第10章

重 积 分

一元函数积分学

↓

多元函数积分学 $\begin{cases} \text{重积分} \\ \text{曲线积分} \\ \text{曲面积分} \end{cases}$

第1节 二重积分的概念与性质

一、引例

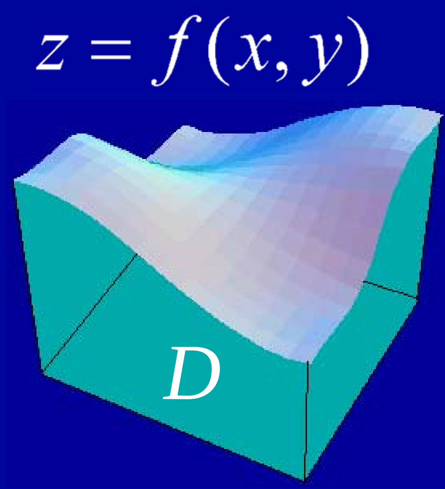
二、二重积分的定义与可积性

三、二重积分的性质

四、曲顶柱体体积的计算

一、引例

1.曲顶柱体的体积



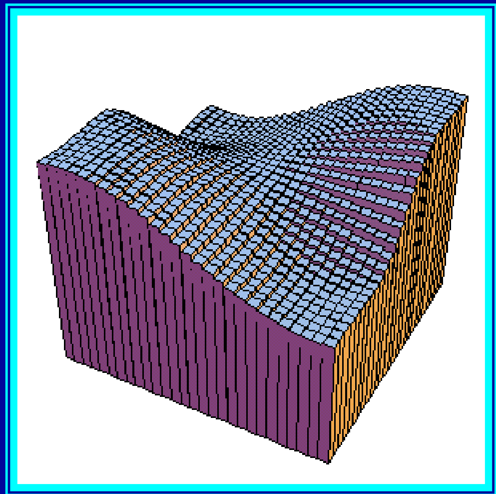
给定曲顶柱体:

底: xoy 面上的闭区域 D

顶: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$

侧面: 以 D 的边界为准线 , 母线平行于 z 轴的柱面

求其体积.



解法: 类似定积分解决问题的思想:

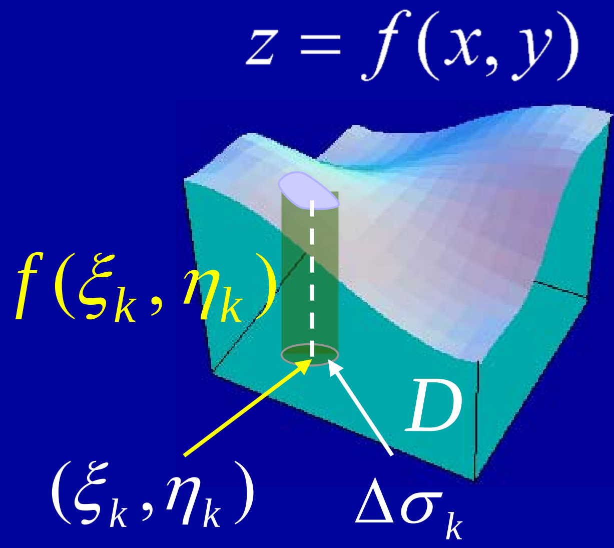
"大化小, 常代变, 近似和, 求 极限"

1)“大化小”

用任意曲线网分D为 n 个区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

以它们为底把曲顶柱体分为 n 个小曲顶柱体



2)“常代变”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k, η_k), 则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) “近似和”

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

4) “取极限”

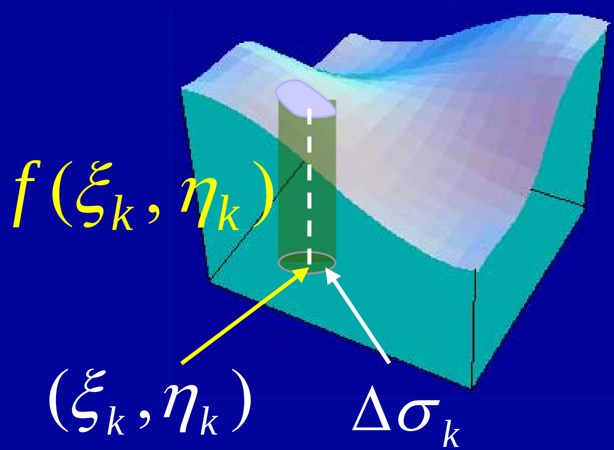
定义$\Delta\sigma_k$的直径为

$$\lambda(\Delta\sigma_k) = \max\{\,|P_1P_2|\;|\,P_1,P_2 \in \Delta\sigma_k\}$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\,\lambda(\Delta\sigma_k)\,\}$

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$z = f(x,y)$

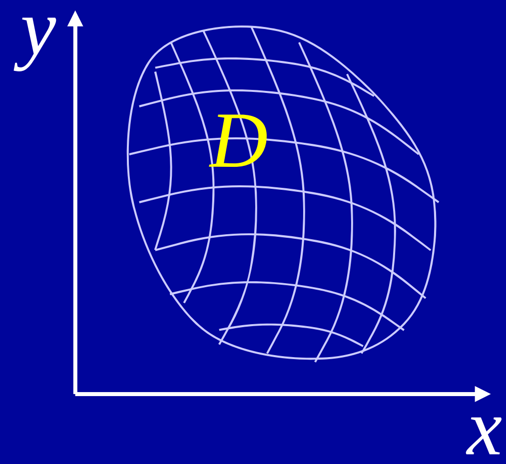


2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 xoy 平面上占有区域 D, 其面密度为 $\mu(x,y)\in C$, 计算该薄片的质量 M.

若 $\mu(x,y)\equiv\mu$ (常数), 设 D 的面积为 σ, 则

$$M=\mu\cdot\sigma$$



若 $\mu(x,y)$ 非常数, 仍可用

"大化小, 常代变, 近似和, 求 极限" 解决.

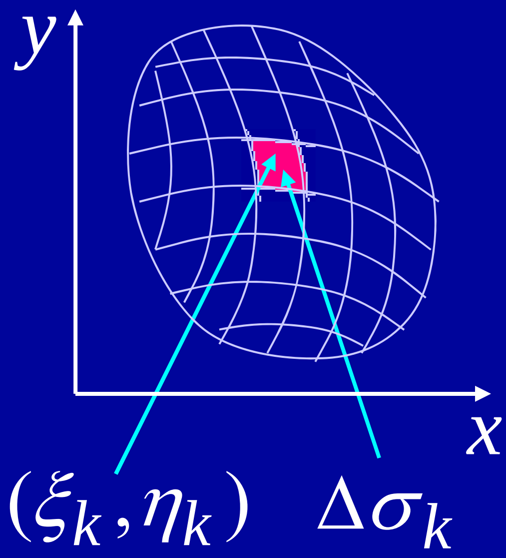
1) "大化小"

用任意曲线网分 D 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$, 相应把薄片也分为小区域 .

2)“常代变”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k,η_k),则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$



3)“近似和”

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

4)“取极限”

令 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\lambda(\Delta\sigma_k)\}$

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

两个问题的**共性**:

(1) 解决问题的步骤相同

"大化小, 常代变, 近似和,取极限"

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

平面薄片的质量:

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

二、二重积分的定义及可积性

定义: 设 $f(x,y)$ 是定义在有界区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，任取一点 $(\xi_k,\eta_k)\in\Delta\sigma_k$，若存在一个常数 I，使

$$I=\underbrace{\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k}_{\text{积分和}} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x,y)$ 可积，称 I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分.

$$\underbrace{\iint_D}_{\text{积分域}} \boxed{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积元素}}}_{\text{积分表达式}}$$

积分和

积分表达式

x, y 称为积分变量

积分域　　被积函数　　面积元素

如果 $f(x,y)$ 在D上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域D，这时 $\Delta\sigma_k=\Delta x_k\Delta y_k$，因此面积元素$\mathrm{d}\sigma$ 也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引例1中曲顶柱体体积：

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量：

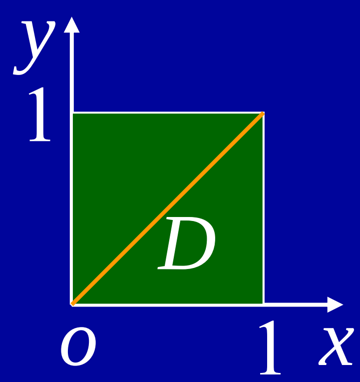
$$M=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

二重积分存在定理: (证明略)

定理1. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

定理2. 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限个光滑曲线外都连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

例如, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ 在 $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$ 上二重积分存在; 但 $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ 在 D 上二重积分不存在.



三、二重积分的性质

1. $\iint_D k f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ （k 为常数)

2. $\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma$

$$= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

3. $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

$(D = D_1 \cup D_2$, D_1 , D_2无公共内点)

4. 若在D上$f(x,y)\equiv 1$, σ为D 的面积, 则

$$\sigma = \iint_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma$$

5. 若在D上 $f(x,y)\le\varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\le\iint_D\varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

特别，由于 $-|f(x,y)|\le f(x,y)\le|f(x,y)|$

$$\therefore\quad\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right|\le\iint_D|f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

6. 设 $M=\max\limits_D f(x,y),\ m=\min\limits_D f(x,y),\ D$ 的面积为σ，

则有 $$m\sigma\le\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\le M\sigma$$

7.(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域D上连续, σ 为D 的面积 ,则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证: 由性质6 可知,

$$m \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M$$

由连续函数介值定理, 至少有一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使

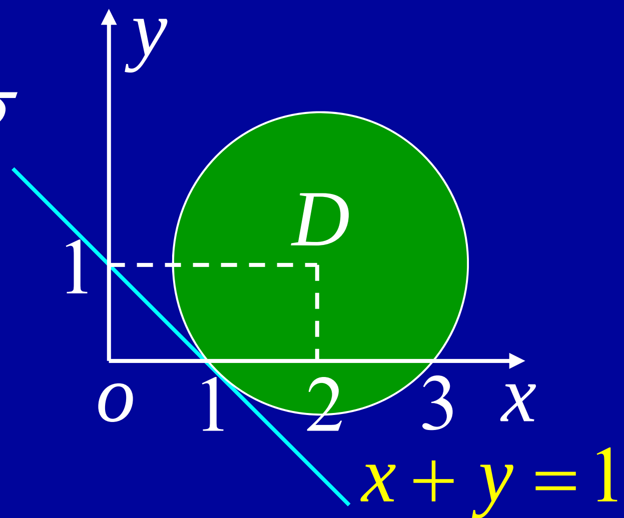
$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

因此 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

例1. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$



解: 积分域 D 的边界为圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

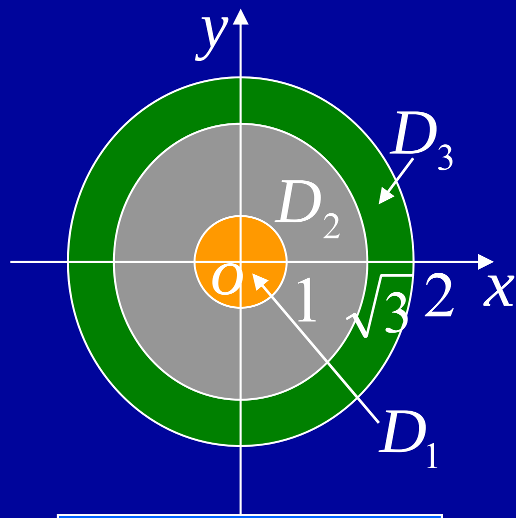
它与 x 轴交于点 $(1,0)$, 与直线 $x+y=1$ 相切. 而域 D 位于直线的上方, 故在 D 上 $x+y\ge 1$, 从而

$$(x+y)^2\le (x+y)^3$$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

例2. 判断积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的正负号.

解: 分积分域为 D_1, D_2, D_3, 则



$$\text{原式} = \underline{\iint_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$-\iint_{D_2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

舍去此项

$$\underline{-\iiint_{D_3} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

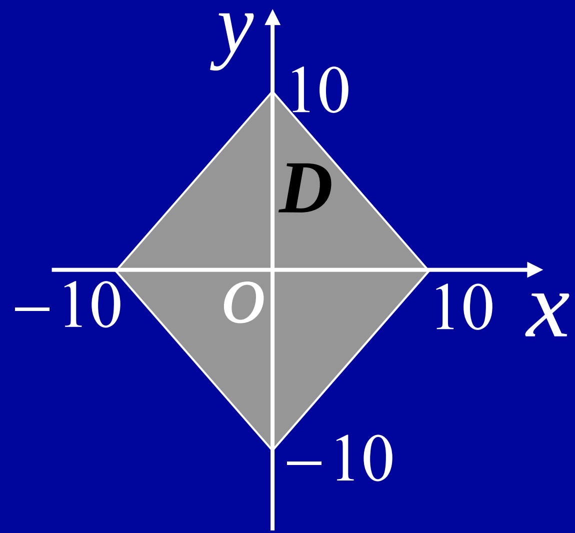
猜想结果为负

$$< \iint_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_3} \sqrt[3]{3-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \pi - \sqrt[3]{2}\pi\,(4-3) = \pi\,(1-\sqrt[3]{2}) < 0$$

例3. 估计下列积分之值

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\qquad D: |x|+|y|\le 10$$



解: D 的面积为 $\sigma=(10\sqrt{2})^2=200$

由于

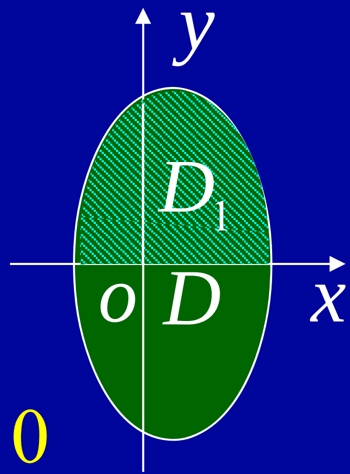
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$$\Big\downarrow \text{积分性质5}$$

$$\frac{200}{102}\le I\le\frac{200}{100}$$

即: $1.96\le I\le 2$

8. 设函数 $f(x,y)$在闭区域上连续, 域D 关于x 轴对称, D 位于 x 轴上方的部分为D_1, 在 D 上



(1) $f(x,-y)=f(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

(2) $f(x,-y)=-f(x,y)$, 则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$

当区域关于 y 轴对称, 函数关于变量 x 有奇偶性时, 仍有类似结果.

如, D_1 为圆域 $D: x^2+y^2\le 1$ 在第一象限部分, 则有

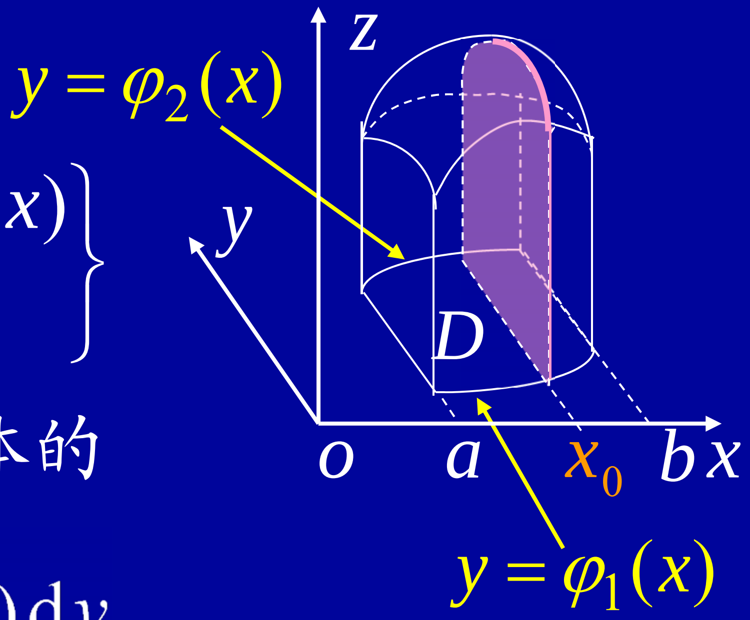
$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

四、曲顶柱体体积的计算

设曲顶柱的底为

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{c}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{array}\right.\right\}$$



任取 $x_0\in[a,b]$, 平面 $x=x_0$ 截柱体的

截面积为 $A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$

故曲顶柱体体积为

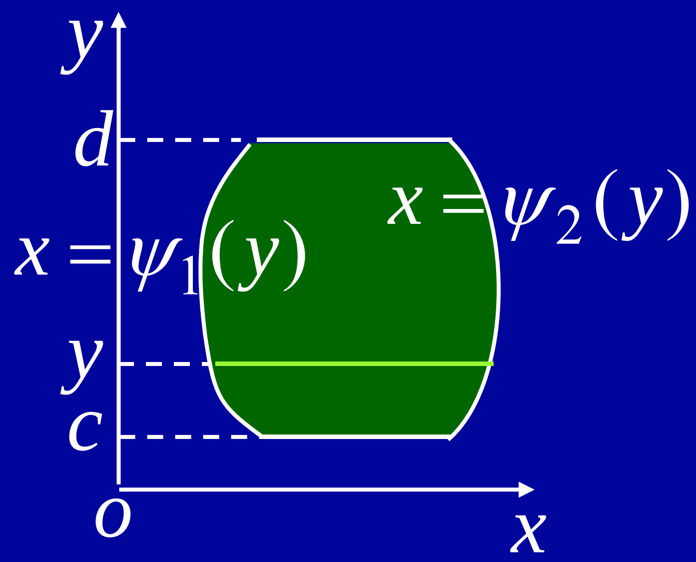
$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

同样, 曲顶柱的底为

$$D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ c\le y\le d\}$$

则其体积可按如下两次积分计算



$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

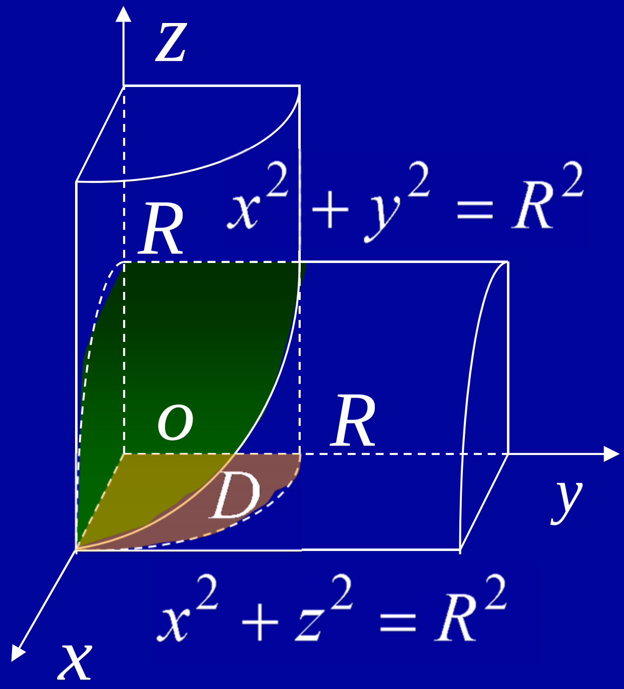
$$=\int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\triangleq \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

例4. 求两个底圆半径为R的直角圆柱面所围的体积.

解: 设两个直圆柱方程为

$$x^2+y^2=R^2,\ x^2+z^2=R^2$$



利用对称性, 考虑第一卦限部分,

其曲顶柱体的顶为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$

$$(x,y)\in D:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\\ 0\le x\le R\end{cases}$$

则所求体积为

$$V=8\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^R(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}R^3$$

内容小结

1. 二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

2. 二重积分的性质 (与定积分性质相似)

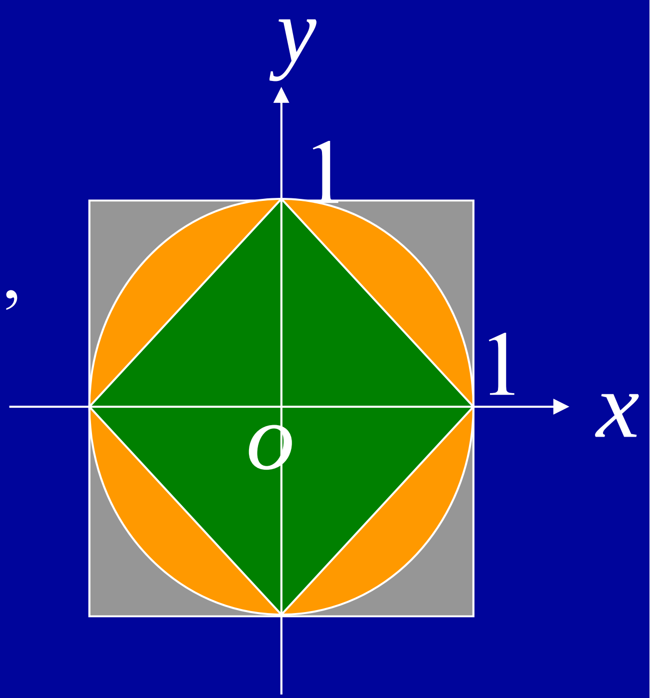
3. 曲顶柱体体积的计算 —— 二次积分法

思考与练习

1. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2\le 1} |xy| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint_{|x|+|y|\le 1} |xy| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



解: I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负,

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$

2. 设D是第二象限的一个有界闭域，且 $0<y<1$，则

$$I_1=\iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为（ D ）

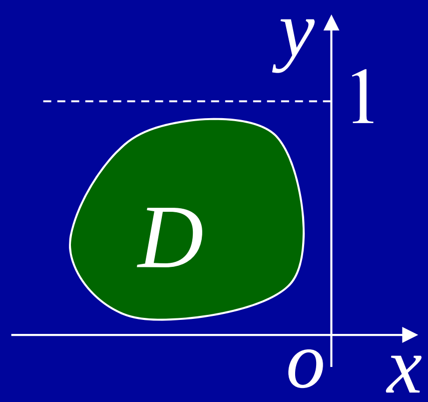
(A) $I_1\le I_2\le I_3$；　　(B) $I_2\le I_1\le I_3$；

(C) $I_3\le I_2\le I_1$；　　(D) $I_3\le I_1\le I_2$.

提示：因 $0<y<1$，故 $y^2\le y\le y^{1/2}$；

又因 $x^3<0$，故在D上有

$$y^{1/2}x^3\le yx^3\le y^2x^3$$



3. 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

解:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,\mathrm{d}x$$

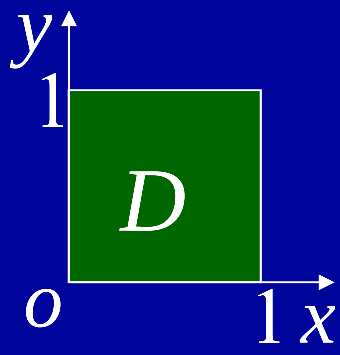
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin y+\cos y]\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\left[-\cos y+\sin y\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2$$

4. 证明: $1 \le \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma \le \sqrt{2}$, 其中 D 为 $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.



解: 利用题中 x, y 位置的对称性, 有

$$\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_D (\sin y^2 + \cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_D (\sin y^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma\Big]$$

$$= \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\iint_D \sin(x^2 + \tfrac{\pi}{4})\,\mathrm{d}\sigma$$

$\because\ 0 \le x^2 \le 1$, $\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \le 1$, 又 D 的面积为 1 , 故结论成立 .

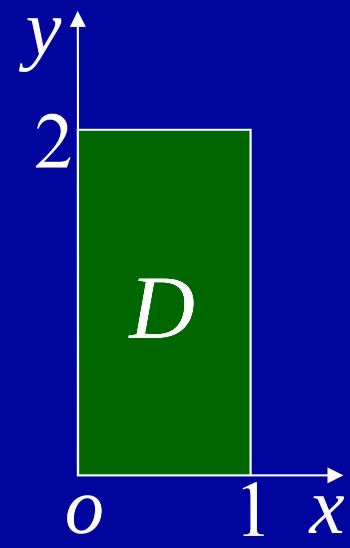
作业

P148　A　1(4)，2(2)，3(2)

B　1

备用题

1. 估计 $I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值, 其中 D 为 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2.$



解: 被积函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$

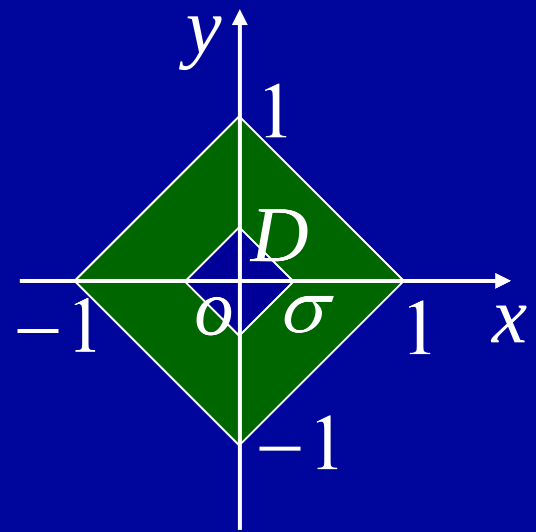
D 的面积 $\sigma=2$

在D上 $f(x,y)$ 的最大值 $M=f(0,0)=\dfrac{1}{4}$

$f(x,y)$ 的最小值 $m=f(1,2)=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}$

故 $\dfrac{2}{5}\le I\le\dfrac{2}{4}$, $\therefore\ 0.4\le I\le 0.5$

2. 判断 $\iint\limits_{\sigma\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ (\sigma>0)$ 的正负.



解: 当 $\sigma\le|x|+|y|\le 1$ 时,

$$0<x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2\le 1$$

故 $$\ln(x^2+y^2)\le 0$$

又当 $|x|+|y|<1$ 时, $\ln(x^2+y^2)<0$

于是 $$\iint\limits_{\sigma\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<0$$

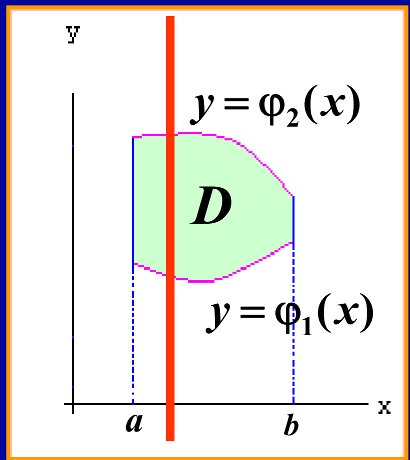
第2节 直角坐标系下二重积分的计算

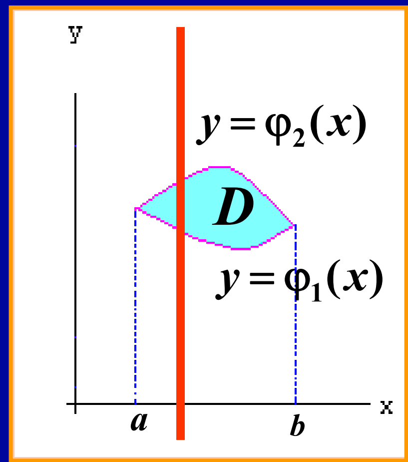
一、利用直角坐标计算二重积分

一、利用直角坐标系计算二重积分

如果积分区域为： $a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x).$

［X－型］

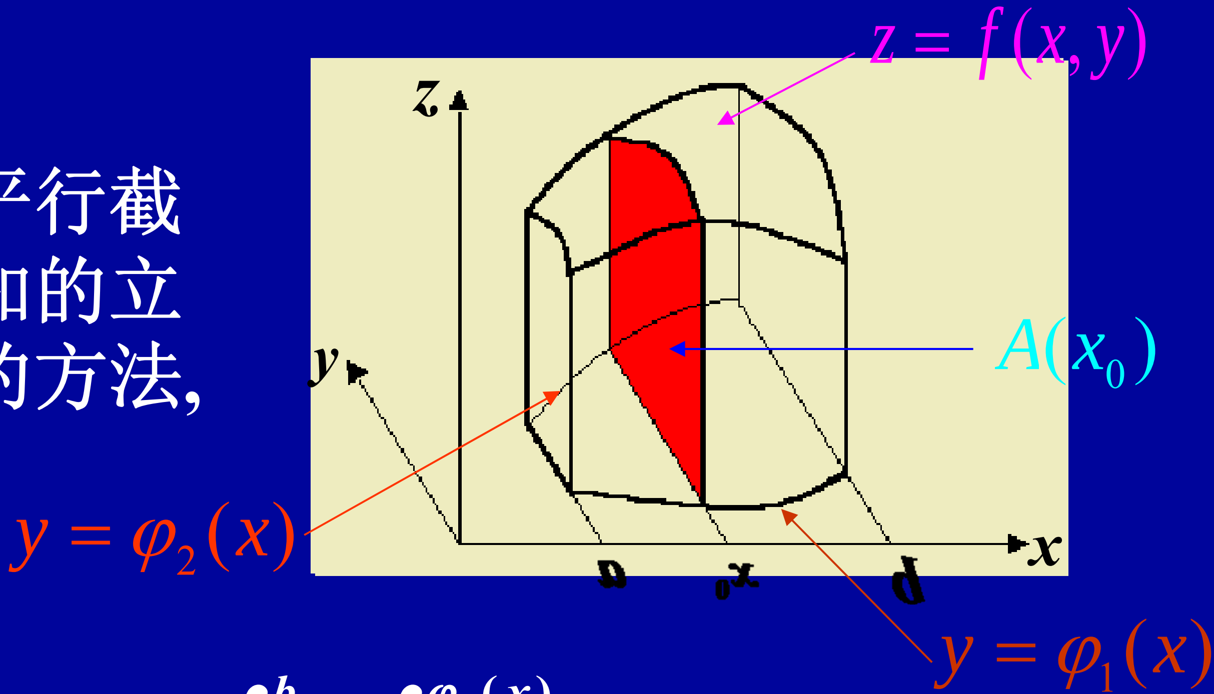




其中函数 $\varphi_1(x)$ 、$\varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

$\because \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z=$ $f(x,y)$ 为曲顶柱体的体积.

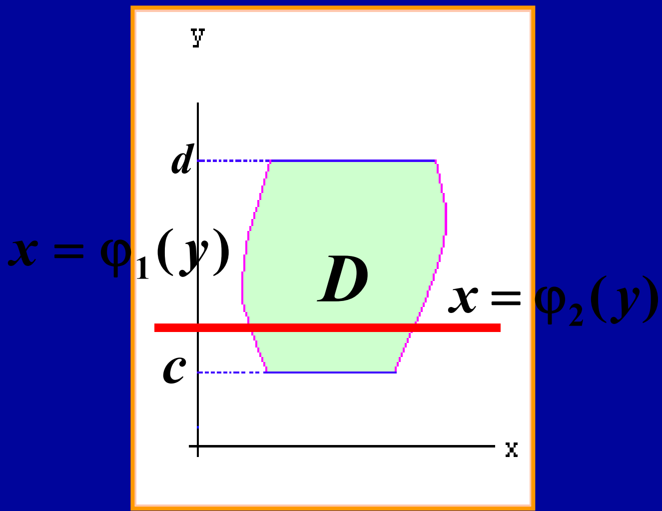
应用计算“平行截面面积为已知的立体求体积”的方法,

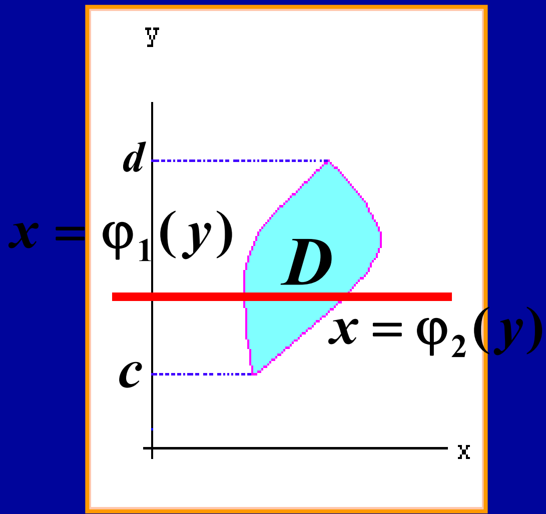


得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$

如果积分区域为：$c \le y \le d$， $\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$.

［Y—型］

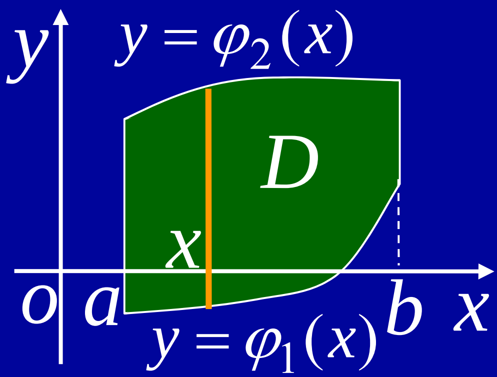




$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

由曲顶柱体体积的计算可知, 当被积函数 $f(x,y)\ge 0$

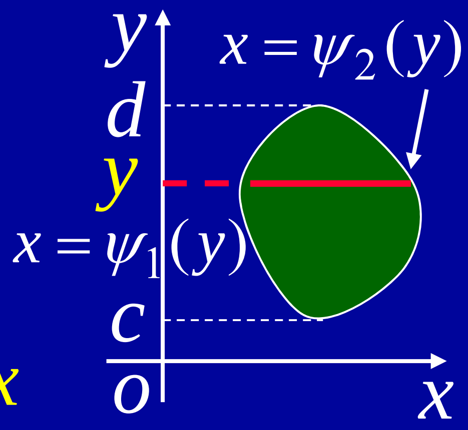
且在D上连续时, 若D为 $X-$型区域



$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}\,x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

若D为$Y-$型区域$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$



则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}\,y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

当被积函数 $f(x,y)$在D上变号时, 由于

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f(x,y)+|f(x,y)|}{2}}_{f_1(x,y)}-\underbrace{\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}}_{f_2(x,y)}$$ 均非负

$$\therefore \quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因此上面讨论的累次积分法仍然有效.

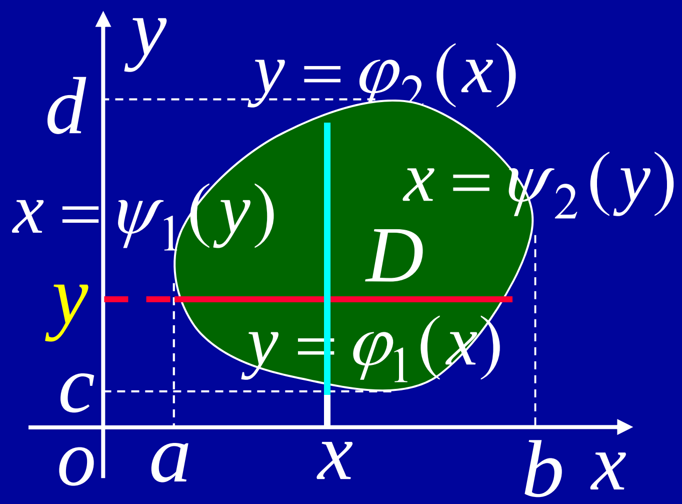
说明: (1) 若积分区域既是X–型区域又是Y–型区域，

则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

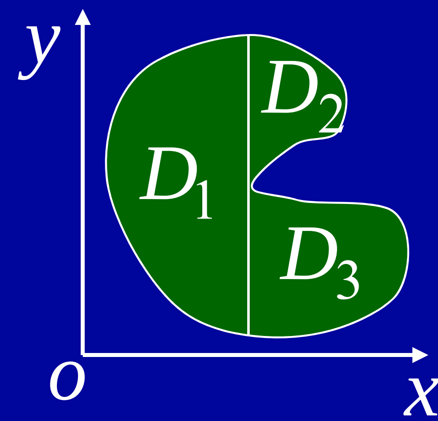


为计算方便,可**选择积分序**, 必要时还可以**交换积分序**.

(2) 若积分域较复杂,可将它分成若干

X-型域或Y-型域 , 则

$$\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}$$

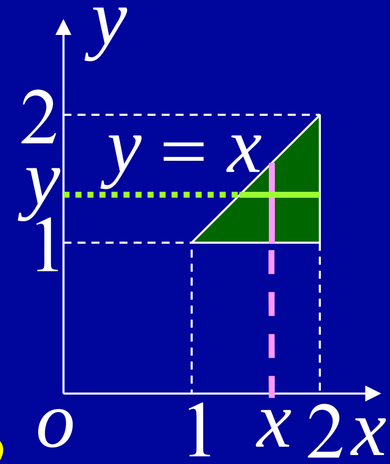


例1. 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=1, x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1. 将D看作X–型区域, 则$D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x \mathrm{d}x$$

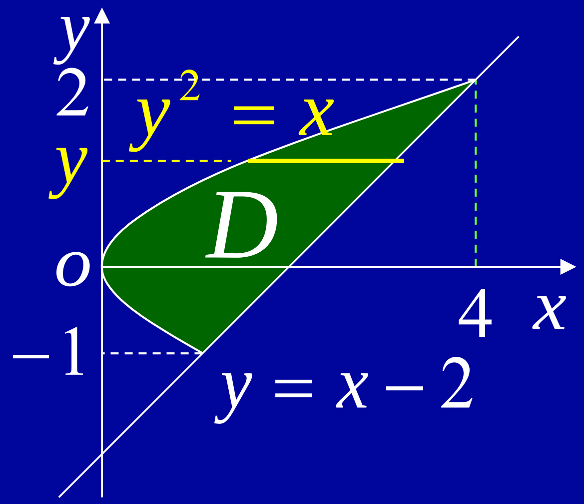
$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$



解法2. 将D看作Y–型区域, 则 $D:\begin{cases}y\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

例2. 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.



解: 为计算简便, 先对 x 后对 y 积分,

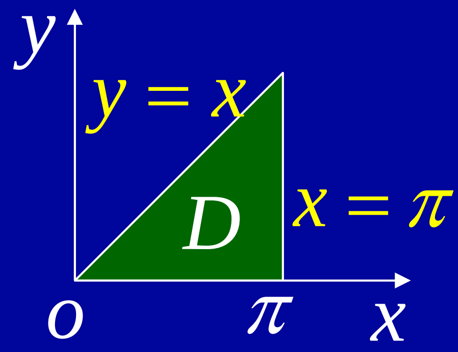
则
$$D:\begin{cases} y^2 \le x \le y+2 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2 - y^5]\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - \frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2} = \frac{45}{8}$$

例3. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是直线 $y=x, y=0,$ $x=\pi$ 所围成的闭区域.



解: 由被积函数可知, 先对 x 积分不行, 因此取D 为$X-$型域 :

$$D:\begin{cases}0\le y\le x\\ 0\le x\le \pi\end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\int_0^{x}\mathrm{d}y$$

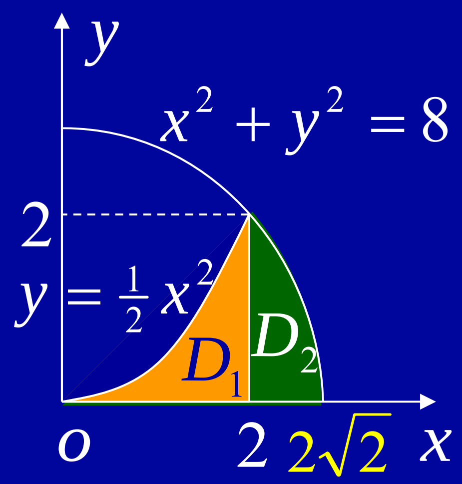
$$=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2$$

说明: 有些二次积分为了积分方便, 还需交换积分顺序.

例4. 交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解: 积分域由两部分组成:



$$D_1:\begin{cases}0\le y\le \frac{1}{2}x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{8-x^2}\\ 2\le x\le 2\sqrt{2}\end{cases}$$

将 $D=D_1+D_2$ 视为 Y–型区域，则

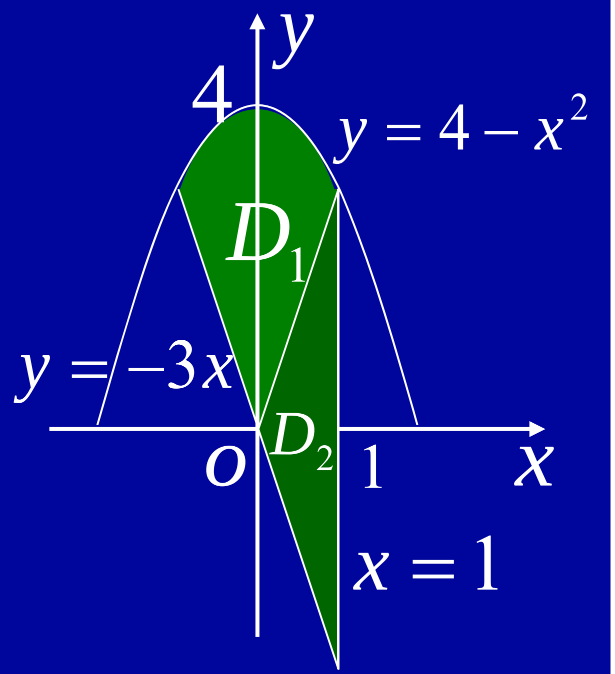
$$D:\begin{cases}\sqrt{2y}\le x\le \sqrt{8-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

例5. 计算$I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由

$y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$所围成.

解: 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$



$$D=D_1+D_2\quad(\text{如图所示})$$

显然，在D_1上，$f(-x,y)=-f(x,y)$

在D_2上，$f(x,-y)=-f(x,y)$

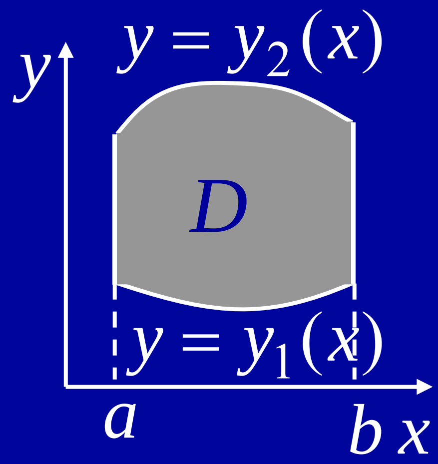
$$\therefore\quad I=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

内容小结

(1) 二重积分化为累次积分的方法

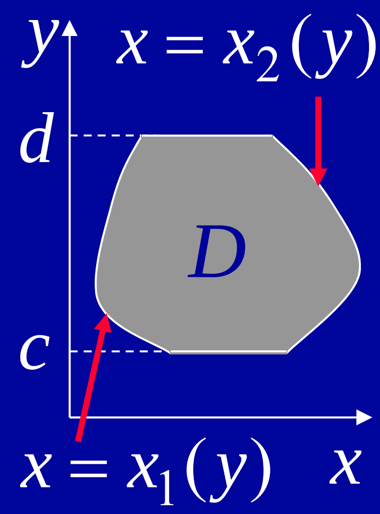
直角坐标系情形：



- 若积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$



- 若积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

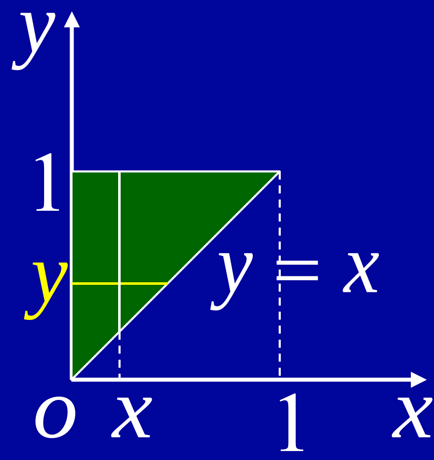
则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

(3) 计算步骤及注意事项

- 画出积分域
- 选择坐标系 $\begin{cases}\text{域边界应尽量多为坐标线}\\ \text{被积函数关于坐标变量易分离}\end{cases}$
- 确定积分序 $\begin{cases}\text{积分域分块要少}\\ \text{累次积好算为妙}\end{cases}$
- 写出积分限 $\begin{cases}\text{图示法}\\ \text{不等式}\end{cases}$ (先积一条线, 后扫积分域)
- 计算要简便 $\begin{cases}\text{充分利用对称性}\\ \text{应用换元公式}\end{cases}$

思考与练习

1. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,



求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

提示: 交换积分顺序后, x , y互换

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\therefore\ 2I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y=A^2$$

作业

P155　A　1 (1);　2 (3), (4);　3 (2), (5)(6);

4 (1), (3), (5);　5 (4);　6 (3);

B　2;　3;　4;　5;　7;　9

第3节 二重积分的计算法

一、利用极坐标计算二重积分

*二、二重积分的换元法

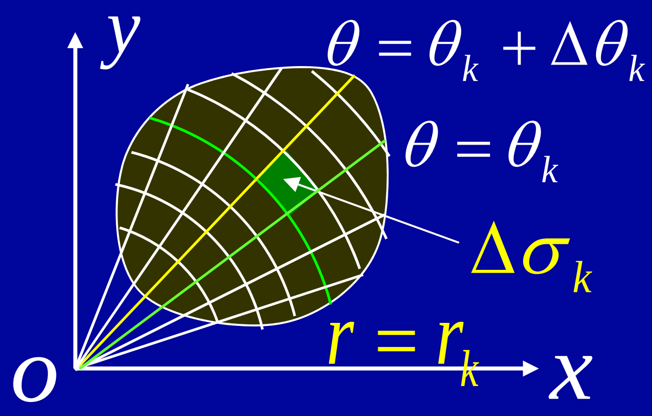
*三、反常二重积分

一、利用极坐标计算二重积分

在极坐标系下，用同心圆 $r=$常数

及射线 $\theta=$常数，分划区域D 为

$$\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

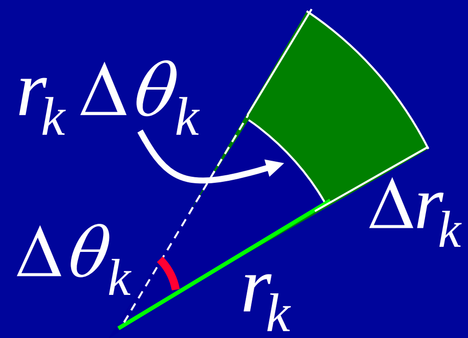


则除包含边界点的小区域外，小区域的面积

$$\Delta\sigma_k=\tfrac{1}{2}(r_k+\Delta r_k)^2\cdot\Delta\theta_k-\tfrac{1}{2}r_k{}^2\cdot\Delta\theta_k$$

$$=\tfrac{1}{2}[r_k+(r_k+\Delta r_k)]\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$

$$=\overline{r_k}\Delta r_k\cdot\Delta\theta_k$$



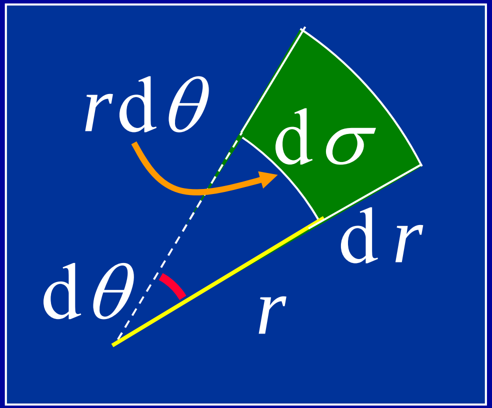
在 $\Delta\sigma_k$ 内取点$(\overline{r_k},\overline{\theta_k})$，对应有

$$\xi_k=\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\ \ \eta_k=\overline{r_k}\sin\overline{\theta_k}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{r_k}\cos\overline{\theta_k},\ \overline{r_k}\sin\overline{\theta_k})\overline{r_k}\Delta r_k\Delta\theta_k$$

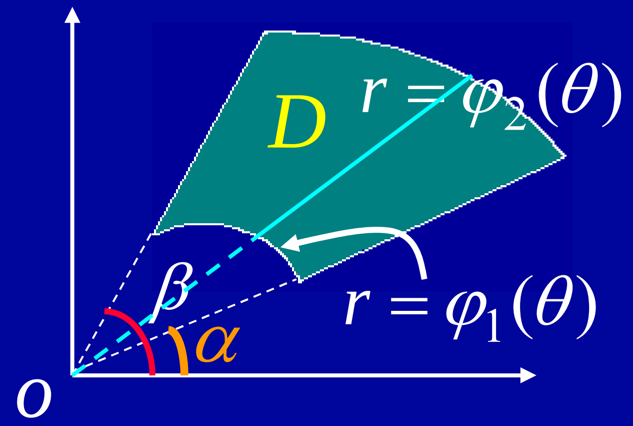
即 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

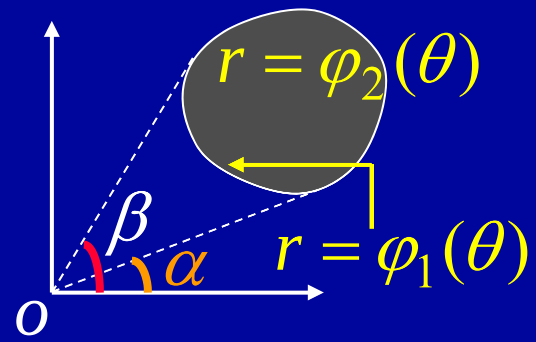


设 $D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$，则

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

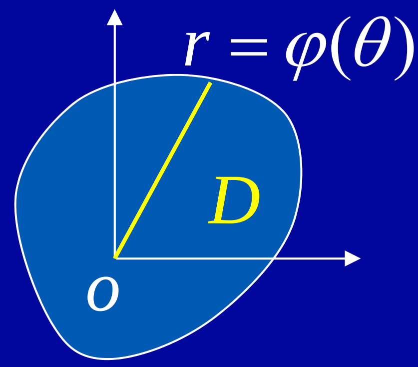




特别，对 $D:\begin{cases}0\le r\le\varphi(\theta)\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

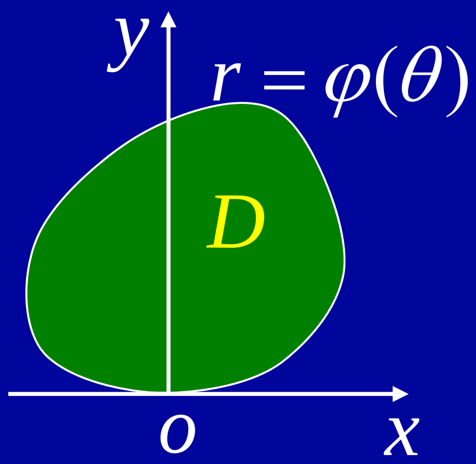


若 $f \equiv 1$ 则可求得D 的面积

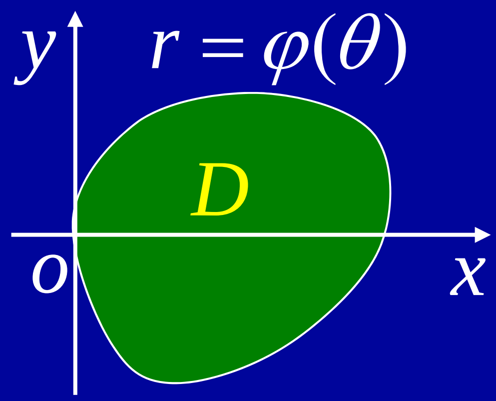
$$\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

思考: 下列各图中域 D 分别与 x , y 轴相切于原点,试问 θ 的变化范围是什么?

(1)



(2)



答: (1) $0 \le \theta \le \pi$; (2) $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

例6. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$.

解: 在极坐标系下 $D:\begin{cases}0\le r\le a\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$, 故

$$\text{原式}=\iint_D e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a re^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数, 故本题无法用直角坐标计算.

注: 利用例6可得到一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

事实上, 当 D 为 R^2 时,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\right)^2$$

利用例6的结果, 得

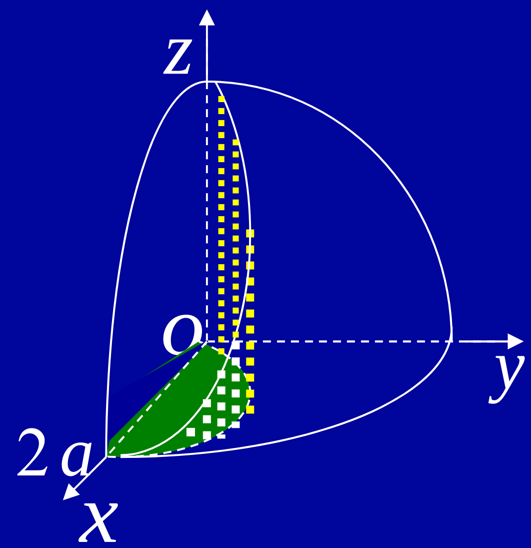
$$4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\right)^2 = \lim_{a\to+\infty} \pi(1-e^{-a^2}) = \pi$$

故①式成立 .

例7. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

由对称性可知



$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

*二、二重积分换元法

定理: 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续, 变换:

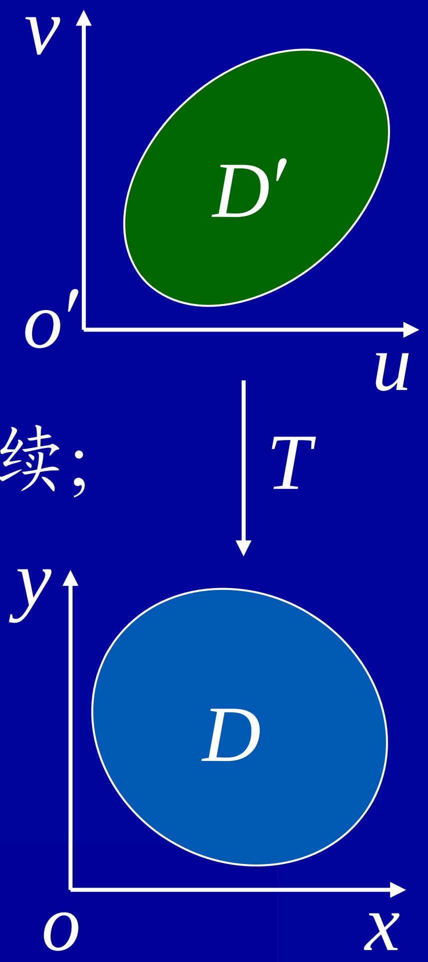
$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$

满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶导数连续;

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的,



则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

证: 根据定理条件可知变换 T 可逆.

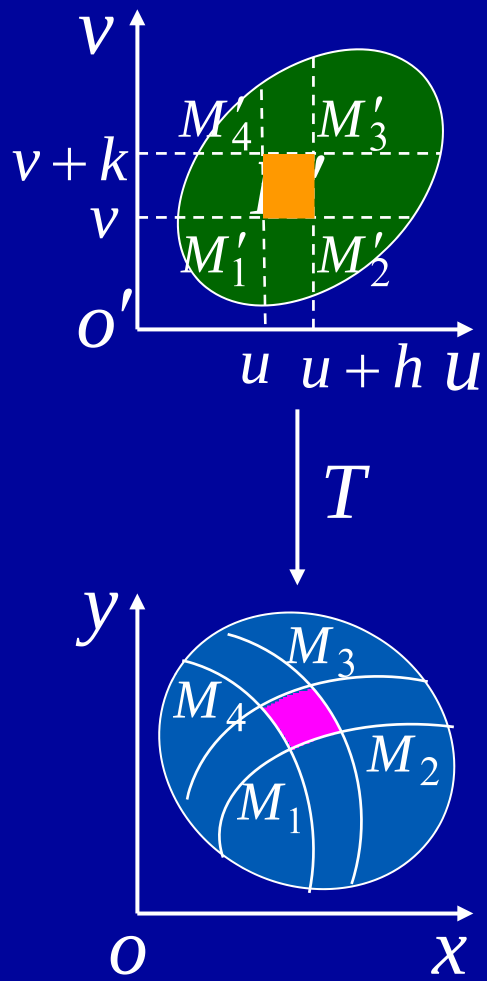
在 $uo'v$ 坐标面上, 用平行于坐标轴的直线分割区域 D', 任取其中一个小矩形, 其顶点为

$$M_1'(u,v),\qquad M_2'(u+h,v),$$
$$M_3'(u+h,v+k),\quad M_4'(u,v+k).$$

通过变换 T, 在 xoy 面上得到一个四边形, 其对应顶点为 $M_i(x_i,y_i)\ (i=1,2,3,4)$

令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则

$$x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$$



$$x_4 - x_1 = x(u, v+k) - x(u,v) = \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

同理得 $y_2 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$

$$y_4 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

当h, k 充分小时, 曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 近似于平行四边形, 故其面积近似为

$$\Delta\sigma \approx \left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}\right| = \left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$\approx \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} h & \frac{\partial y}{\partial u} k \\ \frac{\partial x}{\partial v} h & \frac{\partial y}{\partial v} k \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| hk = \left|J(u,v)\right| hk$$

因此面积元素的关系为 $\mathrm{d}\sigma = |J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

从而得二重积分的换元公式:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

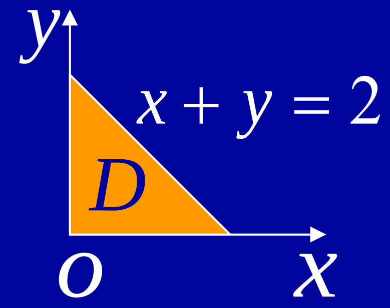
例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

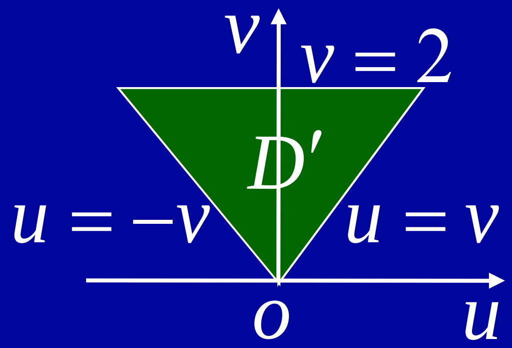
$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

例8. 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是 x 轴 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭域.



解: 令 $u=y-x,\ v=y+x$, 则

$$x=\frac{v-u}{2},\ y=\frac{v+u}{2}\quad (D'\to D)$$



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

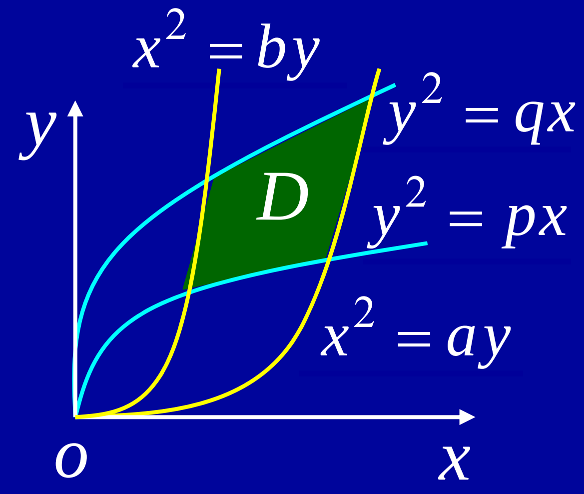
$$\therefore \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|\frac{-1}{2}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}v\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (e-e^{-1})v\,\mathrm{d}v=e-e^{-1}$$

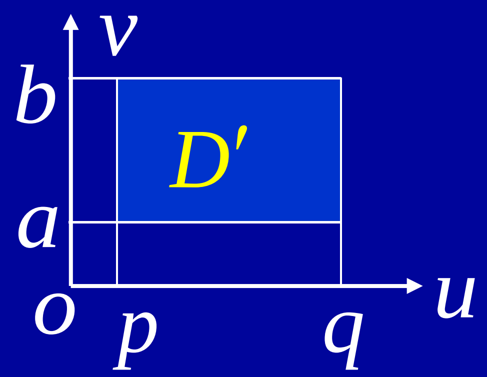
例9. 计算由 $y^2=px$, $y^2=qx$, $x^2=ay$, $x^2=by$ $(0<p<q, 0<a<b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S.

解: 令 $u=\dfrac{y^2}{x}$, $v=\dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D':\begin{cases} p\le u\le q \\ a\le v\le b\end{cases} \longrightarrow D$$



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{1}{3}$$



$$\therefore S=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D'}|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u\int_a^b \mathrm{d}v=\frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

例10. 试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积V.

解: 取 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x=a\,r\cos\theta\,,\ y=b\,r\sin\theta\,,$ 则D 的原象为

$$D':r\le 1\,,\,0\le\theta\le 2\pi$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\,r\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,r\cos\theta \end{vmatrix}=a\,b\,r$$

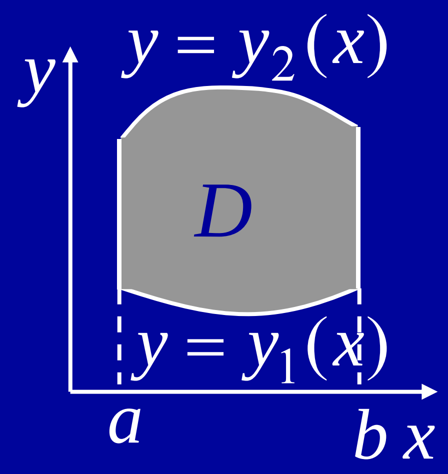
$$\therefore\quad V=2c\iint_{D'}\sqrt{1-r^2}\,a\,b\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}\,r=\frac{4}{3}\pi\,abc$$

内容小结

(1) 二重积分化为累次积分的方法

直角坐标系情形：



- 若积分区域为

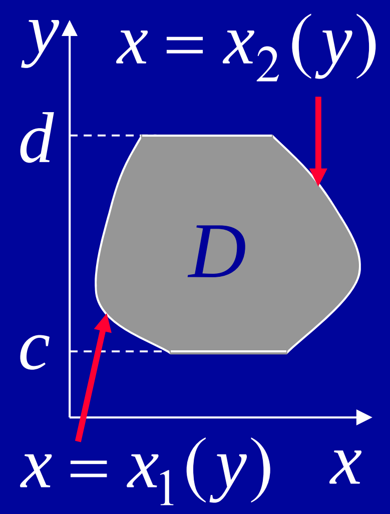
$$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

- 若积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

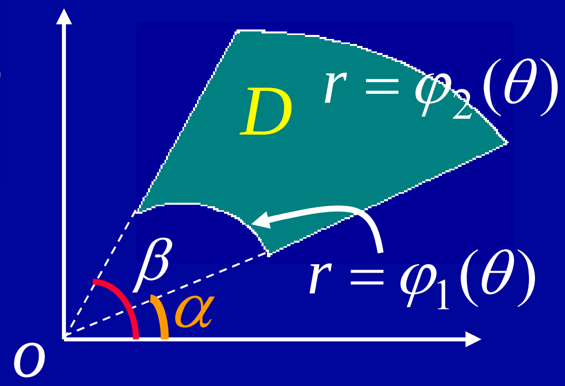


极坐标系情形: 若积分区域为

$$D=\{(r,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta,\ \varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$



(2) 一般换元公式

在变换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 下

$$(x,y)\in D\longleftrightarrow(u,v)\in D',\ \text{且}\ J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

(3) 计算步骤及注意事项

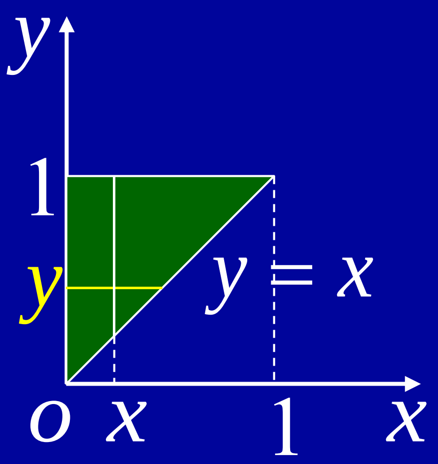
- 画出积分域
- 选择坐标系
  - 域边界应尽量多为坐标线
  - 被积函数关于坐标变量易分离
- 确定积分序
  - 积分域分块要少
  - 累次积好算为妙
- 写出积分限
  - 图示法
  - 不等式

  (先积一条线, 后扫积分域)
- 计算要简便
  - 充分利用对称性
  - 应用换元公式

思考与练习

1. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,

求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.



提示: 交换积分顺序后, x , y互换

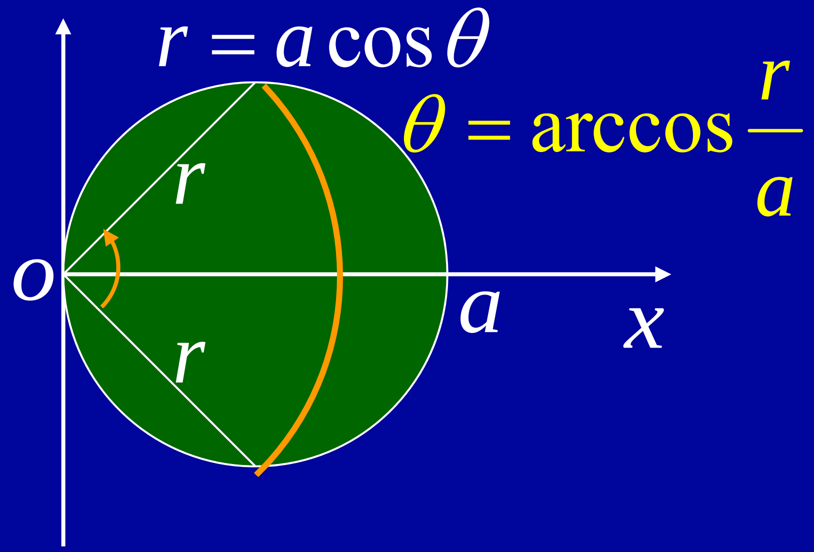
$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$\therefore\ 2I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=A^2$$

2. 交换积分顺序 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)\,\mathrm{d}r\quad(a>0)$

提示: 积分域如图



$$I=\int_0^a\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

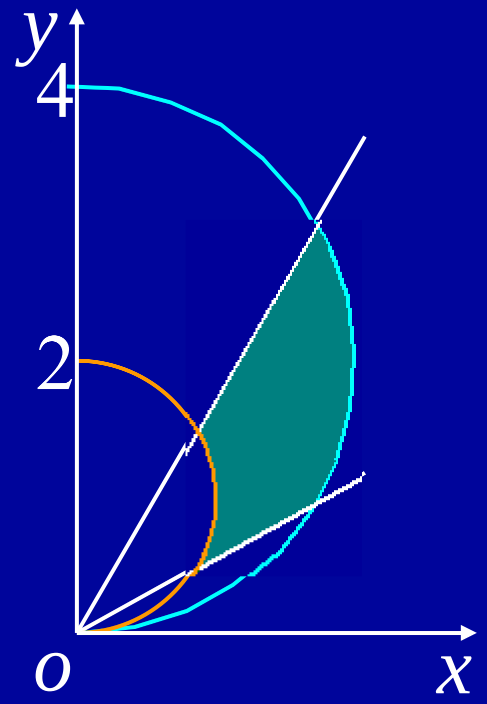
作业

P166　A　1 (5);　2 (1), (5);　3(1)(3);

4 (2), (5);

B　4;　6

备用题 计算 $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.



解:

$$x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$$

$$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$$

$$y-\sqrt{3}x=0 \ \Rightarrow \theta_2=\frac{\pi}{3}$$

$$x-\sqrt{3}y=0 \ \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)$$

第4节
直角坐标系下三重积分的计算

一、三重积分的概念

二、直角坐标系下三重积分的计算

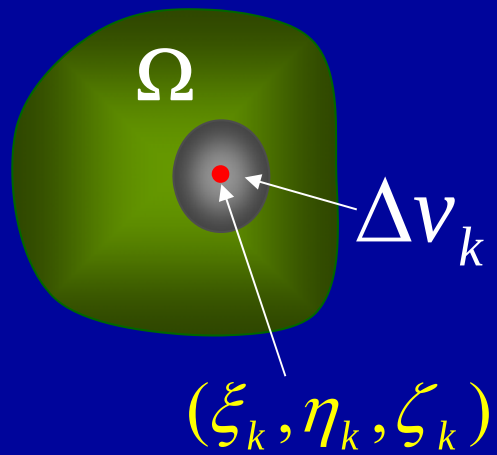
一、三重积分的概念

引例: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质,密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C$,求分布在 Ω 内的物质的质量 M .

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

可得



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$

定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, 若对 Ω 作**任意分割**: $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, **任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$, 下列 "乘积和式" 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在Ω上的**三重积分**.

$\mathrm{d}v$称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. 例如

中值定理. 设 $f(x,y,z)$在有界闭域 Ω 上连续, V 为Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

二、利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x,y,z)\geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法1. 投影法 (“先一后二”)

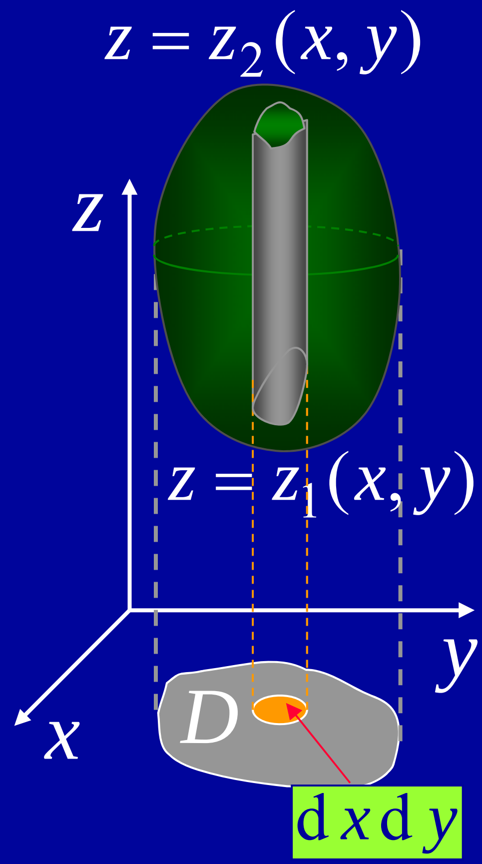
方法2. 截面法 (“先二后一”)

方法3. 三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.

方法1. 投影法 ("先一后二")

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\\ (x,y)\in D\end{cases}$$



细长柱体微元的质量为

$$\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

该物体的质量为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

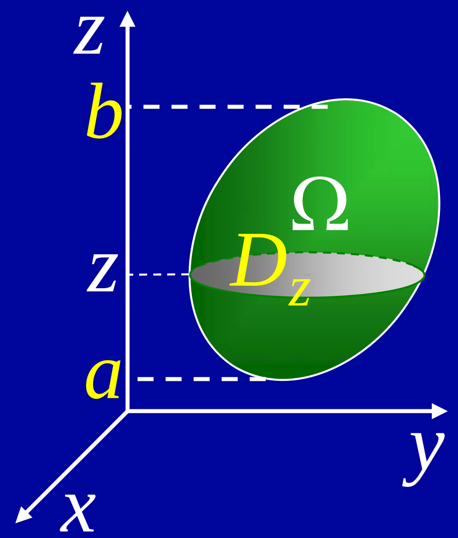
$$=\iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

微元线密度≈ $f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$$



以 D_z 为底, $\mathrm{d}z$ 为高的柱形薄片质量为

$$\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

该物体的质量为

面密度≈ $f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法3. 三次积分法

设区域 $\Omega : \begin{cases} z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \\ (x,y) \in D : \begin{cases} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \end{cases}$

利用投影法结果，把二重积分化成二次积分即得:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

投影法

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

当被积函数在积分域上变号时, 因为

$$f(x,y,z)$$

$$= \frac{|f(x,y,z)| + f(x,y,z)}{2} - \frac{|f(x,y,z)| - f(x,y,z)}{2}$$

$$= f_1(x,y,z) - f_2(x,y,z)$$

均为非负函数

根据重积分性质仍可用前面介绍的方法计算.

小结: 三重积分的计算方法

方法1. “先一后二”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

方法2. “先二后一”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D_Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

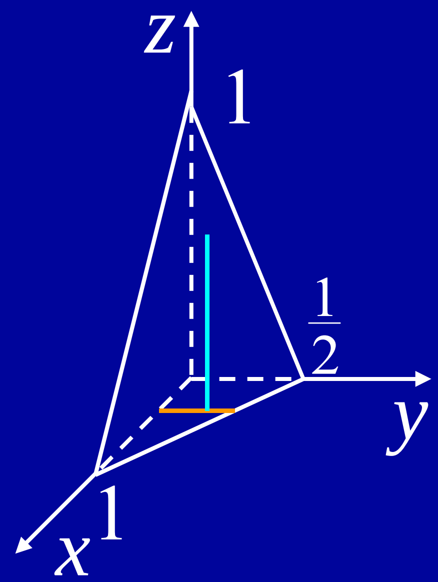
方法3. “三次积分”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

三种方法(包含12种形式)各有特点, 具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.

例1. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域 .

解: $\Omega:\begin{cases} 0\le z\le 1-x-2y \\ 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x) \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$



$$\therefore \iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

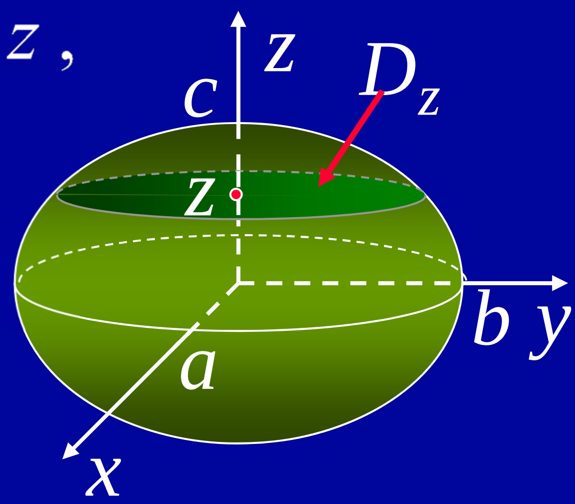
$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} (1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{48}$$

例2. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



解： $\Omega: \begin{cases} -c\le z\le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用“先二后一”

$$\therefore \quad \iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-c}^{c} z^2\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

思考与练习

1. 将$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$用三次积分表示, 其中$\Omega$由六个平面 $x=0$, $x=2$, $y=1$, $x+2y=4$, $z=x$, $z=2$ 所围成, $f(x,y,z)\in C(\Omega)$.

提示:

$$\Omega:\begin{cases} x\le z\le 2 \\ 1\le y\le 2-\frac{1}{2}x \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_1^{2-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}y\int_x^2 f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$, 计算

$$\iiint_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}v$$

提示: 利用对称性

$$\text{原式}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

$$=0$$

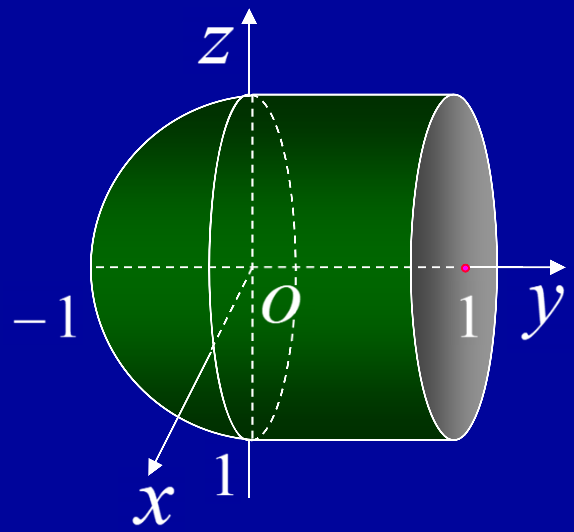
奇函数

作业

P175 A 3; 4; 7; 10(1) ;

B 1 (3);

备用题 1. 计算 $I=\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中 Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}\,,\; x^2+z^2=1\,,\; y=1$ 所围成.



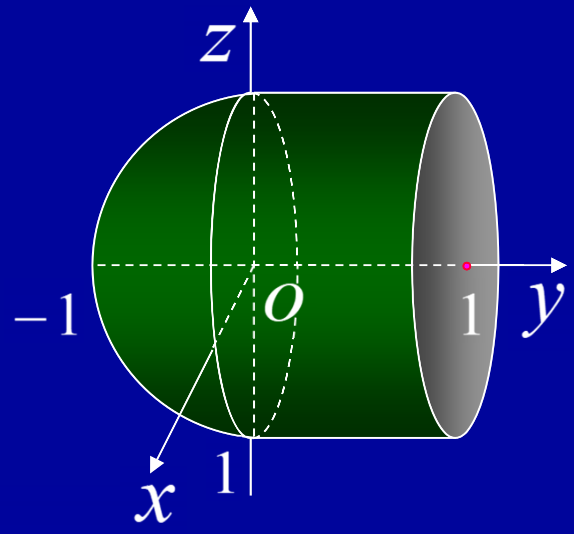
分析: 若用“先二后一”,则有

$$I=\int_{-1}^{0} y\mathrm{d}y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$+\int_{0}^{1} y\,\mathrm{d}\,y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

计算较繁! 采用“三次积分”较好.

解: Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z}\,,\ x^2+z^2=1,\ y=1$ 所围, 故可表为



$$\Omega:\begin{cases}-\sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le z\le -\sqrt{1-x^2}\\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\mathrm{d}y$$

$$=\cdots=\frac{28}{45}$$

思考: 若被积函数为 $f(y)$ 时, 如何计算简便?

第5节 柱面坐标与球面坐标系下三重积分的计算

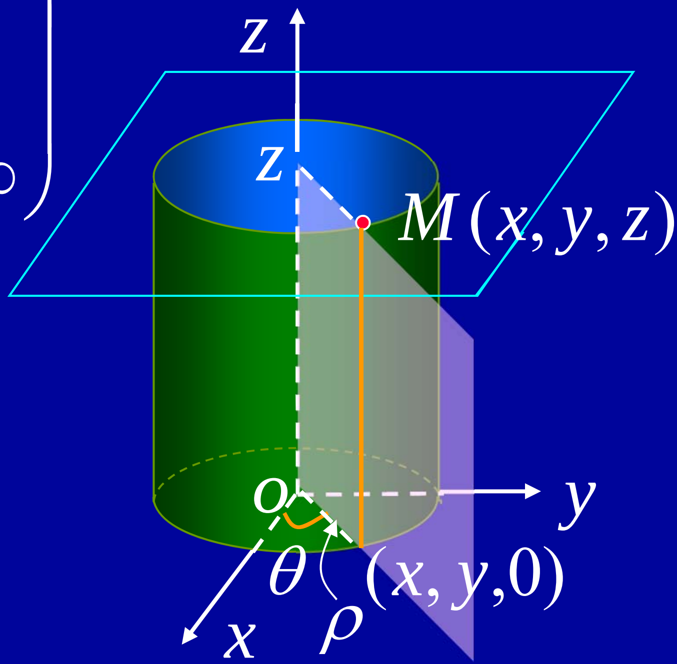
一、利用柱坐标计算三重积分

二、利用球坐标计算三重积分

一、利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, 将 x, y 用极坐标 ρ,θ 代替, 则 (ρ,θ,z) 就称为点 M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



坐标面分别为

$\rho=$ 常数 ⟶ 圆柱面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

$z=$ 常数 ⟶ 平面

如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

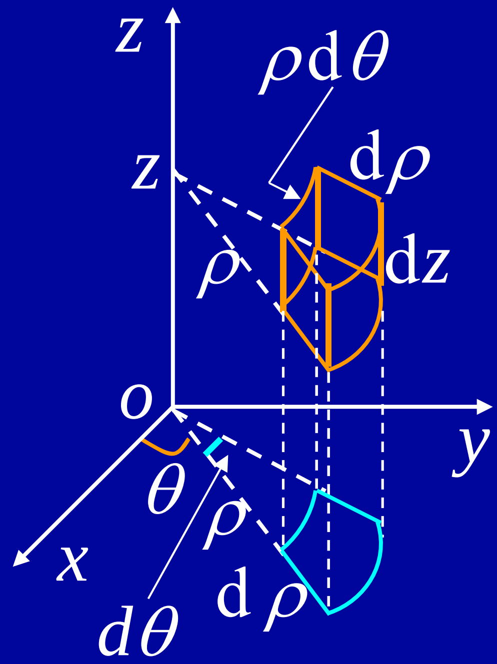
$$\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

因此

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Omega F(\rho,\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$



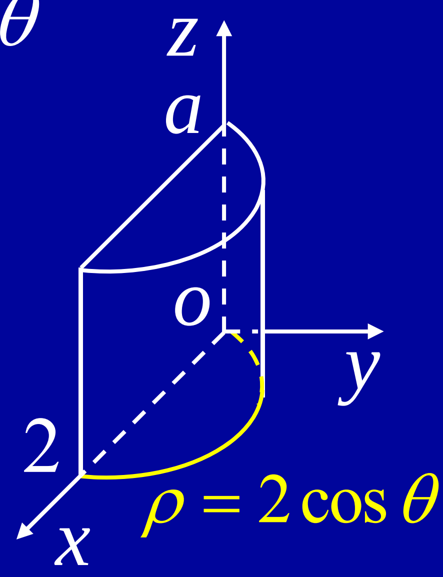
适用范围:

1) **积分域**表面用柱面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用柱面坐标表示时**变量互相分离**.

例3. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中 Ω 为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}0\le\rho\le 2\cos\theta\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le z\le a\end{cases}$



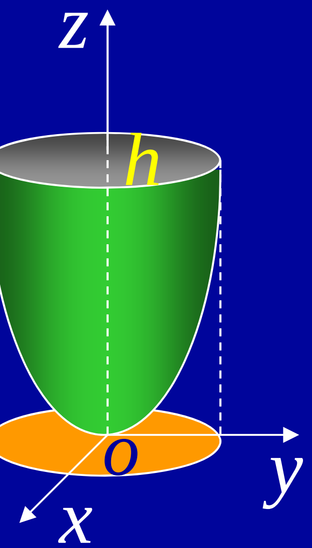
$$\text{原式}=\iiint_\Omega z\,\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^a z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^3$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$

例4. 计算三重积分 $\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$, 其中$\Omega$由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成 .



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\frac{r^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

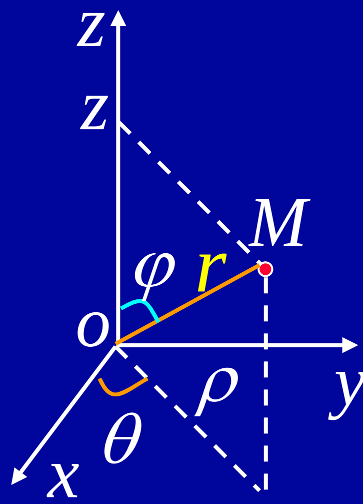
$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}(h-\frac{\rho^2}{4})\,d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

二、利用球坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, 其柱坐标为 (ρ,θ,z), 令 $|\overrightarrow{OM}|=r$, $\angle ZOM=\varphi$, 则 (r,θ,φ) 就称为点 M 的球坐标.



直角坐标与球面坐标的关系

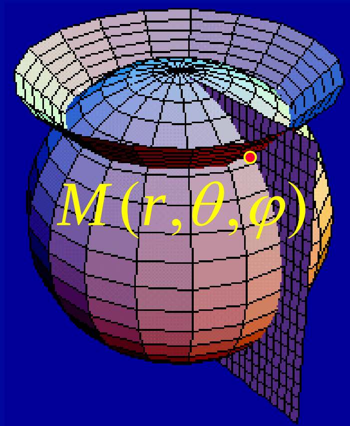
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$

坐标面分别为

$r=$ 常数 ⟶ 球面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

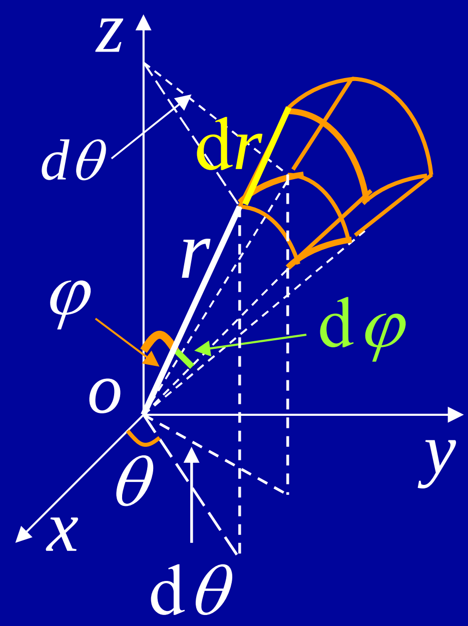
$\varphi=$ 常数 ⟶ 锥面



$$\rho = r\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$



因此有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Omega F(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

其中 $F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

适用范围:

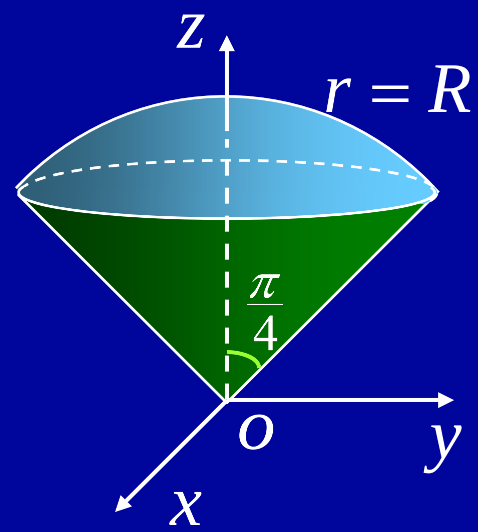
1) **积分域**表面用球面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用球面坐标表示时**变量互相分离**.

例5. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中$\Omega$为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



$$\therefore\quad \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$$

例6. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3 z\ (a>0)$ 所围立体体积.

解: 由曲面方程可知, 立体位于 xoy 面上部, 且关于 xoz yoz 面对称, 并与 xoy 面相切, 故在球坐标系下所围立体为

$$\Omega: 0\le r\le a\sqrt[3]{\cos\varphi},\ 0\le\varphi\le \pi/2,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

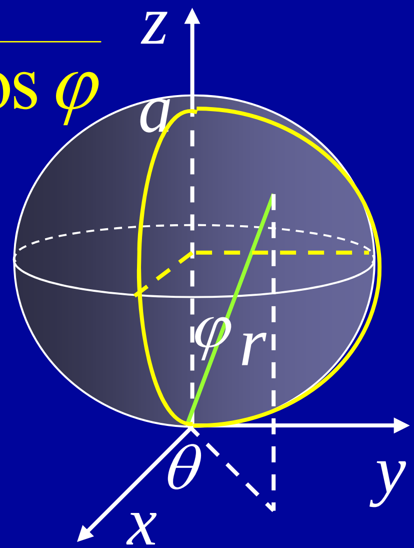
利用对称性, 所求立体体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}v$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}\pi a^3$$

$r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}$



$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	积分区域多由坐标面围成；
柱面坐标系	$\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	被积函数形式简洁，或
球面坐标系	$r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$	变量可分离．

* **说明:**

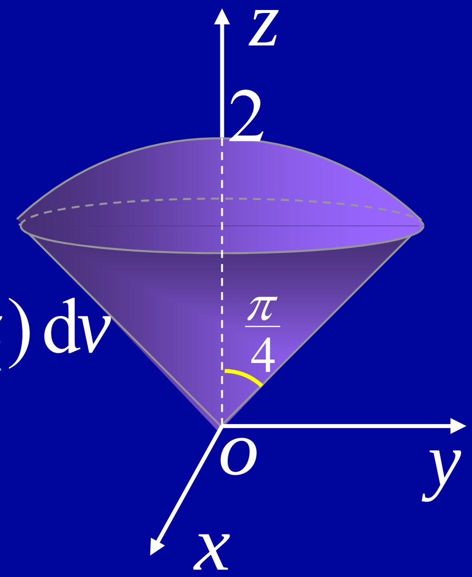
三重积分也有类似二重积分的**换元积分公式:**

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} F(u,v,w)\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

对应雅可比行列式为 $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$

思考与练习

设Ω由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成，计算 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,\mathrm{d}v.$



提示:

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+\underline{2xy+2yz+2xz})\,\mathrm{d}v$$

利用对称性

$$=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

用球坐标

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{64}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

作业

P184 A 1(1),(3),(6),(9)(10);

2(2)(3); 3(3); 6

B 2; 3; 8;

9;

计算 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中 Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$ 围成.

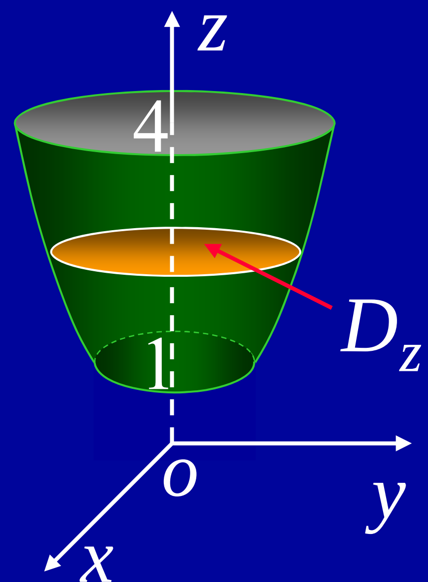
解: $I=\iiint_{\Omega}\boxed{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+5\iiint_{\Omega}xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

利用对称性

$$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\,\mathrm{d}r=21\pi$$



习题课

第10章

重积分

一、 重积分计算的基本方法

二、重积分计算的基本技巧

三、重积分的应用

一、重积分计算的基本方法

——累次积分法

1. 选择合适的坐标系

使积分域多为坐标面(线)围成;

被积函数用此坐标表示简洁或变量分离.

2. 选择易计算的积分序

积分域分块要少, 累次积分易算为妙.

3. 掌握确定积分限的方法

$\left\{\begin{array}{l}\text{图示法}\\ \text{列不等式法}\end{array}\right.$ (从内到外: 面、线、点)

练习

P124 2 (3) ; 6; 7 (1), (3)

补充题:

计算积分 $\iint_D (x+y)d\sigma$, 其中 D 由 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 所围成.

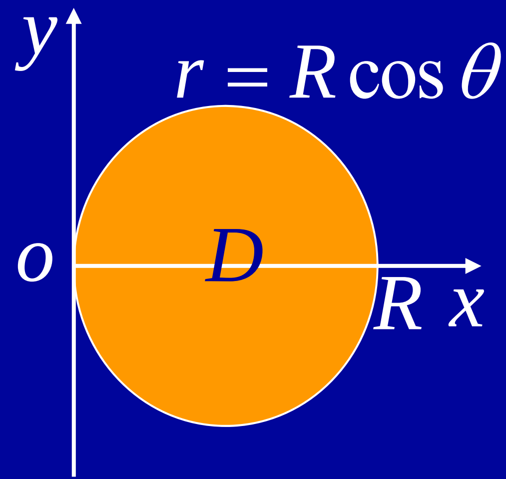
解答提示: (接下页)

P124 **2 (3).** 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，

其中 D 为圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

提示: 利用极坐标

$$D: \begin{cases} 0 \le r \le R\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

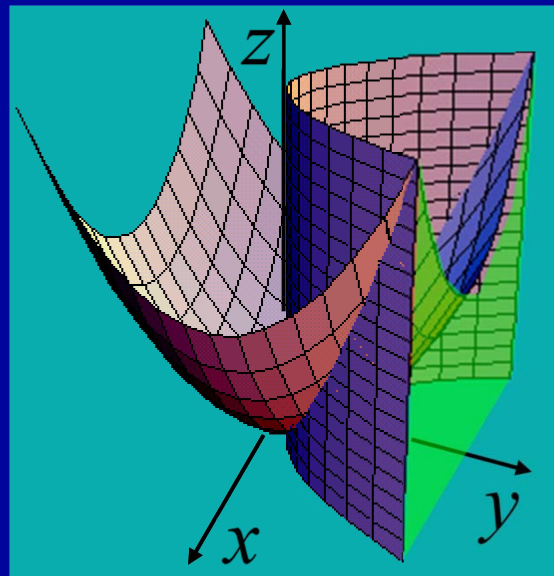


原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{d}r$

$$= \frac{1}{3}R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}R^3\pi$$

P124 **6.** 把积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为三次积分,其中Ω由曲面 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及平面 $y=1$, $z=0$ 所围成的闭区域.

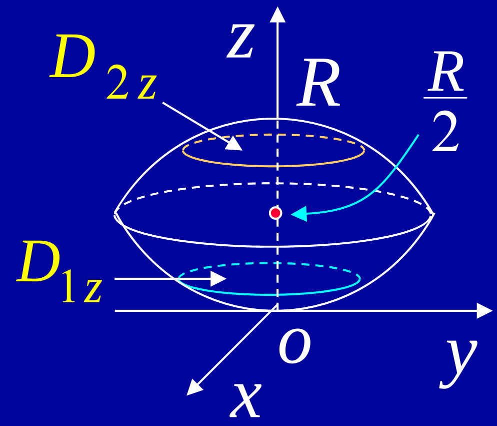


提示: 积分域为

$$\Omega:\begin{cases}0\le z\le x^2+y^2\\ x^2\le y\le 1\\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

$$原式=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

P124 **7 (1)** .计算积分 $\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ $(R>0)$的公共部分.



提示: 由于被积函数缺 x, y, 利用 "**先二后一**" 计算方便.

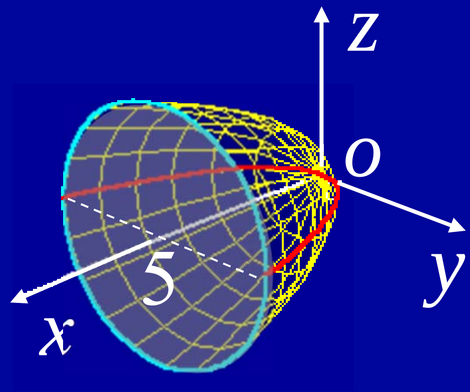
$$\text{原式} = \int_0^{R/2} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_{1z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{R/2}^{R} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_{2z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{R/2} z^2\cdot\pi(2Rz - z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{R/2}^{R} z^2\cdot\pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{59}{480}\pi R^5$$

P124 **7 (3).** 计算三重积分 $\iiint_\Omega (y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 xoy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $z=x$ 所围成的闭区域 .

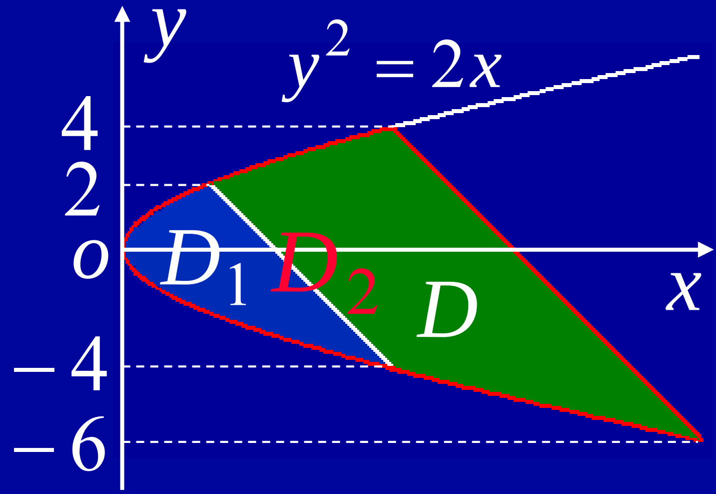
提示: 利用柱坐标 $\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$



$$\Omega:\begin{cases} \frac{1}{2}r^2 \le x \le 5 \\ 0 \le r \le \sqrt{10} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$原式 = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}} r^3\,\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x = \frac{250}{3}\pi$$

补充题. 计算积分 $\iint_D (x+y)d\sigma$, 其中D 由 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 所围成 .



提示: 如图所示 $D=D_2 \setminus D_1$, $f(x,y)=x+y$ 在D_2内有定义且连续, 所以

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_2}(x+y)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-6}^{4}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)\,\mathrm{d}x-\int_{-4}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y}(x+y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\cdots=543\frac{11}{15}$$

二、重积分计算的基本技巧

1. 交换积分顺序的方法

2. 利用对称性或重心公式简化计算

3. 消去被积函数绝对值符号 $\begin{cases} \text{分块积分法} \\ \text{利用对称性} \end{cases}$

4. 利用重积分换元公式

练习题

P123 1 (总习题九) ; P124 4, 7(2), 9

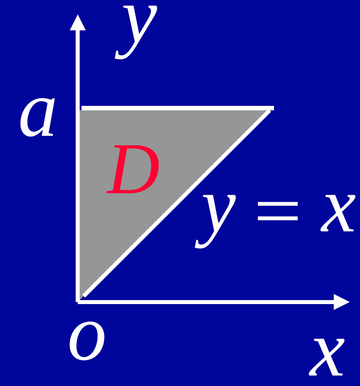
解答提示: (接下页)

P124 **4.** 证明:

$$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y e^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x$$

提示: 左端积分区域如图,

交换积分顺序即可证得.



P124 **7(2).** 求 $\iiint_\Omega \dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

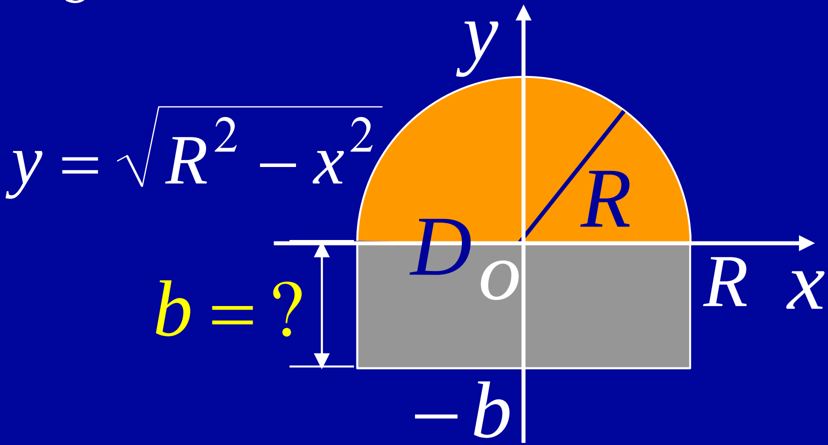
提示: 被积函数在对称域 Ω上关于 z 为奇函数,利用对称性可知原式为 0.

9. 在均匀的半径为R的圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，使整个薄片的重心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片的另一边长度应为多少？

提示： 建立坐标系如图. 由对称性知 $\bar{y}=0$, 即有

$$0=\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-b}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}R^3-Rb^2$$



由此解得 $b=\sqrt{\frac{2}{3}}R$

例1. 计算二重积分 $I=\iint_D (x^2+xye^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中:

(1) D为圆域 $x^2+y^2\le 1$;

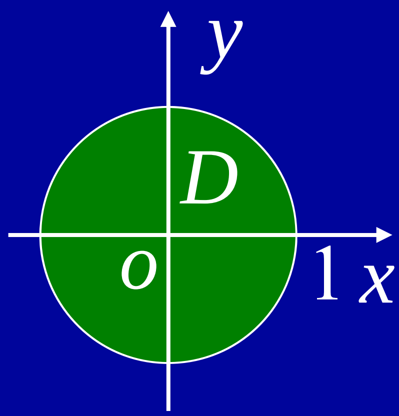
(2) D由直线 $y=x\,,\ y=-1\,,\ x=1$ 围成 .

解: (1) 利用对称性.

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$



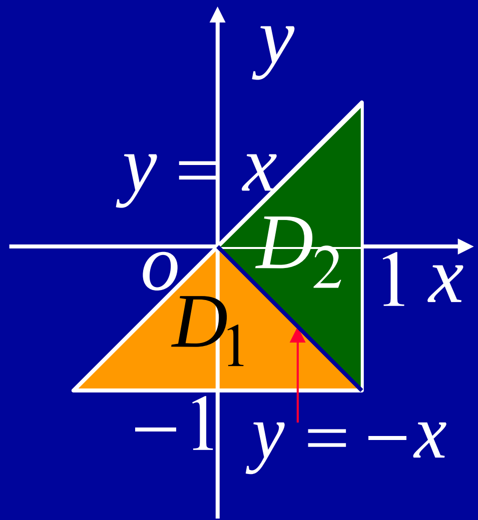
(2) 积分域如图: 添加辅助线 $y=-x$, 将D 分为 D_1, D_2, 利用对称性 , 得

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1} xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}\mathrm{d}y+0+0$$

$$=\frac{2}{3}$$



例2. 计算二重积分 $\iint_D (5x+3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 所围成的平面域.

解: $I = 5\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 3\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

积分区域 $(x+1)^2+(y-2)^2 \le 3^2$

其形心坐标为: $\overline{x}=-1$, $\overline{y}=2$

面积为: $A=9\pi$

$= 5\cdot\overline{x}A + 3\cdot\overline{y}A$

$= [5\cdot(-1)+3\cdot 2]A = 9\pi$

形心坐标

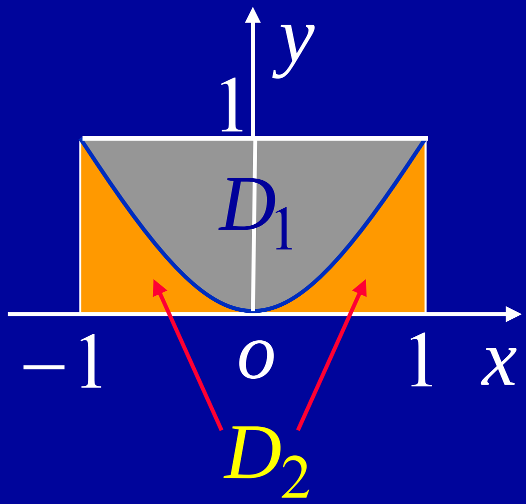
$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例3. 计算二重积分

$$(1)\ I=\iint_D \operatorname{sgn}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$$

$$(2)\ I=\iint_D (\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 其中D 为圆域 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限部分.



解: (1) 作辅助线 $y=x^2$ 把与D 分成 D_1, D_2 两部分, 则

$$I=\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

(2) 提示:

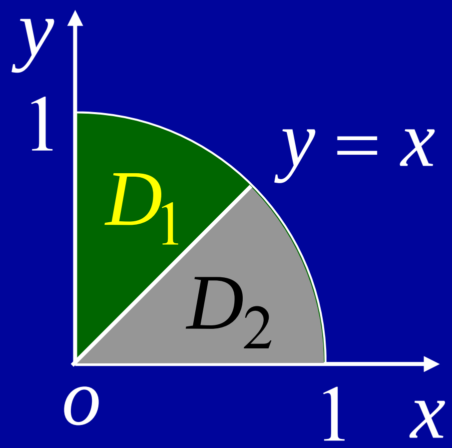
$$I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(|x-y|+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作辅助线 $y=x$ 将 D 分成 D_1 , D_2 两部分

$$=2\iint_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

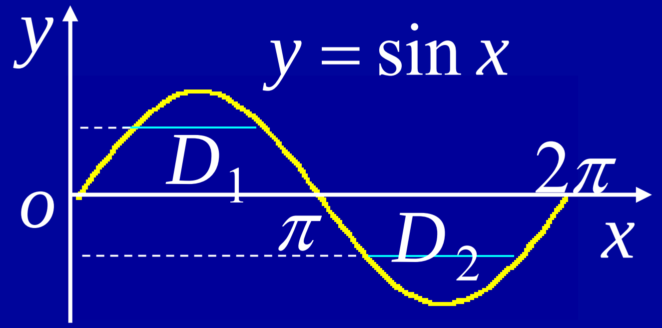
$$=\cdots=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}$$



说明: 若不用对称性, 需分块积分以去掉绝对值符号.

例4. 交换下列二次积分的顺序:

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$



解: 如图所示

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

例5. 设 $f(u) \in C,\ f(0)=0,\ f'(0)$ 存在, 求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}F(t)$,

其中 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

解: 在球坐标系下

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{t} f(r)\,r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^{t} f(r)\,r^2\,\mathrm{d}r$$

$$F(0)=0$$

利用洛必达法则与导数定义, 得

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$$

三、重积分的应用

1. 几何方面

面积(平面域或曲面域)，体积，形心

2. 物理方面

质量，转动惯量，质心，引力

3. 其它方面

证明某些结论等

例6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证: 左端 $=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y=\iint_D f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D[f^2(x)+f^2(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\boxed{D:\begin{cases}a\le x\le b\\ a\le y\le b\end{cases}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y\right)$$

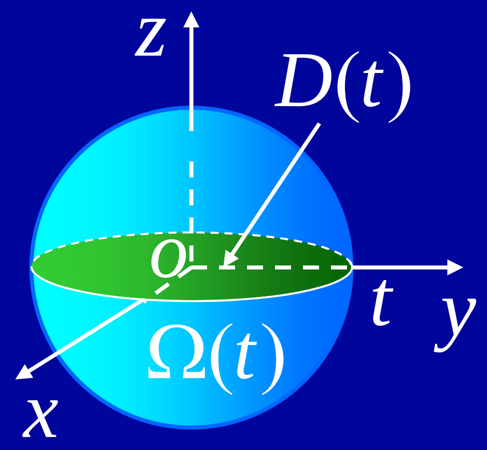
$$=\frac{b-a}{2}\left(\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b f^2(y)dy\right)$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx=\text{右端}$$

例7. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}$$

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x}$$



其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,

$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明 $t>0$ 时, $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$. (03考研)

解: (1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^{t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r}$$

两边对 t 求导, 得

$$F'(t)=2\frac{t\,f(t^2)\int_0^{t}f(r^2)r(t-r)\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^{t}f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}$$

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$, 故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

(2) 问题转化为证 $t>0$时, $F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}$$

即证 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2>0$

因 $$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0$$

故 $g(t)$在$(0,+\infty)$单调增, 又因 $g(t)$在$t=0$连续, 故有

$$g(t)>g(0)=0\qquad(t>0)$$

因此 $t>0$ 时, $F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0.$

例8. 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

解法1 利用“先二后一”计算.

$$D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^c \mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^c \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc$$

***解法2** 利用三重积分换元法. 令

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y = br\sin\varphi\sin\theta,\quad z = cr\cos\varphi$$

则

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi,\qquad \Omega':\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} |J|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= abc\iiint_{\Omega'} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$$

$$= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi\,abc$$

作业

P187 3(2)(6); 4(1);

6(2)(3)(5); 8