

武汉大学 2015-2016 学年第一学期期末考试
高等数学 B1 (A 卷答题卡)

姓名

班级

考 生 学 号

[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

填涂样例

正确填涂

错误填涂

注意

事项

1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。

2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题；字体工整、笔迹清楚。

3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、(7 分) 若 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导，且 $f'(1)=1$ ，计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}$.

二、(7 分) 设 a_1, a_2, \dots, a_m 为正数 ($m \geq 2$)，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

三、(7 分) 求不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

四、(7 分) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-ye^{xy}=2$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

五、(7 分) 设 $a>0$ ，计算定积分 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3} dx$.

六、(7 分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$ ，求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

七、(8 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=Ce^y$ 确定，其中 C 是非零常数， f 具有二阶导数，且 $f'(y) \neq 1$ ，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

八、(7 分) 设 $f(x)=\begin{cases} 6, & x \leq 0 \\ \frac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

九、(9分) 求初值问题 $\begin{cases} y'' + y = x^2 + \sin x \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$ 的解。

十、(9分) 求抛物线 $y^2 = 4x$ 与 $y^2 = 8x - 4$ 所围图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积。

十一、(8分) 判别反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}} dx$ 的敛散性。

十二、(11分) 求函数 $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的单调区间, 极值与凹凸区间。

十三、(6分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 且 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \tan x dx = 0$, 证明: 在区间 $(-1, 1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 。

武汉大学 2015-2016 第一学期高等数学 B1 期末试题

A 卷解答

一、(7 分) 若 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导, 且 $f'(1)=1$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^{2014}+x^{2013}+\cdots+x+1)} = \frac{1}{2015}$ 7 分

二、(7 分) 设 a_1, a_2, \dots, a_m 为正数 ($m \geq 2$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

解: 不妨设 $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_m\}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a_2^n}{a_1^n} + \cdots + \frac{a_m^n}{a_1^n})^{\frac{1}{n}} = a_1 = \max\{a_1, \dots, a_m\} \quad 7 \text{ 分}$$

或者用夹逼原理 $a_1 \leq (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leq a_1 m^{\frac{1}{n}}$, 两边令 $n \rightarrow \infty$ 即得极限为 $\max\{a_1, \dots, a_m\}$

三、(7 分) 求不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

解、 $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = \int \arctan x d(-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$ (4 分)

$$= -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} \arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \quad (3 \text{ 分})$$

四、(7 分) 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - ye^{xy} = 2$ 所确定的隐函数, 求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线方程.

解 $2x + 2yy' - y'e^{xy} - ye^{xy}(y + xy') = 0$ 将点 $(0, 2)$ 代入得 $y'(0) = \frac{4}{3}$ $y = \frac{4}{3}x + 2$

(或 $4x - 3y + 6 = 0$) 3 分

五、(7 分) 设 $a > 0$, 计算定积分 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{3} dx$

解: 原式 $= \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx - \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln 3 dx$, 由于 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇

函数, $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} a^2$ (定积分的几何意义), 4 分

所以原式 $= -\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln 3 dx = -\frac{\pi}{2} a^2 \ln 3$ 3 分

六、(7 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$, 求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式。

$$\text{解 } \Phi(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{6}, & x \geq 2 \end{cases} \quad 7 \text{ 分 (对一半就给4分)}$$

七、(7 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = Ce^y$ 确定, 其中 C 是非零常数, f 具有二阶导数, 且 $f'(y) \neq 1$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

$$\text{解 } y - f(y) = \ln \frac{x}{C}, \quad y' - f'(y)y' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{x[1 - f'(y)]},$$

$$y'' - f''(y)y'^2 - f'(y)y'' = -\frac{1}{x^2}, \quad 4 \text{ 分}$$

$$y'' = \frac{1}{1 - f'(y)} \left[f''(y)y'^2 - \frac{1}{x^2} \right] = \frac{f''(y) - [1 - f'(y)]^2}{x^2[1 - f'(y)]^3} \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{八、(7 分) 设 } f(x) = \begin{cases} 6, & x \leq 0 \\ \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{在 } x = 0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值。}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \stackrel{t = \arcsin x}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a \sin^3 t}{\sin t - t} \quad 4 \text{ 分}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{at^3}{\sin t - t} = -6a = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 6 \quad \text{所以 } a = -1. \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{九、(9 分) 求初值问题 } \begin{cases} y'' + y = x^2 + \sin x \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases} \quad \text{的解。}$$

解 对应的齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

非齐次方程 $y'' + y = x^2$ 的一个特解为 $y_1 = x^2 - 2$, 非齐次方程 $y'' + y = \sin x$ 的一个特解

$$\text{为 } y_2 = -\frac{x}{2} \cos x, \quad 6 \text{ 分}$$

原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2 - \frac{x}{2} \cos x$, 利用初值条件可求得

$$C_1 = 3, \quad C_2 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{原问题的解为 } y = 3 \cos x - \frac{1}{2} \sin x + x^2 - 2 - \frac{x}{2} \cos x \quad 3 \text{ 分}$$

十、(9 分) 求抛物线 $y^2 = 4x$ 与 $y^2 = 8x - 4$ 所围图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积。

解: 图略

$$A = 2 \int_0^2 \left(\frac{y^2 + 4}{8} - \frac{y^2}{4} \right) dy = \frac{4}{3} \quad 4 \text{ 分}$$

$$V = \pi \int_0^1 4x dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (8x-4) dx = \pi [2x^2]_0^1 - \pi [4x^2 - 4x]_{\frac{1}{2}}^1 = \pi \quad 5 \text{ 分}$$

十一、(8分) 判别反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}} dx$ 的敛散性。

$$\text{解 } \forall x \in (1, +\infty), \text{ 有 } \left| \frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}} \right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}, \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}} = 1, \quad p = \frac{5}{2} > 1, \text{ 故 } \int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}} \right| dx \text{ 收敛, 从而}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}} dx \text{ 也收敛。} \quad 4 \text{ 分}$$

十二、(11分) 求函数 $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的单调区间, 极值, 凹凸区间及拐点。

$$\text{解: } y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = \frac{[(x-1)+(-2)]^2}{4(x-1)} = \frac{(x-1)}{4} - 1 + \frac{1}{x-1}, y' = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad 3 \text{ 分}$$

列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-	无定义	-	0	+
y''	-	-	-		+	+	+
y	\nearrow	-2	\searrow		\searrow	0	\nearrow

5 分

$(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$ 单调增区间, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ 单调减区间, $f(-1) = -2$ 极大值, $f(3) = 0$ 极小值, $(1, +\infty)$ 凸区间, $(-\infty, 1)$ 凹区间。 3 分

十三、(6分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 且 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \tan x dx = 0$, 证明 在

区间 $(-1, 1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

证: 记 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, 则 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可导, 且 $F(-1) = F(1) = 0$, 若 $F(x)$ 在 $(-1, 1)$

内无零点, 不妨设 $F(x) > 0, x \in (-1, 1)$, $0 = \int_{-1}^1 f(x) \tan x dx = \int_{-1}^1 \tan x dF(x)$

$$= F(x) \tan x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 F(x) \sec^2 x dx = - \int_{-1}^1 F(x) \sec^2 x dx < 0, \text{ 此矛盾说明 } F(x) \text{ 在}$$

$(-1, 1)$ 内至少存在一个零点 x_0 , 对 $F(x)$ 在 $[-1, x_0]$, $[x_0, 1]$ 上分别使用 Rolle 定理知存在

$\xi_1 \in (-1, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 1)$, 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 6 分