第 8 章　空间解析几何与向量代数

本章由向量代数与空间解析几何两部分内容构成 .如同平面解析几何是学习一元微积分的必不可少的基础一样 ,空间解析几何知识对于多元微积分的研究也是不可或缺的 . 本章第一部分建立空间直角坐标系 , 引入向量并介绍了向量的运算 . 向量是对自然界中一类既有大小又有方向的物理量的抽象 , 它是以几何形式给出的 , 然而在建立了空间直角坐标系后 , 向量又可以用坐标来表示 . 这样 , 借助于向量这个工具 , 就可以将代数运算引入到几何中 , 利用代数方法研究几何问题 . 向量代数方法的建立 , 还为物理及工程技术提供了有力的工具 , 同时给出了线性代数中向量空间的一个三维模型 .

本章的第二部分是空间解析几何基础知识 . 研究空间几何图形及其方程 , 主要内容包括空间平面与直线及其方程以及空间曲面、曲线的方程 . 在空间曲面方程中 , 我们着重讨论了柱面 , 旋转曲面及二次曲面的方程 . 读者在学习中应能体会向量在建立有关方程及在讨论有关几何量的位置关系中的作用 .

第 1 节　向量及其线性运算

1.1　向量的概念

现实生活中有许多物理量只有大小、多少之分如体积、质量、距离、时间等 , 因此只需用数字刻画这类量 , 处理这类量的规则也与实数的运算规则相当 , 称这类量为纯量或标量 . 然而 , 客观世界还存在另一类物理量 , 这类物理量不仅有大小之分 , 还有方向之异 , 如力、速度、加速度等 , 单纯用数字不足以描述它们 . 人们把这类既有大小、又有方向的量称之为向量 .

数学上用一条有方向的线段(即有向线段)来表示向量 . 有向线段的长度表示向量的大小 , 有向线段的方向表示向量的方向 . 以 M_1 为始点 , M_2 为终点的有

向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ ．有时也用小写粗体字母或一个上面加有箭头的字母表示向量，如向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ ，$\vec{c}$ 等．本书中单个字母表示的向量用粗体字母表示，两个字母表示的向量在上面加箭头表示．

向量的大小称作向量的模，或长度，也称为向量的范数．向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$ ．模等于 1 的向量称作单位向量，本书中记为 $\boldsymbol{e}$ ．模等于 0 的向量称作零向量，并记作 $\mathbf{0}$ ，规定：零向量的方向为任意的．

在直角坐标系中，以坐标原点为始点，向点 M 引向量，这个向量 $\overrightarrow{OM}$ 称作点 M 对于原点 O 的向径，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示．

在数学上，我们只研究自由向量，即若两个有向线段的长度相等，方向相同，则不论它们的起点是否相同，我们就认为它们表示同一向量．如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 的大小相同，方向一致，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 相等，并记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ ．

由于自由向量可在空间自由平移，因此可规定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角如下：将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的始点重合后，它们所在的射线之间的夹角 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

两非零向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 如果它们的方向相同或相反，则称这两个向量平行，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.由于零向量的方向是任意的，因此可认为零向量与任意向量都平行.

两向量平行时，若将它们的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在同一直线上，因此，两向量平行，又称两向量共线.

类似地，还有向量共面的概念.设有 $k(k \ge 3)$ 个向量，若将它们的起点放在同一点时，这 k 个终点和公共起点都在一个平面上，则称这 k 个向量共面.

1.2 向量的线性运算

1 向量的加法

如果向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 在同一直线上，那么，规定它们的和是这样一个向量：

若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的指向相同时，和的方向与原来两向量相同，其模等于两向量的模之和；若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的指向相反时，和向量的模等于两向量的模之差，其方向与模值大的向量方向一致．

根据物理学知识，两个力、两个速度均能合成，得到合力与合速度，且合力与合速度都可根据平行四边形法则求出．从此实际背景出发，我们对向量规定加法运算如下：

如图 1.1 所示，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ ，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ ，以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$ ，取对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ ，记 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ ，称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，并记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ．

这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量之和的方法称作向量加法的平行四边形法则．

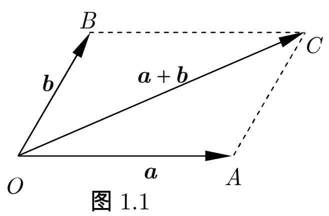


图 1.1

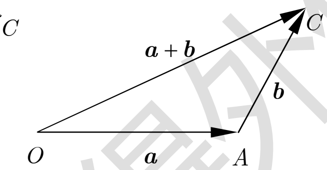


图 1.2

由于平行四边形的对边平行且相等，可以这样来作出两向量的和向量：

如图 1.2，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ ，以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$ ，连接 OC 得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}\ .$$

称这一法则为向量加法的三角形法则．

根据向量的加法的定义，可以证明向量加法具有下列运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

由向量的加法的三角形法则与上述运算律，可得 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加的法则如下：

作 $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_1$ ，$\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_2$ ，$\cdots$，$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\boldsymbol{a}_n$ (图 1.3)，最后作 $\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ ，则

$$\overrightarrow{A_1A_{n+1}}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

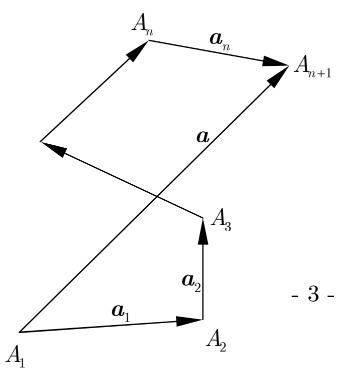


图 1.3

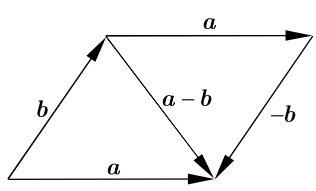


图 1.4

与 a 的模相同而方向相反的向量称为 a 的负向量，记作 $-a$ ．规定两向量 a 与 b 的差为向量：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ ，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ ，这种运算称为向量的减法．

特别地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ ．

由三角形法则可看出：要从 a 减去 b ，只要把与 b 长度相同而方向相反的向量 $-b$ 加到向量 a 上去．由平行四边形法则，可按图 1.4 作出向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ：即向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是由 b 的终点向 a 的终点所引的向量．

思考题:

1．证明三角形不等式：$\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big| \le |\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

2　向量与数的乘法

对任意实数 λ 与向量 a ，可定义 a 与 λ 的乘积（简称数乘）为一向量，记作 $\lambda \boldsymbol{a}$ ，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda \boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$ ；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，向量 λa 的方向与 a 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 的方向与 a 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ；

特别地，取 $\lambda=-1$ ，则向量 $(-1)\cdot a$ 的模与 a 的模相等，而方向相反，由负向量的定义知：$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$ ．

由上述定义，不难推出数乘向量运算满足下列运算规律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu \boldsymbol{a})=\mu(\lambda \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

显然，向量 $\lambda(\mu \boldsymbol{a})$ ，$\mu(\lambda \boldsymbol{a})$ ，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且

$$|\lambda(\mu \boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda \boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu|\cdot|\boldsymbol{a}|$$

故　$\lambda(\mu \boldsymbol{a})=\mu(\lambda \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{a}+\mu \boldsymbol{a}$ ；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda \boldsymbol{a}+\lambda \boldsymbol{b}$

同样由向量与数的乘积的定义也可证明（略）.

设 a 是非零向量，用 e_a 表示与 a 同方向的单位向量．由于 $|\boldsymbol{a}|\ e_a$ 与 e_a 方向

相同，从而 $|\boldsymbol{a}|\ \boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向也相同，而且

$$\left||\boldsymbol{a}|\ \boldsymbol{e}_a\right| = |\boldsymbol{a}|\cdot\left|\boldsymbol{e}_a\right| = |\boldsymbol{a}| \quad ,$$

因此 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\ \boldsymbol{e}_a$ ，从而 $\boldsymbol{e}_a = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

这表明：任意非零向量与它的模的倒数的数乘是一个与原向量同方向的单位向量．

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此常用向量的数乘来判定两个向量的平行(共线)关系，即有如下定理：

定理 1.1　设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ，那么向量 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在惟一的实数 λ ，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

证　显然由数乘的定义可证充分性成立，以下证必要性.

设 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$ ，若 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ，则取 $\lambda = 0$ 即有 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ ；若 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ ，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 ,取 $\lambda = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时取 $\lambda = -\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,则 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}| = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ ，即

$$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}\ . \tag{1.1}$$

如果另有实数 μ ，满足 $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$ ，两式相减，得 $(\lambda - \mu)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ，即 $|\lambda - \mu|\ |\boldsymbol{a}| = 0$ ，但 $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ ，故 $|\lambda - \mu| = 0$ ，即 $\lambda = \mu$ ．因此满足条件的 λ 是唯一的．　■

由(1.1)式知，若向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ，且 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$ ，则必有

$$\boldsymbol{b} = \pm|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_a \tag{1.2}$$

设数轴 Ou ，其原点为 O ，将与 Ou 轴的正向同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_u$ ，P 为轴上任意一点，其坐标为 u ，则 $u = \pm\left|\overline{OP}\right|$ （ $\overline{OP}$ 与 $\boldsymbol{e}_u$ 同向时取正，反向时取负）.

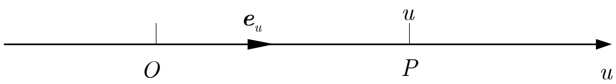


图 1.5

由(1.2)式，$\overline{OP} = \pm\left|\overline{OP}\right|\boldsymbol{e}_u = u\boldsymbol{e}_u$ ，从而得以下推论:

推论　对数轴上任意一点 P ，轴上有向线段 $\overline{OP}$ 都可唯一地表示为点 P 的

坐标与轴上单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 的乘积：$\overline{OP} = u\boldsymbol{e}_u$.

思考题：

2．设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$， $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，试给出 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件.

类似于两向量平行的充分必要条件 ,对于向量共面 ,有如下的充分必要条件 :

定理 1.2 三向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是其中一个向量可以表成其余两个向量的线性组合.

证 充分性 .不妨设 $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$,任取一点 M ,作 $\overline{MA} = \lambda\boldsymbol{a}$,$\overline{MB} = \mu\boldsymbol{b}$ ，则 $\boldsymbol{c}$ 就是以 MA ，MB 为邻边的平行四边形的对角线 MC 所对应的向量 $\overline{MC}$ ，因此三向量 $\overline{MA} = \lambda\boldsymbol{a}$ ，$\overline{MB} = \mu\boldsymbol{b}$ ，$\overline{MC} = \boldsymbol{c}$ 共面，但 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，$\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，从而 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 共面.

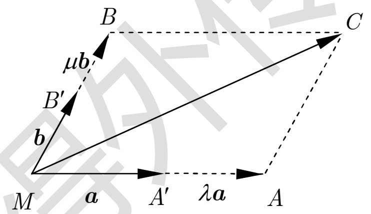


图 1.6

必要性．若向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 共面，则总可将它们平移使其共起点 M ，如图 1.6 所示，设 $\boldsymbol{c} = \overline{MA} + \overline{MB}$,且 $\overline{MA'} = \boldsymbol{a}$,$\overline{MB'} = \boldsymbol{b}$,过点 C 分别作 $CA \parallel MB'$ 交 MA' 于 A ，$CB \parallel MA'$ 交 MB' 于 B ，则四边形 $MACB$ 为平行四边形，因此有

$$\overline{MA} = \overline{BC} = \frac{\left|\overline{BC}\right|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\ ,\ \overline{MB} = \overline{AC} = \frac{\left|\overline{AC}\right|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}\ ,$$

记 $\lambda = \dfrac{\left|\overline{BC}\right|}{|\boldsymbol{a}|}$ ，$\mu = \dfrac{\left|\overline{AC}\right|}{|\boldsymbol{b}|}$ ，得 $\boldsymbol{c} = \overline{MA} + \overline{MB} = \dfrac{\left|\overline{BC}\right|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} + \dfrac{\left|\overline{AC}\right|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$. ▮

由定理 1.2 不难得到

推论 三向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 ，使得

$$k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\ .$$

习题 8 - 1

A 类

1．设 A,B,C 为三角形的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

2．已知 $\triangle ABC$ 中 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$ ，若 D 是 AC 的中点，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{BD}$.

3．已给正六边形 $ABCDEF$ (字母顺序按逆时针向) ,记 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{AE} = \boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表

示向量 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.

4．设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ ，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ ，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

B 类

1．将 ΔABC 的 BC 边五等分，设分点依此为 D_1,D_2,D_3,D_4 ，再将各分点与点 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$ ，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$ ，$\overrightarrow{D_2A}$ ，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

2．试证明：

(1) 两向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的数 k_1,k_2 使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2) 三向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3 ，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

第 2 节　点的坐标与向量的坐标

2.1　空间直角坐标系

过空间一定点 O ，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且具有相同的长度单位，这三条轴分别叫 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴(竖轴)，且统称为坐标轴．

通常把 x 轴，y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线，它们的正方向要符合右手规则：右手握住 z 轴，当右手的四个指头从 x 轴的正向以 90° 角度转向 y 轴正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴正向(图 2.1)．三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系 ,称为 $Oxyz$ 直角坐标系，点 O 称为坐标原点．

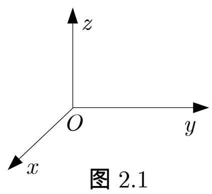


图 2.1

取定空间直角坐标系之后，就可以建立空间点与有序数组之间的对应关系．

设 M 为空间的一已知点，过 M 点分别作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的三个平面，它们与 x 轴，y 轴，z 轴的交点依次为 P , Q , R ，这三点在 x 轴，y 轴，z 轴的坐标依次为 x,y,z ，于是：空间点 M 就惟一地确定了一个有序数组 x,y,z ．

反过来，任意给定一有序数组 x,y,z ，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P ，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q ，在 z 轴取坐标为 z

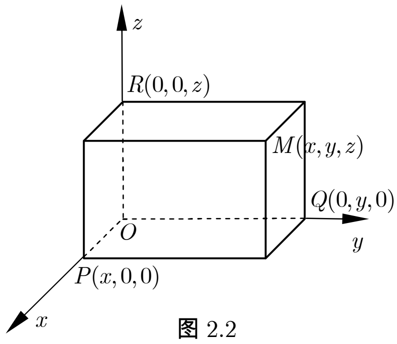


图 2.2

的点 R ，然后过 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的平面，这三个平面的交点 M 就是以有序数组 x,y,z 确定的惟一的点(图 2.2)．

这样，通过空间直角坐标系，我们建立了空间点 M 和有序数组 x , y , z 之间的一一对应关系．这组数 x , y , z 就称为点 M 的坐标．依次称 x ， y ， z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，并可将点 M 记作 $M(x,y,z)$ ．

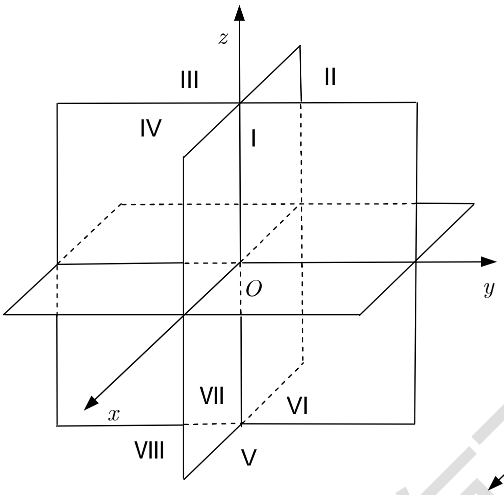


图 2.3

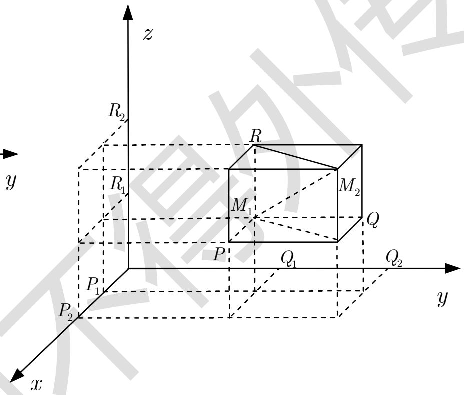


图 2.4

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标面．由 x 轴与 y 轴所决定的坐标面称为 xOy 面，类似地还有 zOx 面与 yOz 面．这三个坐标面把空间分成了八个部分，每一部分称为一个卦限，如图 2.3 所示，八个卦限分别用罗马字母I，II，…，VIII表示．第一、二、三、四卦限均在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定，其中含有 x 轴、 y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限．第五、六、七、八卦限均在 xOy 面的下方，也按逆时针方向确定，它们依次分别在第一至四卦限的下方．

思考题:

1. 试确定空间直角坐标系的各个卦限中点的坐标的符号?

类似于平面解析几何，在空间中也可以用点的坐标计算两点间的距离．设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间的两点，过 M_1 ，M_2 各作三个分别垂直于三坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 2.4 所示．可见此长方体各棱的长度分别是

$$|x_2 - x_1|\ ,\ |y_2 - y_1|\ ,\ |z_2 - z_1|\ ,$$

从而得对角线 M_1M_2 的长度，亦即空间两点 M_1 ，M_2 间的距离公式为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{2.1}$$

2.2　向量的坐标表示

称空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，沿 x, y, z 轴正向的单位向量为 $Oxyz$ 坐标系下的标准单位向量，分别记为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ．由于对任意向量 $\boldsymbol{a}$ ，总可平移使其起点位于坐标原点 O 从而存在对应点 M ，满足 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}$.以 OM 为对角线作长方体（图 2.5 ），设 M 点在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影点分别为 P ，Q 和 R ，有

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\ .$$

设 P, Q, R 在 x 轴，y 轴，z 轴上的坐标分别为 a_x, a_y, a_z ，则

$$\overrightarrow{OP} = a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ} = a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR} = a_z\boldsymbol{k}\ ,$$

因此，

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\ . \tag{2.2}$$

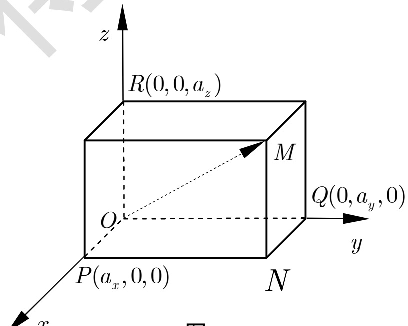


图 2.5

(2.2)式表明空间任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可表为标准单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的线性组合．我们又称(2.2)式为向量 $\boldsymbol{a}$ 的标准分解式，称 $a_x\boldsymbol{i}, a_y\boldsymbol{j}, a_z\boldsymbol{k}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的分向量．

显然，给定向量 $\boldsymbol{a}$ ，就确定了点 M 及三个分向量 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ ，进而确定了有序数组 a_x, a_y, a_z ；反之，给定有序数组 a_x, a_y, a_z ，则由(2.2)式就确定了向量 $\boldsymbol{a}$ ．于是，向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 a_x, a_y, a_z 建立了一一对应的关系：

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \leftrightarrow a_x, a_y, a_z$$

因此我们把有序数组 a_x, a_y, a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ （在直角坐标系中）的坐标，记作

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}\ , \tag{2.3}$$

(2.3)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式．

空间任一点 $M(x,y,z)$ 都对应一个向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ ，称 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 为点 M （关于原点）的向径．由向量的坐标的定义知向径 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$ ．记号 (x,y,z) 表示点 M ，向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 表示为 $\{x,y,z\}$ ．

给定了向量的坐标表示式，就可以方便地进行向量的线性运算了．设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ ，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ ，即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\ ,\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\ .$$

于是，由向量加法与数乘运算的运算律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\ ,$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\ ,$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\ ,$$

即

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}\ , \tag{2.4}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}\ . \tag{2.5}$$

由此可见，对向量施行加、减与数乘运算，只需对向量的各个坐标施行相应的数量运算即可．

思考题：

2．怎样用向量的坐标表示两向量相等？

3．设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式．

由第 1 节定理 1.1，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ ，而 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式为：

$$\{b_x,b_y,b_z\}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}\ ,$$

因此定理 1.1 可用向量的坐标表示为：

$$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\ ,\ \boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z} \tag{2.6}$$

当 a_x,a_y,a_z 有一个为零时，例如 $a_x=0,a_y,a_z\neq 0$ ，(2.6)式应理解为

$$b_x=0,\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

当 a_x,a_y,a_z 有两个为零时，例如 $a_x=a_y=0,a_z\neq 0$ ，(2.6)式应理解为

$$b_x=0,\ b_y=0$$

【例 2.1】 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ ，有向线段 $\overline{AB}$ 上的点 M

将它分为两条有向线段 $\overline{AM}$ 和 $\overline{MB}$ ，使它们的值的比等于数 λ（$\lambda \neq -1$），即

$$\frac{AM}{MB} = \lambda \ ,$$

求分点 $M(x,y,z)$ 的坐标．

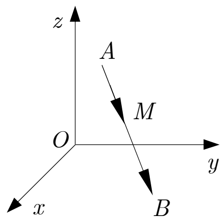


图 2.6

解　因为 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 在同一直线上，故

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \ ,$$

$$\overrightarrow{AM} = \{x-x_1, y-y_1, z-z_1\} \ ,$$

$$\overrightarrow{MB} = \{x_2-x, y_2-y, z_2-z\} \ ,$$

$$\lambda\overrightarrow{MB} = \{\lambda(x_2-x), \lambda(y_2-y), \lambda(z_2-z)\} \ ,$$

$$x-x_1 = \lambda(x_2-x) \ , \ y-y_1 = \lambda(y_2-y) \ , \ z-z_1 = \lambda(z_2-z) \ ,$$

解得

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \ .$$ $\blacksquare$

称本例中的点 M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比（ λ ）分点．特别地，当 $\lambda = 1$ 时，可得线段 AB 的中点 M 的坐标为 $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$ ．

设 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ，$\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ ，$\boldsymbol{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ ，由定理 1.2 的推论，三向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 ，使得

$$k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \ .$$

用向量的坐标表示上述关系，即

$$\begin{cases} k_1a_x + k_2b_x + k_3c_x = 0 \\ k_1a_y + k_2b_y + k_3c_y = 0 \\ k_1a_z + k_2b_z + k_3c_z = 0 \end{cases}$$

这是一个关于未知量 k_1, k_2, k_3 的齐次线性方程组，它有非零解，故此线性方程组的系数行列式为零，从而有如下定理：

定理 2.1　三向量 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ，$\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ ，$\boldsymbol{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.7)$$

【例 2.2】　问 $A(1,0,1), B(4,4,6), C(2,2,3)$ 和 $D(10,14,17)$ 四点是否在同一

平面上?

解　可求得 $\overrightarrow{AB}=\{3,4,5\},\overrightarrow{AC}=\{1,2,2\},\overrightarrow{AD}=\{9,14,16\}$ ，判别 A,B,C,D 四点是否共面，即判别 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 是否共面.

由于 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix}=0$ ，根据定理 2.1 ，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 共面，从而 A,B,C,D 共面. ∎

2.3　向量的模，方向角

向量可以用它的模与方向来表示，也可以用它的坐标来表示，而且向量的这两种表示法之间有着密切的联系．事实上，向量的模与方向都可以用它的坐标来表示.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ ，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$ ，如图 2.7 所示，点 M 的坐标为 $M(a_x,a_y,a_z)$ ，因此向量 $\boldsymbol{a}$ 的模:

$$|\boldsymbol{a}|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad (2.8)$$

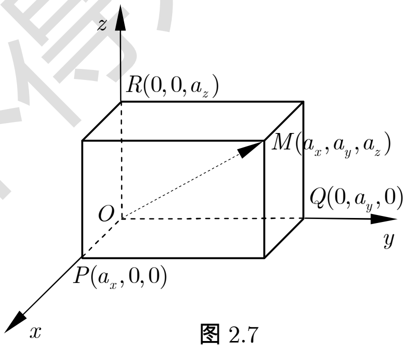


图 2.7

【例 2.3】 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$ ，求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$.

解　$\overrightarrow{AB}=\{7-4,1-0,3-5\}=\{3,1,-2\}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14} \ ,$$

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB}=\frac{\{3,1,-2\}}{\sqrt{14}}=\left\{\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right\}.$$ ∎

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角，即与标准单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角分别为 α,β,γ ，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角（ $0\le\alpha\le\pi,0\le\beta\le\pi,0\le\gamma\le\pi$ ），如图 2.8 所示，方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦．显然，向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角或方向余弦完全确定了 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ ，P,Q,R 分别为点 M 在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影点，则 P,Q,R 在 x 轴，y 轴，z 轴上的坐标分别为 a_x,a_y,a_z（图 2.8），又

$\left|\overrightarrow{OM}\right| = |\boldsymbol{a}|$，于是得

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \end{cases} \tag{2.9}$$

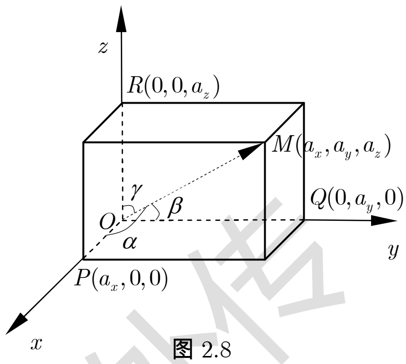


图 2.8

且满足关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.10}$$

由(2.8)，(2.9)式可知，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式给出后，即可确定它的模与方向角．

【例 2.4】　已知 $M_1(-2,2,-\sqrt{2})$，$M_2(-1,3,0)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模与方向角.

解　$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1-(-2), 3-2, 0-(-\sqrt{2})\} = \{1,1,\sqrt{2}\}$，

$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2} = 2$，

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}, \cos\beta = \dfrac{1}{2}, \cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角为 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}, \beta = \dfrac{\pi}{3}, \gamma = \dfrac{\pi}{4}$．∎

思考题：

4．当向量 $\boldsymbol{a}$ 的模与方向角已知时怎样确定向量的坐标?

2.4　向量的投影

设向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{ON}$，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \varphi$，过点 M 作平面垂直于 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线并交直线于点 M'（图 2.9），则称有向线段 $\overrightarrow{OM'}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 易知

$$\overrightarrow{OM'} = (\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\varphi)\boldsymbol{e_b} = (|\boldsymbol{a}|\cos\varphi)\boldsymbol{e_b}.$$

称上式中的数 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，并记作 $\mathrm{Prj}_{\,b}\boldsymbol{a}$．

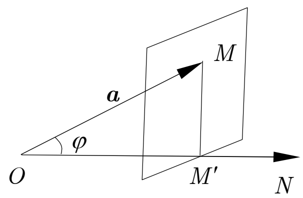


图 2.9

$$\mathrm{Prj}_{\,b}\boldsymbol{a}=\begin{cases}\left|\overrightarrow{OM'}\right|, & 0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2},\\ -\left|\overrightarrow{OM'}\right|, & \dfrac{\pi}{2}<\varphi\le\pi,\\ 0, & \varphi=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

如果向量$\boldsymbol{b}$位于数轴Ou上且Ou的正向与$\boldsymbol{b}$同向，则称向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影为向量$\boldsymbol{a}$在Ou轴上的投影，并记作$\mathrm{Prj}_{\,u}\boldsymbol{a}$．

由此定义可知，向量$\boldsymbol{a}$的坐标即为向量$\boldsymbol{a}$在三个坐标轴上的投影所组成的有序数组：

$$a_x=\mathrm{Prj}_{\,x}\boldsymbol{a},\ a_y=\mathrm{Prj}_{\,y}\boldsymbol{a},\ a_z=\mathrm{Prj}_{\,z}\boldsymbol{a}\ .$$

【例 2.5】 一向量的终点为$N(3,-2,6)$，它在x轴，y轴，z轴上的投影依此为$5,3,-4$，求这个向量的起点M的坐标．

解　设这个向量的起点的坐标为$M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{MN}=5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$$

但$\overrightarrow{MN}=(3-x)\boldsymbol{i}+(-2-y)\boldsymbol{j}+(6-z)\boldsymbol{k}$，故$3-x=5,-2-y=3,6-z=-4$，解得$x=-2,y=-5,z=10$．故点$M$的坐标为$M(-2,-5,10)$． ▋

习题 8 - 2

A 类

1．在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1,-2,3),B(2,3,-4),C(2,-3,-4),D(-2,-3,1)\ .$$

2．设长方体的各棱与坐标轴平行，已知长方体的两个顶点的坐标，试写出余下六个顶点的坐标：

(1) $(1,1,2)$，$(3,4,5)$；　　(2) $(4,3,0)$，$(1,6,-4)$．

3．证明：以点$A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形．

4．求点(a,b,c)关于

(1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点

的对称点的坐标.

5．过点$P(a,b,c)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标，进而求出点P到各坐标面和各坐标轴的距离.

6．已知两点$M_1(4,\sqrt{2},1)$和$M_2(3,0,2)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角．

7．已知向量 $\overrightarrow{OP}$ 与各坐标轴成相等的锐角，且 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=2\sqrt{3}$ ，求 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标．

8．设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ ，求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的投影向量．

B 类

1．已知点 $A(3,-1,2)$ ，$B(1,2,-4)$ ，$C(-1,1,2)$ ，试求点 D ，使得以 A,B,C,D 为顶点的四边形为平行四边形．

2．已知点 $A(1,1,1)$ ，$B(0,-1,-1)$ ，$C(-3,5,-6)$ ，且 AD 是 ΔABC 的顶角 A 的平分线，D 在 BC 边上，试求 D 的坐标.

3．设 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 $\alpha=\dfrac{\pi}{4},\beta=\dfrac{\pi}{3},$ 且 $|\boldsymbol{a}|=3$ ，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示.

4．设 $\boldsymbol{a}=\{-2,y,1\}$ ，$\boldsymbol{b}=\{x,-6,2\}$ ，问 x,y 为何值时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ ．

5．已知三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之中任意两个向量都不平行，但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{c}$ ，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ ，求证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ ．

6．设向量的方向余弦分别满足

$$(1)\quad \cos\gamma=0;\qquad (2)\quad \cos\alpha=1;\qquad (3)\ \cos\alpha=\cos\gamma=0,$$

问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

7．设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ ，试用单位向量 $\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,\boldsymbol{e}_c$ 表示向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ ．

第 3 节　向量的乘法运算

3.1　两向量的数量积

设物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 M_1 移到点 M_2 ，用 $\boldsymbol{r}$ 表示位移向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ ，力 $\boldsymbol{F}$ 在位移方向 $\boldsymbol{r}$ 上的分力大小为 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ ，则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为：

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\theta\ .$$

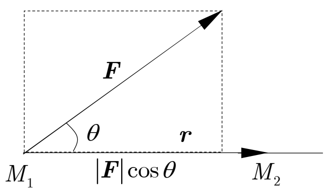


图 3.1

由此问题的物理背景出发，我们可以定义向量的一种乘法运算．

定义 3.1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两向量，且它们之间的夹角为 θ ，称数 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，并记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta \quad . \tag{3.1}$$

向量的数量积也称为（向量的）点积或（向量的）内积．

由此定义，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 实际上是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{r}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} \quad .$$

由于 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，故(3.1)可表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$

类似地, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ ．

这表明：若两向量至少有一非零向量, 则它们的数量积等于其中非零向量的模与另一向量在此非零向量上的投影的乘积．

思考题:

1．如何用 $\boldsymbol{e}_a$， $\boldsymbol{b}$ 表示 $\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$？

由数量积的定义出发可推得以下结论:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ ；

证　事实上，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角 $\theta=0$ ， 故

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2$$

若向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交(或垂直). 记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ；

证　当向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\boldsymbol{0}$ 时, 结论显然成立. 不妨设 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 均非 $\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=0 \text{（而}|\boldsymbol{a}|\neq 0, |\boldsymbol{b}|\neq 0\text{）}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta=0 \text{（又}\theta\in[0,\pi]\text{）}\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \quad .$$

(3)（交换律）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ ；

事实上，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ ．

(4)（分配律）$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ ；

证　作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}, \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 且 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影为 AM，$\boldsymbol{c}$ 在向量 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影为 MN（图 3. 2），则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot AM, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\cdot MN,$$

于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{a}|\cdot AM+|\boldsymbol{a}|\cdot MN=|\boldsymbol{a}|(AM+MN)\\&=|\boldsymbol{a}|\cdot AN=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad .\end{aligned}$$

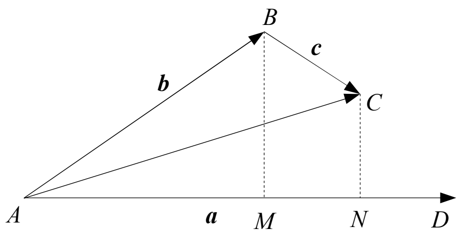


图 3.2

(5) (数乘向量的结合律) $(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda \boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})$.

证　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 θ ，

若 $\lambda>0$ ，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，故 $\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角仍为 θ ，于是

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=|\lambda \boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=(|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|)\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$$
$$=\lambda\cdot(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta)=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}),$$

若 $\lambda<0$ ，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向，故 $\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\pi-\theta$ ，于是

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=|\lambda \boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\theta)=(|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|)\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot(-\cos\theta)$$
$$=-\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot(-\cos\theta)=\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}),$$

若 $\lambda=0$ ， $(0\boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\cdot \boldsymbol{b}=0\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=0=0\cdot(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})$,

综上所述，有 $(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})$ 成立．

类似地可证明 $\boldsymbol{a}\cdot(\lambda \boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})$ ． ∎

思考题:

2．如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与任意向量都正交,则 $\boldsymbol{a}$ 是一个怎样的向量?

3．对于三个标准单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ ，其中任一向量与另外两者之一的数量积等于何值? 又，它与自身的数量积等于何值?

由数量积的性质不难推导出数量积的坐标表示式．设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ ，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ ，则

$$\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ . \tag{3.2}$$

事实上，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_x\boldsymbol{i}+(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_y\boldsymbol{j}+(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_z\boldsymbol{k}\\&=(a_xb_x)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+(a_yb_x)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+(a_zb_x)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+(a_xb_y)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})\\&\quad+(a_yb_y)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+(a_zb_y)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+(a_xb_z)(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+(a_yb_z)(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+(a_zb_z)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\\&=(a_xb_x)\cdot1+(a_yb_x)\cdot0+(a_zb_x)\cdot0+(a_xb_y)\cdot0+(a_yb_y)\cdot1+(a_zb_y)\cdot0\end{aligned}$$

$$+(a_x b_z)\cdot 0+(a_y b_z)\cdot 0+(a_z b_z)\cdot 1$$

$$=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z \ .$$

由数量积的定义，若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ ，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\quad(0\leq\theta\leq\pi) \tag{3.3}$$

若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ ，则

$$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \ . \tag{3.4}$$

显然，设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则结论(2)又可以表示为

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$.

【例 3.1】 已知三点 $M_1(1,1,1)$ ，$M_2(2,2,1)$ 和 $M_3(2,1,2)$ ，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 之间的夹角 θ .

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2-1,2-1,1-1\}=\{1,1,0\}$ ，

$\overrightarrow{M_1M_3}=\{2-1,1-1,2-1\}=\{1,0,1\}$ ，

而 $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1=1$ ，

$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$ ，$\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$

故 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|}=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$. ▉

【例 3.2】 设液体流过平面 π 上面积为 A 的一个区域，液体在该区域上各点处的流速均为常向量 $\boldsymbol{v}$ ，设 $\boldsymbol{e}_n$ 为垂直于 π 的单位向量，计算单位时间内经过该区域流向 $\boldsymbol{e}_n$ 所指向一侧的液体的质量 P （设液体的密度为常数 μ）.

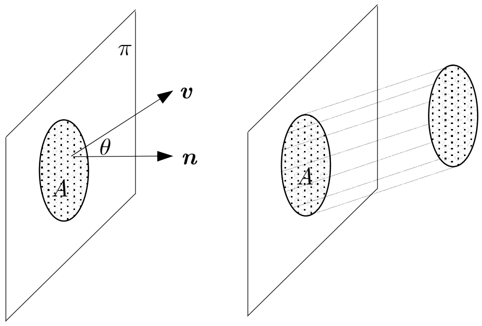


图 3.3

解　单位时间内流过区域的液体形成一个底面积为 A ,斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体，且斜高与底面垂线的夹角即为向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角 θ (图 3.3) . 所以，该斜柱体的高为 $|\boldsymbol{v}|\cdot\cos\theta$ ，即 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{e}_n$ 上的投影, 故斜柱体的体积为

$$V = A|\boldsymbol{v}|\cdot\cos\theta = A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n \ ,$$

从而，单位时间内经过区域流向所指一方的液体的质量为

$$P = \mu A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n \ .$$

显然，若 $\boldsymbol{v} /\!/ \boldsymbol{e}_n$ ，即 $\boldsymbol{v}$ 垂直于平面 π 时， $P = \mu\cdot A\cdot|\boldsymbol{v}|$. ∎

【例 3.3】　设 $a_i, b_i \in R(i=1,2,3)$, 证明不等式 (Cauchy-Schwarz 不等式) :

$$\left|\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{3} {a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{3} {b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

证　设向量 $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, 由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, 故

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$$

将 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的坐标代入上式即得所要证明的不等式 . 又, 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 平行, 则上式成为等式 . ∎

思考题:

4. 试用向量方法证明余弦定理并由此导出向量的数量积的坐标表示式.

3.2　两向量的向量积

如图 3.4 所示 ,设 O 为一根杠杆的支点 ,有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上的点 P 处， $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ ，由力学知识可知，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$ ，它的大小等于力的大小与支点到力线的距离之积, 即

$$|\boldsymbol{M}| = |OQ|\cdot|\boldsymbol{F}| = \left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot|\boldsymbol{F}|\cdot\sin\theta \ ,$$

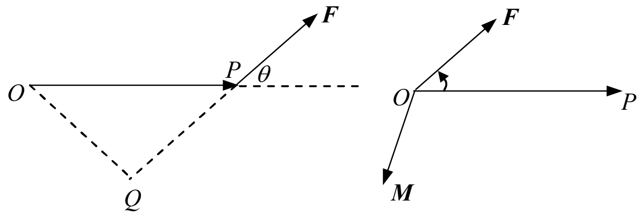


图 3.4

而 $\boldsymbol{M}$ 垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，而且 $\boldsymbol{M}$ 的方向依**右手规则**来决定: 当右手

的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的转角转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时，大拇指的指向就是力矩 $\boldsymbol{M}$ 的指向．

基于描述这类物理现象的需要，我们定义向量的另一种乘法运算．

定义 **3.2** 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积为一向量, 记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ，它的模与方向分别为

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ ，$(\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}))$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 满足右手规则，即右手的四个手指从 $\boldsymbol{a}$ 的正向以不超过 π 的转角转向 $\boldsymbol{b}$ 的正向握拳时，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向.

向量的向量积又常称作向量的叉积或外积．

根据向量积的定义，上面的力矩 $\boldsymbol{M}$ 就是 $\overrightarrow{OP}$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$ ．

不难看出, 两向量的向量积有如下的几何意义:

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\theta=|\boldsymbol{a}|\cdot(|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\theta)=S_{\square}$

即模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示以 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 为边的平行四边形的面积 $S_{\square}$ (图 3.5)．

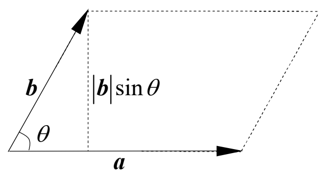


图 3.5

② $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向: 由定义知, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与一切既平行于 $\boldsymbol{a}$ 且平行于 $\boldsymbol{b}$ 的平面相垂直.

由定义, 容易推得, 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，有

$\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$；$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ；$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

此外, 还可以证明向量积满足如下运算律: 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 及任意实数 λ ，μ ，有

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ ； (分配律)

$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ ；

$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (数乘结合律)

利用向量积的定义, 我们还可得到两向量平行的另一个充分必要条件:

设两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ ，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ．

事实上，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量, 则命题显然成立. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均非零向量, 由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 等价于 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，即 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$，又 $|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0$，故上式等

价于 $\sin\theta=0$, 即 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$, 亦即 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

下面导出向量积的坐标表示式：

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ ，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_xb_x)(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+(a_xb_y)(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+(a_xb_z)(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+(a_yb_x)(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+(a_yb_y)(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+(a_yb_z)(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+(a_zb_x)(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+(a_zb_y)(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+(a_zb_z)(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

注意到，对于标准单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ ，有 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ ；$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$ ；$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$ ，于是，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=[(a_xb_y)\boldsymbol{k}-(a_xb_z)\boldsymbol{j}]+[-(a_yb_x)\boldsymbol{k}+(a_yb_z)\boldsymbol{i}]+[(a_zb_x)\boldsymbol{j}-(a_zb_y)\boldsymbol{i}]\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{3.5}$$

引入行列式记号, 即有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\left\{\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right\}\tag{3.6}$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\tag{3.7}$$

思考题：

5．试根据向量积的定义及坐标表示式导出两向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角公式.

6．试给出两向量平行的充分必要条件的坐标表示式,并与第 2 节中有关结论进行比较.

【例 3.4】　设 l 是空间中过点 $A(4,5,2)$ ，$B(6,3,3)$ 的直线, 点 $C(3,-4,4)$ 是空间一点，试求点 C 到直线 l 的距离 d .

解　作向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. 如图 3.6 所示，点 C 到直线 l 的距离 d 是以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 为邻边的平行四边形的高. 但因为 $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ 表示该平行四边形的面积, 因此

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

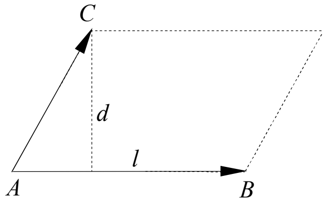


图 3.6

$\overrightarrow{AB}=\{2,-2,1\},\overrightarrow{AC}=\{-1,-9,2\}$ ，

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ ，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -9 & 2 \end{vmatrix}=\{5,-5,-20\},$$

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|5\{1,-1,-4\}\right|=5\sqrt{1^2+1^2+4^2}=15\sqrt{2}$ ，

故所求距离 $d=\dfrac{15\sqrt{2}}{3}=5\sqrt{2}$ ． ▮

【例 3.5】 设刚体以等角速度 ω 绕 l 轴旋转, 计算刚体上点 M 的线速度 $\boldsymbol{v}$.

解 刚体旋转时, 可用旋转轴 l 上的向量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示角速度, 它的大小 $|\boldsymbol{\omega}|=\omega$, 它的方向按右手法则定出: 以右手握住 l 轴, 当四指的转动方向与刚体的转向一致时, 竖起的大拇指的指向就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向(图 3.7)．

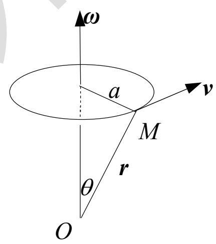


图 3.7

设点 M 到 l 轴的距离为 a, 任取 l 轴上一点记为 O, 并记 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$， 若用 θ 表示 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角, 则有 $a=|\boldsymbol{r}|\sin\theta$. 由物理学知识, 线速率 $|\boldsymbol{v}|$ 与角速率 $|\boldsymbol{\omega}|$ 有关系:

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}|a=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\theta \ ,$$

即

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}| \ ,$$

又注意到 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{r}$, 且 $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ 符合右手法则, 因此得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \ .$$

【例 3.6】 试用向量方法证明正弦定理: 设 ΔABC 的三边长分别为 a, b, c, 则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

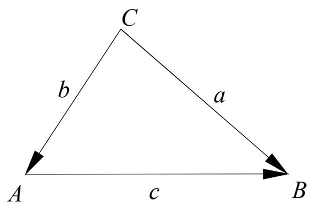


图 3.8

证 作 ΔABC 及向量 $\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}$ ，如图 3.8 所示，由

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

从而

$$\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CB}\right| ,$$

即

$$ab\sin C=cb\sin A=ca\sin B ,$$

故 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$. ∎

3.3　向量的混合积

设有三个向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ ，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$ 为一向量，因此 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}$ 是一数量, 于是我们可引入如下混合积的概念.

定义 3.3　设有三个向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ ，先作向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ，再作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ ，这样得到的数称为三向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ 或 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

现推导向量的混合积的坐标表示式 .

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ ，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ ，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$ ，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot c_z\\ &=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{3.8}$$

利用行列式的性质, 不难得到:

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]\tag{3.9}$$

向量的混合积的几何意义 . 对向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ ，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ ，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$ ，以 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ ，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 和 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 为棱作平行六面体（图 3.9), 则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是平行六面体的底面积, 又 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 所在的底面, 若以 ϕ 表示 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$

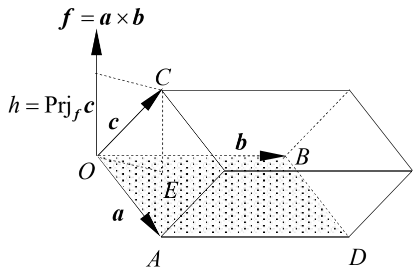


图 3.9

的夹角，则当 $0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{2}$ 时，该平行六面体的高 $h = |\boldsymbol{c}|\cos\phi$，于是 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\phi = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot h = V$，$V$ 表示平行六面体的体积．而当 $\dfrac{\pi}{2} < \phi \le \pi$ 时，$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\phi = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot(-h) = -V$.因此，$\left|[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\right|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积．

思考题：

7．试利用向量的混合积的几何意义给出三向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ 共面的一个充要条件．

【例 3.7】 求以点 $A(1,0,1), B(3,3,4), C(3,4,5), D(2,3,7)$ 为顶点的四面体 $ABCD$ 的体积.

解　由立体几何知识，四面体 $ABCD$ 的体积是以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 为相邻三棱的平行六面体体积的六分之一，由向量的混合积的几何意义, 即有

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]$$

由条件，易求得 $\overrightarrow{AB} = \{2,3,3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2,4,4\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1,3,6\}$，于是

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

故　$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\times 6 = 1$ ．　∎

【例 3.8】 证明二重向量积公式：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ ．

证　设 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ，$\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ ，$\boldsymbol{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ ，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{k},$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$= -(\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_z + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_y)\boldsymbol{i} - (\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_z - \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_x)\boldsymbol{j} + (\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_x)\boldsymbol{k}$$

若记 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \{x, y, z\}$，则

$$x=-(\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_z+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_y)=-a_x b_z c_z+a_z b_x c_z-a_x b_y c_y+a_y b_x c_y$$
$$=(a_x c_x+a_y c_y+a_z c_z)b_x-(b_x c_x+b_y c_y+b_z c_z)a_x$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_x-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_x,$$

类似地, 还可证明

$$y=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_y-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_y,\quad z=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_z-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_z,$$

故　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$. ∎

习题 8 - 3

A 类

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　(3) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$；　(4) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$；　(5) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

2. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, 求

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；　(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$；　(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；　(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$.

3. 已知 $A(1,-1,2)$ ，$B(5,-6,2)$ ，$C(1,3,-1)$ ，求：

(1) 同时与 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量；

(2) ΔABC 的面积；

(3) 从顶点 B 到边 AC 的高的长度 .

4. 判断下列向量是否垂直:

(1) $\boldsymbol{a}=\{2,4,-1\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{2,-1,0\}$；

(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$.

5. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$ ，试求 λ 的值，使得：

(1) $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直；

(2) $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，并证明此时 $|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 取得最小值 .

6. 证明平行四边形法则 $2\left(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2\right)=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ ，并说明这一法则的几何意义 .

7. 试证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

B 类

1. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=6$, 求 $|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=\{3,-1,2\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,2,-1\}$, 求

(1) $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

3. 已知四点 $A(2,1,0), B=(1,2,3), C(-1,5,6), D(3,-1,4)$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.

4. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ ，证明：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)$ ；

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

5. 试证明：

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$;

(2) $((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}))\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

6. 用向量法证明：

(1) 直径对的圆周角是直角；

(2) 三角形的三条高交于一点 .

第 4 节　平面

从本节起讨论空间的几何图形及其方程. 空间几何图形包括空间曲面与空间曲线. 空间几何图形一般是指空间中符合一定条件(点变动的规律)的点的轨迹, 在空间直角坐标系中，这个条件可由点的坐标 (x,y,z) 所满足的方程或方程组来表示. 如果曲面 Σ 与方程 $F(x,y,z)=0$ 之间满足如下关系:

(1) 若点 $M(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上, 则 (x,y,z) 满足方程 $F(x,y,z)=0$ ；

(2) 若一组数 x,y,z 满足方程 $F(x,y,z)=0$, 则点 $M(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上 .

则称 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 Σ 的方程， 曲面 Σ 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

平面是特殊的曲面, 空间直线是特殊的空间曲线. 在本节及下一节, 我们将以向量为工具, 在空间直角坐标系中讨论这两类简单而重要的几何图形.

4.1　平面的方程

1　平面的点法式方程

若一非零向量垂直于一平面，则称此向量是该平面的法向量, 记作 $\boldsymbol{n}$.

显然，平面上的任一向量都与此平面的法向量垂直 . 由于过空间一点可以作而且只能作一平面垂直于已知直线 .因此 ,当给定平面 π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 后，平面 π 的位置就确定了 .

由以上已知条件，设 $M(x,y,z)$ 是 π 上任一点，则 $\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$ ，因此有 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 由 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$, $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$, 故

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{4.1}$$

这表明：平面 π 上任一点 $M(x,y,z)$ 的坐标满足方程(4.1)．其中 A,B,C 不全为零．

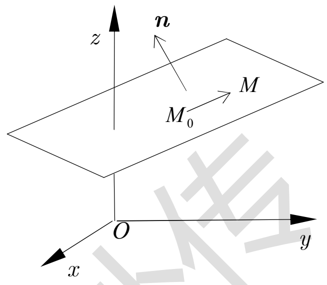


图 4.1

反之，若点 $M(x,y,z)$ 不在平面 π 上，向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 就不垂直于 $\boldsymbol{n}$ ，从而 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$ ，即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)\neq 0$ ，亦即：若点 $M(x,y,z)$ 不在平面 π 上, 则其坐标不适合方程(4.1)．

故方程(4.1)就是平面 π 的方程，而平面 π 便是方程(4.1)的图形．

由于方程 (4.1) 是由平面 π 上已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及它的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 确定的，因此，称方程(4.1)为平面的点法式方程．

【例 4.1】　若平面过点 $(2,-3,0)$, 且其法向量 $\boldsymbol{n}$ 的三个方向角相等, 求此平面的方程.

解　设法向量 $\boldsymbol{n}$ 的三个方向角为 α,β,γ , 由条件可得

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma \ ,$$

但注意到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \ ,$$

于是有

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \ ,$$

取 $\boldsymbol{n}=\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\}$, 由点法式方程(4.1), 所求平面的方程为

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)+\frac{\sqrt{3}}{3}(y+3)+\frac{\sqrt{3}}{3}(z-0)=0.$$

即　$x+y+z+1=0$.　∎

思考题:

1．对此题,能否取法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$ 来建立平面方程?一般地,一个平面有多少个法向量,不同的法向量之间有什么关系?

【例 4.2】　若平面过三点 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$, 求

此平面的方程.

解　先求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$, 因

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},\ \overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\},$$

则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_3}$. 于是

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\left\{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right\}$$

又点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是此平面上一定点, 由平面的点法式方程(4.1)可得

$$\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}(x-x_1)+\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}(y-y_1)$$
$$+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}(z-z_1)=0$$

或

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0. \tag{4.2}$$

(4.2)式也称为平面的三点式方程. ∎

思考题:

2．根据向量的混合积导出平面的三点式方程(4.2).

2　平面的一般方程

注意到，平面方程(4.1)是 x,y,z 的三元一次方程.反之，若有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0\ ,\ A,B,C\ \text{不全为零}\ . \tag{4.3}$$

任取满足该方程的一组数 x_0,y_0,z_0 ，即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\ , \tag{4.4}$$

两式相减就得到与(4.3)同解的方程:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

由此可见,方程(4.3)是过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以非零向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为法向量的平面方程，故三元一次方程(4.3)的图形是平面．称方程(4.3)为平面的一般方程. $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 是平面的法向量．

对于一些特殊的三元一次方程，所表示的平面具有明显的特点,如

(1) 当 $D=0$ 时，(4.3)式为 $Ax+By+Cz=0$ ，它表示通过原点的平面．

(2) 当 $A=0$ 时，(4.3)式为 $By+Cz+D=0$，其法向量为 $\boldsymbol{n}=\{0,B,C\}$，$\boldsymbol{n}$ 垂直于 x 轴，从而平面 $By+Cz+D=0$ 平行于 x 轴．

(3) 当 $A=B=0$ 时，(4.3)式为 $Cz+D=0$ 或 $z=-\dfrac{D}{C}$，法向量 $\boldsymbol{n}=\{0,0,C\}$ 同时垂直于 x 轴，y 轴，故 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 xOy 面，因此方程表示过点 $(0,0,-\dfrac{D}{C})$，且平行于 xOy 面的平面．

思考题:

3．在方程(4.3)中,若(1) $B=0$；(2) $C=0$；(3) $B=C=0$；(4) $A=C=0$，则方程(4.3)分别表示怎样的平面?画出这些平面的图形.

【例 4.3】 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程．

解　平面过 x 轴，则该平面的法向量垂直于 x 轴，且平面过原点，故设该平面的方程为

$$By+cz=0$$

由平面过点 $(4,-3,-1)$，有

$$-3B-C=0\ ，\ C=-3B$$

将此式代入所设方程有 $By-3Bz=0$，消去 B，得平面方程

$$y-3z=0\ .$$ ■

思考题:

4．试根据平面的点法式方程求例 4.3 的平面方程.

【例 4.4】 设平面与 x 轴，y 轴，z 轴分别交于三点 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$，求此平面的方程(其中：$abc\neq 0$)．

解　设所求的平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，将三点的坐标分别代入得

$$a\cdot A+D=0, b\cdot B+D=0, c\cdot C+D=0,$$

因为 $abc\neq 0$，故 $A=-\dfrac{D}{a}, B=-\dfrac{D}{b}, C=-\dfrac{D}{c}$ 有意义，代入所设方程有

$$-\frac{D}{a}\cdot x-\frac{D}{b}\cdot y-\frac{D}{c}\cdot z+D=0\ ,$$

这里 $D\neq 0$，两边同除以 D 有

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ . \tag{4.5}$$

方程(4.5)称之为平面的截距式方程，而 a, b, c 依次称为平面在 x, y, z 轴上的

截距．

思考题:

5．试根据平面的三点式方程导出平面的截距式方程.

4.2 点到平面的距离

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 π ：$Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，下面求点 P_0 到平面 π 的距离 d ．

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在平面 π 上的投影点.由条件，平面 π 的单位法向量 $\boldsymbol{e_n}=\dfrac{\{A,B,C\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ，故

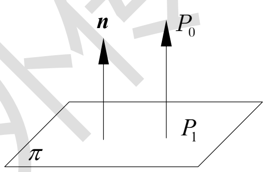


图 4.2

$$
\begin{aligned}
d&=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\cdot\left|\boldsymbol{e}_n\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{e}_n\right|\\
&=\left|\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}\cdot\frac{\{A,B,C\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\\
&=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|\\
&=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left|Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1\right|
\end{aligned}
$$

注意到 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在平面 π 上,有 $-Ax_1-By_1-Cz_1=D$,故

$$
d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.6}
$$

(4.6)为点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式.

例如点 $P_0(1,1,1)$ 到 P_0 到平面平面 $\pi:3x+2\sqrt{3}y+2z-2\sqrt{3}=0$ 的距离为

$$
d=\frac{\left|3+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{9+12+4}}=\frac{5}{\sqrt{25}}=1.
$$

思考题:

6．试根据例 3.3 所给出的柯西不等式导出点到平面的距离公式（4.6）式.

7．如何判别两点位于同一平面的同侧或异侧?

4.3 两平面的位置关系

1 两平面的相互位置

设空间两平面的方程分别为：$\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ，

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. 从几何上看, 其位置关系可能是平行、重合、相交等情形 . 首先 , 由于两平面平行相当于它们的法向量平行 , 于是由向量平行的充分必要条件立即可推得 :

平面 π_1, π_2 互相平行的充分必要条件是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \ . \tag{4.7}$$

特别地 , 易证明 : 两平面 π_1, π_2 重合的充分必要条件是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \ . \tag{4.8}$$

若平面 π_1, π_2 相交, 则其法向量 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 一定不平行 ; 反之亦然 . 故平面 π_1, π_2 相交的充要条件是法向量 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 的坐标不成比例, 即 $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2}$ 三者不全相等.

2　两平面间的夹角

两平面的法向量的夹角称作两平面的夹角(通常不取钝角).

设平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 则 π_1 与 π_2 的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, 由于两平面的夹角 θ 是 $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角且不取钝角 (图 4.3) , 故得

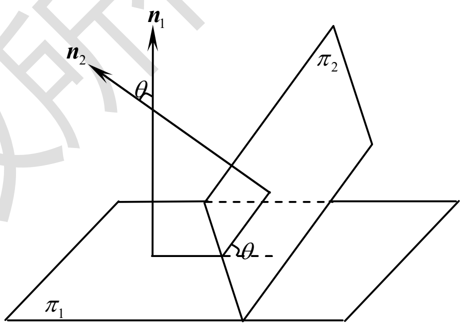


图 4.3

$$\cos\theta = \left|\frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}\right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \ . \tag{4.9}$$

由公式(4.9)或者由两向量垂直的充分必要条件 , 都可立即得到如下结论 :

两平面 π_1, π_2 垂直的充分必要条件是

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \ . \tag{4.10}$$

【例 4.5】 平面过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程．

解　设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$．显然，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,0,-2\}$ 在所求平面上，故

$$\overrightarrow{M_1M_2}\perp\boldsymbol{n} \ , \ \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{n}=0 \ ,$$

即

$$-A-2C=0 \ .$$

又 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面 $x+y+z=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}'=\{1,1,1\}$，故有

$$A+B+C=0 \ .$$

故 $A=-2C, B=C$．

由点法式方程有

$$-2C(x-1)+C(y-1)+C(z-1)=0 \ ,$$

消去 C 得

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0 \ ,$$

故所求方程为 $2x-y-z=0$． ▮

思考题:

8．试给出建立例 4.5 中平面方程的其它解法.

习题 8 - 4

A 类

1．是否存在满足下列条件的平面？如果存在的话，是否唯一？

(1) 过一已知点且与一已知直线平行；　(2) 过一已知点且与一已知直线垂直；

(3) 过一已知点且与一已知平面平行；　(4) 过一已知点且与一已知平面垂直；

(5) 过两已知点且与一已知直线平行；　(6) 过两已知点且与一已知直线垂直；

(7) 过两已知点且与一已知平面平行；　(8) 过两已知点且与一已知平面垂直.

2．指出下列平面位置的特点并作图:

(1) $x+y+z=0$；　(2) $x+y+z=1$；　(3) $x+y=0$；

(4) $x+y=1$；　(5) $x=0$；　(6) $3x=1$．

3．求满足下列条件的平面方程：

(1) 过点 $(2,9,-6)$ 且与向径 $\overrightarrow{OA}$ 垂直；

(2) 过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行；

(3) 过点 $(1,0,-1)$ 且同时平行于向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ ；

(4) 过点 $(1,1,1)$ 和点 $(0,1,-1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 相垂直;

(5) 过点 $(1,1,1)$ 且与平面 $x-y+z=7$ 与 $3x+2y-12z+5=0$ 相垂直;

(6) 过点 $(1,1,-1)$ ，$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$；

(7) 过点 $(-3,1,-2)$ 和 x 轴;

(8) 过点 $(4,0,-2)$ ，$(5,1,7)$ 且平行于 x 轴;

(9) 与坐标轴的截距相同且过点 $(6,2,-4)$；

(10) 平面 $x-2y+2z+21=0$ 与平面 $7x+24z-5=0$ 之间的两面角的平分面．

4．求平面 $2x-y+2z+3=0$ 与各坐标面的夹角的方向余弦.

5．判别下列各组平面的相互关系:

(1) $2x-3y+5z-7=0$ 与 $2x-3y+5z-1=0$ ；

(2) $2x-3y+5z-7=0$ 与 $4x-6y+10z-14=0$ ；

(3) $2x-5y+z=0$ 与 $x-2z+3=0$ ；

(4) $2x+5y-2z+2=0$ 与 $x-3z+1=0$.

6．求两平面 $2x-y+z-6=0$ 与 $4x-2y+2z+7=0$ 之间的距离.

B 类

1．判别点 $(2,-1,1)$ 与原点是在平面 $5x+3y+z-18=0$ 的同侧还是异侧.

2．在平面 $x+y+z-1=0$ 与三个坐标面所围成的四面体内求一点, 使它到四面体的四个面的距离相等.

3．在 y 轴上求一点, 使它到平面 $x+2y-2z-2=0$ 的距离为 4.

4．若平面 π 到两平行平面 $\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ ；$\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$ 的距离相等, 求它的方程．

第 5 节　空间直线

本节首先建立空间直线的几种形式的方程，然后讨论空间两直线之间，空间直线与平面之间的位置关系，最后讨论过直线 L 的平面束．

5.1 空间直线的方程

1 空间直线的对称式方程和参数方程

若一非零向量平行于一条已知直线，这个向量就称为该直线的方向向量，将其记为 s. 显然，已知直线上的任何非零向量均可作为此直线的方向向量．

由于过空间一点可以而且只能作一条直线平行于一已知直线，因此，当直线 L 上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$ 给定之后，空间直线 L 的位置就完全确定下来了．因此若点 $M(x, y, z)$ 在直线 L 上，则 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{s}$ ．而 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ ，由两向量平行的充分必要条件有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

反之，如果点 M 不在直线 L 上，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 不平行，从而上式不成立．

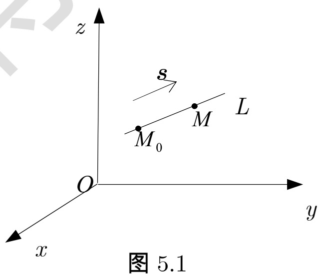


图 5.1

因此，过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$ 为方向向量的直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{5.1}$$

称方程组(5.1)为直线的对称式方程或点向式方程或标准方程．

直线的任一方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$ 的坐标 m, n, p 叫做该直线的一组方向数．对方程组(5.1)，若方向数 m, n, p 中有某个数为零，如 $m=0$ ，则(5.1)理解为：$\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$. 若方向数 m, n, p 中有两个数为零，如 $m=n=0$ ，则(5.1)理解为：$\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}$.

设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$ ，则可得过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$ 为方向向量的直线 L 的参数方程:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}, \ t \in \boldsymbol{R} \ . \tag{5.2}$$

【例 5.1】　求过点 $(1,1,-2)$ 且与平面 $x-3y-4z+1=0$ 垂直的直线方程.

解　由于所求直线与平面 $x-3y-4z+1=0$ 垂直，故可取此平面的法向量为直线的方向向量，即取 $\boldsymbol{s}=\{1,-3,-4\}$，由公式(5.1)及公式(5.2)得直线的对称式方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{-4}$$

及直线的参数方程

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-3t \\ z = -2-4t \end{cases}.$$

∎

思考题:

1．利用公式(5.1)或公式(5.2)求直线 L 的方程时，关键是要求得哪个量?

2．若直线 L 过两已知点 $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$，求直线 L 的方程.

2　空间直线的一般方程

空间直线 L 可看成两平面 π_1 和 π_2 的交线．事实上，若两个相交的平面 π_1 和 π_2 分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则它们的交线 L 上的任一点的坐标 (x,y,z) 必然同时满足 π_1 和 π_2 的方程. 反之，如果点 (x,y,z) 不在直线 L 上，那么它不可能同时在平面 π_1 和 π_2 上，所以它的坐标不能同时满足 π_1 和 π_2 的方程，由此得直线 L 的方程(空间直线的一般方程)：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \quad \left(\text{其中} \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \text{不成立}\right) \tag{5.3}$$

一般地说，过空间一直线的平面有无限多个，所以只要在这无限多个平面中任选其中的两个，将它们的方程联立起来，就可得到此空间直线的方程．

思考题:

3．直线的对称式方程(5.1)能否视为直线的一般方程(5.3)? 特别地，对称式方程(5.1)中若 m,n,p 中有一个或两个为零时，能否也视为直线的一般方程，这时直线具有怎样的特点?

【例 5.2】 用对称式方程及其参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解 先找出这直线上的一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ，如：取 $x_0=1$ 代入方程组解得 $y_0=0, z_0=-2$ ，从而得到直线上的一点 $(1, 0, -2)$ ．

再求该直线的一个方向向量 $\boldsymbol{s}$. 作为两平面的交线 L ，它与两平面的法向量

$$\boldsymbol{n}_1=\{1,1,1\}, \boldsymbol{n}_2=\{2, -1, 3\}$$

都垂直，可取 L 的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{k}$$

$$=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

因此，所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3} ,$$

直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

思考题:

4．证明:若直线 L 由方程(5.3)给出，则 L 的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$$

【例 5.3】 求过点 $(2,-5,3)$ 且与平面 $\pi_1: 2x-y+z-1=0$ 及 $\pi_2: x+y-z-2=0$ 平行的直线方程.

解 1 由于直线与平面 π_1 及 π_2 平行，故直线与平面 π_1 及 π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 都垂直，因

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k} ,$$

取直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{0,1,1\}$ ．因此，所求直线方程为

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{1} \ .$$

解 2　由于直线与平面 π_1 及 π_2 平行，故必平行于 π_1 及 π_2 的交线

$$\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z-2=0\end{cases}.$$

在这条直线上取两点 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ ，如令 $y_1=0$ ，得

$$\begin{cases}2x+z-1=0\\x-z-2=0\end{cases},$$

解得 $x_1=1,z_1=-1$ ，即 $M_1(x_1,y_1,z_1)=M_1(1,0,-1)$ ，类似地，求得 $M_2(x_2,y_2,z_2)=(1,1,0)$ ，于是可取直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{0,1,1\}$ ，从而也可得直线方程(如解法 1 所求).

解 3　过点 $(2,-5,3)$ 且平行于平面 π_1 的平面方程为

$$\pi_3:\ 2(x-2)-(y+5)+(z-3)=0$$

即　$2x-y+z-12=0$ ．

过点 $(2,-5,3)$ 且平行于平面 π_2 的平面方程为

$$\pi_4:(x-2)+(y+5)-(z-3)=0 \ ,$$

即　$x+y-z+6=0$ ．

由于所求直线既在平面 π_3 又在平面 π_4 上，故其方程为

$$\begin{cases}2x-y+z-12=0\\x+y-z+6=0\end{cases}. \qquad \blacksquare$$

【例 5.4】　求直线 L ：

$$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$$

在平面 $\pi:x+y+z=0$ 上的投影直线 L' 的方程．

解　过直线 L 作平面 π_1 垂直于平面 π ，π_1 与 π 的交线即所求投影直线 L' ，如图 5.2 所示 ,由条件 ,平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$. 设平面 π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1$ ，则 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}$. 设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$ ，由于直线 L 在平面 π_1 上，$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{s}$.

由 $s=\left\{\begin{vmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}\right\}=\{0,-2,-2\}$ ，

故

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\0 & -2 & -2\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\ ,$$

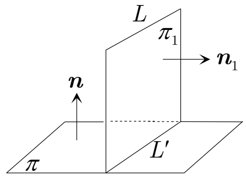


图 5.2

又，可在直线 L 上求得一点 $M_0(0,1,0)$ ，从而得

$$\pi_1: 0x-2(y-1)+2z=0\ ，即\ y-z-1=0$$

故所求直线 L' 的方程为

$$\begin{cases}y-z-1=0\\x+y+z=0\end{cases}.$$

【例 5.5】 求过点 $P(1,1,1)$ 且与直线 $L_1: x+1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线 L 的方程.

解 1 首先过点 $(1,1,1)$ 作一平面 π_1 垂直于已知直线 L_1 ，为此取 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\{1,2,-1\}$ 作为 π_1 的法向量，得 π_1 的点法式方程

$$(x-1)+2(y-1)-(z-1)=0\ ,$$

即

$$x+2y-z-2=0\ .$$

$L_1: x+1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的参数方程为

$$L_1:\begin{cases}x=-1+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases},$$

将其代入 π_1 的方程，可解得 $t=\dfrac{1}{6}$ ，从而 L_1 与 π_1 的交点为 $N(-\dfrac{5}{6},\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{6})$ ，故直线 L 的方向向量 $\overrightarrow{NP}=\{\dfrac{11}{6},-\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{6}\}$ ，或 $\boldsymbol{s}=\{11,-2,7\}$ ，故直线 L 的方程为

$$L:\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}.$$

解 2 设所求直线 L 的方程为

$$L:\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p}\ ,$$

其方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$. 由条件，L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\{1,2,-1\}$，且 $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}$，可得

$$m+2n-p=0$$

因点 $Q(-1,1,0)$ 在 L_1 上，$\overrightarrow{PQ}=\{-2,0,-1\}$，由于直线 L 与 L_1 相交，故三向量 $\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}$ 共面，从而有

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0\ ,$$

即 $2m-3n-4p=0$，由 $\begin{cases} m+2n-p=0 \\ 2m-3n-4p=0 \end{cases}$，解得 $m=-\dfrac{11}{2}n, p=-\dfrac{7}{2}n,$ 取 $\boldsymbol{s}=\{11,-2,7\}$，故所求直线 L 的方程为

$$L:\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}.$$

解 3　过点 $(1,1,1)$ 可作一平面 π_1 垂直于已知直线 L_1. 由解法 1 已求得，$\pi_1:x+2y-z-2=0$.

又因已知直线 $L_1:x+1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 与点 $P(1,1,1)$ 可确定平面 π_2，故所求直线 L 就是 π_1 与 π_2 的交线. 设 π_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2$. 由条件，L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\{1,2,-1\}$. 则 $\boldsymbol{n}_2\perp\boldsymbol{s}_1$，但由于 $Q(-1,1,0)$ 在 L_1 上，则 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{PQ}$，故取 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{s}_1$，即

$$\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}\ ,$$

因此，π_2 的方程为

$$2(x-1)-3(y-1)-4(z-1)=0$$

即 $\pi_2:2x-3y-4z+5=0$，故所求直线 L 的方程为

$$\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 2x-3y-4z+5=0 \end{cases}.$$

∎

5.2 直线与直线、直线与平面的位置关系

1 直线与直线的位置关系

空间两直线的相关位置可以分为几种情形：共面(其中又可分为相交、平行、重合等几种情形)和不共面(异面).我们可利用向量来研究两直线的位置关系.设两直线的方程为

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ ,\quad L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\ ,$$

其中 L_1 过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$；$L_2$ 过点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，方向向量 $\boldsymbol{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$.若三向量 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 共面，则 L_1，L_2 也共面;反之，若 L_1，L_2 共面，则 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 必共面.

于是，由三向量共面的充分必要条件可得：

两直线 L_1，L_2 共面的充分必要条件是: $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$

两直线 L_1，L_2 异面的充分必要条件是: $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$

当 L_1，L_2 共面时，若 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 不平行，则 L_1 与 L_2 相交，故两直线 L_1，L_2 相交的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0,\text{且}\ \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\ \text{不成立。}$$

若 $\boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2$，但 $\overrightarrow{M_1M_2} \not\parallel \boldsymbol{s}_1$，故 L_1 与 L_2 平行而不重合；若 $\boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 /\!/ \overrightarrow{M_1M_2}$，则 L_1 与 L_2 重合．因此，由两向量平行的充分必要条件可得：

两直线 L_1，L_2 平行的充要条件是

$$m_1:n_1:p_1=m_2:n_2:p_2\neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$

两直线 L_1，L_2 重合的充要条件是

$$m_1:n_1:p_1=m_2:n_2:p_2=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$

空间两直线 L_1,L_2 无论是相交、平行或异面，它们之间的夹角都可用它们的方向向量的夹角（通常不取钝角）表示．故两直线 L_1，L_2 的夹角 φ 由公式

$$\cos\varphi=\left|\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}\right|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{5.4}$$

给出.

由两向量垂直的充分必要条件可得：

两直线 L_1 ，L_2 垂直的充分必要条件是 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

【例 5.6】　已知两直线

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}\ ,\ L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}\ .$$

(1) 证明 L_1 ，L_2 相交并求 L_1 ，L_2 的交点；

(2) 求 L_1 ，L_2 的夹角：

(3) 求 L_1 ，L_2 所确定的平面的方程 .

解　(1) 由条件，L_1 ，L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{1,1,-1\}$ ，$\boldsymbol{s}_2=\{1,-1,1\}$.

L_1 过点 $M_1(1,-1,1)$ ，L_2 过点 $M_2(1,1,-1)$ ，作向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{0,2,-2\}$ ，由于 $\begin{vmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$ 且 $1:1:(-1)\neq 1:(-1):1$,故 L_1，L_2 相交 .其参数方程分别为：

$$L_1:\begin{cases}x=1+t_1\\ y=-1+t_1\\ z=1-t_1\end{cases}\ ,\ L_2:\begin{cases}x=1+t_2\\ y=1-t_2\\ z=-1+t_2\end{cases}\ .$$

由于 L_1 ，L_2 相交，所以其交点坐标必然同时满足以上两个方程组，即有

$$\begin{cases}1+t_1=1+t_2\\ -1+t_1=1-t_2\\ 1-t_1=-1+t_2\end{cases}$$

解得 $t_1=1,t_2=1$ ，从而求得 L_1，L_2 的交点为 $M_0(2,0,0)$.

(2) 设 L_1 ，L_2 的夹角为 φ ，则有

$$\cos\varphi=\frac{|1\times1+1\times(-1)+(-1)\times1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{3}\ ,\ \varphi=\arccos\frac{1}{3}\ .$$

(3) 由于 L_1 ，L_2 相交，故 L_1 ，L_2 确定平面 π . 设 π 上任意一点 $M(x,y,z)$ ，则三向量 $\overrightarrow{MM_1}=\{x-1,y+1,z-1\}$ ，$\boldsymbol{s}_1=\{1,1,-1\}$ ，$\boldsymbol{s}_2=\{1,-1,1\}$ 共面，故由

L_1 ，L_2 确定的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

化简得 $y+z=0$. ∎

2 直线与平面的位置关系

直线与平面的位置关系有几种情形：直线在平面上、直线与平面平行、直线与平面相交. 我们仍可利用向量来研究这些关系.

设直线 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$,则 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ ，平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$. 若直线与平面相交，则 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不垂直即 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$ ，反之亦然. 因此，有

(1) 直线 L 与平面 π 相交的充分必要条件是 $Am+Bn+Cp\neq 0$.

作为直线 L 与平面 π 相交的特殊情形，有

(2) 直线 L 与平面 π 垂直的充分必要条件是 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

类似地讨论，可得下述结论：

(3) 直线 L 与平面 π 平行(包含直线 L 在平面 π 上时情形)的充分必要条件是 $Am+Bn+Cp=0$.

(4) 直线 L 在平面 π 上的充分必要条件是 $Am+Bn+Cp=0$ 及 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

如图 5.3 所示，当直线 L 与平面 π 不垂直时，直线 L 与它在平面 π 上的投影直线 L' 的夹角 φ（$0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）,称为直线 L 与平面 π 的夹角. 当直线 L 与平面 π 垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

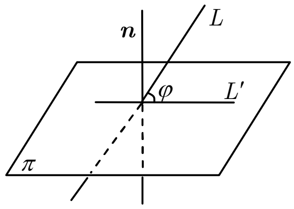


图 5.3

L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ ，平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ ，则 $\varphi=\left|\dfrac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})\right|$ ，于是有

$$\sin\varphi=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})\right| \ ,$$

这样，就由两向量的夹角公式得到直线与平面的夹角公式

$$\sin\varphi=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}\right|=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,. \tag{5.5}$$

【例 5.7】　已知直线 $L:\begin{cases}x-2z-1=0\\ y+2z+5=0\end{cases}$ 与平面 $\pi: x+z+5=0$ ，

(1) 试问 L 与 π 是否相交?

(2) 若 L 与 π 相交，试求 L 与 π 的交点与交角.

解　(1) 由条件，直线 L 的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\left\{\begin{vmatrix}0&-2\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right\}=\{2,-2,1\}\ ,$$

平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,0,1\}$ ，由于

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+(-2)\times0+1\times1=3\neq0\ ,$$

故 L 与 π 相交.

(2) 联立直线的两方程和平面的一方程，得三元一次方程组，解得 $x=-3, y=-1, z=-2$ ，故 L 与 π 的交点为 $M_0(-3,-1,-2)$.

也可将直线 L 写成参数方程形式代入平面方程，解得参数的值，从而得交点坐标.

由公式(5.5)，有

$$\sin\varphi=\frac{|2\times1+(-2)\times0+1\times1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

故 L 与 π 的交角为 $\dfrac{\pi}{4}$.　■

5.3　过直线的平面束

设直线 L 由方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (5.6)\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (5.7)\end{cases}$$

所确定，其中系数 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例 .

作含有参数 λ 的三元一次方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0\ . \tag{5.8}$$

因 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例，对于任何一个 λ 值，方程(5.8)的系数 $A_1+\lambda A_2,B_1+\lambda B_2,C_1+\lambda C_2$ 不全为零，从而(5.8)表示一个平面．若一点在直线 L 上，则该点的坐标必同时满足方程(5.6)和(5.7)，因此，必满足(5.8)，即方程(5.8)表示过直线的一个平面，而且对于不同的 λ 值，方程(5.8)表示过直线 L 的不同平面．反之，过直线 L 的任何平面(除平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 外)，都包含在方程(5.8)所表示的一族平面内．

通过定直线的所有平面的全体称为平面束，称(5.8)式为过定直线 L 的平面束方程．

对于某些平面或直线问题，用平面束方法比较简便.

【**例 5.8**】　用平面束方法求解例 5.4.

解　欲求直线 L：

$$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$$

在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线 L' 的方程.

直线 L 在平面 π 上的投影直线，也应在过 L 且垂直于平面 π 的平面上（图 5.4），而过直线 L 的平面束方程为

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0 \text{ ，}$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0 \text{ ，}$$

其中 λ 为任意常数．

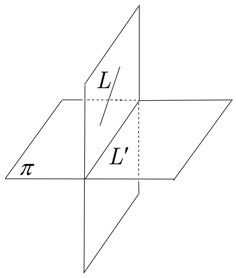


图 5.4

使它与平面 π 相垂直条件为

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0 \text{ ，}$$

从而有 $\lambda=-1$，故过直线 L 且垂直于平面 π 的平面为

$$2y-2z-2=0 \text{ ，}$$

即 $y-z-1=0$，从而投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} .$$

∎

习题 8 - 5

A 类

1．写出下列直线的对称式方程及参数方程：

(1) $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+5z+3=0, \\ x-3y+z+2=0 \end{cases}$

2．求满足下列条件的直线方程:

(1) 过两点 $(1,2,3)$ ，$(0,2,-1)$；

(2) 过点 $(2,3,4)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{3}$；

(3) 过点 $(0,2,4)$ 且同时平行于平面 $x+2z=1$ 与 $y-3z=2$；

(4) 过点 $(2,-3,1)$ 且垂直于平面 $2x+3y+z+1=0$；

(5) 过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ 垂直相交;

3．求下列投影点的坐标：

(1) 点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点；

(2) $(2,3,1)$ 在直线 $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ 上的投影点．

4．求下列投影直线的方程：

(1) 直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影直线；

(2) 直线 $\begin{cases} 4x-y+3z-1=0 \\ x+5y-z+2=0 \end{cases}$ 在平面 $2x-y+5z-3=0$ 上的投影直线．

5．问两直线

$$L_1: \frac{x-4}{-2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-3} \text{ 与 } L_2: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{3}$$

是否相交?如相交，试求它们的交点.

6．求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 之间的夹角．

7．求直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ 与平面 $x-y+2z=3$ 之间的夹角．

8．设 M_0 是直线 L 外的一点，M 是直线 L 上的任意一点，且直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，

证明：点 M_0 到直线 L 的距离为 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}\right|}{|\boldsymbol{s}|}$，由此计算：

(1) 点 $M_0(3,-4,4)$ 到直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 的距离；

(2) 点 $M_0(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

9 .证明:两直线 $l_1:\begin{cases}2x-y-3=0\\2x-z-2=0\end{cases}$ 和 $l_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$ 平行 ,并求它们之间的距离.

B 类

1．设直线 L_1 在过三点 $P_0(0,0,0),P_1(2,2,0),P_2(0,1,-2)$ 的平面上，且与直线 L_2: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=2z$ 垂直相交，求直线 L_1 的方程.

2．过点 $A(-3,5,-9)$ 且和两直线： $L_1:\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases}$, L_2: $\begin{cases}y=4x-7\\z=5x+10\end{cases}$ 相交的直线方程.

3．求点 $(3,-1,-1)$ 关于平面 $6x+2y-9z+96=0$ 的对称点的坐标．

4．已知入射光线的路径为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ ，求该光线经平面 $x+2y+5z+17=0$ 反射后的反射光线方程.

5．证明直线 $L_1:x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 与 $L_2:x-1=y+1=z-2$ 是异面直线，并求 L_1 与 L_2 间的距离 d 及 L_1 与 L_2 的公垂线 L 的方程.

第 6 节　空间曲面

研究空间曲面有两个基本问题:

(1) 已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程．

(2) 已知点的坐标所满足的关系式，研究曲面形状．

先讨论柱面与旋转曲面. 由于它们具有明显的几何特征，因此我们将基于基本问题 (1) 来研究这两类曲面，也就是从图形出发来建立方程，而作为基本问题 (2) 的例子，将在第 8 节讨论．

6.1　柱面

先讨论一个方程及其图形:

【例 6.1】　方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面?

解　$x^2+y^2=R^2$ 在平面直角坐标系中表示圆心在原点，半径为 R 的圆．

在空间直角坐标系中，该方程不含变量 z ，即不论 z 取何值，只要横坐标 x 和纵坐标 y 适合方程的空间点 $M(x,y,z)$ 均在该曲面上．也就是说，过圆 $x^2+y^2=R^2$ 上的点且平行于 z 轴的直线都在该曲面上．故曲面是由平行于 z 轴

的直线沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的．

这一曲面称作圆柱面（图 6.1）．xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 称之为准线，那些平行于 z 轴且过准线的直线叫做母线．

一般地，我们称平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的曲面为柱面，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线（图 6.2）.

图 6.3 所示，设柱面 Σ 的母线平行于 z 轴，准线 C 是 xOy 平面上的曲线，其方程为 $F(x,y)=0$．在空间直角坐标系中，由于该方程不含竖坐标 z，因此若点 $M(x,y,z)$ 的横、纵坐标 x,y 满足 $F(x,y)=0$，则点 $M_1(x,y,0)$ 在 Σ 的准线 C 上，从而点 $M(x,y,z)$ 在过点 $M_1(x,y,0)$ 的母线 L 上，故点 $M(x,y,z)$ 在柱面 Σ 上；反之，若点 $M(x,y,z)$ 在柱面Σ上，M 的投影点 $M_1(x,y,0)$ 在Σ的准线 C 上，从而 M 点的横、纵坐标 x,y 满足 $F(x,y)=0$．故柱面 Σ 的方程为

$$F(x,y)=0. \tag{6.1}$$

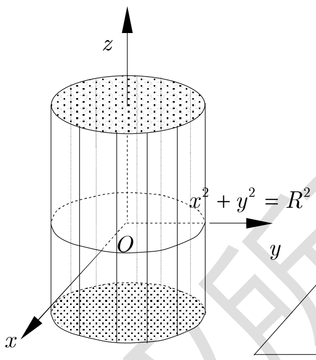


图 6.1

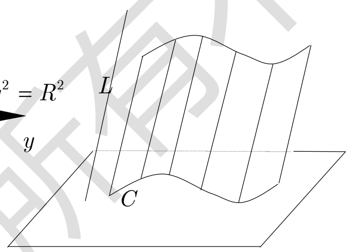


图 6.2

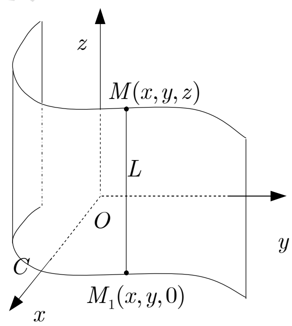


图 6.3

一般地，只含 x,y 不含 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，准线 C 是 xOy 平面上的曲线：$\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$.

类似地，只含 x,z 不含 y 的方程与 $G(x,z)=0$ 与只含 y,z 不含 x 的方程 $H(y,z)=0$，分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面（图 6. 4）.

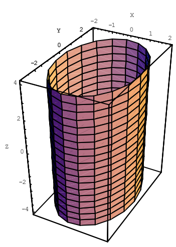


图 6.4

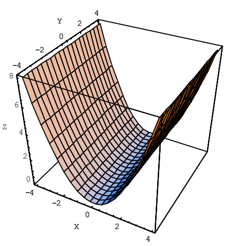


图 6.5

$x^2 = 2pz$ 表示母线平行于 y 轴的抛物柱面（图 6.5）.

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于 z 轴的双曲柱面（图 6.6）.

思考题:

1.平面 $y + z = 1$ 能看成柱面吗?如果能够，可以看成是怎样的一个柱面?

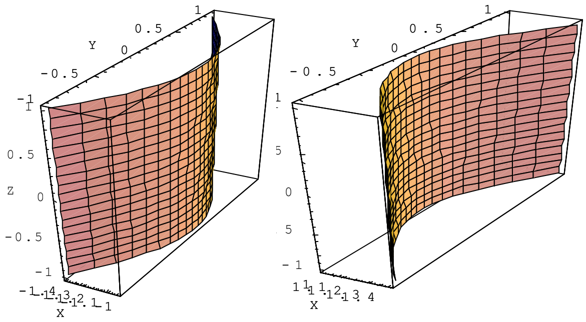


图 6.6

【例 6.2】 设柱面 Σ 的准线方程为 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$，母线的方向向量 $\boldsymbol{s} = \{-1, 0, 1\}$，求此柱面 Σ 的方程.

解 设柱面 Σ 任一点 $M(x, y, z)$，过点 M 的母线与准线交于点 $P(x_0, y_0, z_0)$，则柱面 Σ 的母线方程可表示为

$$\frac{x - x_0}{-1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{1}, \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_0 = x + t \\ y_0 = y \\ z_0 = z - t \end{cases}$$

将其代入准线方程，有

$$\begin{cases} (x + t)^2 + y^2 + (z - t)^2 = 1 \\ 2(x + t)^2 + 2y^2 + (z - t)^2 = 2 \end{cases},$$

消去 t，得柱面 Σ 的方程为

$$(x+z)^2+y^2=1.$$

■

6.2　旋转曲面

平面上的曲线 C 绕该平面上一条定直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，定直线 l 叫做旋转曲面的轴，C 称为母线．

设 yOz 平面上已知曲线 C，其方程为 $f(y,z)=0$，将 C 绕 z 轴旋转一周，得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面 Σ，现求 Σ 的方程.

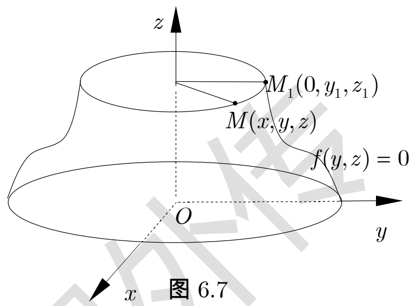


图 6.7

如图 6.7 所示，在 Σ 上任取一点 $M(x,y,z)$，则点 $M(x,y,z)$ 必位于由 C 上一点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转一周而得的圆周上，因此 $z_1=z$ 且 $M(x,y,z)$ 与 $M_1(0,y_1,z_1)$ 到 z 轴的距离相等，即有

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

但 $M_1(0,y_1,z_1)$ 的坐标满足 $f(y_1,z_1)=0$，于是得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{6.2}$$

另一方面，若 $M(x,y,z)$ 不在此曲面 Σ 上，则其坐标不满足(6.2)式，故(6.2)就是旋转曲面 Σ 的方程．

一般地，若在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 改写成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 而 z 保持不变，就得到曲线 C 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$．若在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 z 改写成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 而 y 保持不变，就得到曲线 C 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面的方程 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$．

思考题:

2.试写出其他两个坐标面上的定曲线分别绕相应的坐标轴旋转而成的旋转曲面的方程.

【例 6.3】　(1) yOz 平面上的抛物线 $\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面的方程是 $x^2+y^2=2pz$，

此曲面叫做旋转抛物面（图 6.8）.

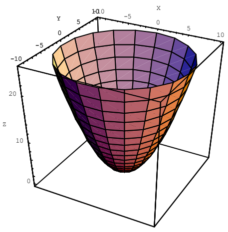


图 6.8

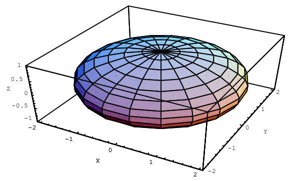


图 6.9

(2) yOz 平面上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴旋转而成的曲面的方程是

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{b^2}=1,$$

此曲面叫做旋转椭球面（图6.9）.

(3) zOx 平面上的双曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴和 x 轴旋转而成的曲面的方程分别是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \text{ 与 } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,$$

两曲面分别称为单叶旋转双曲面（图 6.10）与双叶旋转双曲面（图 6.11）. ▮

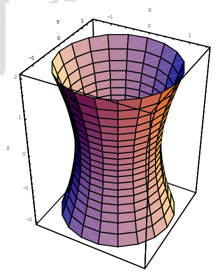


图 6.10

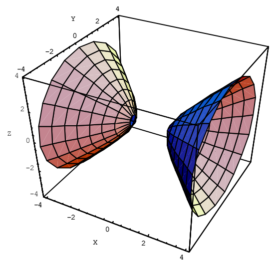


图 6.11

【例 6.4】 直线绕另一条与它相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫圆锥面(图 6.12).两直线的交点叫圆锥面的顶点 ,两直线的夹角叫圆锥面的半顶角 .试

建立顶点在坐标原点，旋转轴为 z 轴的圆锥面的方程．

解　设在 yOz 平面上，直线 L 的方程为 $z=ky\,(k>0)$，因为 z 轴是旋转轴，故得圆锥面的方程 $z=\pm k\sqrt{x^2+y^2}$，即

$$z^2=k^2(x^2+y^2) \tag{6.3}$$

图 6.12 中 $\alpha=\operatorname{arc\,cot}k$ 为圆锥面的半顶角． ▮

【例 6.5】　写出满足下列条件的动点的轨迹方程，并说明它们分别表示什么曲面？

（1）动点到坐标原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离；

（2）动点到 x 轴的距离等于它到 yOz 平面的距离的两倍．

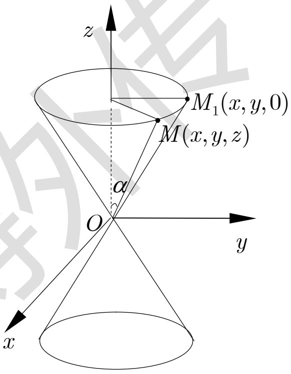


图 6.12

解　（1）设动点为 (x,y,z)，由条件得

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(z-4)^2}$$

即　$x^2+y^2+8z=16$　或　$z=2-\dfrac{x^2+y^2}{8}$.

这是以 z 轴为旋转轴，开口朝下的旋转抛物面（图 6.13）.

（2）设动点为 (x,y,z)，由条件得 $\sqrt{y^2+z^2}=2|x|$，即

$$4x^2-y^2-z^2=0$$

这是顶点在原点，旋转轴为 x 轴的圆锥面（图 6.14）. ▮

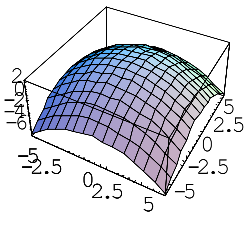


图 6.13

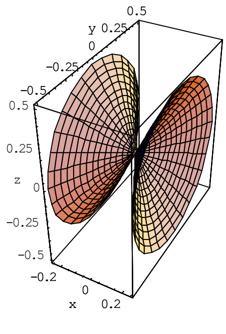


图 6.14

习题 8 - 6

A 类

1. 指出下列方程在平面解析几何与空间解析几何中分别表示什么几何图形：

(1) $x-y=1$；　(2) $x^2-2y^2=1$；　(3) $x^2-2y=1$；　(4) $2x^2+y^2=1$.

2. 求下列柱面的方程:

(1) 准线为 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$，母线平行于 x 轴;

(2) 准线为 $\begin{cases} 7-z=x^2+y^2 \\ 2x+2y+2z=1 \end{cases}$，母线平行于 z 轴;

(3) 准线为 $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$，母线平行于直线 $x=y=z$.

3. 写出下列曲线绕指定轴旋转所生成的旋转曲面的方程：

(1) xOz 平面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转；

(2) xOy 平面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 y 轴旋转；

(3) xOy 平面上的圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 绕 y 轴旋转；

(4) yOz 平面上的直线 $2y-3z+1=0$ 绕 z 轴旋转.

4. 指出下列方程所表示的曲面哪些是旋转曲面，这些旋转曲面是怎样形成的：

(1) $x+y^2+z^2=1$；　(2) $x^2+y+z=1$；

(3) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$；　(4) $x^2+y^2-z^2-2z=1$.

5. 写出满足下列条件的动点的轨迹方程，它们分别表示什么曲面？

(1) 动点到坐标原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离;

(2) 动点到坐标原点的距离等于它到点 $(2,3,4)$ 的距离的一半;

(3) 动点到点 $(0,0,3)$ 的距离等于它到 y 轴的距离;

(4) 动点到 x 轴的距离等于它到 yoz 平面的距离的两倍.

6. 画出下列方程所表示的曲面(简图)：

(1) $x^2-ax+y^2=0$；　(2) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$；　(3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

(4) $y^2-z=0$;　(5) $z=1+x^2+y^2$;　(6) $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

B 类

1. 求对称轴为 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$，直截面是半径为 2 的圆周的柱面的方程.

2. 求直线 L: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 绕另一直线 L_0 : $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 旋转所形成的旋转曲

面的方程.

3. 证明：$f(\frac{y}{m}-\frac{z}{n},\frac{z}{n}-\frac{x}{l},\frac{x}{l}-\frac{y}{m})=0$（其中 l,m,n 均不为 0）表示母线平行于直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ 的柱面.

第 7 节　空间曲线及其方程

7.1　空间曲线的方程

1　曲线的一般方程

空间曲线 Γ 可以看作是两张曲面 Σ_1 与 Σ_2 的交线（图 7.1）. 设 Σ_1 与 Σ_2 的方程分别是 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$，则曲线 Γ 上的点的坐标应同时满足这两个方程, 即满足方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}. \tag{7.1}$$

反之，若点 $M(x,y,z)$ 的坐标满足方程组(7.1)，则说明点 M 既在 Σ_1 上又在 Σ_2 上, 即 M 是交线 Γ 上的一点，因此曲线 Γ 可以用方程组(7.1)来表示，称方程组(7.1)是曲线 Γ 的一般方程．

例如 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\2x+3y+3z=6\end{cases}$ 表示柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $2x+3y+3z=6$ 的交线（图 7.2）.

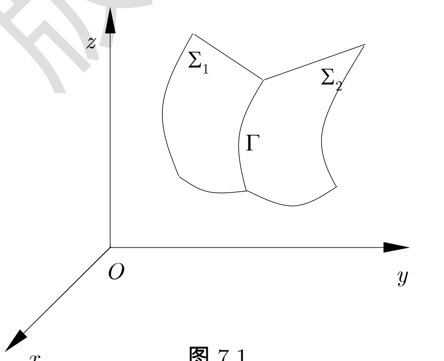


图 7.1

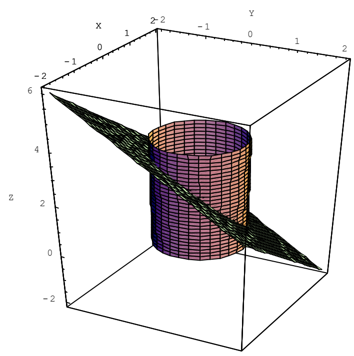


图 7.2

【例 7.1】　以下方程分别表示怎样的曲线？

(1) $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$.

解 (1) 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$ 可化为 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2 \end{cases}$，其中第一个方程表示中心在原点，半径为 a 的上半球面；第二个方程表示母线平行于 z 轴，准线是 xOy 面上以点 $(\frac{a}{2},0)$ 为中心，半径为 $\frac{a}{2}$ 圆周的圆柱面，方程组表示这两个曲面的交线（图 7.3）.

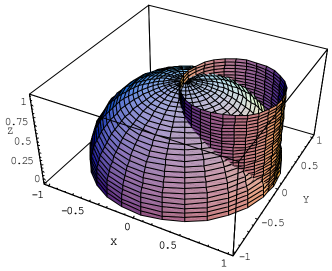


图 7.3

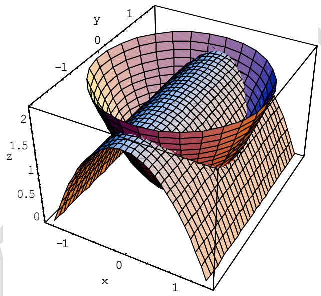


图 7.4

(2) 方程组中第一个方程表示顶点在坐标原点, 开口向上的旋转抛物面；第二个方程表示母线平行于 y 轴，准线是 xOz 面上以点 $(0,2)$ 为顶点，开口向下的抛物线的抛物柱面，方程组表示这两个曲面的交线（图 7.4）. ∎

2 曲线的参数方程

空间曲线也可以用参数方程来表示，即把曲线上的动点的坐标 x,y,z 分别表示成参数 t 的函数

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in I \\ z=z(t) \end{cases} \tag{7.2}$$

当给定 $t=t_1$ 时，由(7.2)式就得到曲线上的一个点 $(x(t_1),y(t_1),z(t_1))$，随着 t 的变动，就可以得到曲线上的全部点，方程组(7.2)叫做曲线的参数方程.

【例 7.2】　如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速率 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速率 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，其中 ω ，v 都是常数，点 M 的轨迹曲线叫螺旋线，试建立其参数方程．

解　取时间 t 为参数, 设当 $t=0$ 时，动点与 x 轴上的点 $A(a,0,0)$ 重合，经过时间 t ，动点由 $A(a,0,0)$ 运动到 $M(x,y,z)$ ．记 M 在 xOy 面上的投影为 $M'(x,y,0)$ ．

由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，经过时间 t ，$\angle AOM'=\omega\cdot t$ ，从而

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \end{cases}.$$

又由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴正方向上升，所以 $z=vt$ ．因此，螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}.$$

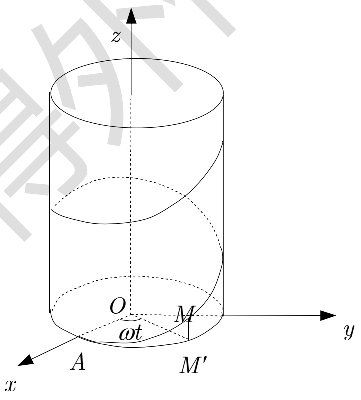


图 7.5

令 $\theta=\omega\cdot t$ ，则方程形式可化为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}，（\ b=\frac{v}{\omega},\theta \text{ 为参数}）$$

▮

螺旋线是一种常见的曲线. 比如机用螺旋线的外缘曲线就是螺旋线. 当参数 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0+\alpha$ 时，z 由 $b\theta_0$ 变到 $b\theta_0+b\alpha$ ；这表明当 OM' 转过角 α 时，M 点沿螺旋线上升了高度 $h=b\alpha$．特别地，当 OM' 转过一周，即 $\alpha=2\pi$ 时，M 点就上升固定的高度为 $h=2\pi b$ ，这个高度在工程技术上叫螺距．

与平面曲线情形类似，空间曲线的一般方程也可以化为参数方程．

【例 7.3】　将空间曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2} \\ x+z=1 \end{cases}$ 表示成参数方程．

解　由方程组消去 z 得

$$x^2+y^2+(1-x)^2=\frac{9}{2},$$

变形得

$$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1\,.$$

由于 C 在此椭圆柱面上，故 C 的方程可用如下形式来表示

$$\begin{cases}\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ x+z=1\end{cases}.$$

如果以 x 作为参数，即令 $x=t$，则

$$y=\pm 2\sqrt{1-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})^2}\ ,\ z=1-t\,,$$

从而得到曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=t\\ y=\pm 2\sqrt{1-\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{1}{2})^2}\\ z=1-t\end{cases},$$

且参数的取值范围为 $1-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})^2\geq 0$，即 $\frac{1}{2}-\sqrt{2}\leq t\leq\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

如果令 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\cos\theta$ ，由椭圆柱面方程, 有 $\dfrac{y}{2}=\sin\theta$ ，而

$$z=1-x=1-(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos\theta)=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\,,$$

则曲线又可表示成为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=2\sin\theta\\ z=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\qquad(0\leq\theta\leq 2\pi)\,.$$

∎

7.2　空间曲线在坐标面上的投影

以空间曲线 Γ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面叫做 Γ 对 xOy 面的投影柱面. 投影柱面与 xOy 面的交线叫做 Γ 在 xOy 面的投影曲线.

设空间曲线 Γ 的一般方程由(7.1)给出，我们来研究由方程组(7.1)消去变量 z 之后所得到的方程

$$H(x,y)=0\,. \tag{7.3}$$

由于当点 $M(x,y,z)\in\Gamma$ 时，其坐标 x,y 满足方程组(7.1)，而方程(7.3)是由方程组(7.1)消去 z 而得，故点 M 的前两个坐标 x,y 必满足方程(7.3)，因此，点 M 应在 $H(x,y)=0$ 所表示的柱面上，这说明柱面(7.3)包含了曲线 Γ，从而柱面 $H(x,y)=0$ 与 xOy 面的交线

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases} \tag{7.4}$$

包含了空间曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线，此投影曲线必满足方程组(7.4).

类似地，消去方程组(7.1)中的变量 x，得 $R(y,z)=0$，再与 $x=0$ 联立就得到包含 Γ 在 yOz 面上的投影曲线的曲线方程：

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

消去方程组(7.1)中的变量 y，得 $T(x,z)=0$，再与 $y=0$ 联立就得到包含 Γ 在 zOx 面上的投影曲线的曲线方程：

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

【例 7.4】　求曲线 Γ

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$

在 xOy 面和 yOz 面上的投影曲线的方程.

解　先求包含曲线 Γ 且母线平行于 z 轴的柱面，从方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-2y+1+z^2-2z+1=1 \end{cases}$$

中消去 $x^2+y^2+z^2$，得 $y+z=1$，将其代入第一个方程得到

$$x^2+2y^2-2y=0,$$

这是曲线 Γ 对 xOy 面的投影柱面的方程.从而得曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线，为一椭圆：

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

再由所给方程组消去 x . 为此将两方程相减, 得到曲线 Γ 对 yOz 面的投影柱面:

$$y+z-1=0,$$

从而得曲线 Γ 在 yOz 面上的投影曲线:

$$\begin{cases} y+z-1=0 \\ x=0 \end{cases},\ (\ 0\le y\le 1\ )$$

它表示 yOz 面上的一条直线段. 如图 7.6 所示 . ∎

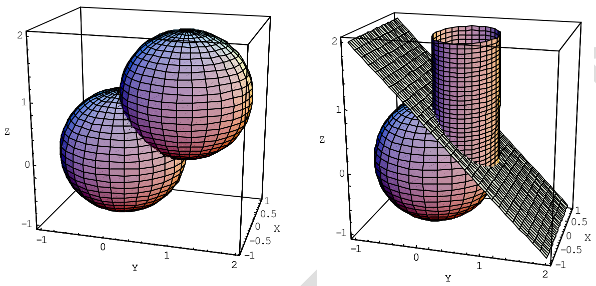


图 7.6

思考题:

1．试求例 7.4 中曲线 Γ 在 zOx 面上的投影曲线.

有时，我们需要确定一个空间立体（或空间曲面）在坐标面上的投影，一般来说，这种投影往往是一个平面区域，我们称它为空间立体（或空间曲面）在坐标面上的投影区域．利用投影柱面与投影曲线可以确定投影区域.

【例 7.5】 求上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的空间立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 .

解 上半球面与锥面的交线 Γ：

$$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases},$$

由方程组消去变量 z ，有

$$x^2+y^2=1.$$

这是母线平行于 z 轴的投影柱面，Γ 在 xOy 面的投影曲线为:

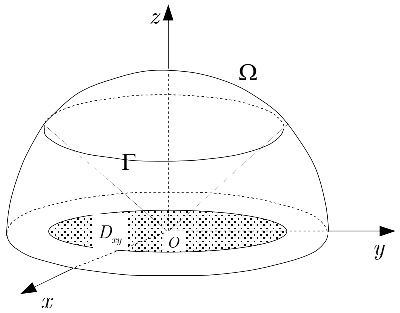


图 7.7

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases},$$

这是一个圆，它所包围的区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，就是立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域，如图 7.7 所示．∎

【例 7.6】　作出由不等式

$$x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y\le 1, y^2+z^2\le 1$$

所确定的区域 Ω 及其在 xOy 面及 yOz 上的投影区域的简图.

解　方程 $x+y=1$ 表示过点 $A(1,0,0)$ 和 $B(0,1,0)$，且平行于 z 轴的平面, 因此 $x+y\le 1$ 就表示以此平面为边界且包含原点的那个半空间. 方程 $y^2+z^2=1$ 表示以 x 轴为轴，半径为 1 的圆柱面，故 $y^2+z^2\le 1$ 表示这个圆柱面及其内部．圆柱面 $y^2+z^2=1$ 与平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 的交线分别为：

圆弧 $C_1:\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x=0 \end{cases}(y\ge 0, z\ge 0)$，

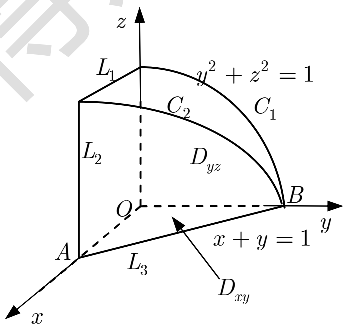


图 7.8

直线段 $L_1:\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}(x\ge 0, z\ge 0)$，即

$L_1:\begin{cases} z=1 \\ y=0 \end{cases}$，

椭圆弧 $C_2:\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

平面 $x+y=1$ 与平面 $y=0, z=0$ 的交线分别为

直线段 $L_2:\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}(0\le z\le 1)$；直线段 $L_3:\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}(0\le x\le 1)$，

画出这五条交线，就得到区域 Ω 的简图(图 7.8)．

交线 C_1, L_1, C_2 在 xOy 面上的投影分别为：

y 轴上直线段 $OB(0\le y\le 1)$，x 轴上直线段 $OA(0\le x\le 1)$，xOy 面上直线段 $AB:\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}(0\le x\le 1)$

由 OA，OB，AB 所围成的区域即 Ω 在 xOy 面上的投影区域

$D_{xy}:\begin{cases}x+y\le 1\\ 0\le x\le 1\end{cases}$，类似可求得$\Omega$在$yOz$上的投影区域$D_{yz}:\begin{cases}y^2+z^2\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$. ▮

习题 8 - 7

A 类

1．画出下列曲线在第一卦限内的图形：

(1) $\begin{cases}z=\sqrt{1-x^2-y^2},\\ y=x;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ x=1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2+z^2=1.\end{cases}$

2．把下列曲线方程转换成母线平行于坐标轴的柱面的交线方程：

(1) $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2y^2+z^2+4x-4z=0,\\ y^2+3z^2-8x-12z=0.\end{cases}$

3．求下列曲线在xOy面上的投影曲线的方程：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+z=1\end{cases}$； (2) $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y+z=1\end{cases}$.

4．求曲线$\begin{cases}y^2+z^2-2x=0,\\ z=3;\end{cases}$在$xOy$面上的投影曲线的方程，并指出原曲线是什么曲线？

5．将下列曲线的一般方程转化为参数方程：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2},\\ (x-1)^2+y^2=1.\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x^2+y^2=1;\end{cases}$

6．求下列曲面所围成的立体在xOy面上的投影：

(1) $x^2+y^2+z^2=R^2$， $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$, $x^2+y^2=4$与$z=0$.

B 类

1．求空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=x^2-y^2\end{cases}$的参数方程.

2．已知空间曲线 $\begin{cases}x=a\cos^2 t\\ y=a\sin^2 t\ (0<t\le\pi)\\ z=a\sin 2t\end{cases}$.

(1) 求证它在一个平面上，且求所在平面的方程；

(2) 求此空间曲线的一般方程.

3．求下列曲线在三个坐标面上的投影曲线的方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y^2+z^2=1. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \\ z=2\theta. \end{cases}$

4．求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$，在平面 $x+y+z=1$ 的投影曲线的方程：

5．求下列曲面所围成的立体在三个坐标面上的投影：

(1) $z=x^2+y^2$ 与 $z=2-x^2-y^2$；　(2) $y=\sqrt{x}$，$y=0, z=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围.

第 8 节　二次曲面

三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面．第 6 节例 6.3 与例 6.4 给出的旋转曲面就是二次曲面．相对于一般空间曲面，二次曲面的形状比较简单，而且应用较广泛．本节将讨论几种特殊的二次曲面．

8.1　椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0) \tag{8.1}$$

表示的曲面叫做椭球面．为了研究椭球面的形状，我们用坐标平面或平行于坐标平面的平面去截割二次曲面，得到一些截线并考察这些截线的形状然后加以综合，构想出曲面的全貌.

由方程可知

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1, \frac{y^2}{b^2}\le 1, \frac{z^2}{c^2}\le 1$$

即

$$|x|\le a\ ,\ |y|\le b\ ,\ |z|\le c\ ,$$

这说明椭球面包含在由平面 $x=\pm a$，$y=\pm b$，$z=\pm c$ 围成的长方体内．

先考虑椭球面与三个坐标面的截线

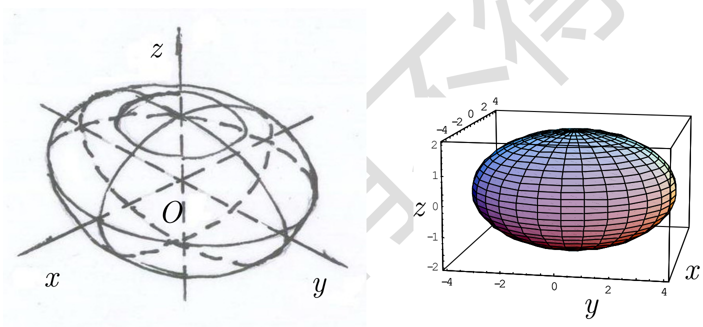
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

这些截线就是椭圆．

再用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ （ $0<|h|<c$ ）去截这个曲面，所得截线的方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

易见，当 $|h|$ 由 0 变到 c 时，椭圆由大变小，最后缩成一点 $(0,0,\pm c)$．同样地用平行于 yOz 面或 zOx 面的平面去截这个曲面，也有类似的结果. 如果连续地取这样的截线，可以想像，这些截线就组成了一张椭球面（图 8.1）.



(a) (b)

图 8.1

在椭球面方程中， a,b,c 按其大小，分别叫做椭球的长半轴，中半轴，短半轴．如果有两个半轴相等，如 $a=b$ ，则方程表示的是由平面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ （或 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ）绕 z 轴旋转而成的旋转椭球面．如果 $a=b=c$ ，则方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 表示一个球面．

上述考察椭球面的形状的方法，又称为截痕法，下面我们将继续应用此方法考察另外的几种二次曲面.

8.2　抛物面

抛物面分椭圆抛物面与双曲抛物面两种．方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z \tag{8.2}$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面．设方程右端取正号，现在来考察它的形状．

(1) 用 xOy 面（ $z=0$ ）去截这曲面，截痕为原点．用平面 $z=h$ （ $h>0$ ）去截这曲面，截痕为椭圆：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h\\ z=h\end{cases}.$$

当 $h\to 0$ 时，截痕退缩为原点；当 $h<0$ 时，截痕不存在. 原点叫做椭圆抛物面的顶点.

(2) 用 zOx 面（ $y=0$ ）去截这曲面，截痕为抛物线

$$\begin{cases}x^2=a^2z\\ y=0\end{cases}$$

用平面 $y=k$ 去截这曲面，截痕也为抛物线

$$\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}\\ y=k\end{cases}$$

(3) 用 yOz 面（ $x=0$ ）及平面 $x=l$ 去截这曲面，其结果与(2)类似．

综合以上分析结果，可知椭圆抛物面的形状如图 8.2 所示．

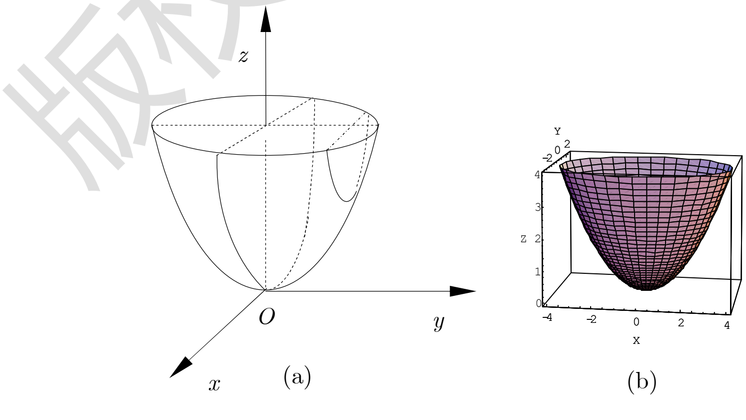


图 8.2

方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z \tag{8.3}$$

所表示的曲面叫做双曲抛物面．设方程右端取正号，现在来考察它们的形状．

（1）用平面 $z=h$（$h>0$）去截这曲面，截痕方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=h\\ z=h\end{cases}$$

当 $h>0$ 时，截痕是双曲线，其实轴平行于 x 轴．当 $h=0$ 时，截痕是 xOy 平面上两条相交于原点的直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0\\ z=0\end{cases}.$$

当 $h<0$ 时，截痕也是双曲线，但其实轴平行于 y 轴．

（2）用平面 $x=k$ 去截这曲面，截痕方程是

$$\begin{cases}z=-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{k^2}{a^2}\\ x=k\end{cases}$$

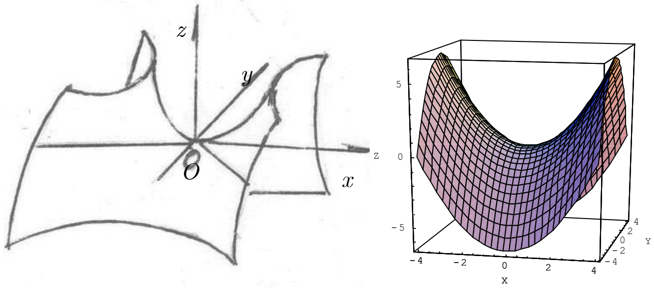
$k=0$ 时，截痕是 yOz 平面上顶点在原点的抛物线且张口朝下．$k\neq 0$ 时，截痕都是开口朝下的抛物线，且抛物线的顶点随 $|k|$ 增大而升高．

（3）用平面 $y=l$ 去截这曲面，截痕方程是

$$\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{l^2}{b^2}\\ y=l\end{cases}$$

截痕均是开口朝上的抛物线，且抛物线的顶点随 $|l|$ 增大而降低．

综合以上分析，双曲抛物面的形状如图 8.3 所示．其形状与马鞍相似，有时也称其为马鞍面．



(a)　　(b)

图 8.3

8.3　双曲面

双曲面分单叶双曲面与双叶双曲面两种．其中方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8.4}$$

表示的曲面叫做单叶双曲面．

(1) 用平面 $z=0$ 去截这曲面，截痕方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

它表示中心在原点，两个半轴长分别为 a 及 b 的椭圆.

用平面 $z=h$ 去截这曲面，截痕方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

它表示中心在 z 轴上，两个半轴长分别为 $\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$ 及 $\dfrac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$ 的椭圆.

(2) 用平面 $y=0$ 去截这曲面，截痕方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

它表示中心在原点，实轴为 x 轴，虚轴为 z 轴的双曲线，两个半轴长分别为 a 及 c．

用平面 $y=k(k\neq\pm b)$ 去截这曲面，截痕方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2},\\ y=k.\end{cases}$$

它表示中心在 y 轴上的双曲线，两个半轴长的平方分别为 $\dfrac{a^2}{b^2}\left|b^2-k^2\right|$ 及

$\frac{c^2}{b^2}\left|b^2-k^2\right|$.

如果 $k^2<b^2$,则双曲线的实轴平行于 x 轴,虚轴平行于 z 轴;如果 $k^2>b^2$,则双曲线的实轴平行于 z 轴,虚轴平行于 x 轴.

如果 $k=b$,则平面 $y=b$ 截曲面所得截线为一对相交于点 $(0,b,0)$ 的直线,它们的方程为

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ y=b.\end{cases} 和 \begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0\\ y=b.\end{cases}$$

如果 $k=-b$,则平面 $y=-b$ 截曲面所得截线为一对相交于点 $(0,-b,0)$ 的直线,它们的方程为

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ y=-b.\end{cases} 和 \begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0\\ y=-b.\end{cases}$$

(3) 类似地,用平面 $x=0$,$x=l(l\neq\pm a)$ 去截这曲面所得截线也是双曲线,两平面 $x=\pm a$ 截这曲面所得截线是两对相交的直线. 综上所述,可知单叶双曲面的形状如图8. 4所示:

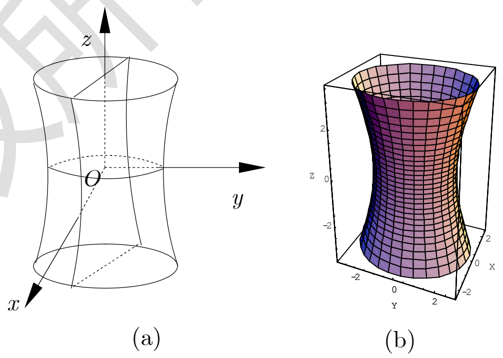


图 8.4

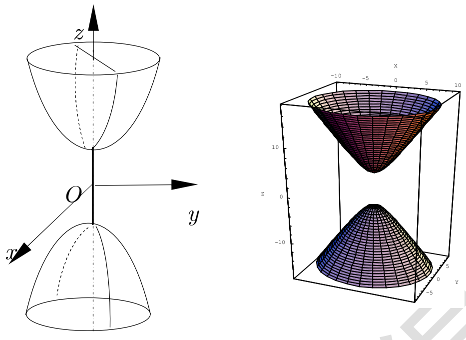
方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{8.5}$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面.用截痕法所得结果如下:

截平面	截痕
xOy 面及平行于 xOy 面的平面	无截痕、一点或椭圆
zOx 面及平行于 zOx 面的平面	双曲线
yOz 面及平行于 yOz 面的平面	双曲线

它的形状如图 8.5 所示: .



(a)　　(b)

图 8.5

8.4　椭圆锥面

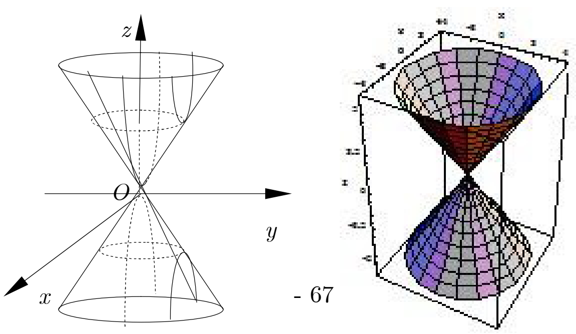
方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{8.6}$$

表示的曲面叫做椭圆锥面(二次锥面). 用截痕法所得结果如下：

截平面	截痕
xOy 面及平行于 xOy 面的平面	一点或椭圆
zOx 面及平行于 zOx 面的平面	两相交直线或双曲线
yOz 面及平行于 yOz 面的平面	两相交直线或双曲线

由此可得椭圆锥面的形状如图 8. 6 所示.



(a)　　(b)

图 8.6

由方程(8.6)知，椭圆锥面过原点，又由于当点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的坐标满足方程(8.6)时，点 (tx_0, ty_0, tz_0) （t 为任意实数）的坐标也满足方程(8.6). 因此，直线

$$\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases}$$

都在椭圆锥面上，因此可以认为椭圆锥面由通过原点的直线构成. 我们把这些直线称为椭圆锥面的母线， 母线的公共点称为椭圆锥面的顶点. 若用平面 $z = k$ 去截椭圆锥面，其截线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}.$$

这样，我们可把椭圆锥面看作其母线沿上述椭圆移动所形成的曲面.

一般地，若直线 L 过定点 M_0 ，且与不含 M_0 的定曲线 C 相交，则将 L 沿 C 移动形成的曲面称为锥面. 定点 M_0 称为锥面的顶点， 定曲线 C 称为锥面的准线，动直线 L 称为锥面的母线 .

下面给出确定锥面方程的一般方法. 设锥面的顶点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,锥面的准线方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}. \tag{8.7}$$

设 $M(x, y, z)$ 为锥面上任一点 ,则准线 C 上存在点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$,使 M, M_1, M_0 在同一母线上，即 M, M_1, M_0 共线，因此有

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{8.8}$$

如果能由(8.7)与(8.8)消去 x_1, y_1, z_1 ，就可得到锥面的方程.

【例 8.1】　设一锥面的顶点为原点，准线方程为$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$，求此锥面的方程.

解　设锥面上任一点 $M(x,y,z)$ ，则准线上存在点 $M_1(x_{1,}y_1,z_1)$ ，使原点 O, M, M_1, 共线，因此有

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1} ,$$

但由于 $z_1=c$ ，故 $x_1=\dfrac{x}{z}c, y_1=\dfrac{y}{z}c$ ，将 x_1 ，y_1 代入准线方程，就得到锥面方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} ,$$

显然它为椭圆锥面. 当 $a=b$ 时， 准线为平面 $z=c$ 上的圆，这时椭圆锥面为：

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}z^2 ,$$

它就是顶点在坐标原点，旋转轴为 z 轴的圆锥面 .　∎

本节中所讨论的椭球面、抛物面、双曲面、椭圆锥面等称为标准型二次曲面. 对于一般二次曲面，可通过坐标轴的平移和旋转化为标准型二次曲面，这方面的讨论比较复杂，这里不作进一步研究，仅就以下情形讨论：

在 $Oxyz$ 直角坐标系中，如果将二次曲面作平移，那么曲面的方程就有所改变. 若曲面∑的方程是 $F(x,y,z)=0$ ，则方程 $F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$ 的图形 Σ' 与∑有相同的形状. 有两种方法可得到方程 $F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$ 的图形：一种方法是在同一坐标架下，将∑沿着向径 $\boldsymbol{r}=\{x_0,y_0,z_0\}$ 方向平移 $|\boldsymbol{r}|$ 距离而得到方程 $F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$ 的图形 Σ' ；另一种方法是先在 $O'xyz$ 坐标系下作出 $F(x,y,z)=0$ 的图形，然后将坐标架平移，使移动后的坐标原点位于原坐标系的点 $(-x_0,-y_0,-z_0)$ 处，并将坐标系改成 $Oxyz$ ，这与平面解析几何中的情形是类似的 .利用这一点 ,就可将某些非标准二次方程用简单的配方方法，找出它的标准形式，再用上述平移方法获得它的图形并确定其位置，例如方程：

$$x^2+2y^2+2x-4y-z=0$$

经过配完全平方，得

$$(x+1)^2+2(y-1)^2=z+3,$$

故其标准形为

$$X^2+2Y^2=Z\,.$$

由此可知它表示椭圆抛物面，在 $O'xyz$ 坐标系中作出椭圆抛物面．然后将坐标系 $Oxyz$ 的原点 O 取在 $O'xyz$ 坐标系的点 $(1,-1,3)$ 处，作出 x 轴，y 轴，z 轴，使之分别平行于 x 轴，y 轴，z 轴并略去 $O'xyz$ 坐标架，即得到原方程表示的图形．

在根据方程讨论曲面的形状时，有时可通过方程的特点，推知曲面具有某种对称性. 一般地，对方程 $F(x,y,z)=0$ ，若 $F(-x,y,z)=F(x,y,z)$ ，则曲面关于 yOz 面对称；若 $F(-x,-y,z)=F(x,y,z)$ ，则曲面关于 z 轴对称；若 $F(-x,-y,-z)=F(x,y,z)$ ，则曲面关于原点对称. 其他的对称情形可类似推出．例如椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 与双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\pm 1$ 关于各坐标面，各坐标轴及原点都对称. 抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=z$ 关于 z 轴对称．知道了曲面的对称性，对于我们认识曲面的图形及由曲面围成的立体的图形是很有帮助的．

思考题:

1.试讨论已给出的其他几个标准型二次曲面的对称性.

习题 8 - 8

A 类

1. 画出下列方程所表示的二次曲面的图形：

(1) $x^2+y^2+z^2=2x$；　　(2) $x^2+4y^2+9z^2=1$；

(3) $3x^2+4y^2-z^2=12$；　　(4) $2x^2+y^2-8z^2+8=0$；

(5) $4x=2y^2+z^2+16$；　　(6) $z=x^2-y^2$

(7) $z^2=x^2+4y^2$

2. 画出下列各曲面所围成的立体的图形：

(1) $x=0,y=0,z=0,x=2,y=1,3x+4y+2z-12=0.$

(2) $x=0,z=0,x=1,y=2,z=\dfrac{y}{4};$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2},z=2-x^2-y^2;$

(4) $x=0,y=0,z=0,x^2+y^2=1,y^2+z^2=1$（在第一卦限内）.

(5) $y=x^2,x+y+z=1,z=0$；

B 类

1. 证明曲面 $z=xy$ 是双曲抛物面.

2. . 画出下列各曲面所围成的立体的图形：

(1)　$z=xy, x+y=1, z=0$；

(2)　$z=0, x+y-z=0, x-y-z=0, x=1$；

(3)　$2x=y^2+z^2, x=y^2, x=1$；

(4)　$2y^2=x, \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1, z=0$；

(5)　$z=x^2+y^2+z^2, x=y^2, x=1, z=0$.

总 习 题 八

1．设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ，试问：

(1)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ ，能否推知 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ ？

(2)若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ ，能否推知 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ ？

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ ， $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ ，能否推知 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ ？

2．以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形，试用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 边上的高向量.

3．在边长为 1 立方体中，设 OM 为对角线， OA 为棱，求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 上的投影.

4．已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=3$ ，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模及它与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

5．设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$ ， $|\boldsymbol{b}|=1$， $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$ ，计算：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 之间的夹角；

(2)以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

6．设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{c})$ ，求 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

7．设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ ， $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ，

(1)求 $\mathrm{Prj}_{\,b}\boldsymbol{a}$；

(2)若 $|\boldsymbol{c}|=3$ ，求向量 $\boldsymbol{c}$ ，使得由三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 所构成的平行六面体的体积最大.

8．设 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$ ， $\boldsymbol{b}=\{1,-2,3\}$ ， $\boldsymbol{c}=\{2,1,2\}$ ，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足条件： $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$ ， $\mathrm{Prj}_{\,c}\boldsymbol{r}=14$ ，求 $\boldsymbol{r}$.

9 .设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,证明 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 并且以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为法向的平面具有如下形式的参数方程：

$$\begin{cases} x=a_xs+b_xt+x_0 \\ y=a_ys+b_yt+y_0 \\ z=a_zs+b_zt+z_0 \end{cases}$$

，其中 s,t 为参数.

10．求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $\mathrm{B}(0,0,-1)$ 且与 xOy 面成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角的平面方程.

11．求垂直于平面 $z=0$ ，且通过点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线的平面的方程.

12．求过点 $(-2,3,0)$ 且平行于平面 $x-2y-z+4=0$ ，又与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

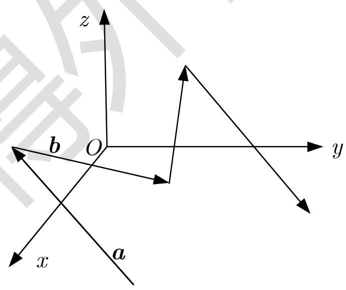
13．求直线 $L:\begin{cases} 2x+y+z-4=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$ 关于平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 对称的直线方程.

14．求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 π： $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面的方程

15．求柱面 $z^2=2x$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体在三个坐标面上的投影区域.

16．证明直线 $L:\begin{cases} x+\dfrac{z}{3}=0 \\ y=2 \end{cases}$ 在曲面 $x^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$ 上.

17．假设三个直角坐标面都镶上了反射镜，并将一束激光沿向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 的方向射向 xOz 平面（如图）．试用反射定律证明：反射光束的方向向量 $\boldsymbol{b}=\{a_x,-a_y,a_z\}$ ；进而推出：入射光束经三个镜面连续反射后，最后所得的反射光束平行于入射光束．（航天工程师利用此原理，在月球上安装了反射镜面组，并从地球向镜面发射激光束，从而精确测得了地球到月球的距离）.



习题 17 图