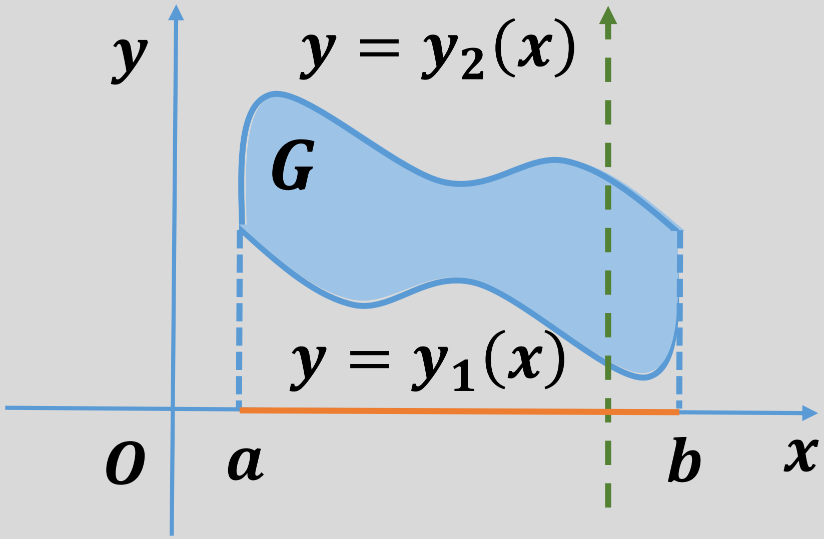
直角坐标系下二重积分化为二次积分

- 直角坐标系下将二重积分$\iint_G f(x,y)dxdy$化为二次积分

$$G_x: \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

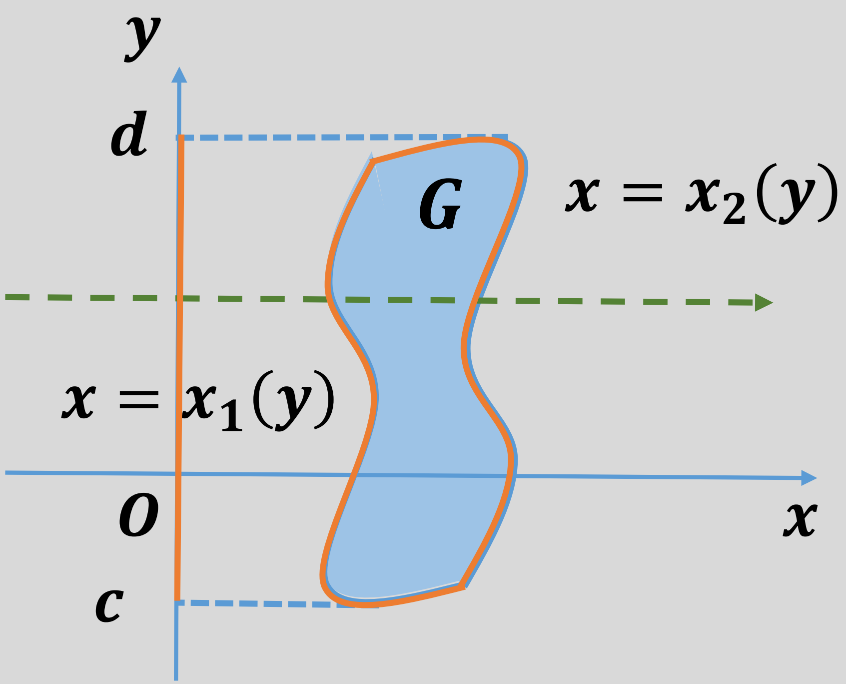


$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy$$

直角坐标系下二重积分化为二次积分

- 直角坐标系下将二重积分$\iint_G f(x,y)dxdy$化为二次积分

$$G_y:\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(x) \le x \le x_2(x) \end{cases}$$



$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

直角坐标系下二重积分化为二次积分

- 设X 和Y 相互独立, 具有共同的概率密度 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$

求 $Z=X+Y$ 的密度函数与分布函数。

解：积分转化法求$f_Z(z)$

$$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h[g(x,y)]f(x,y)dxdy=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} h(x+y)1dx\,dy$$

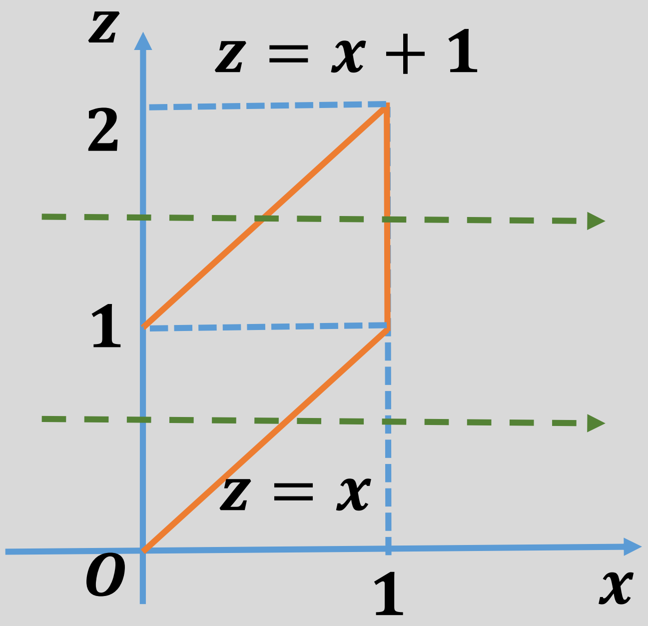
$$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h[g(x,y)]f(x,y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^1 h(x+y)1\,dy\right)dx$$

$$z=x+y$$

$$=\int_0^1\left(\int_x^{x+1} h(z)\,dz\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^z h(z)\,dx\right)dz+\int_1^2\left(\int_{z-1}^1 h(z)\,dx\right)dz$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h[g(x,y)]f(x,y)dxdy = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{z} h(z)\,dx\right)dz + \int_{1}^{2}\left(\int_{z-1}^{1} h(z)\,dx\right)dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h[g(x,y)]f(x,y)dxdy = \int_{0}^{1} zh(z)\,dz + \int_{1}^{2}(2-z)h(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \quad f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \le z \le 1 \\ 2-z, & 1 \le z \le 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

四、（16 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0\le x\le y, y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，

(1)求随机变量 X 和 Y 的边沿缘概率密度 $f_x(x); f_y(y)$；并判别他们是否独立？

（2）求 $Z=Y-X$ 的概率密度。

解：积分转化法求 $f_Z(z)$ $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\le x\le y, y>0 \\ 0, & else \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h[g(x,y)]f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_0^{y}h(y-x)e^{-y}dx$$

$\boxed{z=y-x}$

$$=\int_0^{\infty}dy\int_y^{0}h(z)e^{-y}(-dz)=\int_0^{\infty}dy\int_0^{y}h(z)e^{-y}dz$$

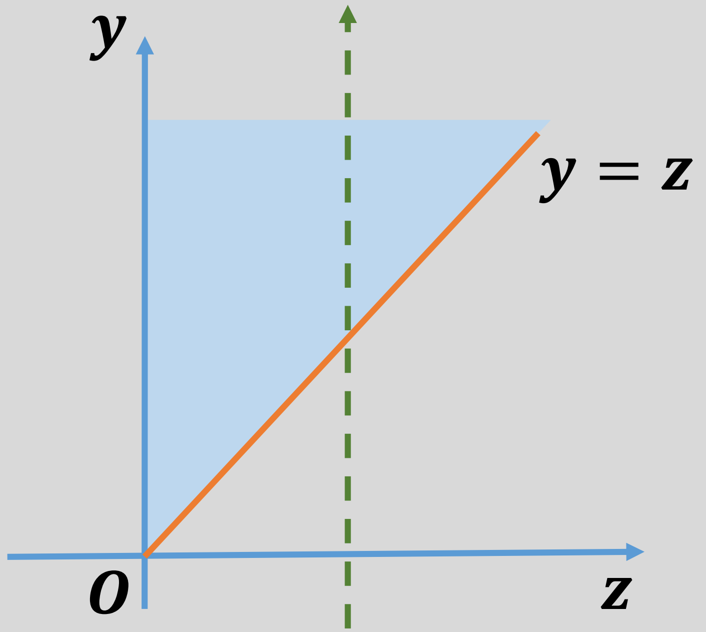
四、（16 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0\le x\le y, y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，

(1)求随机变量 X 和 Y 的边沿缘概率密度 $f_x(x); f_y(y)$；并判别他们是否独立？

（2）求 $Z=Y-X$ 的概率密度。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h[g(x,y)]f(x,y)dxdy=\int_{0}^{\infty}dy\int_{0}^{y}h(z)e^{-y}dz$$

$$=\int_{0}^{\infty}dz\int_{z}^{\infty}h(z)e^{-y}dy \quad =\int_{0}^{\infty}e^{-z}h(z)dz$$



$$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}, & 0\le z\le 1 \\ 0, & else \end{cases}$$