一元函数微分学

数一 (题号标红色为第二章内容，其余为第三章内容)

2-1(87) 当 $x=$_____时，函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

2-2(87) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处 ( )

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$.　　(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.　　(D) $f(x)$ 的导数不存在.

2-3(87) 设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上可微，对于[0,1]上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间(0,1)内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在(0,1)区间内有且仅有一个 x，使得 $f(x)=x$.

2-4(88) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=$_____.

2-5(88) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$ 在点 x_0 处的微分 dy 是 ( ).

(A) 与 Δx 等价的无穷小.　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

2-6(88) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，且 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 ( )

(A) 取得极大值.　　(B) 取得极小值.

(C) 某邻域内单调增加.　　(D) 某邻域内单调减少.

2-7(89) 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$_____.

2-8(89) 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ ( )

(A) 有且仅有水平渐近线.　　(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线，也有铅直渐近线.　　(D) 既无水平渐近线，也无铅直渐近线.

2-9(90) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为 ( )

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.　　(C) $[f(x)]^{2n}$.　　(D) $n![f(x)]^{2n}$.

2-10(90) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ ( )

(A) 不可导.　　(B) 可导且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

2-11(90) 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

2-12(91) 设 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_____.

2-13(91) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ( )

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

2-14(92) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$_____.

2-15(92) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为 ( )

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

2-16(92) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

2-17(92) 设 $f''(x)<0, f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0, x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

2-18(93) 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(x)\geq k>0, f(0)<0$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

2-19(93) 设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$.

2-20(94) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=$_____.

2-21(95) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (　)

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

2-22(95) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)$=0是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　).

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分但非必要条件.

(C) 必要但非充分条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

2-23(95) 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq 0,\ f(a)=f(b)$ $=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1)在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

(2)在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

2-24(96) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$，则 (　　)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

2-25(96) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\leq a, |f''(x)|\leq b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$内任一点，证明 $|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}$.

2-26(97) 对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程为_____.

2-27(98) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$_____.

2-28(98) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是 (　　)

(A)3.　　(B)2.　　(C)1.　　(D)0.

2-29(99) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=$_____.

2-30(99)试证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$.

2-31(00) 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有 (　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

2-32(01) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图形如图2.1所示, 则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为(见图 2.2) (　　)

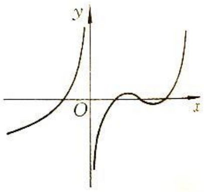


图 2.1

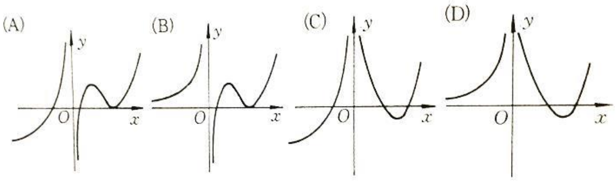


图 2.2

2-33(01) 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　）

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

2-34(01) 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$，试证：

(1)对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

2-35(02) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$______.

2-36(02) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则（　）

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$.

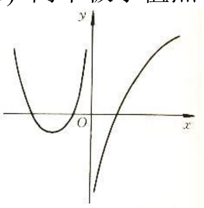
(D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$.

2-37(02) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

2-38(03) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（　）

(A) 一个极小值点和两个极大值点.　　(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.　　(D) 三个极小值点和一个极大值点.



题 2-38 图

2-39(04) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____.

2-40(04) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　）

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.　　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.　　(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

2-41(04)设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

2-42(05) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为______.

2-43(05) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　）

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

2-44(05) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$.证明：

(1)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

2-45(06) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy与dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则 (　　)

(A) $0<dy<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<dy$.

(C) $\Delta y<dy<0$.　　(D) $dy<\Delta y<0$.

2-46(07) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是 (　　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

2-47(07) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为 (　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

2-48(07) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)\ (n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是 (　　)

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

2-49(07) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

2-50(08) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是_____.

2-51(08) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数为 (　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

2-52(09) (1)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)\ (\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在且 $f'_+(0)=A$.

2-53(10) 设 $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)du \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______.

2-54(10) 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

2-55(11) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 (　　)

(A) (1,0).　(B) (2,0).　(C) (3,0).　(D) (4,0).

2-56(11) 求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

2-57(12) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为 (　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

2-58(12) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$ (　　).

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　(B) $(-1)^n(n-1)!$.　(C) $(-1)^{n-1}n!$.　(D) $(-1)^n n!$.

2-59(12)证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}\quad(-1<x<1)$.

2-60(13) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n(f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1)=$______.

2-61(13) 设$\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$($t$为参数)，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$______.

2-62(13) 设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有2阶导数，$f(1)=1$.证明：

(1)存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；

(2)存在$\eta\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

2-63(14) 下列曲线中有渐近线的是 (　)

(A) $y=x+\sin x$.　(B) $y=x^2+\sin x$.

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$.　(D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

2-64 (14) 设函数$f(x)$具有2阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上 (　)

(A) 当$f'(x)\ge 0$时，$f(x)\ge g(x)$.　(B) 当$f'(x)\ge 0$时，$f(x)\le g(x)$.

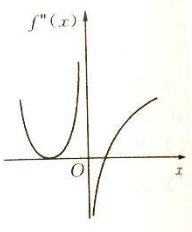
(C) 当$f''(x)\ge 0$时，$f(x)\ge g(x)$.　(D) 当$f''(x)\ge 0$时，$f(x)\le g(x)$.

2-65(14) 设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$，则$f(7)=$______.

2-66(14) 设函数$y=f(x)$由方程$y^3+xy^2+x^2y+6=0$确定，求$f(x)$的极值.

2-67(15) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其2阶导函数$f''(x)$的图形如图所示，则曲线$y=f(x)$的拐点个数为 (　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.



2-68(15) (1)设函数$u(x),v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(2) 设函数$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出$f(x)$的求导公式.

2-69(16) 已知函数$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n} \end{cases}, n=1,2,\cdots$, 则 (　)

(A) $x=0$是$f(x)$的第一类间断点.　(B) $x=0$是$f(x)$的第二类间断点.

(C) $f(x)$在$x=0$处连续但不可导.　(D) $f(x)$在$x=0$处可导.

2-70(16) 设函数$f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且$f'''(0)=1$，则$a=$______.

2-71(17) 设函数$f(x)$可导，且$f(x)f'(x)>0$，则 (　)

(A) $f(1)>f(-1)$.　(B) $f(1)<f(-1)$.

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$.　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$.

2-72(17) 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则$f^{(3)}(0)=$______.

2-73(17) 已知函数$y(x)$由方程$x^3+y^3-3x+3y-2=0$确定，求$y(x)$的极值.

2-74(17) 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有2阶导数，且$f(1)>0, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$.证明：

(1)方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根；

(2) 方程$f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根.

2-75(18) 下列函数中，在$x=0$处不可导的是 (　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$. (B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$. (C) $f(x)=\cos|x|$. (D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.