武汉大学2020-2021第一学期高等数学B1期末试卷 A卷

1、（9 分） 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

2、（9 分）已知曲线满足方程$x+y+e^{2xy}=0$，求曲线在点$(0,-1)$处的法线方程.

3、（10 分）求由曲线$y=e^x, y=\ln x, x=1, x=2$所围成的图形的面积.

4、（10 分）（1）求齐次线性微分方程$y'''-y''-2y'=0$的通解；

（2）求该方程满足初始条件$y(0)=0, y'(0)=y''(0)=3$的特解.

（3）对于非齐次方程$y'''-y''-2y'=1+xe^{2x}$，用待定系数法给出特解的形式（无需求出其中的待定系数的数值）.

5、（9 分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}\right)^n$.

6、（7 分）求不定积分$\displaystyle\int\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

7、（7 分）设$f(x)=\ln(1+x^2)$，计算反常积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^2(x)+2f(x)+5}\,dx$.

8、（7 分） 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}\,dt}{x(x+\sin x)}$.

9、（7 分）等角螺线的极坐标方程为$\rho=e^\theta$，在$\theta=0$附近，其在直角坐标系下可由函数$y=y(x)$表示，试求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=0}$以及$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=0}$.

10、（7 分）计算星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$的弧长，其中$a>0, t\in[0,2\pi]$.

11、（7 分）计算函数$f(x)=\begin{cases}x+x^2\sin\dfrac{1}{x^3}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$的导函数；并讨论：是否存在$\delta>0$，使得函数$f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内单调递增？说明理由.

12、（6 分）求解常微分方程：$xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

13、（5 分）设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有连续的二阶导数，证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

武汉大学 2020-2021 第一学期高等数学 B1 期末试卷 A 卷　参考解答

1、（9 分）　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解：　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\right)$　　5 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{2x}\right)=\dfrac{1}{2}$　　9 分

2、（9 分）已知曲线满足方程$x+y+e^{2xy}=0$，求曲线在点$(0,-1)$处的**法线**方程.

解：对方程$x+y+e^{2xy}=0$两边关于x求导得：$1+y'+2e^{2xy}(y+xy')=0$，　　4 分

代入$x=0, y=-1$解得$y'\big|_{x=0,y=-1}=1$.　　7 分

因此，法线的斜率为-1, 在点$(0,-1)$处的法线方程为：$y=-x-1$.　　9 分

3、（10 分）求由曲线$y=e^x, y=\ln x, x=1, x=2$所围成的图形的面积.

解：显然当$x\in[1,2]$时有$e^x>\ln x$，因此面积

$S=\int_1^2\left(e^x-\ln x\right)dx$　　5 分

$=\int_1^2 e^x\,dx-\int_1^2\ln x\,dx=e^x\big|_1^2-\int_1^2\ln x\,dx$　　8 分

$=e^2-e-x\ln x\big|_1^2+\int_1^2 x\,d\ln x=e^2-e-2\ln 2+1$　　10 分

4、（10 分）（1）求齐次线性微分方程$y'''-y''-2y'=0$的通解；

（2）求该方程满足初始条件$y(0)=0, y'(0)=y''(0)=3$的特解.

（3）对于非齐次方程$y'''-y''-2y'=1+xe^{2x}$，用待定系数法给出特解的形式（无需求出其中的待定系数的数值）.

解：(1) 该微分方程的特征方程为：$\lambda^3-\lambda^2-2\lambda=0$，　　4 分

它有特征根：$\lambda_0=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=2,$ 故而该齐次线性微分方程的通解为：

$y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$　　6 分

（2）代入初值条件得方程组：$C_1+C_2+C_3=0,\ -C_2+2C_3=3,\ C_2+4C_3=3$，解得：

$C_1=0,\ C_2=-1,\ C_3=1$，得微分方程的特解为：$y=e^{2x}-e^{-x}$.　　8 分

（3）特解的形式为：$y^*=C_1+x(C_2+C_3x)e^{2x}$.　　10 分

5、（9 分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}\right)^n$.

解：　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right)}$　　5 分

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}}=e^{\frac{1}{2}}$　　9 分

6、（7 分）求不定积分$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\arcsin x)^2}\,\mathrm{d}\arcsin x$ 4 分

$= -\frac{1}{\arcsin x} + C$ 7 分

7、（7 分）设 $f(x)=\ln(1+x^2)$，计算反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)+2f(x)+5}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)+2f(x)+5}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(f(x)+1)^2+4}\,\mathrm{d}f(x)$ 3 分

$= \frac{1}{2}\arctan\frac{f(x)+1}{2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\arctan\frac{\ln(1+x^2)+1}{2}\Big|_0^{+\infty}$ 5 分

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2}\right)$ 7 分

8、（7 分） 求极限:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x(x+\sin x)}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x(x+\sin x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{2x^2}$ 3 分

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\sin x}{4x}$ 5 分

$= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-1}$ 7 分

9、（7 分）等角螺线的极坐标方程为 $\rho = \mathrm{e}^{\theta}$，在 $\theta = 0$ 附近，其在直角坐标系下可由函数 $y=y(x)$ 表示，试求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{\theta=0}$ 以及$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{\theta=0}$.

解：可以将方程改写成参数方程$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{\theta}\cos\theta \\ y = \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta \end{cases}$，则

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{\theta=0} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\Bigg|_{\theta=0} = \frac{\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta + \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta}{\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta - \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta}\Bigg|_{\theta=0} = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\Bigg|_{\theta=0} = 1$ 4 分

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{\theta=0} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\Bigg|_{\theta=0} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\Bigg|_{\theta=0} = \frac{\frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2}{(\cos\theta-\sin\theta)^2}}{\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta - \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta}\Bigg|_{\theta=0} = 2$ 7 分

10、（7 分）计算星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$的弧长，其中 $a>0, t\in[0,2\pi]$.

解：曲线弧长 $s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$ 分

$$=3a\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\cos t\sin t\right)^2}\,\mathrm{d}\,t=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,\mathrm{d}\,t=6a$$ 7 分

11、（7 分）计算函数 $f(x)=\begin{cases}x+x^2\sin\dfrac{1}{x^3}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导函数；并讨论：是否存在 $\delta>0$，使得函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内单调递增？说明理由.

解：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=1+2x\sin\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^3}$，另一方面，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\sin\frac{1}{x^3}}{x}=1，因此\ f'(x)=\begin{cases}1+2x\sin\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^3}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$ 3 分

对任意 $\delta>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{([\frac{1}{\delta}]+1)\sqrt[3]{2\pi}}$，显然 $0<x_0<\delta$ 且 $x_0<1$，代入 $f'(x)$ 可得：

$f'(x_0)=1-\dfrac{3}{x_0}<0$，由于导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\subset(-\delta,\delta)$，且 $f'(x)$ 在区间 $[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ 内小于 0，即有 $f(x)$ 在区间 $[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ 单调递减，因此，不存在 $\delta>0$，使得函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内单调递增. 7 分

12、（6 分）求解常微分方程：$xy'+2y+x^5y^3\,\mathrm{e}^x=0$.

解：显然 $y\equiv 0$ 是方程的特解；当 $y\neq 0$ 时方程两边同除以 xy^3 的方程：

$$y^{-3}y'+\frac{2}{x}y^{-2}+x^4\,\mathrm{e}^x=0，$$

令 $z=y^{-2}$，有 $\dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}=-2y^{-3}\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$，原方程就可化为如下线性方程： 3 分

$$z'=\frac{4}{x}y^{-2}+2x^4\,\mathrm{e}^x，$$

用一阶线性微分方程的求解公式得：$y^{-2}=z=x^4(2\,\mathrm{e}^x+C)$ 6 分

13、（5 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

证明：令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$，由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，因此 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的三阶导数，取 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，由泰勒公式得：

$$F(a)=F(x_0)+F'(x_0)(a-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\frac{F'''(\xi_1)}{3!}(a-x_0)^3,\ \xi_1\in(a,x_0)$$

$$F(b)=F(x_0)+F'(x_0)(b-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2+\frac{F'''(\xi_2)}{3!}(b-x_0)^3,\ \xi_2\in(x_0,b)$$ 3 分

利用$b-x_0=-(a-x_0)$，上述两式相减得：

$$F(b)-F(a)=F'(x_0)(b-a)+\frac{F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3,\ \xi_1\in(a,x_0),\xi_2\in(x_0,b)$$

即有：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}\left(\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\right)$. 由于$f''(x)$在区间$[a,b]$上连续，

由介值定理可知至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$. 因此

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$ 5 分