假 设 检 验

假设检验　根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确

假设检验
- 参数假设检验
  - 总体分布已知，检验关于未知参数的某个假设
- 非参数假设检验
  - 总体分布未知时的假设检验问题

假设检验的基本思想与概念

引例：某工厂生产10欧姆的电阻. 根据以往生产的电阻实际情况,

可以认为其电阻值 $\boxed{X\sim N(\mu,\sigma^2)}$, 标准差 $\boxed{\sigma=0.1.}$

正态总体

方差已知

现在随机抽取$\boxed{10个}$电阻, 测得它们的电阻值为:

$n=10$

10.1, 10.1, 10.2, 9.8, 9.9, 9.9, 10.2, 10.2, 10.1, 10.2.

试问:我们能否认为该厂生产的电阻的平均值μ为10欧姆?

对总体均值进行检验 $\mu_0=10$

问 题 的 建 立

确定总体:设该厂生产的电阻的测量值为X, 则 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma = 0.1$.

明确任务:通过样本去检验“X的均值 $\mu = 10$”是否成立.

假设: 记 H_0: $\mu = 10$ $\longleftrightarrow$ H_1: $\mu \neq 10$

称H_0为原假设或零假设, H_1为备择假设或对立假设.

解决问题的思路分析

如果原假设成立, 即 $\mu = 10 = \mu_0$, 那么 $|\bar{X} - \mu| = |\bar{X} - \mu_0|$ 应该比较小，

反之，如果 $|\bar{X} - \mu_0|$ 的值过大，那么可以推断原假设不成立.

由于方差σ^2已知, 且若原假设H_0为真，

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Longrightarrow \boxed{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

检验统计量

如果$|\bar{X}-\mu_0|$的值过大，那么可以推断原假设不成立

$$u=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

如何求常数C, 使得

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\geq C \Longrightarrow \text{拒绝原假设}$$

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|< C \Longrightarrow \text{接受原假设}$$

解决问题的思路分析

可能犯的两类错误

第一类错误(弃真)　$P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\}=\alpha$

显著性水平

第二类错误(取伪)　$P\{\text{接受}H_0|H_1\text{为真}\}=\beta$

原则：优先控制犯第一类错误的概率

解决问题的思路分析

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

求常数C, 使得

$$C = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \geq C \middle| H_0\text{为真}\right\} = P_{H_0}\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \geq \boxed{C}\right\} = \alpha$$

$$P_{H_0}\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha$$

带入观察值得 $$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\frac{10.07-10}{\frac{0.1}{\sqrt{10}}}\right| \approx 2.26 > 1.96 = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

拒绝域

即观察值落入区域 $$\boxed{W=\left\{(x_1,\ldots,x_n):\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}}$$

- 故拒绝原假设, 认为该厂生产的电阻均值不等于为10欧姆.

$n=10 \quad \overline{x}=10.07 \quad \sigma=0.1 \quad \alpha=0.05 \quad z_{0.025}=1.96$

基本概念与检验步骤

- 提出原假设: $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

  H_0为原假设或零假设，H_1为备择假设或对立假设.

- 选定检验统计量: $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ (σ已知)

- 确定拒绝域: $W = \left\{ (x_1, \dots, x_n): \left| \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$

- 取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设

假设检验的基本思想

提出原假设 ⟹ 在原假设正确的条件下构造一个小概率事件

实际推断原理：“一个概率很小的事件在一次试验中是几乎不可能发生”

小概率事件发生 ⟹ 拒绝原假设

小概率事件没有发生 ⟹ 接受原假设

正态总体均值与方差的假设检验

单个正态总体均值的假设检验
- 方差σ^2已知时，对均值μ的假设检验
- 方差σ^2未知时，对均值μ的假设检验

对均值μ的双侧假设检验

$H_0: \mu = \mu_0 \Longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

对均值μ的右侧假设检验

$H_0: \mu = \mu_0 \Longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$

$H_0: \mu \leq \mu_0 \Longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$

对均值μ的左侧假设检验

$H_0: \mu = \mu_0 \Longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$

$H_0: \mu \geq \mu_0 \Longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$

正态总体均值与方差的假设检验

单个正态总体方差的假设检验

- 均值μ已知时，对方差σ^2的假设检验
- 均值μ未知时，对方差σ^2的假设检验

对方差σ^2的双侧假设检验

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

对方差σ^2的右侧假设检验

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

对方差σ^2的左侧假设检验

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$