

武汉大学计算机学院 2016-2017 学年第 1 学期

算法设计与分析 试卷 (B 卷)

(本试卷一共八大题, 总分 100 分)

一、(总分 10 分)

(1) 判断 $3n \lfloor \log_2 n \rfloor = O(n^2)$ 是否正确, 请证明; (3 分),

(2) 如下 $C(n)$ 表示算法复杂度函数 (输入规模为 n), 用 $O(\cdot)$ 渐进函数表示每个算法的复杂度 (5 分), 并写出下列算法的复杂度的大小排序; (2 分)

A. $C(n) = C(n-1) + k$, k 是常量, $C(1) = 1$;

B. $C(n) = 2n^2 + 5n + 1/n$;

C. $C(n) = 10^{100} \log_2 n + 3n \log_2 n$;

D. $C(n) = C(n/2) + 100$, $C(1) = 1$;

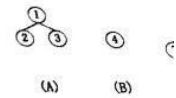
二、(总分 10 分) 对以下程序段进行时间复杂度分析。

(1) 写出下面程序的时间复杂度的递推式 (递归方程); 并分析算法的空间复杂度, 并用大 " $O(\cdot)$ " 记号表示。 (5 分)

```
MERGESORT(low, high)
    if low < high;
    then mid ← (low, high)/2;
        MERGESORT(low, mid);
        MERGESORT(mid+1, high);
        MERGE(low, mid, high);
    endif
```

end MERGESORT

三、(总分 10 分) 现有 A, B, C, D, 4 初始秩相等。



(1) UNION (4, 3), UNION (7, 10 (6), UNION 操作中的 FIND 不成后的树表示; (要求: 对于第二个参数的父节点的秩加 1

四、(总分 15 分) 给你一个是个是伪造的, 并且那个伪造找出这个伪造的硬币。为比较两组硬币重量的仪器是否相同。

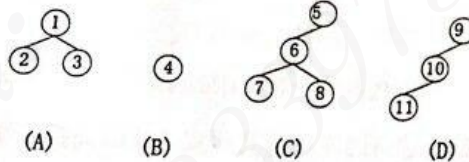
(1) 写出分治算法的

(2) 如果问题规模为归调用方式写出算法 (分)

(3) 试分析 $n=9$ 过程。 (5 分)

end MERGESORT

三、(总分 10 分) 现有 A, B, C, D, 4 棵树如下, 假设其根节点的初始秩相等。



(1) UNION (4, 3), UNION (7, 10), UNION (4, 9), FIND (8), FIND (6), UNION 操作中的 FIND 不考虑路径压缩, 请画出每一步操作完成后的树表示; (要求: 对于相同秩的两棵树进行 UNION 操作, 默认第二个参数的父节点的秩加 1);

四、(总分 15 分) 给你一个装有 16 个硬币的袋子。16 个硬币中有一个是伪造的, 并且那个伪造的硬币比真的硬币要轻一些。你的任务是找出这个伪造的硬币。为了帮助你完成这一任务, 将提供一台可用来比较两组硬币重量的仪器, 利用这台仪器, 可以知道两组硬币的重量是否相同。

(1) 写出分治算法的主要思路; (3 分)

(2) 如果问题规模为 n , 假设硬币的重量用数组 $a[i]$ 表示, 请用递归调用方式写出算法伪代码; (4 分) 试分析算法的时间复杂度; (3 分)

(3) 试分析 $n=9$ 和 10, 即 n 分别为奇数和偶数, 两种情形下的分治过程。 (5 分)

五、(总分 15 分) N 个人过河, 船每次只能坐两个人, 船载每个人过河的所需时间不同 $t[i]$, 每次过河的时间为船上的人的较慢的那个, 问最快的过河时间。(船划过去要有一个人划回来)

- (1) 请写出两种贪心策略: (5 分)
- (2) 假设四人所需要的时间 $t[i]$ 分别是 1、2、5、8 分钟, 说明两种贪心算法过河的步骤以及需要的总时间是多少? (5 分)
- (3) 写出较优贪心算法的主要思路 (伪代码)。(5 分)

六、(总分 15 分) 试用动态规划算法实现下列问题求解: 设 A 和 B 是两个字符串。我们要用最少的字符操作, 将字符串 A 转换为字符串 B , 这里所说的字符操作包括: 删除一个字符 (delete)、插入一个字符 (insert)、将一个字符改为另一个字符 (replase)。对于原字符串 $A[1, \dots, i]$, 目标字符串 $B[1, \dots, j]$, 将字符串 A 变换为字符串 B 所用的最少字符操作数称为字符串 A 到 B 的编辑距离, 则编辑距离定义为 $C[i, j]$ 。

例如将 kitten 一字转成 sitting: 第一步: sitten (k 改为 s); 第二步: sittin (e 改为 i); 第三步: sitting (插入 g); 则其编辑距离为 3;

- (1) 请写出求解编辑距离的动态规划思路, 并写出该算法的递归方程: (8 分)
- (2) 计算字符串 $A=\text{fail}$ 转换为字符串 $B=\text{sai}$ 的编辑距离, 写出动

态规划计算编辑距离的矩阵表示。(7分)

七、(总分 15 分) 羽毛球队有男女运动员各 n 人。给定两个 $n \times n$ 的矩阵 P 和 Q 。 $P[i][j]$ 是男运动员 i 和女运动员 j 配合组成混合双打的竞赛优势, $Q[i][j]$ 是女运动员 i 和男运动员 j 配合的竞赛优势。由于技术配合或心理状况等各种因素的影响, $P[i][j]$ 并不一定等于 $Q[j][i]$ 。男运动员 i 女运动员 j 配合组成混合双打的男女双方竞赛优势乘积为 $P[i][j] \times Q[j][i]$ 。

请采用回溯法设计一个算法, 计算男女运动员最佳搭配的配对法, 使得各组男女双方竞赛优势乘积的总和达到最大。

(1) 写出回溯法的算法思路, 画出状态空间树。(6分)

(2) 考虑算法的剪枝方法, 并说明。(4分)

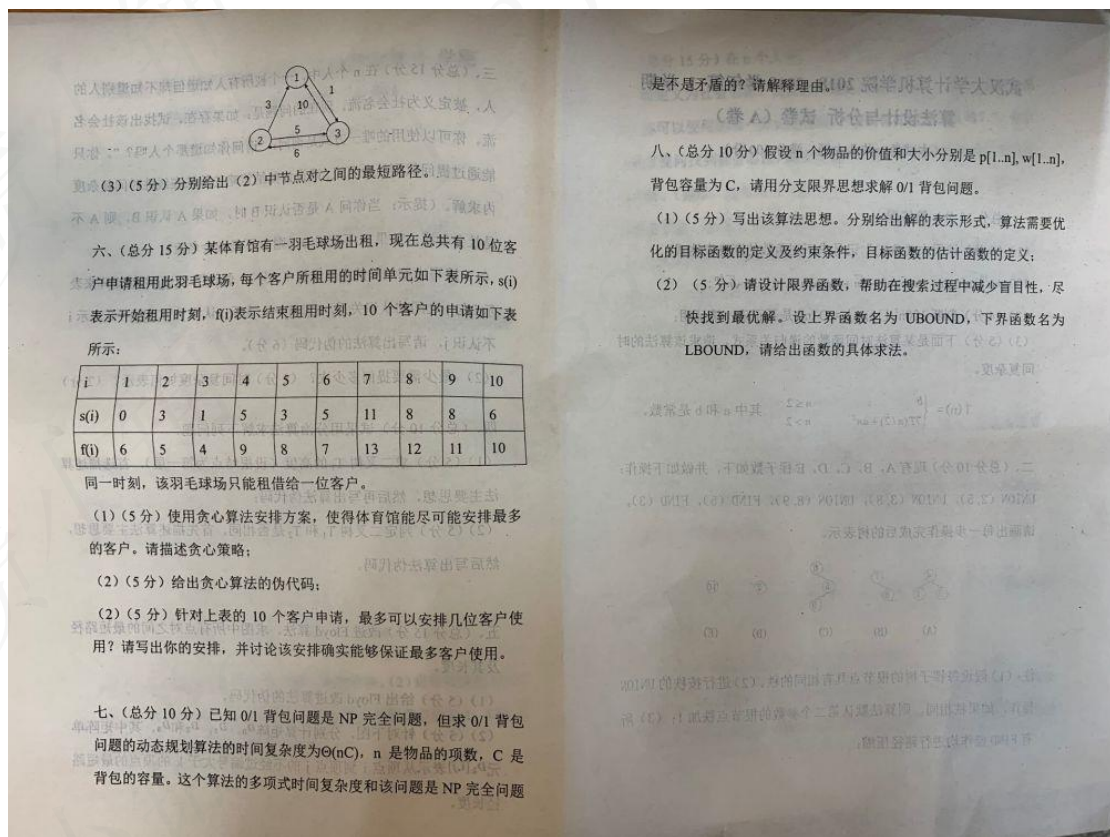
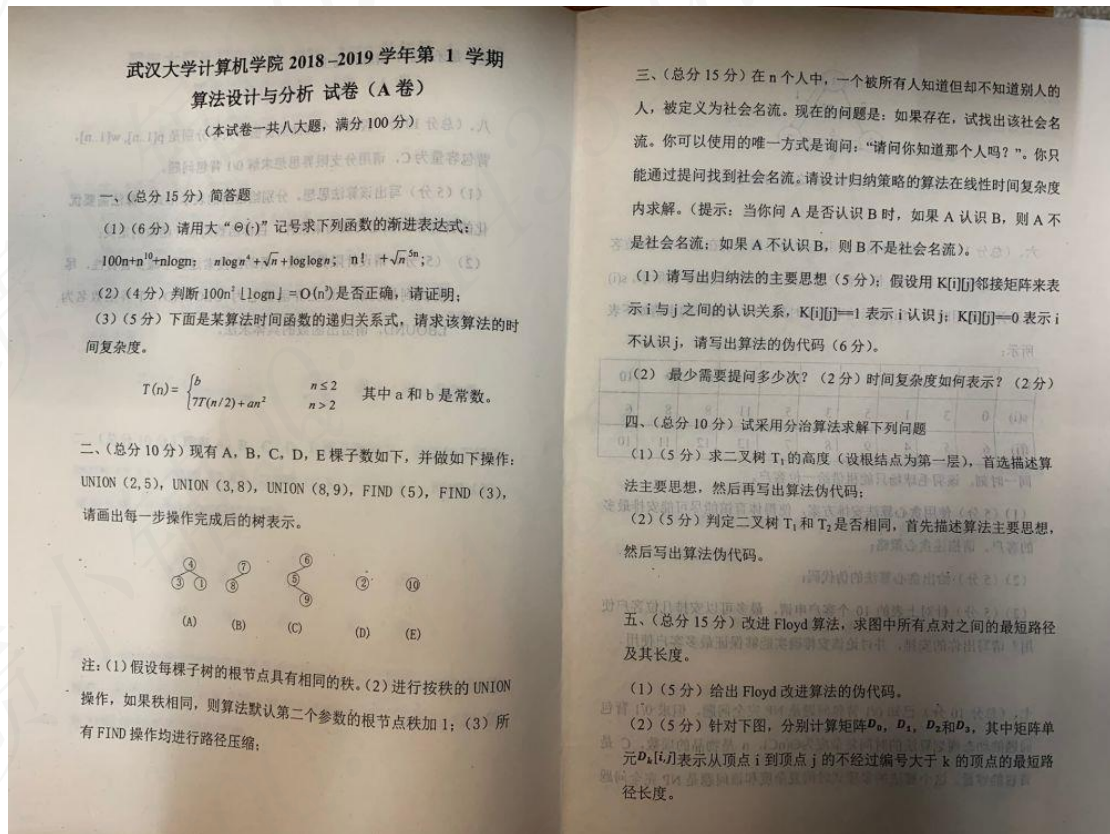
(3) 如下面 P 和 Q 数组的数据:

$P =$	10	2	3
	2	3	4
	3	4	5

$Q =$	2	2	2
	3	5	3
	4	5	1

计算最大的男女双方竞赛优势总和, 并写出最佳搭配。(5分)

八、(总分 10 分) 什么是 P 问题, NP 问题;(5分) 试分析图的 3 着色问题是哪一类问题, 并说明原因;(5分)



一、(总分 10 分)

(1) 判断 $3n \lfloor \log_2 n \rfloor = O(n^2)$ 是否正确, 请证明; (3 分),

(2) 如下 $C(n)$ 表示算法复杂度函数 (输入规模为 n), 用 $O(\cdot)$ 渐进函数表示每个算法的复杂度 (5 分), 并写出下列算法的复杂度的大小排序; (2 分)

A. $C(n) = C(n-1) + k$, k 是常量, $C(1) = 1$;

B. $C(n) = 2n^2 + 5n + 1/n$;

C. $C(n) = 10^{100} \log_2 n + 3n \log_2 n$;

D. $C(n) = C(n/2) + 100$, $C(1) = 1$;

参考答案:

(1) 正确, 证明: 对于任意的正整数 n ,

$$|3n \lfloor \log_2 n \rfloor| \leq |3n \log_2 n| \leq 3|n^2|$$

取 $n_0=1$, $C=3$, 根据定义知命题成立。

(2) A: $C(n)=O(n)$; (2 分)

B: $C(n)=O(n^2)$; (2 分)

C: $C(n)=O(n \log_2 n)$; (2 分)

D: $C(n) = O(\log_2 n)$; (2 分)

因为: $2n^2 > n \log_2 n > n > \log_2 n$;

所以: $B > C > A > D$ (2 分)

二、(总分 10 分) 对以下程序段进行时间复杂度分析。

(1) 写出下面程序的时间复杂度的递推式 (递归方程); 并分析算法的空间复杂度, 并用大 “ $O(\cdot)$ ” 记号表示。(5 分)

```

MERGESORT(low, high)
    if low < high;
    then mid ← (low, high)/2;
    MERGESORT(low, mid);
    MERGESORT(mid+1, high);
    MERGE(low, mid, high);
    endif
end MERGESORT
    
```

答:

递归方程: (2 分)

$$T(n) = \begin{cases} a & n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & n > 1 \end{cases}$$

设 $n=2^k$

解递归方程:

$$T(n) = 2(2T(n/4) + cn/2) + cn$$

$$= 4T(n/4) + 2cn$$

.....

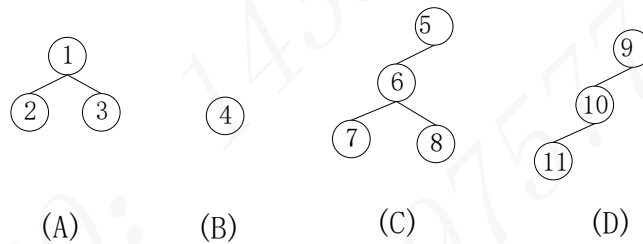
$$= 2^k T(1) + kcn$$

$$= an + cn \log n$$

满绩小铺: 1433397577, 搜集整理不易, 自用就好, 谢谢!

算法复杂度: $O(n\log n)$, (3 分)

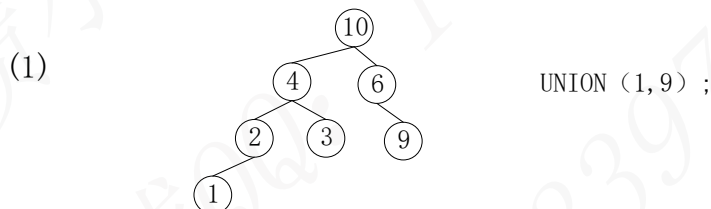
三、(总分 10 分) 现有 A, B, C, D, 4 棵树如下, 假设其根节点的初始秩相等。



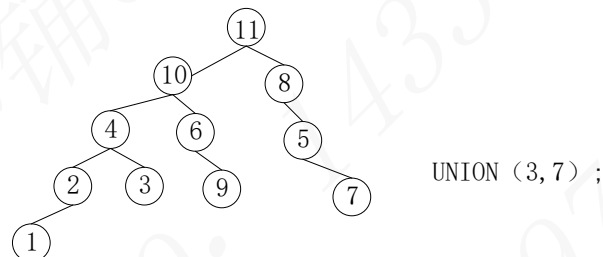
(1) UNION (4, 3), UNION (7, 10), UNION (4, 9), FIND (8), FIND (6), UNION 操作中的 FIND 不考虑路径压缩, 请画出每一步操作完成后的树表示; (要求: 对于相同秩的两棵树进行 UNION 操作, 默认第二个参数的父节点的秩加 1);

参考答案:

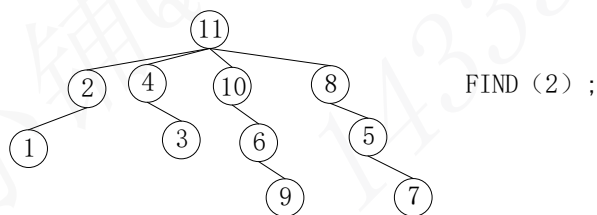
(1)



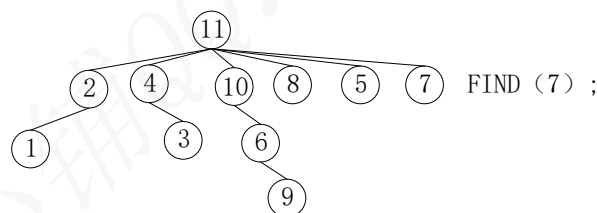
(2)



(3)



(4)



四、(总分 15 分) 给你一个装有 16 个硬币的袋子。16 个硬币中有一个是伪造的,

并且那个伪造的硬币比真的硬币要轻一些。你的任务是找出这个伪造的硬币。为了帮助你完成这一任务, 将提供一台可用来比较两组硬币重量的仪器, 利用这台仪器, 可以知道两组硬币的重量是否相同。

(1) 写出分治算法的主要思路; (3 分)

(2) 如果问题规模为 n , 假设硬币的重量用数组 $a[i]$ 表示, 请用递归调用方式写出算法伪代码; (4 分) 试分析算法的时间复杂度; (3 分)

(3) 试分析 $n=9$ 和 10 , 即 n 分别为奇数和偶数, 两种情形下的分治过程。(5 分)

参考答案:

(1) 算法思路: (3 分)

① $n \leq 2$ 硬币个数 ≤ 2 , 则直接比较, 找出伪造币。否则, 转②。

② 若 $n \% 2 = 0$, 则将其分为个数相等的两部分, 选择轻的部分保留, 转①; 否则转③。

③ 将 $a[0 \cdots n-2]$ 分为相等的两部分: 若两部分重量相等, 则 $a[n-1]$ 为伪造币, 终止; 若不等, 则保留轻的部分, 转①。

(2) 伪代码: (4 分)

步骤: 略

算法复杂度: 以比较操作为基本运算, 最好情况比较 1 次, 最坏比较 $\log n$ 次,

(3) ① 分成两部分: $a[0 \cdots 4]$ 、 $a[5 \cdots 9]$, 假定后者轻, 保留 $a[5 \cdots 9]$ ② 分成三部分: $a[5 \cdots 6]$ 、 $a[7 \cdots 8]$ 、 $a[9]$, 若前两者一样重, 故劣质球为 $a[9]$ 。

五、(总分 15 分) N 个人过河, 船每次只能坐两个人, 船载每个人过河的所需时间不同 $t[i]$, 每次过河的时间为船上的人的较慢的那个, 问最快的过河时间。(船划过去要有一个划回来)

(1) 请写出两种贪心策略; (5 分)

(2) 假设四人所需要的时间 $t[i]$ 分别是 1、2、5、8 分钟, 说明两种贪心算法过河的步骤以及需要的总时间是多少? (5 分)

(3) 写出较优贪心算法的主要思路 (伪代码)。(5 分)

解法:

(1) 贪心策略:

先将所有人过河所需的时间按照升序排序, 我们考虑把单独过河所需要时间最多的两个旅行者送到对岸去, 有两种方式:

1. 最快的和次快的过河, 然后最快的将船划回来; 次慢的和最慢的过河, 然后次快的将船划回来, 所需时间为: $t[0] + 2 * t[1] + t[n-1]$;

2. 最快的和最慢的过河, 然后最快的将船划回来, 最快的和次慢的过河, 然后最快的将船划回来, 所需时间为: $2 * t[0] + t[n-2] + t[n-1]$ 。

(2) 第一种办法: 先让甲乙过去 (2 分钟), 甲回来 (1 分钟), 甲丙过去 (5 分钟), 甲回来 (1 分钟), 甲丁再过去 (8 分钟), 总共需要 17 分钟就可以让四个人都过去。

第二种办法: 先让甲乙过去 (2 分钟), 甲回来 (1 分钟), 丙丁过去 (8 分钟), 乙回来 (2 分钟), 甲乙再过去 (2 分钟), 总共需要 15 分钟就可以让四个人都过去。

(5 分)

(3) 贪心算法的主要思路

```
(4) #include<iostream>
(5) #include<algorithm>
(6) using namespace std;
(7)
(8) int main()
(9) {
(10)     int a[1000],t,n,sum;
(11)     scanf("%d",&t);
(12)     while(t--)
(13)     {
(14)         scanf("%d",&n);
(15)         sum=0;
(16)         for(int i=0;i<n;i++) scanf("%d",&a[i]);
(17)         while(n>3)
(18)         {
(19)             sum=min(sum+a[1]+a[0]+a[n-1]+a[1],sum+a[n-1]+
a[0]+a[n-2]+a[0]);
(20)             n-=2;
(21)         }
(22)         if(n==3) sum+=a[0]+a[1]+a[2];
(23)         else if(n==2) sum+=a[1];
(24)         else sum+=a[0];
(25)         printf("%d\n",sum);
(26)     }
(27) }
```

六、(总分 15 分) 试用动态规划算法实现下列问题求解: 设 A 和 B 是两个字符串。我们要用最少的字符操作, 将字符串 A 转换为字符串 B, 这里所说的字符操作包括: 删除一个字符 (delete)、插入一个字符 (insert)、将一个字符改为另一个字符 (replase)。对于原字符串 $A[1, \dots, i]$, 目标字符串 $B[1, \dots, j]$, 将字符串 A 变换为字符串 B 所用的最少字符操作数称为字符串 A 到 B 的编辑距离, 则编辑距离定义为 $C[i, j]$ 。

例如将 kitten 一字转成 sitting: 第一步: sitten (k 改为 s); 第二步: sittin (e 改为 i); 第三步: sitting (插入 g); 则其编辑距离为 3;

(1) 请写出求解编辑距离的动态规划思路, 并写出该算法的递归方程; (8 分)

(2) 计算字符串 A=fail 转换为字符串 B= sai 的编辑距离, 写出动态规划计算

编辑距离的矩阵表示。(7 分)

参考答案:

(1) 动态规划思路:

首先定义这样一个函数—— $c(i, j)$, 它表示第一个字符串的长度为 i 的子串到第二个字符串的长度为 j 的子串的编辑距离。

当 A 的第 i 个字符 x 与 B 的第 j 个字符 y 进行比较, 如果:

if $x == y$, then $c[i, j] == c[i-1, j-1]$

if $x != y$, and we insert y for A , then $c[i, j] = c[i, j-1] + 1$

if $x != y$, and we delete x for A , then $c[i, j] = c[i-1, j] + 1$

if $x != y$, and we replace x with y for A , then $c[i, j] = c[i-1, j-1] + 1$

显然可以有如下动态规划公式:

- if $i == 0$ 且 $j == 0$, $c(i, j) = 0$
- if $i == 0$ 且 $j > 0$, $c(i, j) = j$
- if $i > 0$ 且 $j == 0$, $c(i, j) = i$
- if $i \geq 1$ 且 $j \geq 1$, $c(i, j) == \min\{c(i-1, j) + 1, c(i, j-1) + 1, c(i-1, j-1) + f(i, j)\}$, 当第一个字符串的第 i 个字符不等于第二个字符串的第 j 个字符时, $f(i, j) = 1$; 否则, $f(i, j) = 0$ 。

(2) 动态规划算法代码:

```
int dist( )
{
    int m=A.size( );
    int n=B.size( );
    vector<int>c(n+1,0);
    for(int i=1;i<=n;i++) c[i]=i;
    for(i=1;i<=m;i++){
        int y=i-1;
        for(int j=1;j<=n;j++){
            int x=y;
            y=c[j];
            int z=j>1?c[j-1]:i;
            int del=A[i-1]!=B[j-1]?0:1;
            c[j]=min(x+del,y+1,z+1);
        }
    }
```

```

    }
    return c[n];
}

```

(3) 编辑距离矩阵

	0	f	a	i	l
0	0	1	2	3	4
s	1	1	2	3	4
a	2	2	1	2	3
i	3	3	2	1	2

七、(总分 15 分) 羽毛球队有男女运动员各 n 人。给定两个 $n \times n$ 的矩阵 P 和 Q 。 $P[i][j]$ 是男运动员 i 和女运动员 j 配合组成混合双打的竞赛优势, $Q[i][j]$ 是女运动员 i 和男运动员 j 配合的竞赛优势。由于技术配合或心理状况等各种因素的影响, $P[i][j]$ 并不一定等于 $Q[j][i]$ 。男运动员 i 女运动员 j 配合组成混合双打的男女双方竞赛优势乘积为 $P[i][j] \times Q[j][i]$ 。请采用回溯法设计一个算法, 计算男女运动员最佳搭配的配对法, 使得各组男女双方竞赛优势乘积的总和达到最大。

(1) 写出回溯法的算法思路, 画出状态空间树。(6 分)

(2) 考虑算法的剪枝方法, 并说明;(4 分)

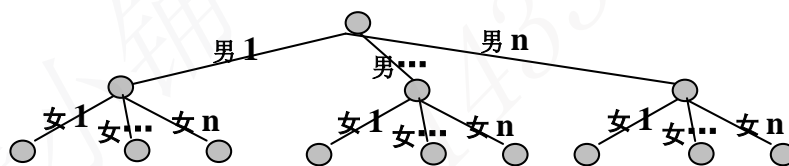
(3) 如下面 P 和 Q 数组的数据:

$P = \begin{matrix} 10 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix} \quad Q = \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{matrix}$

计算最大的男女双方竞赛优势总和, 并写出最佳搭配;(5 分)

参考答案:

(1) 状态空间树



在这个状态空间树中采用回溯方法, 将男女队员的竞赛优势乘积计算出来, 然后将各组男女的优势乘积进行相加。找出最大值。

(2) 剪枝方法:

由于一个男队员只能和一个女队员搭档, 反之也同理, 因此, 对于搜索的第一步选定某男和某女, 那么第二个男队员就不能和第一个男队员的女搭档组合, 因此, 剪去改女队员的分枝。

(3) 最大的男女双方竞赛优势总和为:

$$10 \times 2 + 4 \times 5 + 4 \times 3 = 52$$

最佳搭配为: (女 1, 男 1) (女 2, 男 3) (女 3, 男 2)

八、(总分 10 分) 什么是 P 问题, NP 问题; (5 分) 试分析图的 3 着色问题是哪一类问题, 并说明原因; (5 分)

参考答案:

(1) P 问题解释: 如果一个问题可以找到一个能在多项式的时间里解决它的算法, 那么这个问题就属于 P 问题。(2 分)

(2) NP 问题解释: 存在一个确定性算法 A, 该算法在对问题 Π 的一个实例展示一个断言解时, 它能在多项式时间内验证解的正确性。即如果断言解导致答案是 yes, 就存在一种方法可以在多项式时间内验证这个解。

(3) 3 着色问题是 NPC 问题。同时它也属于 NP 类问题。用定义证明即可。