二维连续型随机变量的联合概率密度

主要内容

二维连续型随机变量的联合概率密度的定义及其性质

联合概率密度函数与联合分布函数的关系

联合概率密度函数与边缘概率密度的关系

二维连续型随机变量及其联合概率密度

设(X, Y)是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的二维随机变量，$F(x, y)$为其联合分布函数. 如果存在定义在平面$\mathbb{R}^2$上的非负实值函数$f(x, y)$, 使得

$$\boxed{F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du dv\,, (x, y) \in \mathbb{R}^2}$$

则称(X, Y)为二维连续型随机变量，称 $F(x, y)$为其连续型分布函数,

称 $f(x, y)$为(X, Y)的二维联合概率密度函数, 简称为联合概率密度.

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv\,,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

联合概率密度$f(x,y)$必须满足下列两个条件：

$$f(x,y)\geq 0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1$$

二维联合概率密度函数的性质

设(X,Y)是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的二维连续型随机变量，

$F(x,y)$与$f(x,y)$分别为其联合分布函数和联合概率密度.

- $F(x,y)$是二元连续函数，且当$f(x,y)$在(x,y)点连续时，

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

- 对平面$\mathbb{R}^2$中的任意面积为零的集合C, $P\big((x,y)\in C\big) = 0$.

- 对任意常数$x_1<x_2$, $y_1<y_2$, 有

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy$$

二维联合概率密度函数的性质

对平面$\mathbb{R}^2$中的任意“具有面积”的集合G, (X,Y)落入G的概率是

$$P\big((X,Y)\in G\big)=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$$

其中G 可以是若干个区域（如多边形、椭圆、圆环等）的并.

由二重积分的几何意义可知，该概率在数值上等于以区域G为底、

以曲面$z=f(x,y)$为顶面的曲顶柱体的体积.

二维连续型随机变量的联合概率密度

主要问题1

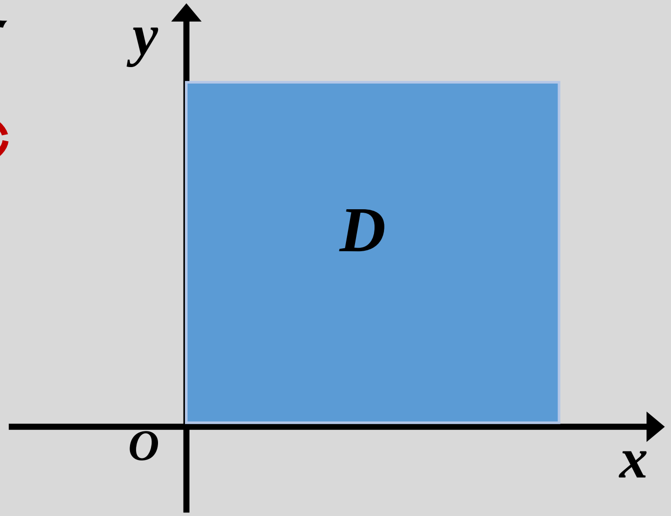
已知联合概率密度求事件的概率

(已知联合概率密度求联合分布函数)

$$P\big((X,Y)\in G\big)=\iint_G f(x,y)dxdy$$

例1 设二维随机变量(X,Y)具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



1) 求概率$P(Y\le X)$.

2) 求随机变量(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$.

3) 求随机变量(X,Y)的边缘分布函数$F_X(x), F_Y(y)$.

$$D=\{(x,y): f(x,y)\neq 0\}=\{(x,y): 0<x,y<\infty\}$$

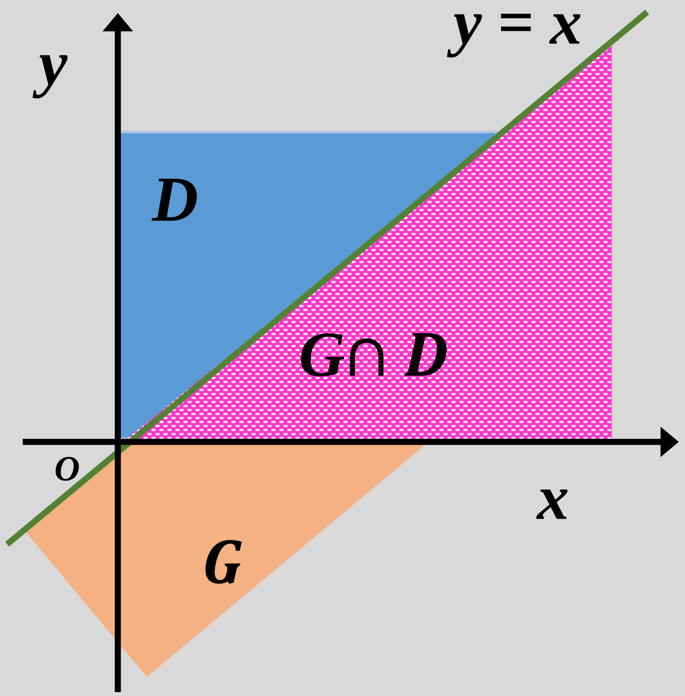
$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

解：$P(Y\le X)=P\big((X,Y)\in G\big)=\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$

$G=\{(x,y): y\le x\}$

$$=\iint\limits_{G\cap D} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{G\setminus D}\boxed{f(x,y)}dxdy \dashrightarrow 0$$

$$=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}2e^{-(2x+y)}dxdy=\frac{1}{3}$$



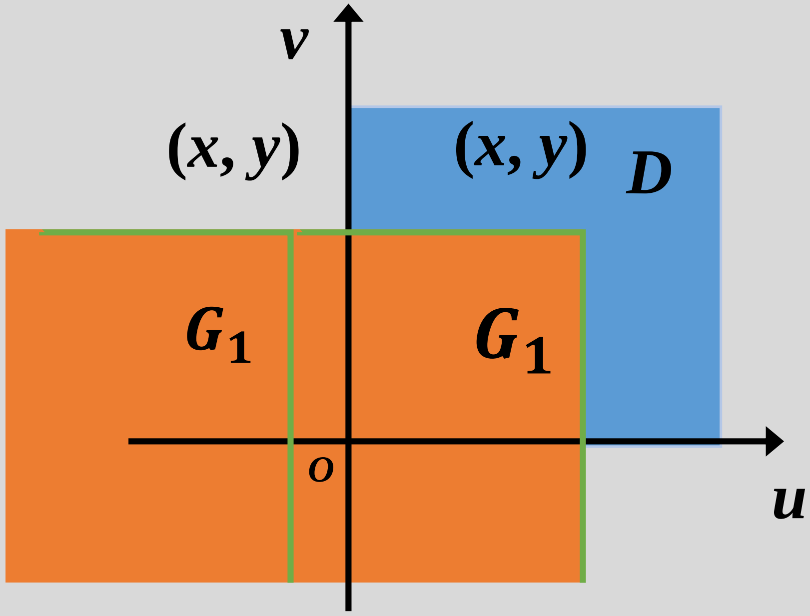
$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

2) 下面求随机变量(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$

$$G_1=\{(u,v):-\infty<u\le x,-\infty<v\le y\}$$

$$F(x,y)=P\big((X,Y)\in G_1\big)$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv\,,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

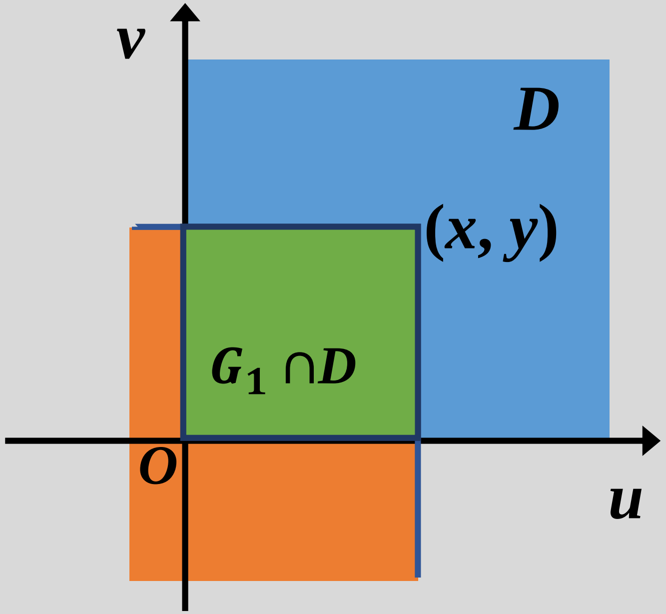


$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,dudv$$

$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2u+v)}dudv\,, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3) 求随机变量(X, Y)的边缘分布函数$F_X(x), F_Y(y)$.

法一：

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

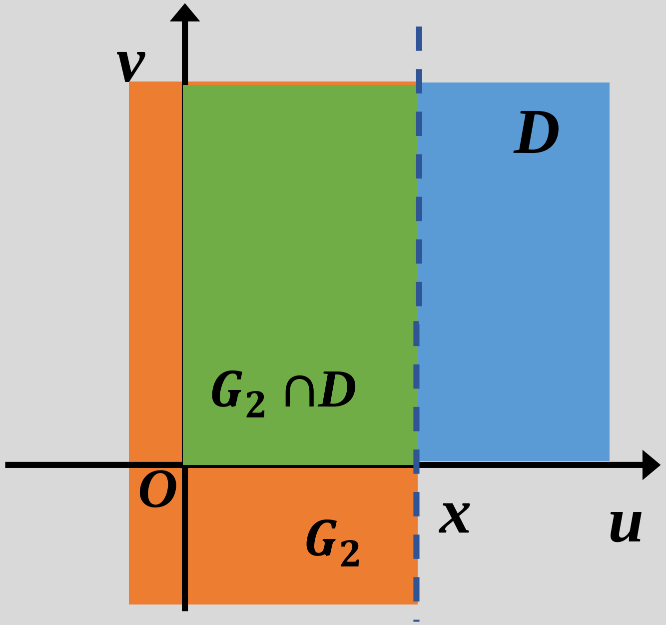
$$F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

法二：$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,dudv$

$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^\infty 2e^{-(2u+v)}dudv = 1-e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$$F_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y\int_0^\infty 2e^{-(2u+v)}dudv = 1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

二维连续型随机变量的边缘概率密度函数

主要问题2

已知联合概率密度求边缘概率密度函数

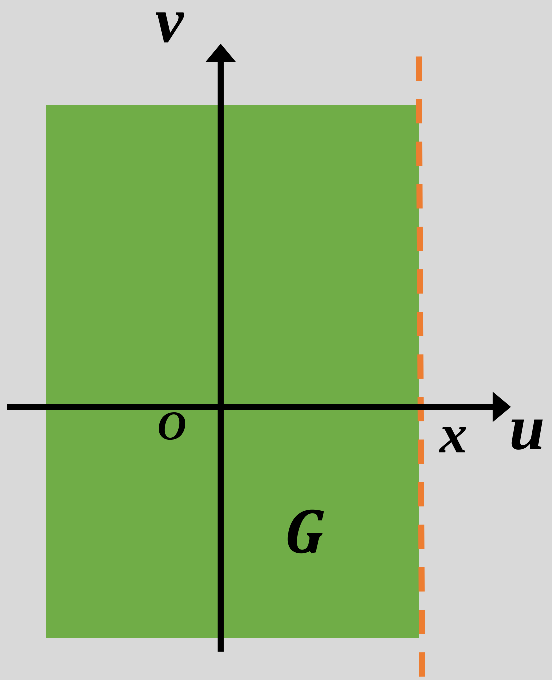
$$P\big((X,Y)\in G\big)=\iint_G f(x,y)dxdy$$

设(X,Y)具有联合概率密度 $f(x,y), F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$为其边缘分布函数，则

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,-\infty<Y<\infty)$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\boxed{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,dv\right)}du$$

$$\Longrightarrow \quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$



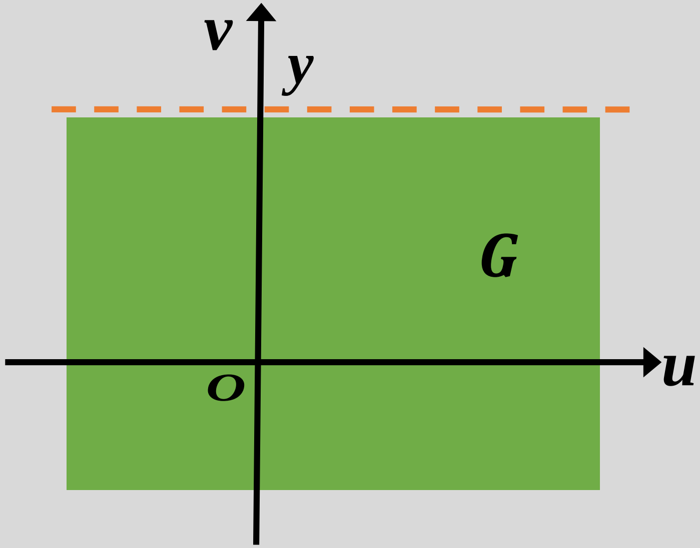
$$P\big((X,Y)\in G\big)=\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$$

同理可Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=P(-\infty<X<\infty\,,Y\le y)$$

$$=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\right)dv$$

$$\Longrightarrow f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$



已知联合概率密度求边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx$$

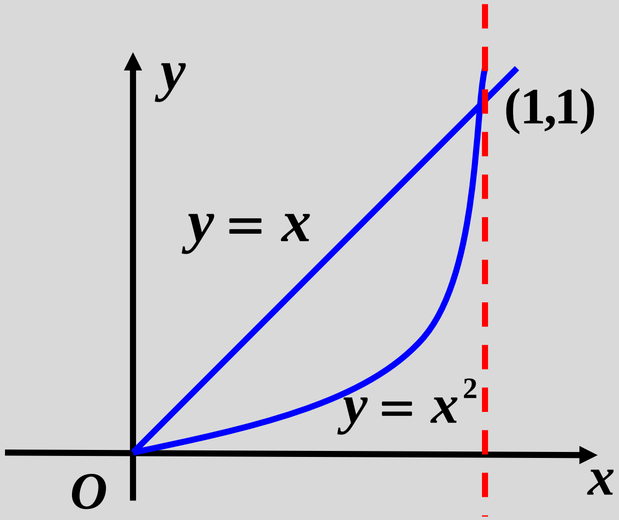
称$f_X(x)$ 和$f_Y(y)$分别为(X,Y)关于X和Y的边缘概率密度函数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

例2 设二维随机变量(X,Y)具有联合概率密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 6, & x^2 \le y \le x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求边缘概率密度函数$f_X(x)$ 和$f_Y(y)$.



$$D = \{(x,y): f(x,y) \ne 0\} = \{(x,y): x^2 \le y \le x\}$$

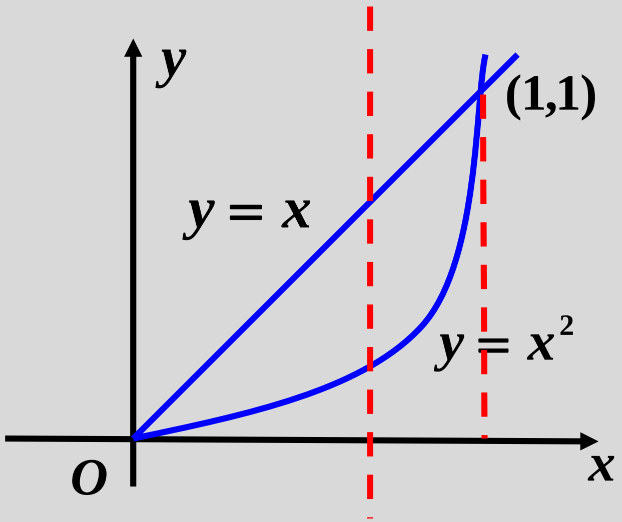
$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

解：当 $0\le x\le 1$时，

$$D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le x\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{x^2}0\,dy+\int_{x^2}^{x}6\,dy+\int_{x}^{\infty}0\,dy$$

$$=\int_{x^2}^{x}6\,dy=6(x-x^2)$$



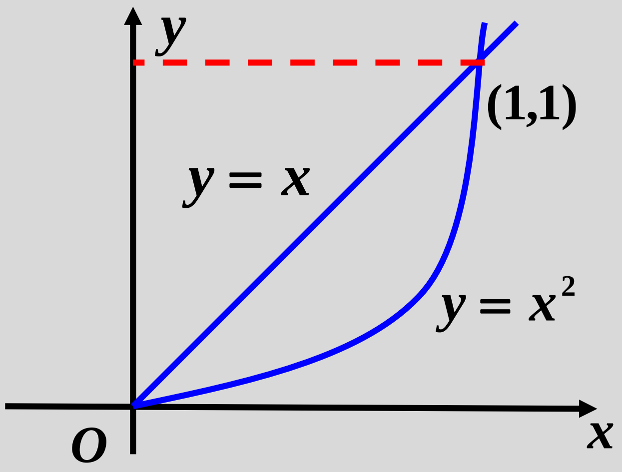
$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当 $0\le y\le 1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_y^{\sqrt{y}}6\,dx=6(\sqrt{y}-y)$$

$$D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le\sqrt{y}\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

小　　结

设(X,Y)具有联合概率密度 $f(x,y)$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,dudv\,,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,dv\right)du \qquad F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,du\right)dv$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx$$

常见的二维连续型分布

主要内容

二维均匀分布

二维正态分布

二维均匀分布

设 D 是平面上的有界区域,其面积为 $S(D)$ 若二维随机变量 (X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称(X,Y)在区域 D 上服从(二维)均匀分布.

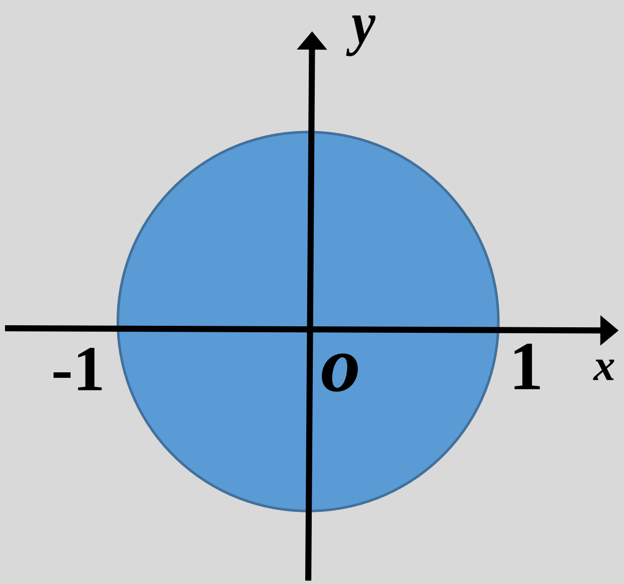
(X,Y)在区域 D 上服从均匀分布, $G\subset D$

$$\Longrightarrow\quad P((X,Y)\in G)=\iint\limits_{S(G)}\frac{1}{S(D)}dxdy=\frac{S(G)}{S(D)}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

例1　设随机变量 (X,Y)在单位圆 $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$

上服从均匀分布，试求(X,Y)的边缘概率密度.



解: $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leq 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leq 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x| \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由对称性可得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y| \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

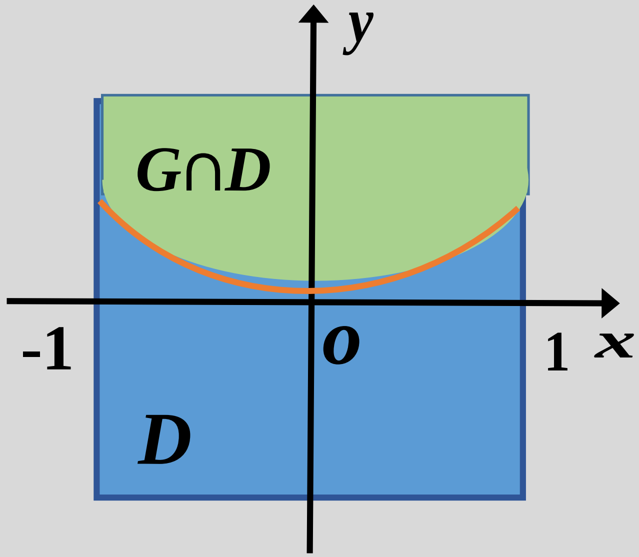
$$P\big((X,Y)\in G\big)=\iint_G f(x,y)\,dxdy$$

例2 设 (X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中$D=\{(x,y):|x|\le 1,|y|\le 1\}$

试求关于t的一元二次方程 $t^2+Xt+Y=0$无实根的概率.

解:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & |x|\le 1,|y|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



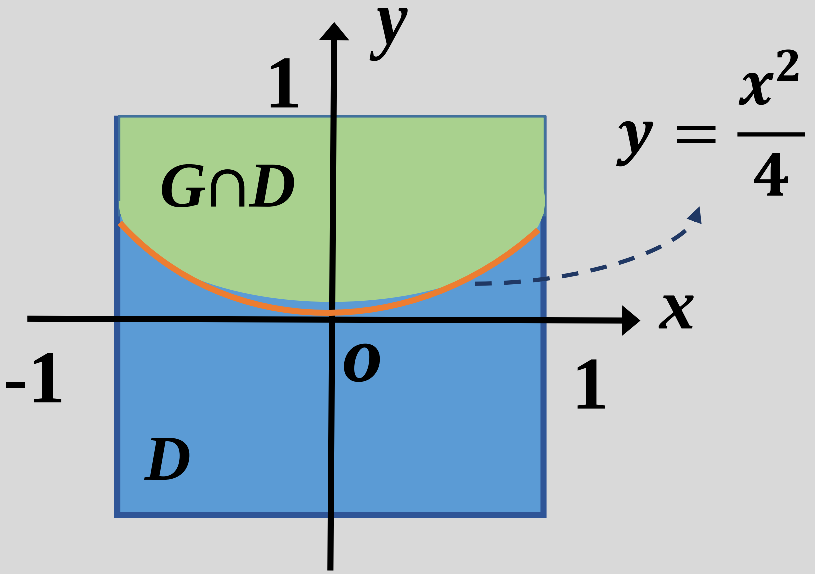
一元二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 无实根等价于

$$X^2-4Y<0$$

令区域$G=\{(x,y):x^2-4y<0\}$，则所求概率为$P(X^2-4Y<0)$

$$G=\{(x,y): x^2-4y<0\} \quad D=\{(x,y): |x|\le 1, |y|\le 1\}$$

$$P(X^2-4Y<0)=\iint_{G\cap D}\frac{1}{4}\,dxdy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{1}\frac{1}{4}\,dy\right)dx=\frac{11}{24}$$



二维正态分布

若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中μ_1,μ_2为实数，$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1,$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布，也称$(X,Y)$为二维正态随机变量，记作：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，称为 $f(x,y)$二维正态概率密度.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

例3 设(X,Y)服从二维正态分布 $N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$,求其边缘概率密度.

解: $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$

$$exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\,\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

令 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sqrt{1-\rho^2}\ \sigma_1}$ $\qquad v=\dfrac{y-\mu_2}{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_2}$

$$\Longrightarrow f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2}}dv$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2}} dv$$

$$= \frac{e^{-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2}} dv = \frac{e^{-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} = \frac{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}$$

$\Longrightarrow$ $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 同理 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布

边缘分布均为正态分布的随机变量，其联合分布一定是二维正态分布吗?

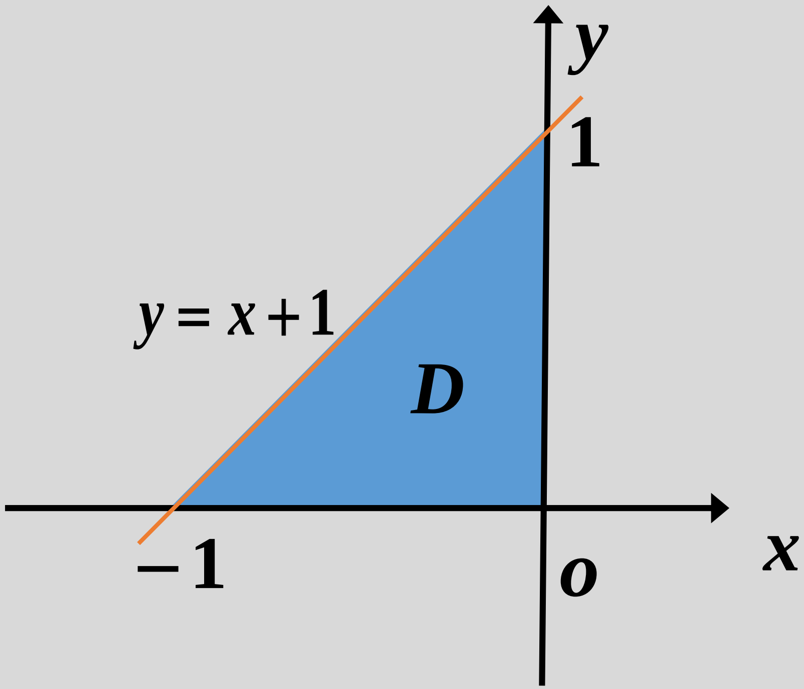
$$(X,Y)\sim f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)$$

$$\Longrightarrow\quad f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

故边缘分布均为正态分布的随机变量，其联合分布不一定是二维正态分布！

练　习

例1　已知随机变量(X,Y)在 D上服从均匀分布,试求(X,Y)的联合密度及联合分布函数,其中D为x 轴, y 轴及直线$y=x+1$所围成的三角形区域.



解

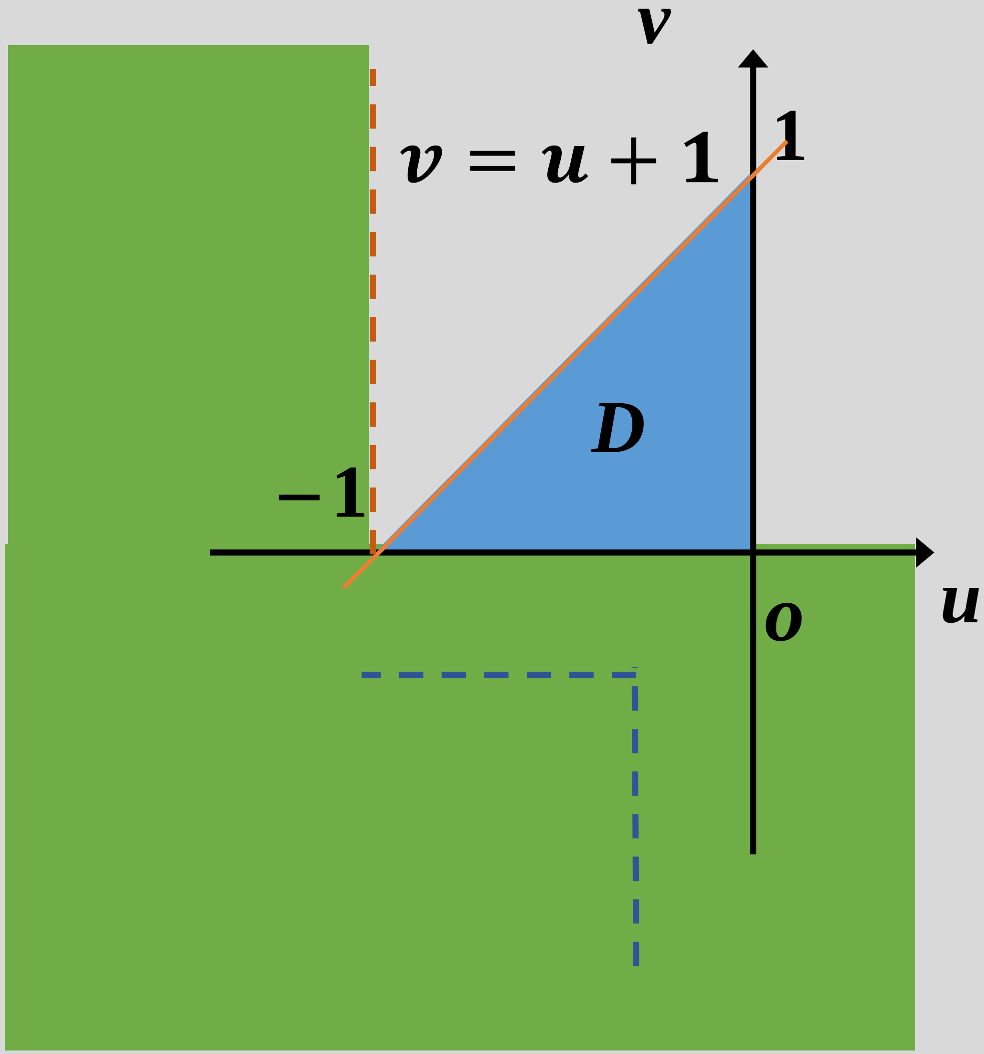
$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & (x,y)\in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv\,,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

当 $x<-1$ 或 $y<0$ 时，$f(x,y)=0$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv=0$$



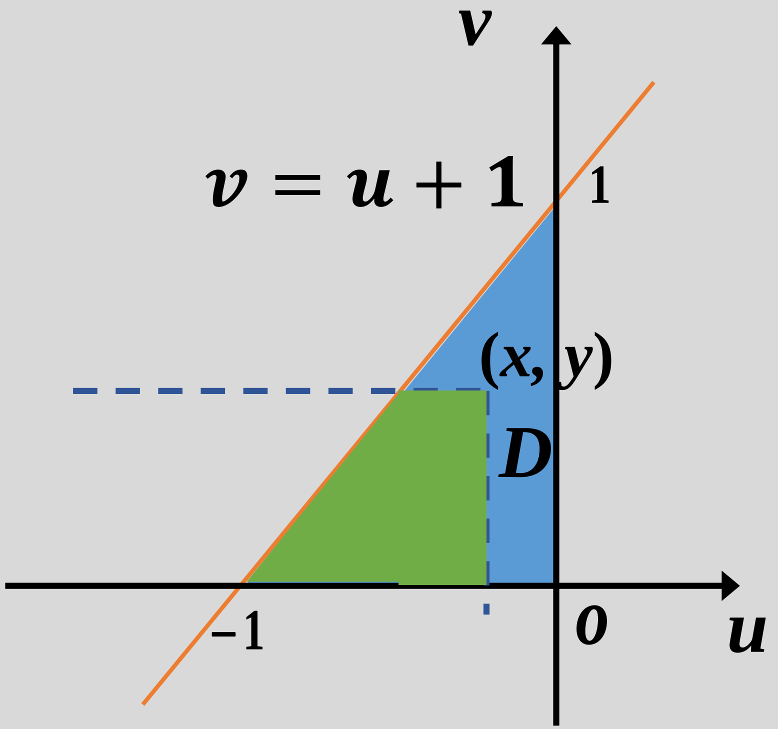
$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

当$-1\le x<0, 0\le y<x+1$时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,dudv$$

$$=\int_{0}^{y}dv\int_{v-1}^{x}2du$$

$$=(2x-y+2)y$$



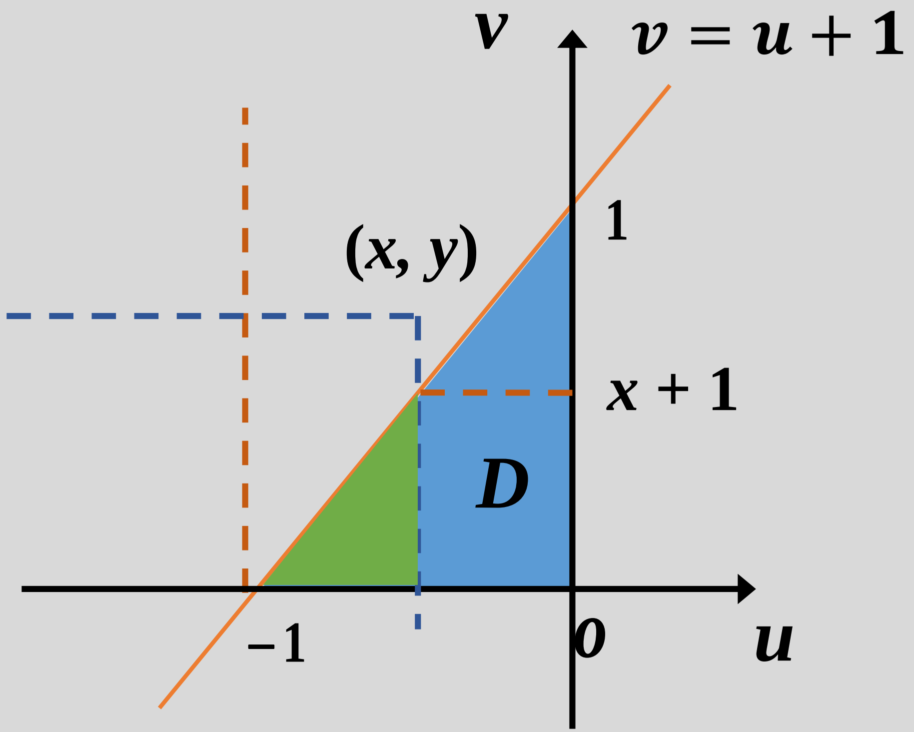
$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

当 $-1\le x<0, y\ge x+1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv$$

$$=\int_{0}^{x+1} dv\int_{v-1}^{x} 2du$$

$$=(x+1)^2$$



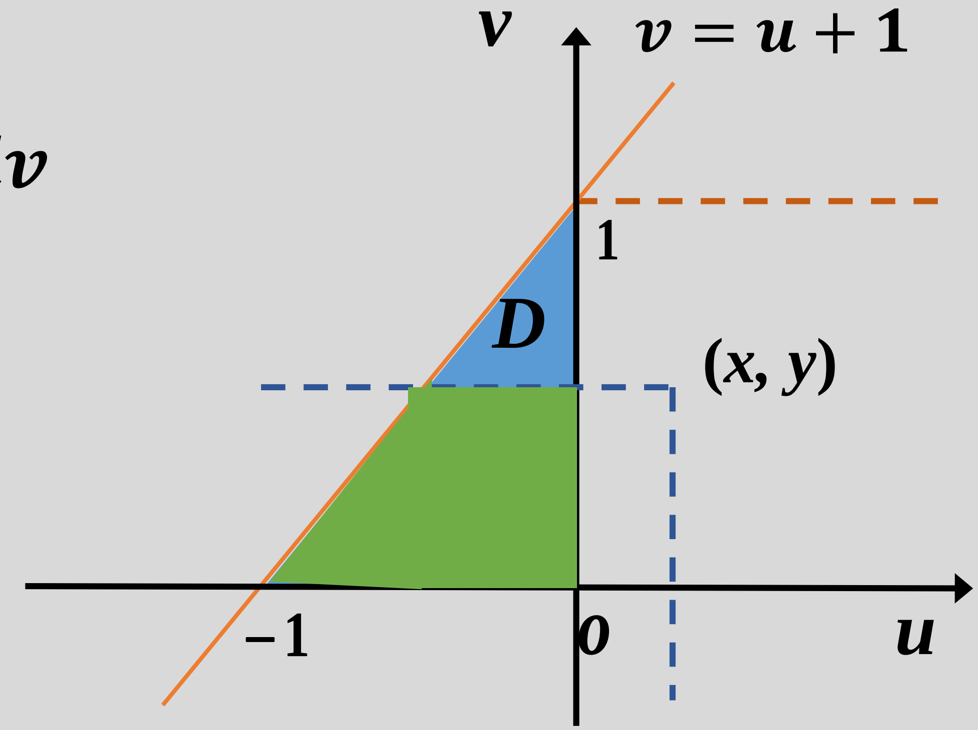
$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

当 $0\le x$，$0\le y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,dudv$$

$$=\int_{0}^{y}dv\int_{v-1}^{0}2du$$

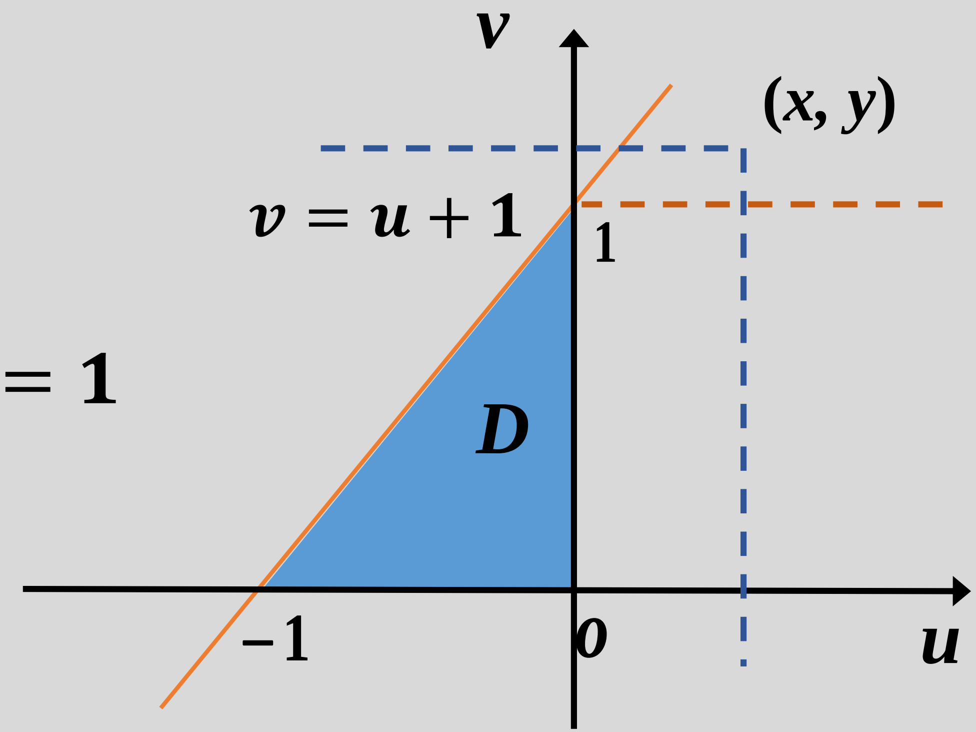
$$=(2-y)y$$



$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

当 $x\geq 0, y\geq 1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv=1$$



$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

所以 (X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<-1 \text{ 或 } y<0 \text{ 时,}\\ (2x-y+2)y, & \text{当 } -1\le x<0, 0\le y<x+1 \text{ 时,}\\ (x+1)^2 & \text{当 } -1\le x<0, y\ge x+1 \text{ 时,}\\ (2-y)y, & \text{当 } 0\le x,\ 0\le y<1 \text{时,}\\ 1, & \text{当 } x\ge 0, y\ge 1 \text{时,}\end{cases}$$

小　　结

二维均匀分布的两个边缘分布不一定是一维均匀分布

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布