二维随机变量及其联合分布函数

引例 一个袋中有两只红球，三只白球，令

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第一次取到红球} \\ 0, & \text{第一次取到白球} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{第二次取到红球} \\ 0, & \text{第二次取到白球} \end{cases}$$

放回

不放回

摸球两次

X的概率分布

(X, Y)的概率分布

Y的概率分布

二维随机变量及其联合分布函数

二维随机变量及其联合分布函数

二维随机变量的边缘分布函数

二 维 随 机 变 量

设X, Y是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机变量，

则由它们构成的二维变量(X, Y)称为二维随机变量，

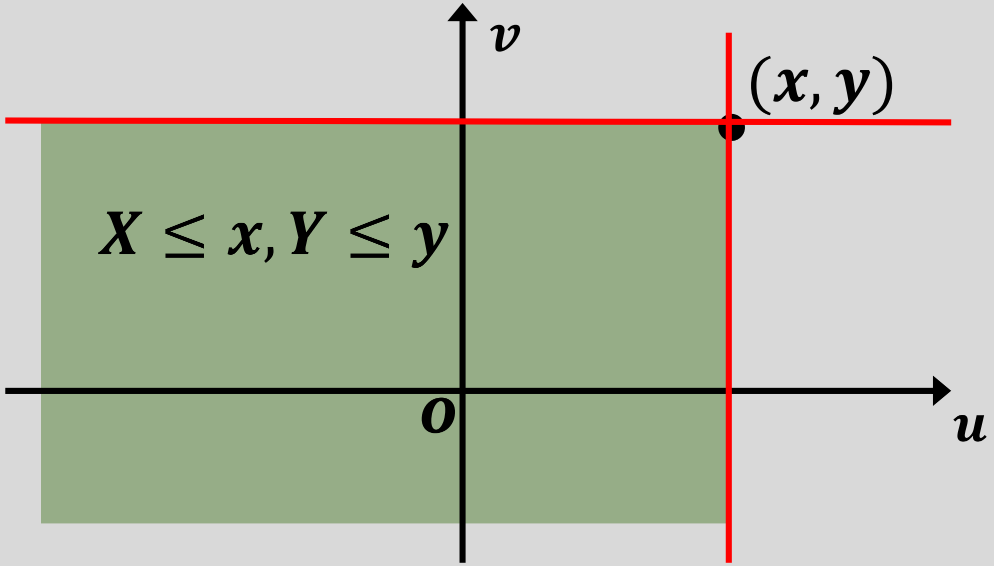
亦称为二维随机向量.

二维联合分布函数

设(X, Y)是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的二维随机变量，称二元函数

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

为(X, Y)的(二维)联合分布函数，简称为联合分布.



$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y),\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$P(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$

$$=P(X\le x_2,Y\le y_2)$$

$F(x_2,y_2)$

$$-P(X\le x_2,Y\le y_1)$$

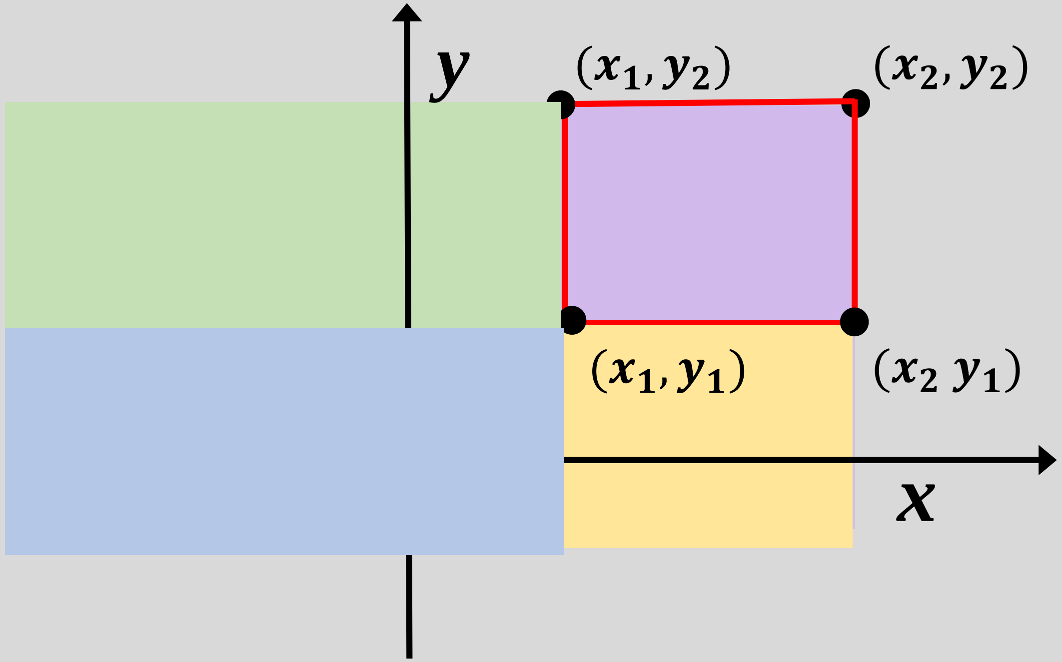
$F(x_2,y_1)$

$$-P(X\le x_1,Y\le y_2)$$

$F(x_1,y_2)$

$$+P(X\le x_1,Y\le y_1)$$

$F(x_1,y_1)$



$F(x,y)$ 关于x 和y 都是(一元)单调递增的

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

对任意 $x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$，有

$$\boxed{F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \ge 0}$$

$F(x,y)$ 关于x 和y 都是(一元)右连续的

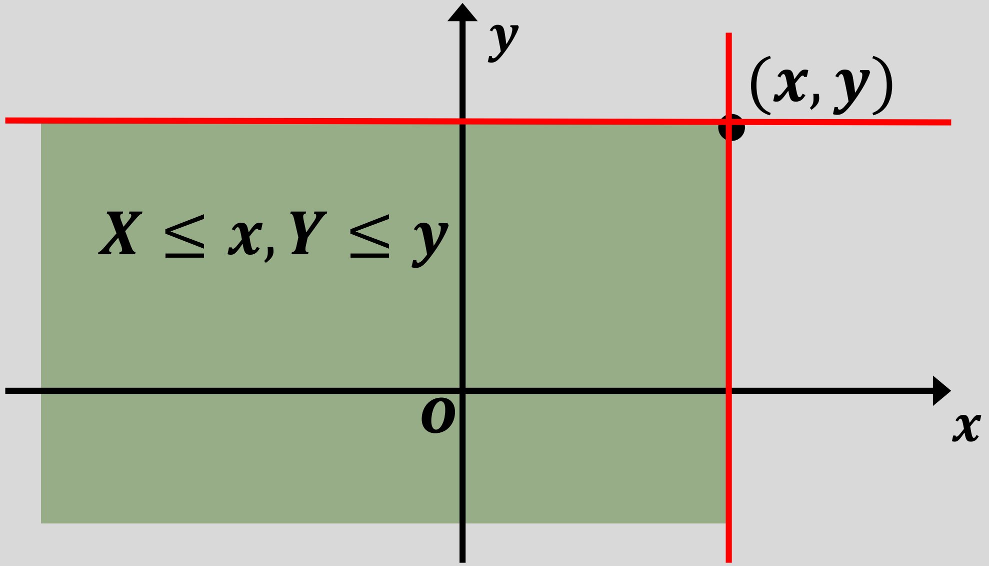
$$F(x+0,y) = F(x,y), \quad F(x,y+0) = F(x,y), \quad -\infty < x,y < \infty$$

$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$F(-\infty, y) := \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0 \qquad F(x, -\infty) := \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$$

$$F(-\infty, -\infty) := \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0 \qquad F(\infty, \infty) := \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x,y) = 1$$

$$F(\infty, y) := \lim_{x \to \infty} F(x,y) = ? \qquad F(x, \infty) := \lim_{y \to \infty} F(x,y) = ?$$



联合分布函数的性质

设$F(x, y)$ 为二维随机变量(X, Y)的联合分布函数，则

- 对任意 $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$，有

  $$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

- $F(x, y)$ 关于x 和y 都是(一元)右连续的

- $F(-\infty, y) = 0 \qquad F(x, -\infty) = 0 \qquad F(\infty, \infty) = 1$

联合分布函数的性质

例1. 设随机变量(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x,y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{3}\right) \quad -\infty < x, y < \infty$$

1. 求 A, B, C；　　2. 求 $P(0 < X < 2, 0 < Y \le 3)$

解:

$$F(-\infty, y) = 0 \Longrightarrow B = \frac{\pi}{2}$$

$$F(x, -\infty) = 0 \Longrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$F(\infty, \infty) = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\Longrightarrow F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$P(x_1<X\leq x_2, y_1<Y\leq y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$

$$P(0<X<2, 0<Y\leq 3)=F(2,3)-F(2,0)-F(0,3)+F(0,0)$$

$$=\frac{9}{16}-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

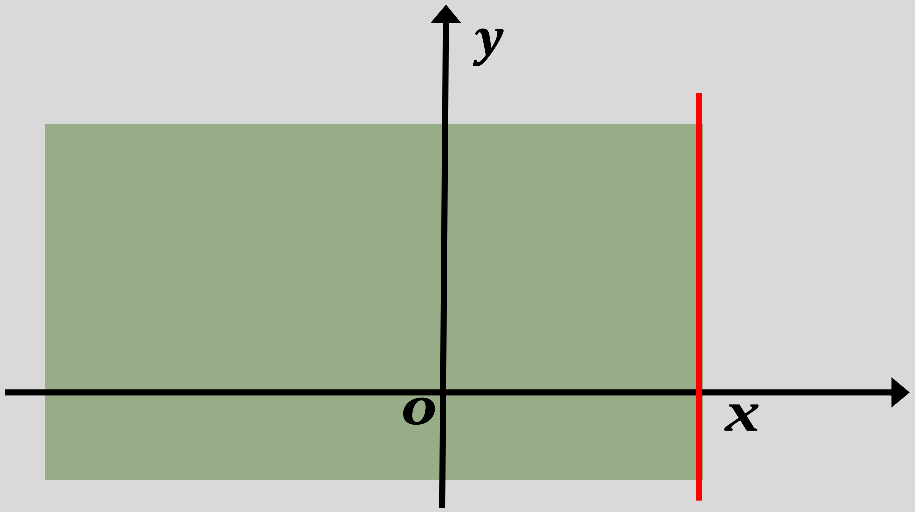
边 缘 分 布 函 数

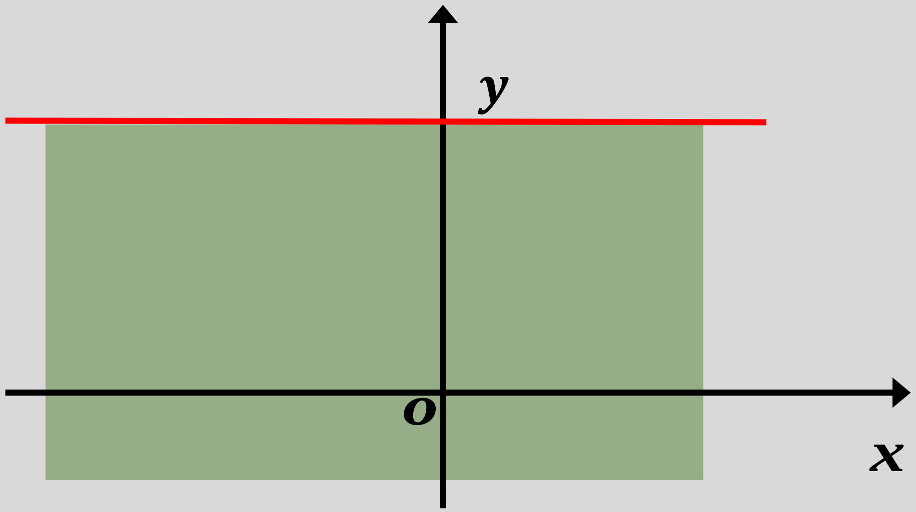
已知 (X, Y) 的概率分布，如何确定 X, Y 的概率分布？

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < \infty) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = F(x,\infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X < \infty, Y \le y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = F(\infty,y)$$





边 缘 分 布 函 数

设(X, Y)是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的二维随机变量，我们有

$$\boxed{F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < \infty) = F(x, \infty)}$$

$$\boxed{F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X < \infty, Y \le y) = F(\infty, y)}$$

相对于它们的联合分布而言，我们分别称$F_X(x)$和$F_Y(y)$

为(X, Y)关于X和Y的边缘分布函数或边缘分布.

小　　结

(X, Y)是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的二维随机变量

联合分布函数

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

边缘分布函数

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < \infty) = F(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X < \infty, Y \le y) = F(\infty, y)$$