古典概型与等可能概型

- 古典概率
  - 试验结果有限
  - 等可能发生
- 几何概率
  - 试验结果无穷多个
  - 等可能发生

古 典 概 型

古典概型

- 试验的样本空间只包含有限个样本点
- 试验中每个基本事件发生的可能性相同

古 典 概 率

样本空间Ω包含的样本点的个数 $=n(\Omega)$

事件 A 包含的样本点的个数 $=n(A)$

$$P(A)=\frac{A\text{中元素的个数}}{\Omega\text{中元素的个数}}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

古 典 概 率

例 设袋中有4只红球和6只黑球，我们采用下述抽样方式从中摸球3次，求前2次摸到黑球，第3次摸到红球的概率

1) 有放回摸球

2) 不放回摸球

有 放 回 摸 球

Ω ={有放回摸球3次出现的所有可能}　$n(\Omega) = 10 \times 10 \times 10$

A ={出现前两次黑球，第3次红球的所有可能}　$n(A) = 6 \times 6 \times 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6 \times 6 \times 4}{10 \times 10 \times 10}$$

不 放 回 摸 球

Ω= {不放回摸球3次出现的所有可能}　$n(\Omega) = 10 \times 9 \times 8$

A= {摸到前两次黑球，第3次红球的所有可能} $n(A) = 6 \times 5 \times 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8}$$

有放回抽样与不放回抽样

有放回摸球

每次摸球后，球的分布不变

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6\times 6\times 4}{10\times 10\times 10}$$

每次摸球后，球的分布改变

不放回摸球

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6\times 5\times 4}{10\times 9\times 8}$$

古 典 概 率

例 设袋中有4只红球和6只黑球，我们采用下述抽样方式从中摸球3次，求2次摸到黑球，1次摸到红球的概率

1）有放回摸球

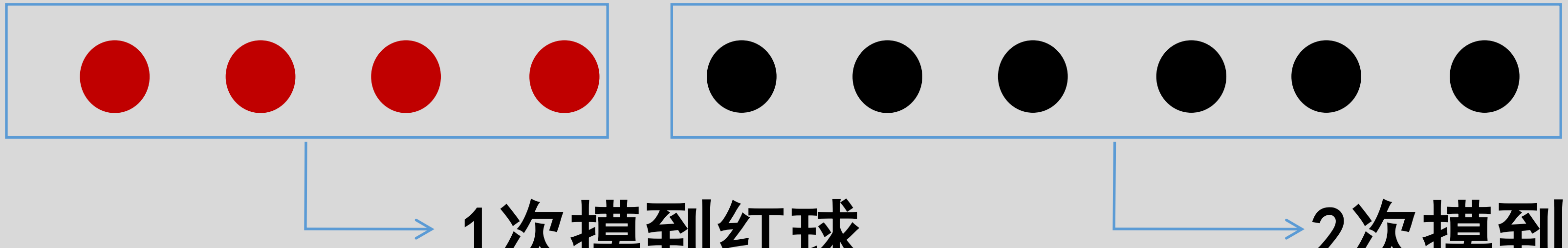
2）不放回摸球

有 放 回 摸 球

Ω ={有放回摸球3次出现的所有可能} $n(\Omega) = 10 \times 10 \times 10$

A ={2次黑球，1次红球的所有可能} $n(A) = 6 \times 6 \times 4 \times C_3^2$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6 \times 6 \times 4 \times C_3^2}{10 \times 10 \times 10} = \frac{6 \times 6 \times 4 \times 3}{10 \times 10 \times 10}$$



不 放 回 摸 球

Ω= {不放回摸球3次出现的所有可能}　$n(\Omega) = C_{10}^{3}$

A= {2次黑球，1次红球的所有可能}　$n(A) = C_{6}^{2}C_{4}^{1}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{6}^{2}C_{4}^{1}}{C_{10}^{3}} = \frac{6\times 5\times 4\times 3}{10\times 9\times 8}$$

有放回抽样与不放回抽样

有放回摸球

$\downarrow$

二项分布

超几何分布

$\uparrow$

不放回摸球

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6\times 6\times 4\times C_3^2}{10\times 10\times 10}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}$$

几 何 概 型

几何概型

所有可能的试验结果形成$\mathbb{R}^n$的一个有界区域Ω

对Ω的每个具有测度的子集A,试验的结果落入A的概率与A的测度成正比，而与A的位置和形状无关

等可能性

几 何 概 型

$$A\text{的测度}S(A)=\begin{cases} \text{长度} & n=1 \\ \text{面积} & n=2 \\ \text{体积} & n=3 \end{cases}$$

A为$\mathbb{R}^n$的一个有界区域 $\Longleftrightarrow$ $0 < S(A) < \infty$

几 何 概 型

$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$：有界　$A(\subset \Omega)$：具有测度$S(A)$

试验结果落入A的概率与A的测度成正比

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} P(A) = k\,S(A) \\ P(\Omega) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow kS(\Omega) = 1 \Longrightarrow k = \frac{1}{S(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}}$$

几 何 概 型

会面问题

甲、乙两人相约在 6时 到7 时之间在某处会面.

并约定先到者等候另一人15分钟，过时即离去.

设每人在这段时间内各时刻到达该地是等可能的,

求甲、乙两人能会面的概率.

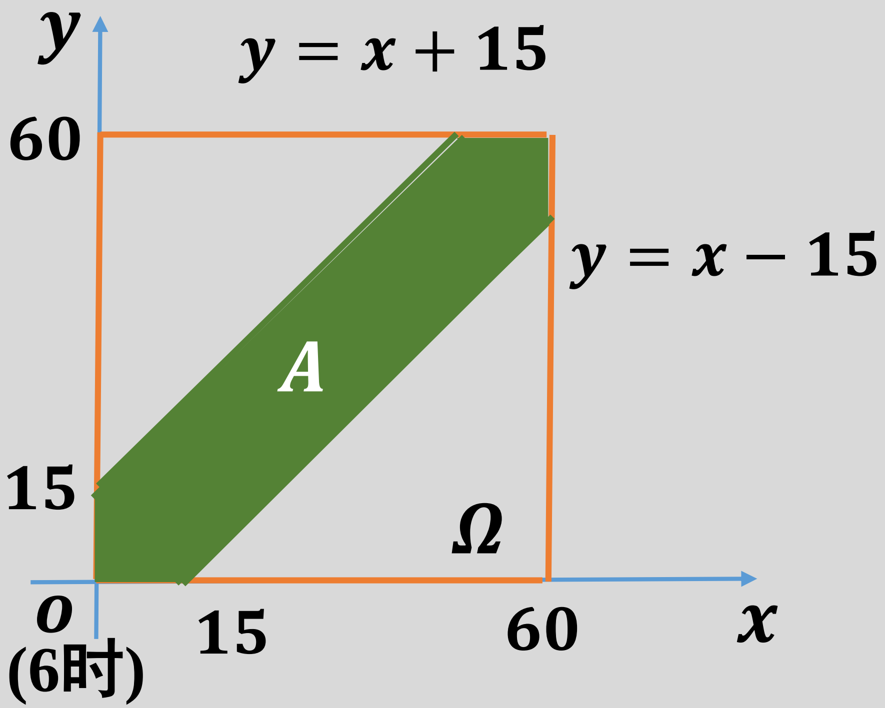
几 何 概 型

解： A={甲、乙两人能会面}

甲到达约会地点的时间 $\Longrightarrow x$

乙到达约会地点的时间 $\Longrightarrow y$

两人会面 $\Longleftrightarrow |x-y| \le 15$



$$S(\Omega) = 60^2$$

$$S(A) = 60^2 - (60-15)^2$$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{7}{16}$$

小　　　　结

$$P(A)=\frac{A\text{中元素的个数}}{\Omega\text{中元素的个数}}$$

古典概率

几何概率

$$P(A)=\frac{A\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$$

试验结果有限

等可能发生

试验结果无穷多个