一元函数积分学

数一

3-1(87) 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$及$y=0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

3-2(87) 求正的常数 a 与 b，使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\,\mathrm{d}t=1$ 成立.

3-3(87) 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\,\mathrm{d}x$，其中 $s>0,t>0$,则 I 的值 ( ).

(A) 依赖于 s,t .　　(B) 依赖于 s,t,x .

(C) 依赖于 t,x，不依赖于 s .　　(D) 依赖于 s，不依赖于 t .

3-4(88) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\,\mathrm{d}t=x$，则 $f(7)=$_____.

3-5(88) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$.证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi),x=a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi),x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

3-6(89) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x)=$_____.

3-7(89) 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

3-8(90) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F'(x)$ 等于 ( )

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

3-9(90) 求 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

3-10(91) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=f(0)$. 证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

3-11(92) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2,x\le 0\\ e^{-x},x>0\end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

3-12(93) 函数 $F(x)=\int_1^x(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}})dt\ (x>0)$ 的单调减少区间为_____.

3-13(93) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2dt,g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)是g(x)$ 的 ( ).

(A) 等价无穷小.　　(B) 同阶但非等价的无穷小.

(C) 高价无穷小.　　(D) 低价无穷小.

3-14(93) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为 ( )

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$.　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$.　(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$.　(D) $\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$.

3-15(93) 求 $\int\dfrac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

3-16(94) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx,P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则有( )

(A) $N<P<M$.　(B) $M<P<N$.　(C) $N<M<P$.　(D) $P<M<N$.

3-17(94) 设 $\begin{cases}x=\cos t^2\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos udu\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值..

3-18(94) 求 $\int\dfrac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

3-19(95) $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^0 x\cos t^2dt=$ _____.

3-20(96) 设 $f(x)$ 有连续导数， $f(0)=0, f'(0)\neq 0, F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$ ，且当 $x\to 0$ 时， $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于 ( )

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

3-21(96) 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长，其中 $a>0$ 是常数.

3-22(97) 设在区间 $[a,b]$ 上， $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$.令 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ S_2=f(b)(b-a),$

$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 则 ( )

(A) $S_1<S_2<S_3$. (B) $S_2<S_1<S_3$. (C) $S_3<S_1<S_2$. (D) $S_2<S_3<S_1$.

3-23(97) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$ ，则 $F(x)$ ( )

(A)为正常数. (B) 为负常数. (C) 恒为零. (D) 不为常数.

3-24(97) 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$ ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ (A 为常数)，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

3-25(98) 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ ( )

(A) $xf(x^2)$. (B) $-xf(x^2)$. (C) $2xf(x^2)$. (D) $-2xf(x^2)$.

3-26(98) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

3-27(98) 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1)试证存在 $x_0\in(0,1)$ ，使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$ ，证明(1)中的 x_0 是唯一的.

3-28(99) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=$ ______.

3-29(99) 设 $f(x)$ 是连续函数， $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 ( )

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时， $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时， $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时， $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时， $F(x)$ 必是单调增函数.

3-30(99) 略

3-31(00) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=$ ______.

3-32(00) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0,\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$.试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1 和 ξ_2 ，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

3-33(01) 求 $\int\dfrac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

3-34(02) $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=$ ______.

3-35(02) 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\dfrac{2}{n})$.

3-36(03) 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1)求 D 的面积 A ;

(2)求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

3-37(03) (略)

3-38(04) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$ ，且 $f(1)=0$ ，则 $f(x)=$______.

3-39(04) 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2 dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列顺序是（　　）

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.

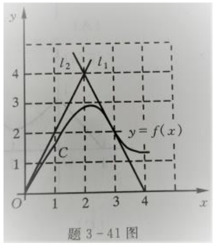
3-40(05) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有（　　）

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数.



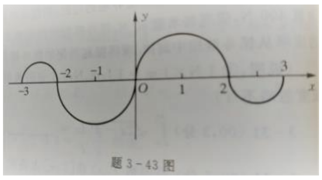
题 3-41 图

3-41(05) 如图，曲线 C 的方程 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx$.

3-42(07) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$ ______.

3-43(07) 如图，连续曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则下列结论正确的是（　　）


题 3-43 图

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

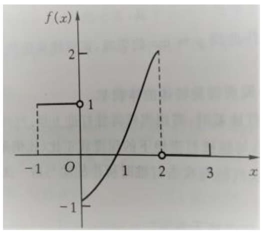
(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.　(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

3-44(08) 设 $f(x)$ 是连续函数，

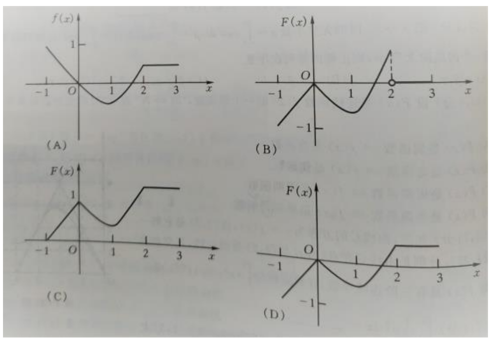
(1) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

3-45(09) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为（　　）



3-46(10) 设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性　（　　）

(A) 仅与 m 的取值有关.　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 的取值都有关.　(D) 与 m,n 的取值都无关.

3-47(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$　　（　　）

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.　　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

3-48(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$ ______.

3-49(10)

(1) 比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$与$\int_0^1 t^n|\ln t|dt\quad(n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由；

(2) 记$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\quad(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

3-50(11) 设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$，则$I,J,K$的大小关系为（　　）

(A) $I<J<K$.　(B) $I<K<J$.　(C) $J<I<K$.　(D) $K<J<I$.

3-51(11) 曲线$y=\int_0^x\tan tdt\ (0\le x\le\frac{\pi}{4})$的弧长$s=$ ______.

3-52(12) 设$I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin xdx\ (k=1,2,3)$，则有（　　）

(A) $I_1<I_2<I_3$.　(B) $I_3<I_2<I_1$.　(C) $I_2<I_3<I_1$.　(D) $I_2<I_1<I_3$.

3-53(12) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=$ ______.

3-54(13) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ______.

3-55(13) 计算$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中$f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

3-56(14) 若$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$（　　）

(A) $2\sin x$.　(B) $2\cos x$.　(C) $2\pi\sin x$.　(D) $2\pi\cos x$.

3-57(15) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)dx=$ ______.

3-58(16) 已知函数$f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$，则$f(x)$的一个原函数是（　　）.

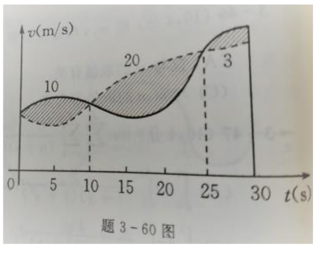
(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1), & x\ge 1\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)-1, & x\ge 1\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)+1, & x\ge 1\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1)+1, & x\ge 1\end{cases}$

3-59(16) 若反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$收敛，则（　　）

(A) $a<1$且$b<1$.　(B) $a>1$且$b>1$.　(C) $a<1$且$a+b>1$.　(D) $a>1$且$a+b>1$.

3-60(17) 甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处. 图中，实线表示甲的速度曲线$v=v_1(t)$(单位：m/s),虚线表示乙的速度曲线$v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3. 计时开始后追上甲的时刻记为t_0(单位：s)，则（　　）



题 3－60 图

(A) $t_0=10$.　(B) $15<t_0<20$.

(C) $t_0=25$.　(D) $t_0>25$.

3-61(17) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$.

3-62(18) 设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

(A) $M>N>K$.　(B) $M>K>N$.　(C) $K>M>N$.　(D) $K>N>M$.

3-63(18) 设函数$f(x)$具有 2 阶连续导数. 若曲线$y=f(x)$过点$(0,0)$且与曲线$y=2^x$在点$(1,2)$处相切，则$\int_0^1 xf''(x)dx=$ ______.

3-64(18) 求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

答案

数一

3-1 $\frac{3}{2}$　　3-2 $a=4$　　3-3 （D）　　3-4 $\frac{1}{12}$　　3-6 $x-1$　　3-8 （A）　　3-9 $\frac{1}{3}\ln 2$

3-11 $\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$　　3-12 $(0,\frac{1}{4})$　　3-13 （B）　　3-14 （A）

3-15 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx = 2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$

3-16（D）　　3-17 $\frac{dy}{dx}=t, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

3-18 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} = \frac{1}{4(1+\cos x)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$ 或 $= \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C$

3-19 $-\int_0^{x^2}\cos t^2 dt - 2x^2\cos x^4$　　3-20 （C）　　3-21 $8a$　　3-22（B）

3-23 （A）　　3-24 $\varphi'(x)=\begin{cases} \frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2} & x\neq 0 \\ \frac{A}{2} & x=0 \end{cases}$，$\varphi(x)$在$x=0$处连续.

3-25 （A）　　3-26 $\frac{2}{\pi}$　　3-28 $\sin x^2$　　3-29 （A）　　3-31 $\frac{\pi}{4}$

3-33 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}[e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x] + C$

3-34 1　　3-35 $y=x, \lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})=2$　　3-36 $A=\frac{1}{2}e-1, V=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$

3-38 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$　　3-39 （B）　　3-40（A）3-41 20　　3-42 $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$　　3-43 （C）

3-45 (D)　　3-46 (D)　3-47 (D)　3-48 -4π　　3-50 （B）

3-51 $\ln(1+\sqrt{2})$　　3-52 (D)　　3-53 $\frac{\pi}{2}$

3-54 $\ln 2$　　3-55 $8-2\pi-4\ln 2$　　3-56 （A）　　3-57 $\frac{\pi^2}{4}$　　3-58 (D)

3-59 （C）　　3-60 （C）　　3-61 $\frac{1}{4}$　　3-62 （C）　　3-63 $2(\ln 2-1)$

3-64 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx = \frac{1}{2}[e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \sqrt{e^x-1} - \frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}] + C$