# 事件的独立性

- 事件独立性的定义
- 事件独立性的应用

# 事件的独立性

两个事件的独立性

三个事件的独立性

$n$个事件的独立性

# 引　例

盒中有5个球，3个红球2个白球，有放回地依次取两个球。

记　$A$：第一次取出红球　$B$：第二次取出红球

$P(B|A)=P(B)$ $\Longleftrightarrow$ $A$的发生不影响$B$的发生

# 两个事件的独立性

$$\left.\begin{array}{r} P(B|A) = P(B) \\ \\ P(AB) = P(A)P(B|A) \end{array}\right] \Longrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

$$\left.\begin{array}{r} P(AB) = P(A)P(B) \\ \\ P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} \end{array}\right] \Longrightarrow P(B|A) = P(B)$$

$$P(B|A) = P(B) \Longleftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

# 两个事件的独立性

$$A\text{与}B\text{相互不影响} \Longleftrightarrow \begin{cases} P(B|A)=P(B) & P(A)>0 \\ P(A|B)=P(A) & P(B)>0 \end{cases}$$

$$P(B|A)=P(B) \Longleftrightarrow P(AB)=P(A)P(B) \Longleftrightarrow P(A|B)=P(A)$$

$$A\text{与}B\text{相互不影响} \Longleftrightarrow P(B|A)=P(B) \quad P(A)>0 \qquad (1)$$

$$\Longleftrightarrow P(AB)=P(A)P(B) \qquad (2)$$

# 两个事件的独立性

**定 义**

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间, $A,B\in\mathcal{F}$. 如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件$A$与 $B$ 相互独立，简称为$A$，$B$独立。

特别地，必然事件和不可能事件与任何事件相互独立

# 两个事件的独立性

## 命题

若事件$A,B$相互独立，则下列各对事件也相互独立：

$\{\overline{A},\ B\}$,　$\{A, \overline{B}\}$,　$\{\overline{A},\ \overline{B}\}$,

$$P(\overline{A}\,B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B)$$

$$= (1 - P(A))P(B) = P(\overline{A})P(B)$$

$\overline{A}$与 $B$ 独立 $\longrightarrow$ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立 $\longrightarrow$ $A$ 与 $\overline{B}$ 独立

# 三个事件两两独立

设$A, B, C$ 是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的三个事件，如果

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \end{cases}$$

则称它们两两相互独立。

$AB$的发生对$C$的发生没有影响

$$\Longleftrightarrow P((AB)C) = P(AB)P(C) = P(A)P(B)P(C)$$

# 三个事件相互独立

设$A, B, C$ 是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的三个事件，如果

$$
\begin{cases}
P(AB) = P(A)P(B) \\
P(BC) = P(B)P(C) \\
P(AC) = P(A)P(C) \\
P(ABC) = P(A)P(B)P(C)
\end{cases}
$$

则称它们相互独立。

# $n$个事件相互独立

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的$n$个事件($n$≥2)，如果

对所有可能的组合$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots \le n, 2 \le k \le n,$

成立 $$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为相互独立的事件.

注 $n$ 个事件相互独立 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ $n$个事件两两相互独立

# 伯恩斯坦反例

例　一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色, 第三面染成黑色，而第四面同时染上红、白、黑三种颜色. 现以$A, B, C$ 分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件，问 $A$，$B$，$C$是否相互独立?

解：由于在四面体中红、 白、黑分别出现两面，

因此　$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

又由题意知 $$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$$

# 伯恩斯坦反例

故有
$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}, \\ P(BC)=P(B)P(C)=\dfrac{1}{4}, \\ P(AC)=P(A)P(C)=\dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 $A, B, C$ 两两独立.

由于
$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C),$$

因此 $A$，$B$，$C$ 不相互独立.

# 独 立 性 的 应 用

$A,B$独立 $\Longrightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B)$

$A,B$互斥 $\Longrightarrow$ $P(A+B) = P(A) + P(B)$

$P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$ $\Longrightarrow$ $A,B$互斥且独立

$A,B$互斥 $AB = \emptyset$

$P(A) > 0, P(B) > 0$ $\Longrightarrow$ $A,B$不独立

$A,B$独立 $\Longrightarrow$ $AB \neq \emptyset$ $A,B$不互斥

# 独 立 性 的 应 用

$B = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ $A_1, A_2 \ldots, A_n$ 相互独立 $P(A_i) > 0,\ i = 1, \ldots, n$

$$\Longrightarrow \bar{B} = \overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n$$

$$\Longrightarrow P(B) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i)$$

# 独 立 性 的 应 用

**例1** 设随机试验中某一事件$A$发生的概率为$p > 0$，则无论$p$如何小，当我们不断独立重复做该试验时，$A$迟早会发生的概率为1.

**解：** $A_i$: $A$在第$i$次试验中发生，$A_1, A_2 \ldots, A_n, \ldots$ 相互独立

$P(A_i) = p > 0,\ i \geq 1$ $B$: $A$迟早会发生

$$B = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

## $A_1, A_2 \dots, A_n, \dots$ 相互独立 $P(A_i) = p > 0,\ i \geq 1$

$$P(B) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right)$$

$$\geq 1 - P\left(\prod_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i)$$

$$= 1 - (1-p)^n \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

$\Longrightarrow$ $A$迟早会发生的概率为1.

# 独 立 性 的 应 用

例2 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 , 被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落，求飞机被击落的概率.

分析：$H$: 飞机被击落　$A_i$: 有$i$个人击中飞机，　$i=1,2,3$

$$P(H)=\underbrace{P(H|A_1)}_{0.2}P(A_1)+\underbrace{P(H|A_2)}_{0.6}P(A_2)+\underbrace{P(H|A_3)}_{1}P(A_3)$$

$$P(A) = 0.4 \quad P(B) = 0.5 \quad P(C) = 0.7$$

$A, B, C$ 分别表示甲、乙、丙击中飞机　$A_i$: 有$i$个人击中飞机，$i = 1, 2, 3$

$$A_1 = A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C$$

$$P(A_1) = P(A\,\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}\,B\,\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}\,C)$$

$$= P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$P(A) = 0.4 \quad P(B) = 0.5 \quad P(C) = 0.7$$

$A, B, C$ 分别表示甲、乙、丙击中飞机　$A_i$: 有$i$个人击中飞机，$i = 1, 2, 3$

$$P(A_2) = P(AB\bar{C}) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{B}C)$$

$$= P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(\bar{B})P(C) = 0.41$$

$$P(A_3) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.14$$

$$P(H) = P(H|A_1)P(A_1) + P(H|A_2)P(A_2) + P(H|A_3)P(A_3) = 0.458$$

# 独 立 性 的 应 用

**例3** 要验收一批(100件)乐器. 验收方案如下: 自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的), 如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯, 则这批乐器就被拒绝接收. 设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95; 而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01. 如果已知这100件器中恰有4件是音色不纯的. 试问这批乐器被接收的概率是多少?

**解:** 设 $A$ 表示事件"这批乐器被接受"　$H_i$ 表示事件:

"随机地取3件乐器，其中恰有$i$件音色不纯"　$(i = 0, 1, 2, 3)$

## $H_i$：“随机地取3件乐器，其中恰有$i$件音色不纯”

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|H_i)P(H_i)$$

一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95;

一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01.

$$P(A|H_0)=(0.99)^3,\quad P(A|H_1)=(0.99)^2\times 0.05,$$

$$P(A|H_2)=0.99\times(0.05)^2,\quad P(A|H_3)=(0.05)^3,$$

# $H_i$：“随机地取3件乐器，其中恰有$i$件音色不纯”

已知这100件器中恰有4件是音色不纯的

而 $P(H_0)=\binom{96}{3}\Big/\binom{100}{3}$, $P(H_1)=\binom{4}{1}\binom{96}{2}\Big/\binom{100}{3}$,

$$P(H_2)=\binom{4}{2}\binom{96}{1}\Big/\binom{100}{3},\quad P(H_3)=\binom{4}{3}\Big/\binom{100}{3}.$$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|H_i)P(H_i)\approx 0.8574+0.0055+0+0=0.8629$$

# 独 立 性 的 应 用

例4 设在三次独立试验中，事件$A$在每次试验中出现的概率相同，

$A$至少出现一次的概率37/64，

求事件$A$出现的概率及事件$A$出现两次的概率。

解：设$A$出现的概率为$p$，$A_i$表示在第$i$次事件$A$出现，$i=1,2,3$

$A_1, A_2, A_3$ 相互独立　　$P(A_i)=p>0,\quad i=1,2,3$

$P$($A$至少出现一次) $=P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$

$$=1-(1-p)^3=\frac{37}{64} \Longrightarrow p=\frac{1}{4}$$

# 独 立 性 的 应 用

例4 设在三次独立试验中，事件$A$在每次试验中出现的概率相同，

$A$至少出现一次的概率37/64，

求事件$A$出现的概率及事件$A$出现两次的概率。

解：$A$出现的概率为$p$，$p=\dfrac{1}{4}$

出现的概率为$p$

没有出现的概率为$1-p$

出现的概率为$p$

$$P(A\text{出现两次})=C_3^2\,p^2(1-p)=\frac{9}{64}$$

# 伯努利试验

设试验 $E$ 只有两个可能结果$A$与$\overline{A}$, 记

$P(A)=p$ , $P(\overline{A})=1-p=q$, 其中 $0<p<1$.

将试验$E$独立重复进行 $n$ 次，构成的新试验称作$n$重伯努利试验.

# 伯努利试验

## 问题

在$n$重伯努利试验中，$P(A\text{发生}k\text{次})=?$

$k=0, 1, \ldots, n$

# 伯努利试验

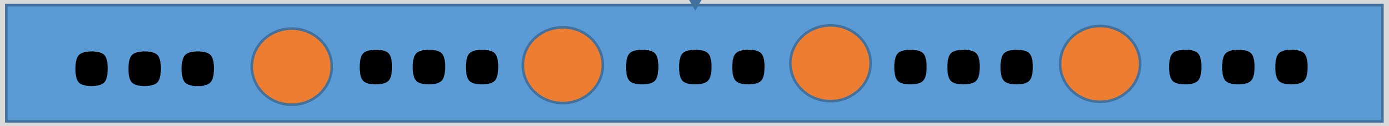
$P(A) = p$，其中 $0 < p < 1$　试验$E$独立重复进行了$n$ 次

对每个可能的结果，事件$A$发生$k$次的概率为

$\boxed{p^k(1-p)^{n-k}}$ → 利用独立可重复性

没有出现的概率为$1-p$

出现的概率为$p$



在$n$重伯努利试验中事件$A$发生$k$次共$C_n^k$种可能

# 伯努利试验

在$n$重伯努利试验中，事件$A$发生$k$次的概率为

$$P(A\text{发生}k\text{次}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

# 伯努利试验

例5 假设一厂家生产的每台仪器，以概率0. 70可以直接出厂，以概率0.30需要进一步调试，经调试后以概率0.80可以出厂，以概率0. 20定为不合格不能出厂。现该厂新生产了$n$ $(n \geq 2)$台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立)，求恰好有两件不能出厂的概率。

提示：$A$:机器能出厂 $P(A) = p$ $B$:恰好有两件不能出厂

$$P(B) = C_n^{n-2} p^{n-2} (1-p)^2$$

# 伯努利试验

例5 假设一厂家生产的每台仪器，以概率0. 70可以直接出厂，以概率0.30需要进一步调试，经调试后以概率0.80可以出厂，以概率0. 20定为不合格不能出厂。现该厂新生产了$n$ $n \geq 2$台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立），求恰好有两件不能出厂的概率。

分析：$A$:机器能出厂　　$C$:直接出厂　　$\overline{C}$:需要调试

$$P(A) = \underbrace{P(A|C)}_{1}\underbrace{P(C)}_{0.7} + \underbrace{P(A|\overline{C})}_{0.8}\underbrace{P(\overline{C})}_{0.3} = 0.94$$