连续型随机变量

主要内容

连续型随机变量的概率密度的定义及性质

常见连续型随机变量的分布

概 率 密 度

主要内容

连续型随机变量的概率密度的定义

连续型随机变量的概率密度的性质

概 率 密 度

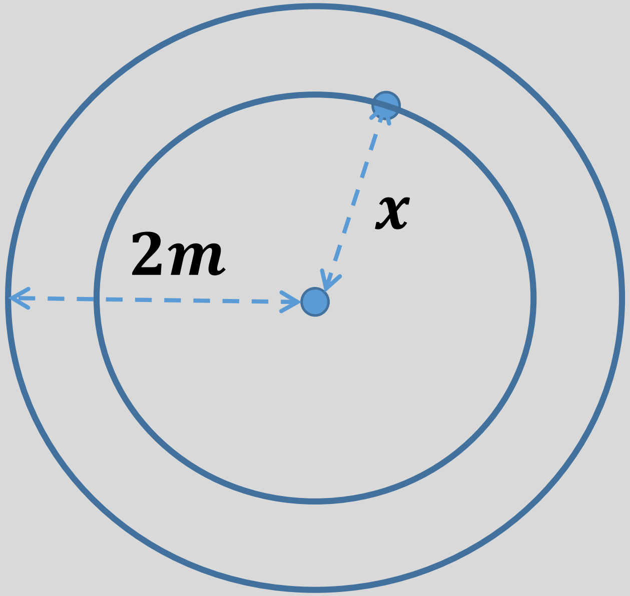
重要问题

已知概率密度求事件的概率 (包含求分布函数)

已知分布函数求概率密度

概 率 密 度 的 定 义

引例：一个靶子是半径为$2m$的圆盘，弹着点落在靶上任一同心圆盘上的概率与该圆盘的面积成正比. 设X表示弹着点与圆心的距离，并设射击都能中靶，试求随机变量X的分布函数.



解：由题意随机变量X的可能取值范围是$[0, 2]$

$$\left.\begin{array}{l} P(0 \le X \le x) = kx^2 \\ P(0 \le X \le 2) = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow 4k = 1$$

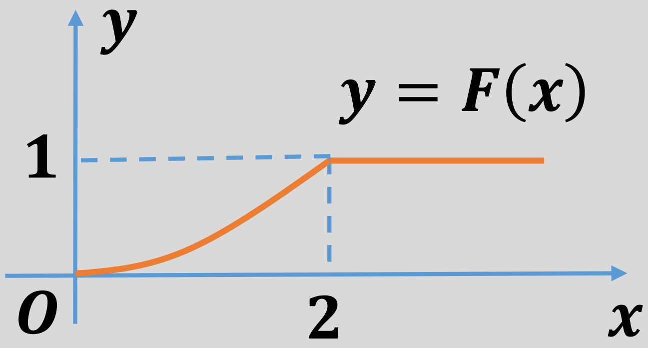
$$\longrightarrow k = \frac{1}{4} \longrightarrow P(0 \le X \le x) = \frac{x^2}{4}$$

概率密度的定义

$$P(0 \le X \le x) = \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

存在函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 \le x < 2 \\ 0, & else \end{cases}$

使得 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$



概 率 密 度 的 定 义

设X是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机变量,

$F(x)$为其分布函数,

如果存在定义在$(-\infty, \infty)$上的非负实值函数$f(x)$, 使得

$$F(\infty) = 1 \xleftarrow[x \to \infty]{} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, -\infty < x < \infty \xrightarrow[x \to \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

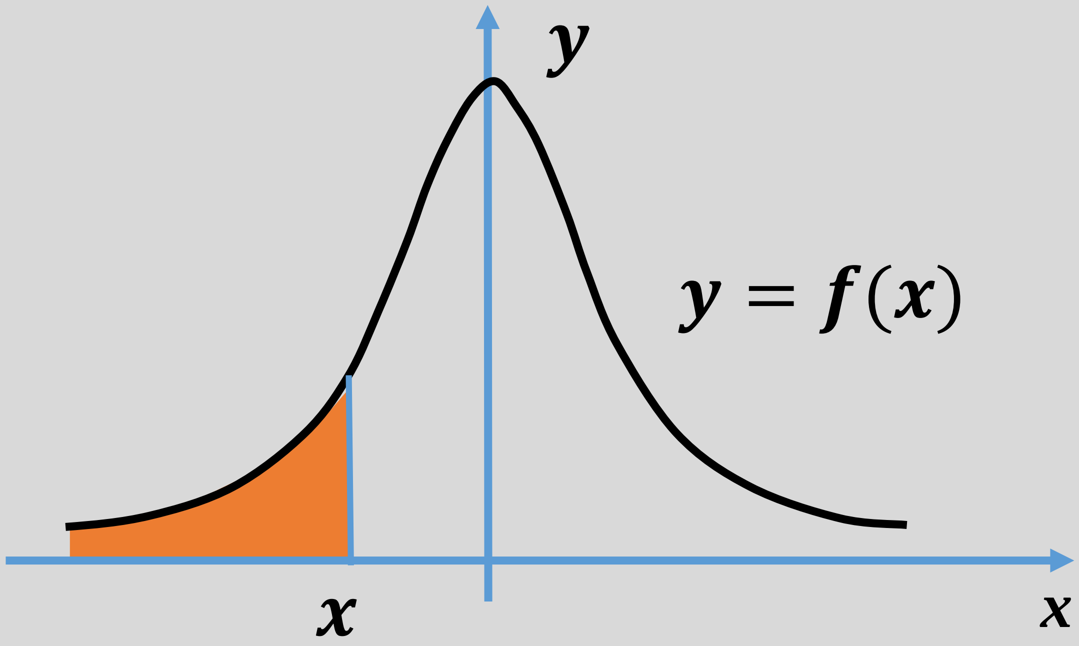
则称X为连续型随机变量，称 $F(x)$为连续型分布函数,

称 $f(x)$为X的概率密度函数, 简称为概率密度.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$



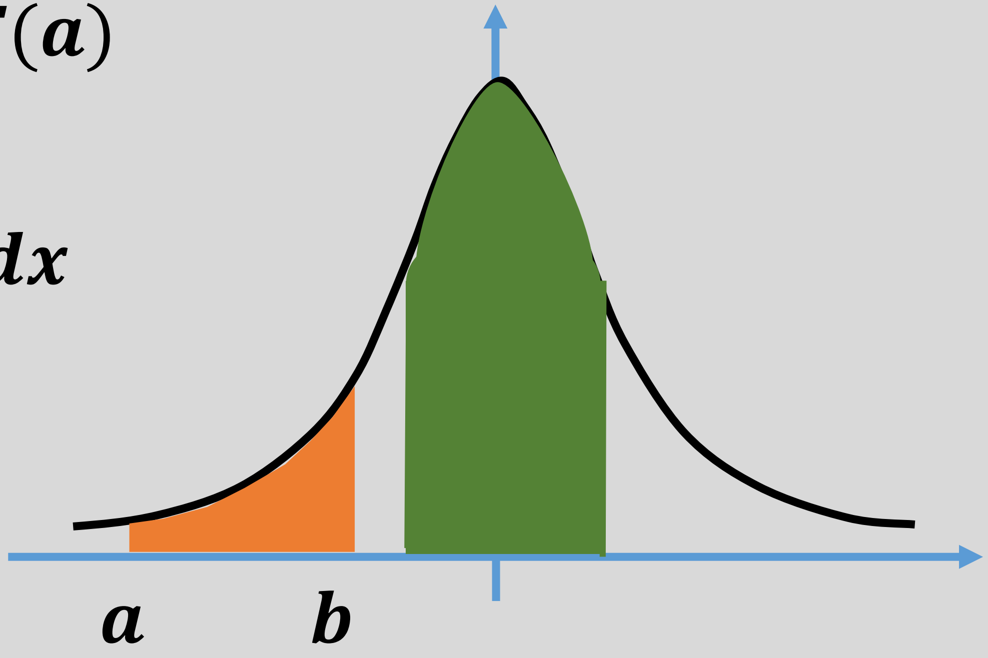
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\boxed{P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx}$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)dx$$



$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\boxed{P(X \in D) = \int_D f(x)dx}$$

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} f(x)dx \qquad P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$F(x)$是连续函数，且当 $f(x)$在 $x = x_0$点连续时，$F'(x_0) = f(x_0)$

$\forall\, \Delta x > 0$,

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{P(x_0 < X \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx$$

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 < X \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = f(x_0)$$

$$\Longrightarrow P(x < X \leq x + dx) \approx f(x)dx$$

$F(x)$是连续函数

$\boxed{\text{对于任意常数}a\text{，}\quad P(X = a) = 0}$

$$P(X = a) = F(a) - F(a - 0) = 0$$

$$\boxed{P(a < X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a \le X \le b)}$$

$$P(A) = 0 \not\Longrightarrow A = \emptyset$$

如X是连续型随机变量，$A = \{X = a\} \neq \emptyset$

概 率 密 度

例1 设随机变量X具有概率密度 $f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x<4, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求 $P\left(1<X\le\dfrac{7}{2}\right)$ (2) 求X的分布函数

解: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1 \Longrightarrow \int_0^3 kx\,dx+\int_3^4\left(2-\frac{x}{2}\right)dx=1$

$\Longrightarrow k=\dfrac{1}{6}$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

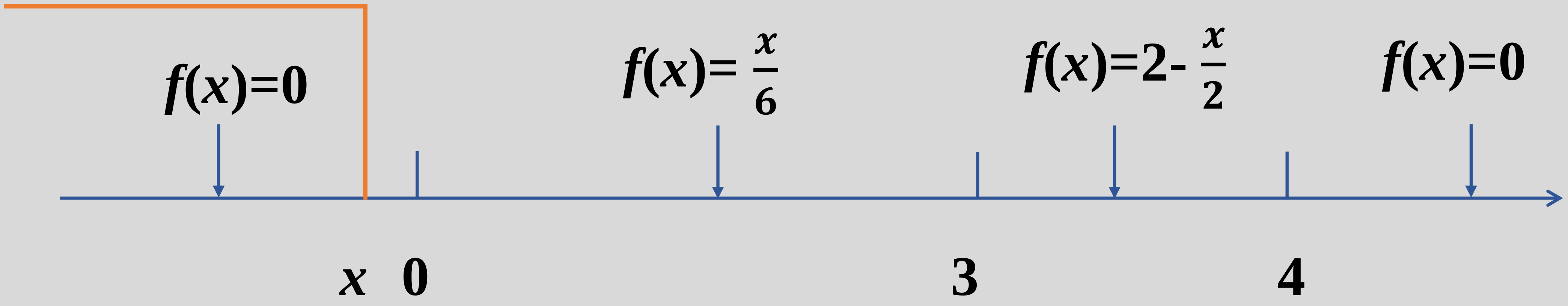
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6} & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \dfrac{x}{2}, & 3 \leq x < 4, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) $P\left(1 < X \leq \dfrac{7}{2}\right) = \int_1^{\frac{7}{2}} f(x)\, dx = \int_1^3 \dfrac{x}{6} dx + \int_3^{\frac{7}{2}} (2 - \dfrac{x}{2})\, dx = \dfrac{41}{48}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{6} & 0 \le x < 3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3 \le x < 4, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

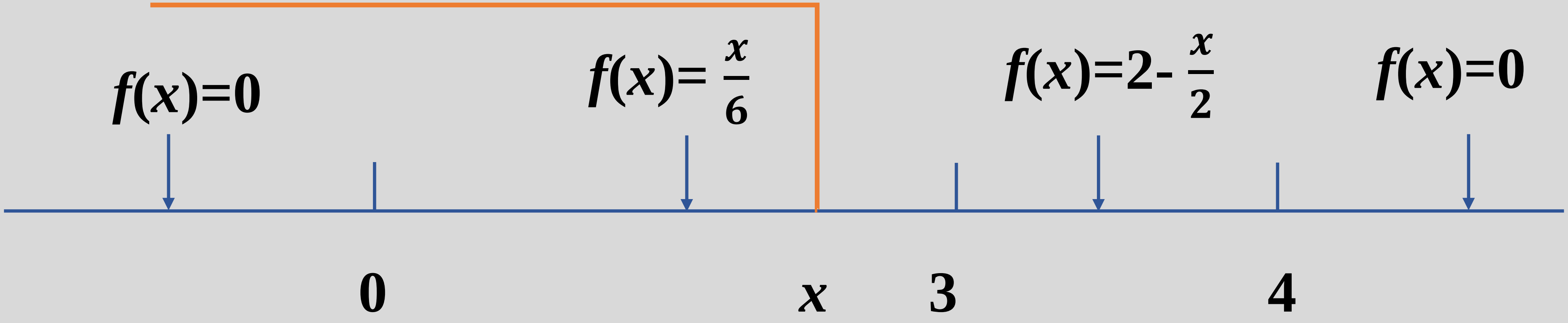
- 当 $x<0$ 时，$F(x)=0$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \qquad -\infty < x < \infty$$

- 当 $0 \le x < 3$ 时,

$$F(x) = P(X \le 0) + P(0 < X \le x) = 0 + \int_0^x \frac{t}{6}\,dt = \frac{x^2}{12}$$

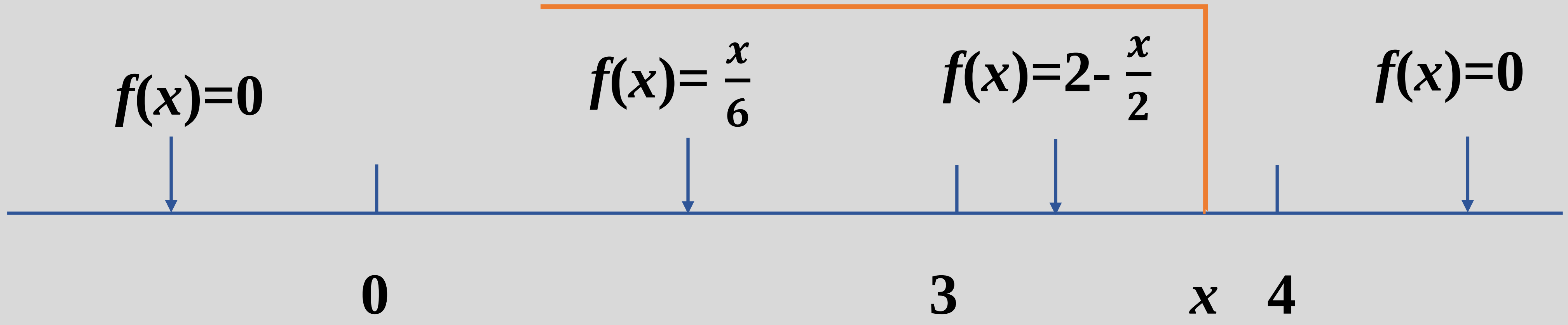


$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \qquad -\infty < x < \infty$$

- 当 $3 \le x < 4$ 时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0 + \int_{0}^{3} \frac{x}{6}\,dx + \int_{3}^{x} (2 - \frac{t}{2})\,dt$$

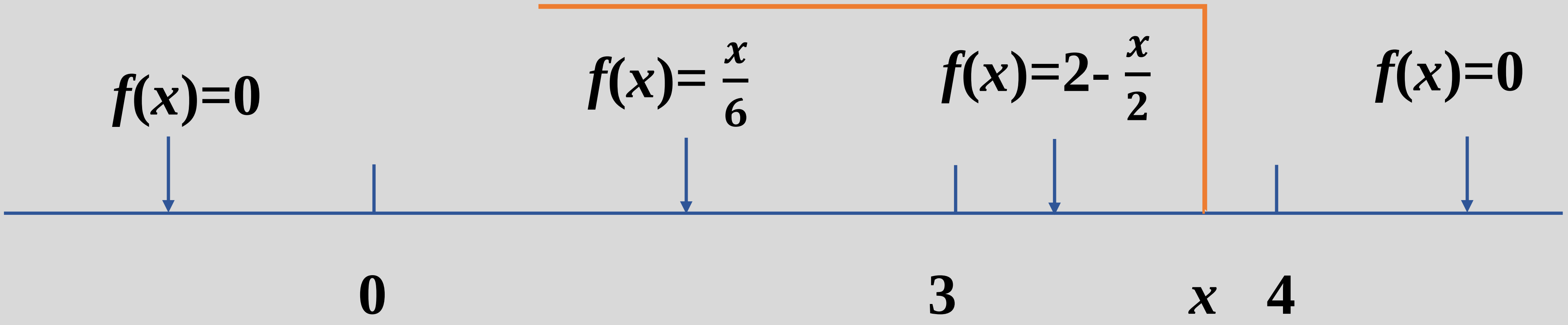
$$= -3 + 2x - \frac{x^2}{4}$$



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy,\qquad -\infty<x<\infty$$

- 当 $x\geq 4$ 时，

$$F(x)=\int_0^3 \frac{x}{6}\,dx+\int_3^4 \left(2-\frac{x}{2}\right)dx+\int_4^x 0\,dt\ =1$$



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy,\qquad -\infty<x<\infty$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\le x<3,\\[2mm] 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x<4,\\[2mm] 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\[2mm] \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\[2mm] -3+2x-\dfrac{x^2}{4} & 3\le x<4,\\[2mm] 1, & x\ge 4\end{cases}$$

概 率 密 度

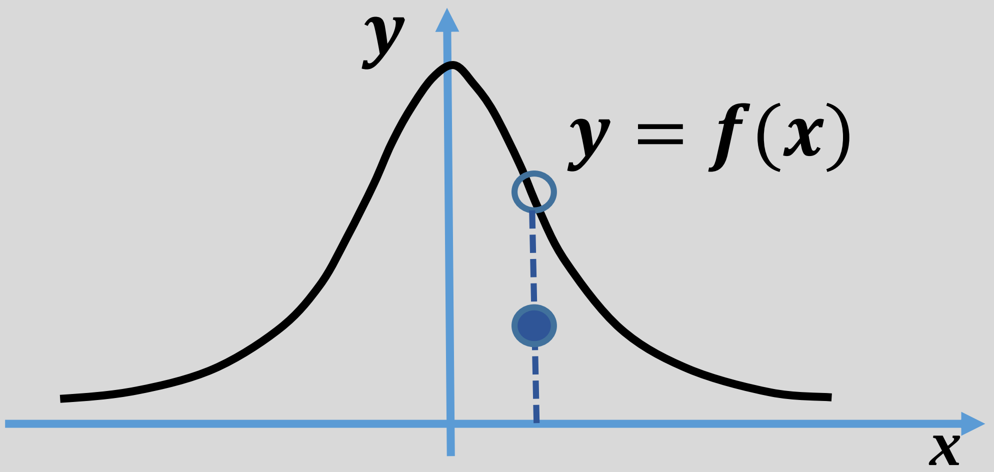
问 题

连续型随机变量的概率密度函数一定连续吗？

连续型随机变量的概率密度函数不一定连续，且不唯一

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt$$



概 率 密 度

问 题

分布函数连续的随机变量一定是连续型的吗？

怎样判断一个随机变量是连续型随机变量？

怎样由分布函数求连续型随机变量的概率密度

概率密度

定理

设随机变量X的分布函数$F(x)$是连续的，且除有限多个点

$(C_1 < C_2 < \cdots < C_n)$ 外，导数$F'(x)$存在且连续，

则X是连续型随机变量，它具有如下的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & x \notin \{c_1, \ldots c_n\} \\ 0, & x \in \{c_1, \ldots c_n\} \end{cases}$$

概率密度

例2 设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -a, \\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a, \\ 1, & x>a, \end{cases}$$

(1) 求常数A, B　(2) 求X的概率密度

概率密度

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a\le x<a,\\ 1, & x\ge a,\end{cases}$$

解：　因为连续型随机变量X的分布函数连续，故有

$$\begin{cases}F(-a)=F(-a-0) \Longrightarrow A-\dfrac{\pi}{2}B=0\\ F(a)=F(a-0) \Longrightarrow A+\dfrac{\pi}{2}B=1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow A=\frac{1}{2}\qquad B=\frac{1}{\pi}$$

概率密度

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a\le x<a,\\ 1, & x\ge a,\end{cases}$$

(2) $$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

小　　结

重要问题

已知概率密度求事件的概率 (包含求分布函数)

已知分布函数求概率密度

$$\text{概率密度} \underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}} \text{分布函数}$$

常见连续型随机变量的分布

均匀分布

指数分布

正态分布

均 匀 分 布

设X为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的连续型随机变量。

若X的概率密度函数为

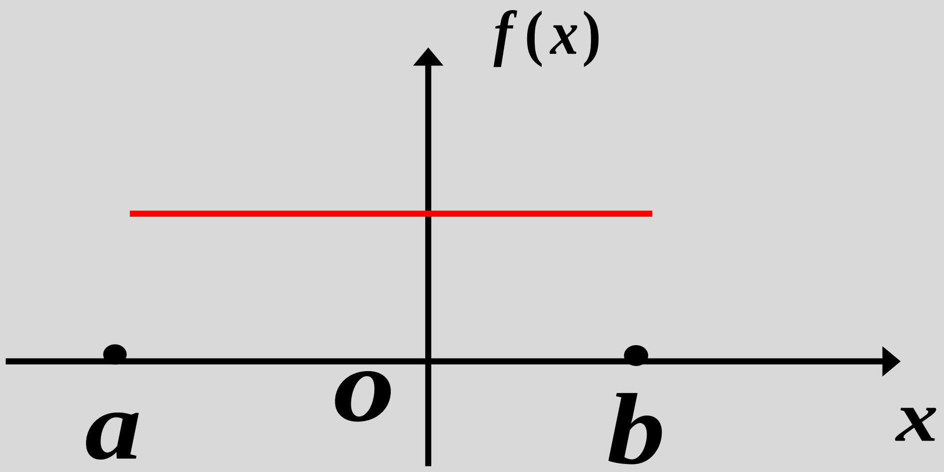
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

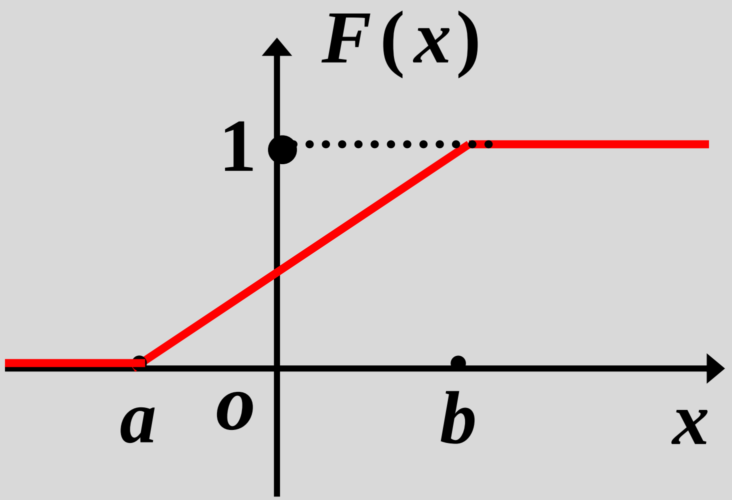
其中$a < b$为常数，则称X服从区间$[a, b]$上的均匀分布，

记为 $X \sim U\,[a, b]$.

均匀分布

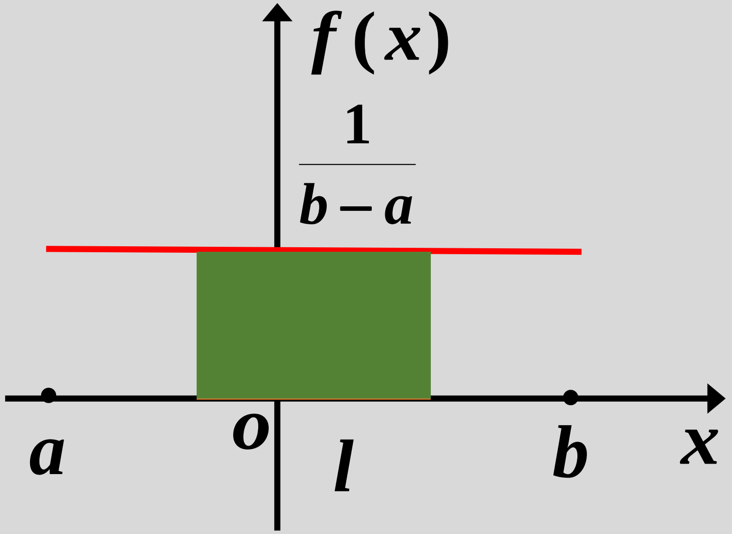
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \Longrightarrow F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$





均匀分布的性质

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$$\forall [c, c+l] \subset [a,b], \quad P(c < X \le c+l) = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}$$

均匀分布

例1　设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于3 的概率.

解：X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 2\le x\le 5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

设 A 表示“对 X 的观测值大于 3”，即 $A=\{X>3\}$.

$$P(A)=P(X>3)=\int_3^5 \frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$$

$A=\{X>3\}$ $P(A)=\frac{2}{3}$

例1 设随机变量 X 在 $[2,5]$上服从均匀分布，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于3 的概率.

设Y 表示3次独立观测中观测值大于3的次数,则

$$Y\sim B(3,\frac{2}{3})$$

$$P(Y\geq 2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^0=\frac{20}{27}$$

指 数 分 布

设X为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的连续型随机变量，若X的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

其中$\lambda>0$为常数，则称X服从参数为λ的指数分布， 记为 $X \sim E(\lambda)$.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

指数分布

例2　设某类日光灯管的使用寿命X 服从参数为λ的指数分布(单位:小时)

有一只这种灯管已经正常使用了s 小时以上,

求还能使用t小时以上的概率.

解:

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$P(X > s+t | X > s) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{\int_{s+t}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_{s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

指 数 分 布

例3 设某设备在任何长为t的时间内发生故障的次数$N(t)$服从$P(\lambda t)$.

1) 求相继两次故障之间的时间间隔T的概率分布；

2) 求在设备已经无故障工作8h的条件下，再无故障运行8h的概率.

分析：1) 求T的分布函数 $F_T(t)$. 因为$T \geq 0$, 故当$t < 0$时,

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 0$$

$$N(t) \sim P(\lambda t) \Longrightarrow P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

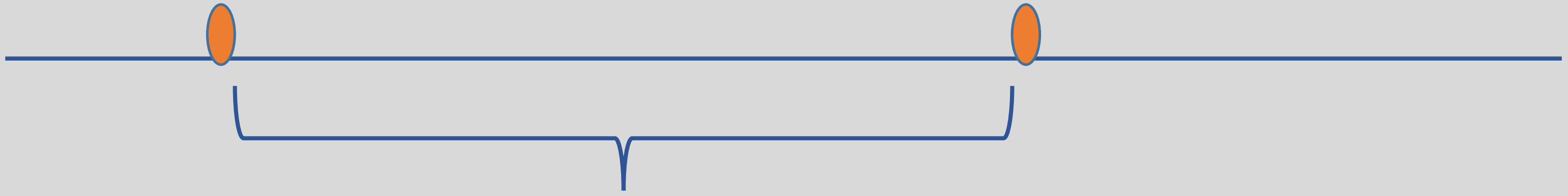
$$N(t) \sim P(\lambda t) \Longrightarrow P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,\ldots$$

$N(t)$：任何长为t的时间内发生故障的次数

当$t \geq 0$时，$F_T(t)=P(T \leq t) = 1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$

若$T>t$，则 $N(t)=0$　　反之，若 $N(t)=0$，则 $T>t$

即：$\{T>t\}=\{N(t)=0\}$



相继两次故障的时间间隔 $T>t$ 时

常见连续型随机变量的分布

均匀分布 $X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & 其它 \end{cases}$

指数分布 $X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

正态分布

正态分布

设X为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的连续型随机变量。

若X的概率密度函数为

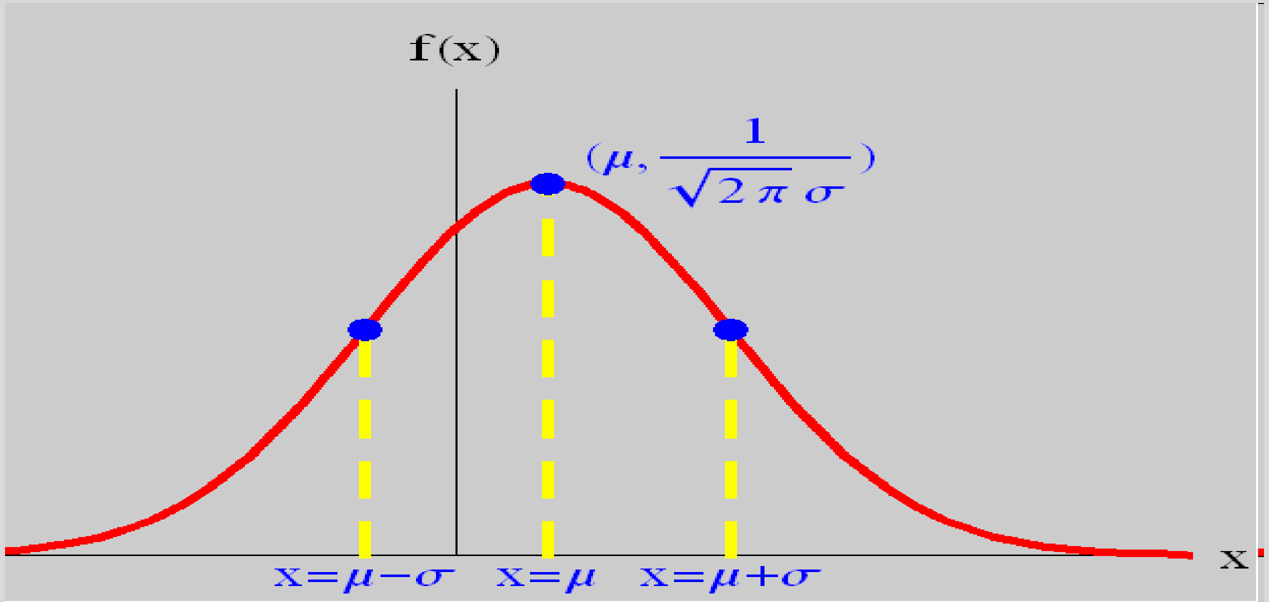
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

其中$-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$为常数，则称$X$服从参数为$\mu, \sigma^2$的正态分布，

记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

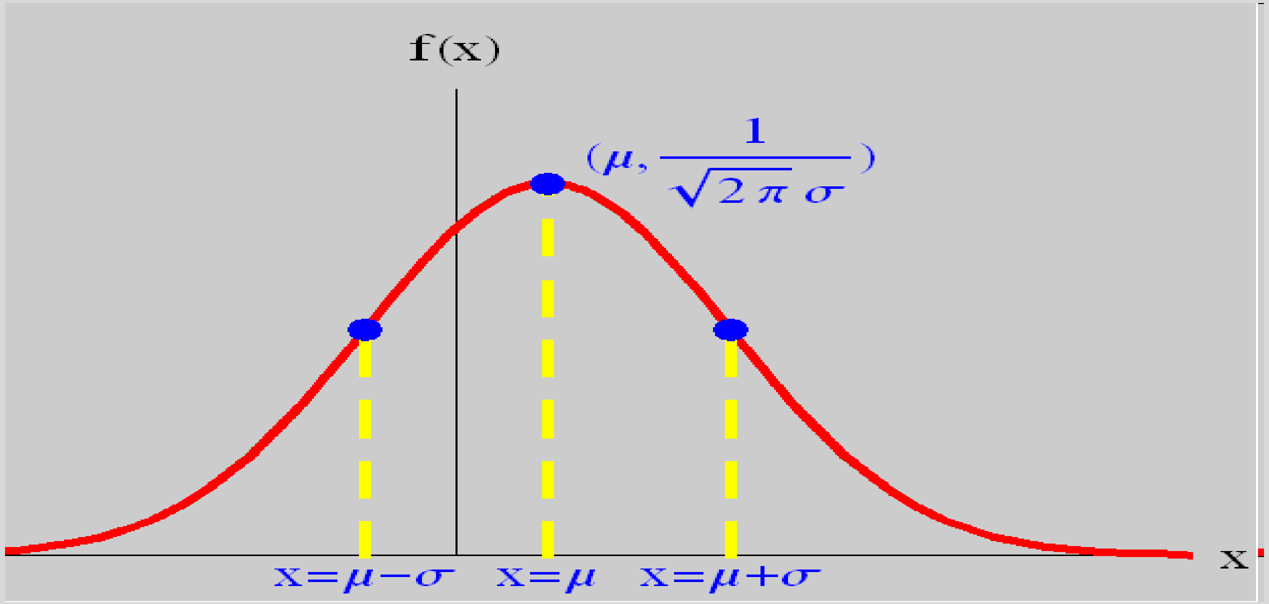
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

$x=\mu$时，$f_{max}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

曲线关于$x=\mu$对称



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

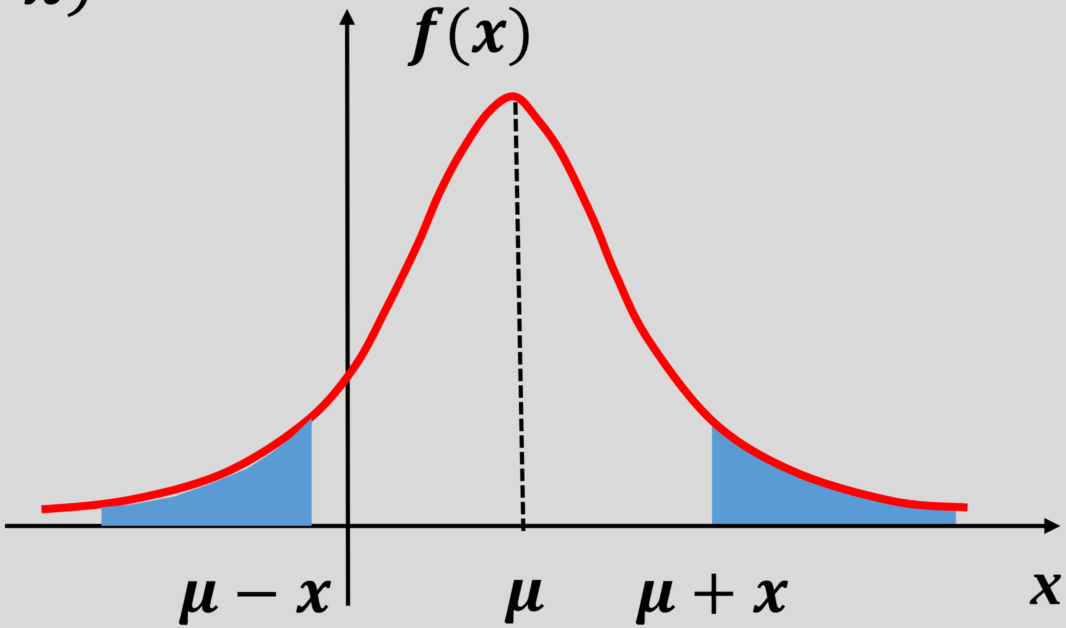
曲线关于$x=\mu$对称

$$P(X\le\mu-x)=P(X\ge\mu+x)$$

$$P(X\le\mu)=P(X\ge\mu)$$

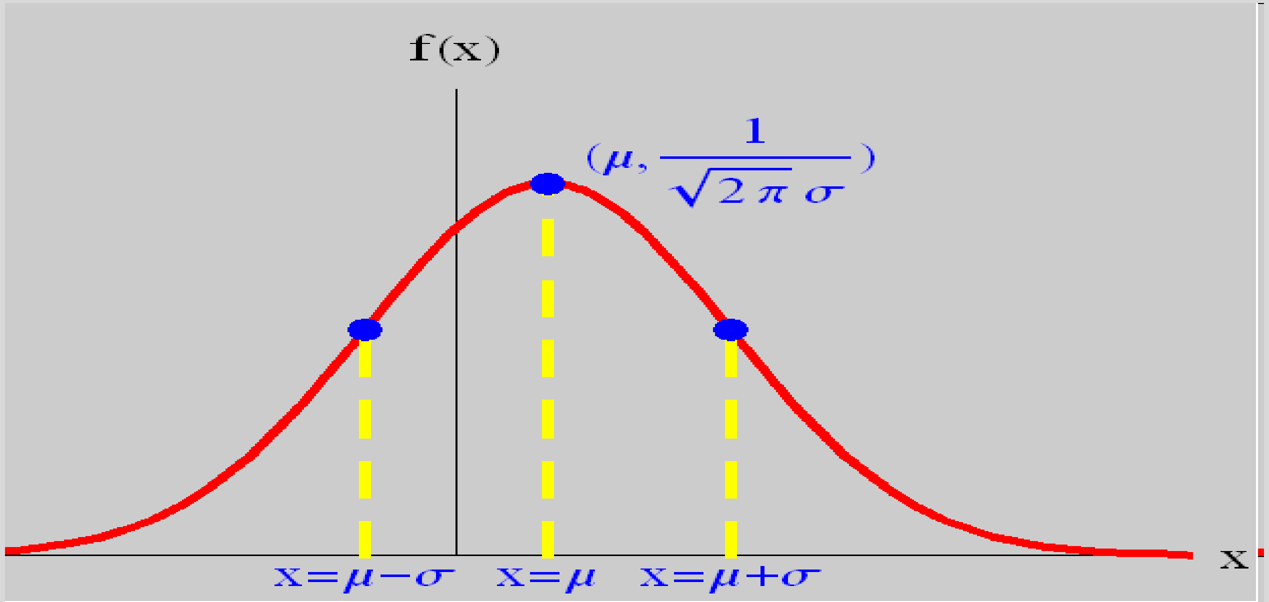
$$P(X\le\mu)+P(X\ge\mu)=1$$

$$F(\mu)=P(X\le\mu)=\frac{1}{2}$$



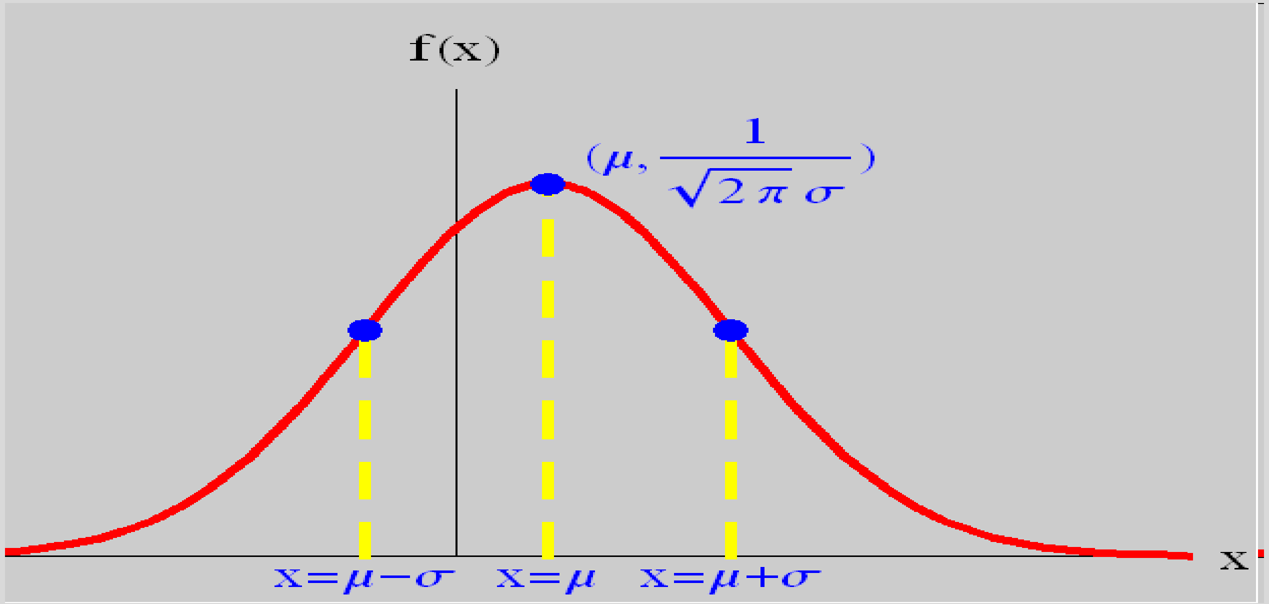
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

曲线在$x=\mu\pm\sigma$处有拐点



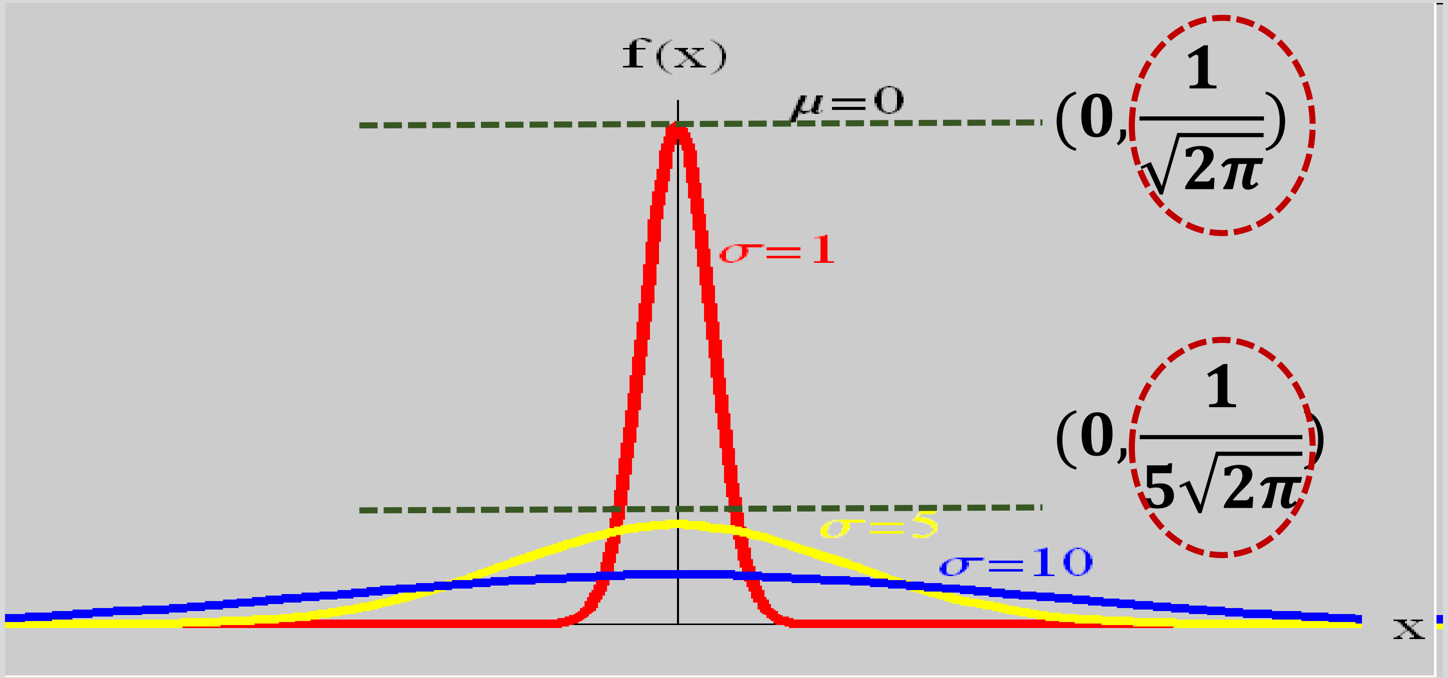
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

$x \to \infty$时，曲线以x轴为渐近线



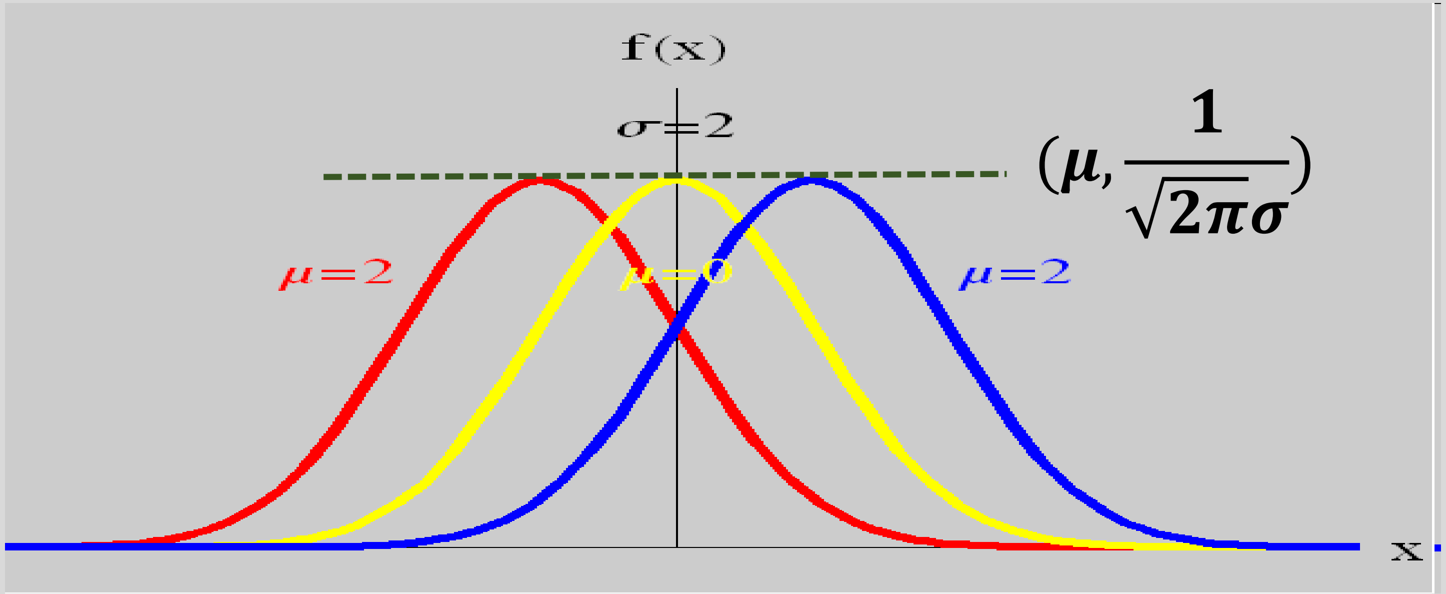
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

当μ固定时，σ的值越小，$f(x)$的图形越尖；σ的值越大，$f(x)$的图形越平；



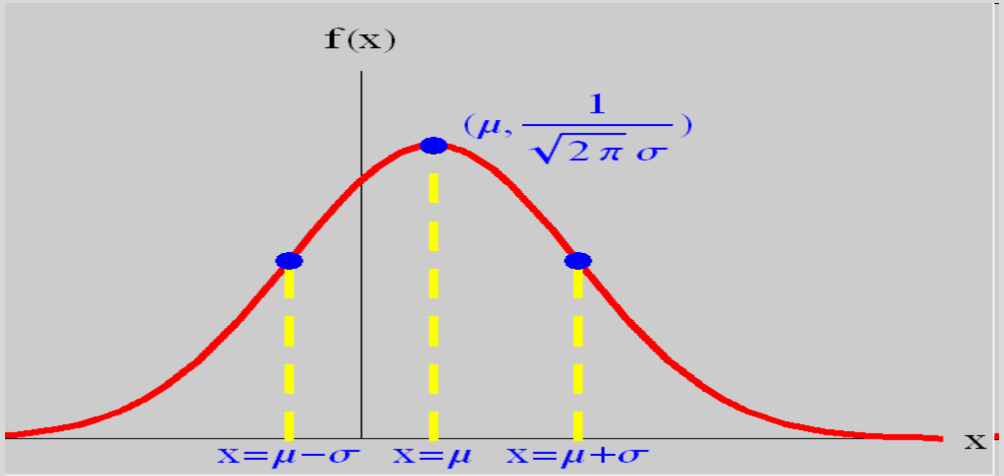
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

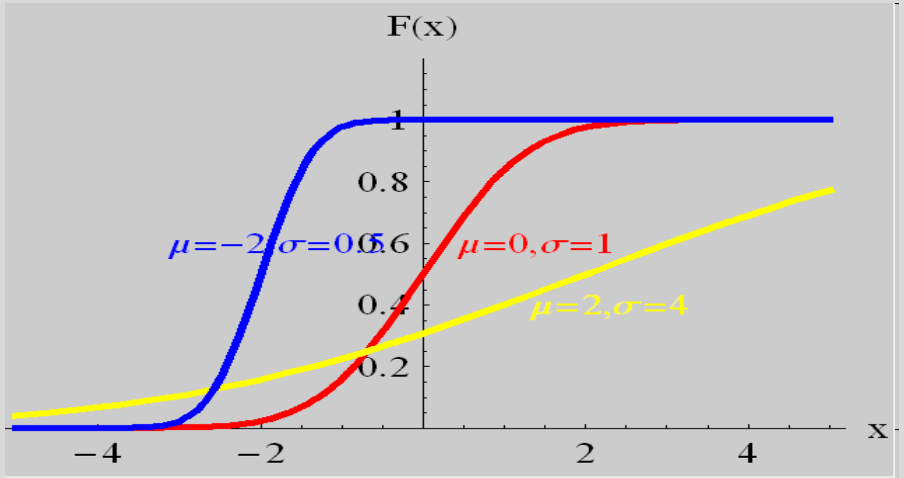
当σ固定时，$f(x)$的图形的形状保持不变，位置随着μ的变化而沿x轴平移



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$





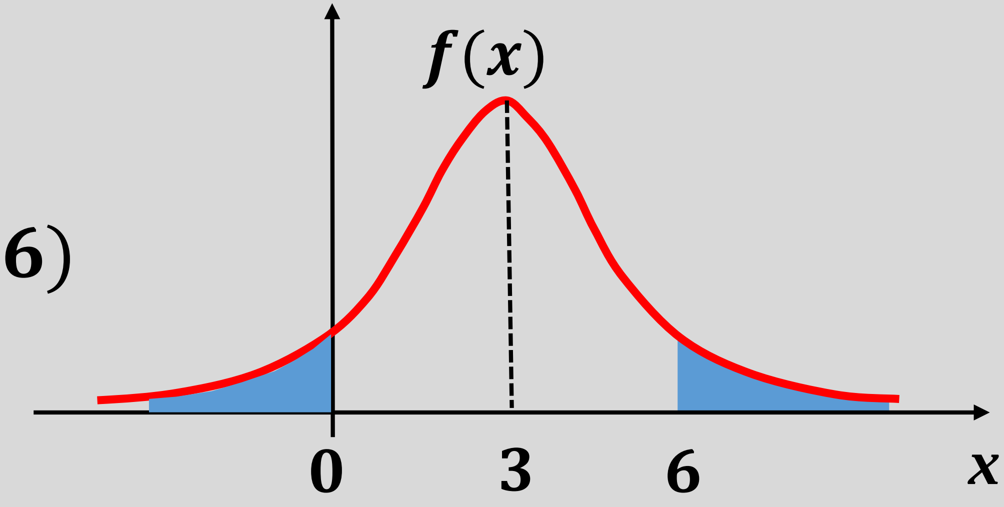
$P(X \le \mu - x) = P(X \ge \mu + x), x > 0$

例1 已知 $X \sim N(3, \sigma^2)$ 且 $P(3 < X < 6) = 0.4$. 求 $P(X < 0)$

解： $P(X < 0) = P(X \ge 6)$

$= P(X > 3) - P(3 < X < 6)$

$= 0.5 - 0.4 = 0.1$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

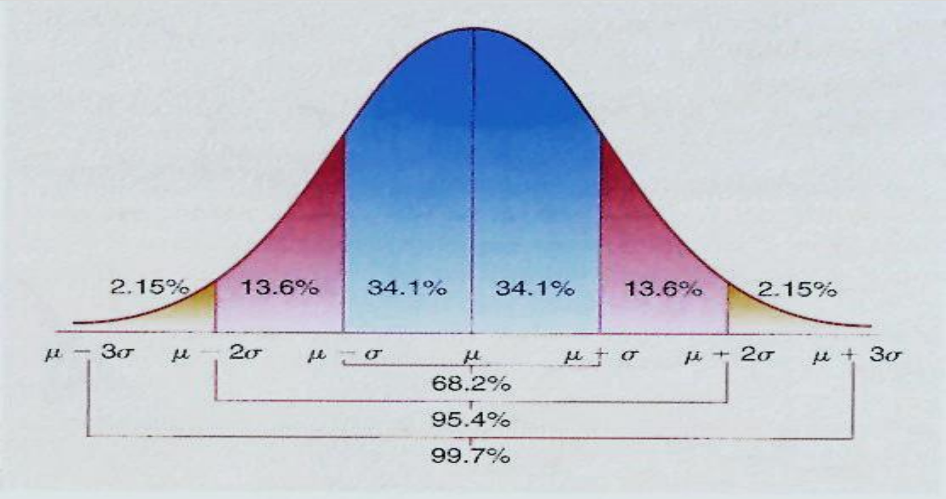
$$P(\mu - \sigma \le X < \mu + \sigma) \approx 0.683$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(\mu - 2\sigma \le X < \mu + 2\sigma) \approx 0.954$$

$$P(\mu - 3\sigma \le X < \mu + 3\sigma) \approx 0.997$$

$$P(|X - \mu| > 3\sigma) \approx 0.003$$



标准正态分布

X服从标准正态分布 $\longleftrightarrow$ $X \sim N(0,1)$

标准正态分布的概率密度表示为

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty}$$

标准正态分布的分布函数表示为

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty < x < \infty}$$

正态分布的概率计算

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{t-\mu}{\sigma}}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

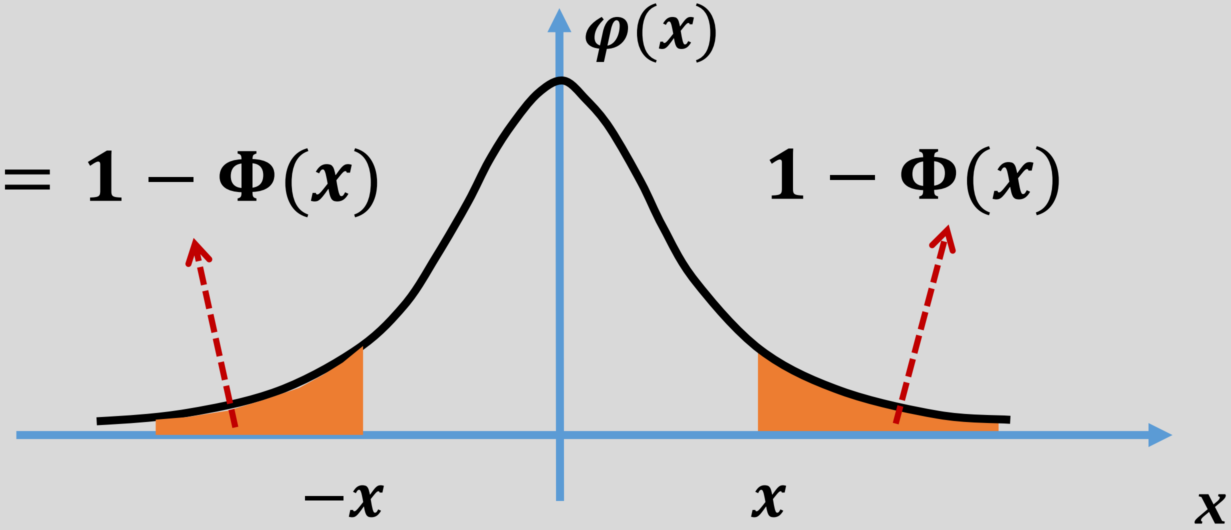
$$P(X > b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

正态分布的概率计算

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

若 $X \sim N(0,1)$, 则 $1 - \Phi(x) = 1 - P(X \le x) = P(X > x)$

$$\Phi(-x) = P(X \le -x) = 1 - \Phi(x)$$



正态分布的概率计算

例2 已知 $X \sim N(8,4^2)$ 求 $P(X\leq 16), P(0<X\leq 10)$

解： $$P(X\leq 16)=\Phi\left(\frac{16-8}{4}\right)=\Phi(2)\approx 0.9772$$

$$P(0<X\leq 10)=\Phi\left(\frac{10-8}{4}\right)-\Phi\left(\frac{0-8}{4}\right)$$

$$=\Phi(0.5)-\Phi(-2)=\Phi(0.5)-1+\Phi(2)$$

$$\approx 0.6915+0.9772-1\approx 0.6687$$

正态分布的概率计算

例3　一种电子元件的使用寿命 $X \sim N(100, 15^2)$某仪器上装有3个这种元件，3个元件损坏与否相互独立.

求：使用的最初90小时内无一元件损坏的概率.

解：设 A={元件在使用的最初90小时内损坏},则

$$P(A) = P(X < 90) = \Phi(-0.67) = 1 - \Phi(0.67) \approx 0.25$$

设 Y：在使用的最初90小时内损坏的元件数, $Y \sim B(3, 0.25)$

$$P(Y = 0) = (1 - 0.25)^3 \approx 0.42$$

正态分布小结

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

$$X \sim N(0, 1) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

连续型随机变量

主要内容

连续型随机变量的概率密度的定义及性质

常见连续型随机变量的分布