5.3 习题解析

1. 如图 5.1 所示有一棵已知底层节点值的博弈树，假若 A 在极大值层，它该选什么样的走步？

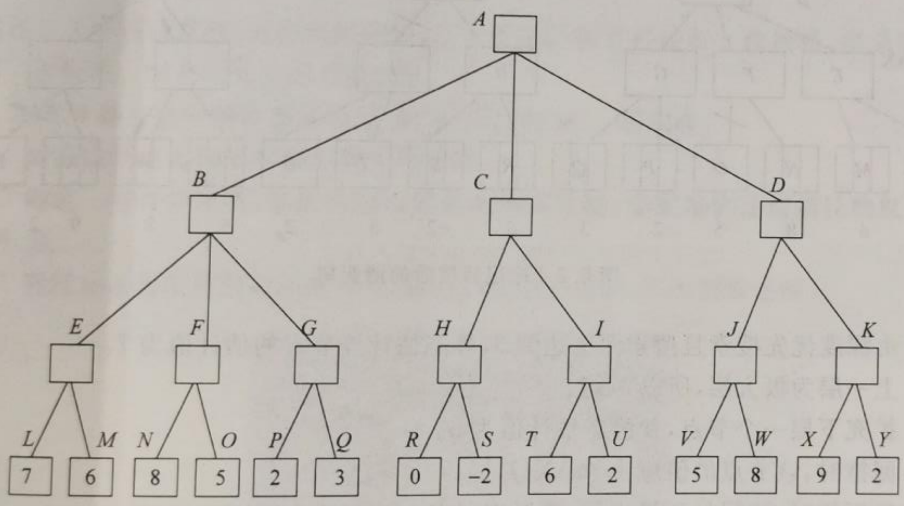

图 5.1　一棵已知底层节点值的博弈树

参考答案：

(1) 解题思路

MIN/MAX 的基本思想如下。

① 当轮到 MIN 起步的节点时，MAX 应该考虑最坏的情况，即 $f(p)$ 取最小值。

② 当轮到 MAX 起步的节点时，MAX 应该考虑最好的情况，即 $f(p)$ 取最大值。

(2) 解题过程

$$E = \mathrm{MAX}(L,M) = \mathrm{MAX}(7,6) = 7$$
$$F = \mathrm{MAX}(N,O) = \mathrm{MAX}(8,5) = 8$$
$$G = \mathrm{MAX}(P,Q) = \mathrm{MAX}(2,3) = 3$$
$$H = \mathrm{MAX}(R,S) = \mathrm{MAX}(0,-2) = 0$$
$$I = \mathrm{MAX}(T,U) = \mathrm{MAX}(6,2) = 6$$

$$J = MAX(V,W) = MAX(5,8) = 8$$
$$K = MAX(X,Y) = MAX(9,2) = 9$$
$$B = MIN(E,F,G) = MIN(7,8,3) = 3$$
$$C = MIN(H,I) = MIN(0,6) = 0$$
$$D = MIN(J,K) = MIN(8,9) = 8$$
$$A = MAX(B,C,D) = 8$$

因而应该选择 $A \to D$ 的走步。

2. 在上题的博弈树中，用 α-β 剪枝过程需要检查哪些节点？

参考答案：

叶节点用 $\boxed{\,|\,|\,}$ 表示，标记剪枝后的博弈树如图 5.2 所示。

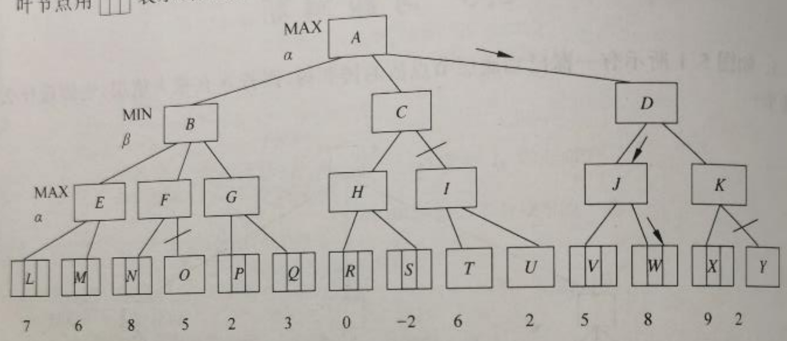

图 5.2　标记剪枝后的博弈树

(1) 由深度优先搜索且搜索深度达到 3，静态估计该节点的估计值为 7。

(2) 上一层为极大层，所以 $\alpha \geqslant 7$。

(3) 扩充下层一个节点，并静态估计值为 6。

(4) 回推时，该节点的值应为 $MAX(7,6)=7$。

(5) 再回推时，该层处于极小层，已知下层有一节点值为 7，所以 $\beta \leqslant 7$。

(6) 由深度优先搜索且搜索深度达到 3，静态估计节点 N 的估计值为 8。

(7) 上一层为极大层，所以 $\alpha \geqslant 8$。

(8) $\alpha = 8 > \beta = 7$，因而裁减的分支 $F \to O$。

被裁减的分支有 $F \to O, C \to I, K \to Y$。

3. 极小极大过程是深度优先搜索过程吗？

参考答案：

极小极大过程要找出当前同层及以下的极小极大值，以横向搜索过程为主，因而是广度优先搜索。

4. 有一种 N/M 或“最后者输”的博弈游戏，其玩法是：开始有 9 枚硬币，两人轮流取出 1、2 或 3 枚，取出最后一枚者为输，使用搜索树证明后起步者总能取胜。

参考答案：

设甲先走，乙后走，每次能取走 1、2 或 3 枚硬币。数字代表剩下的硬币，则有如图 5.3

所示的搜索树。

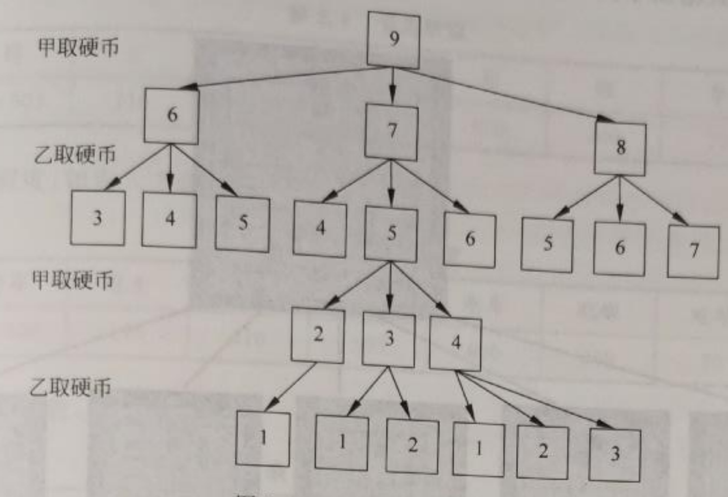

图 5.3 N/M 游戏的搜索树

从图 5.3 中可以看出，无论甲如何取，乙只要保证剩下的还有 5 枚硬币，则总能让甲取出最后一枚硬币。因而后起步者总能获胜。

5. 图 5.4 是一盘中国象棋的残局，称为“关门打狗”。请完成：

(1) 画出以红方为树根的极小极大搜索树。

(2) 确定一种评分原则，据此给出每种状态的估计值，要求此估计值能反映红、黑双方的输、平、赢。

(3) 利用 α-β 剪枝过程对根据(2)已赋值的树进行搜索，写出搜索过程。

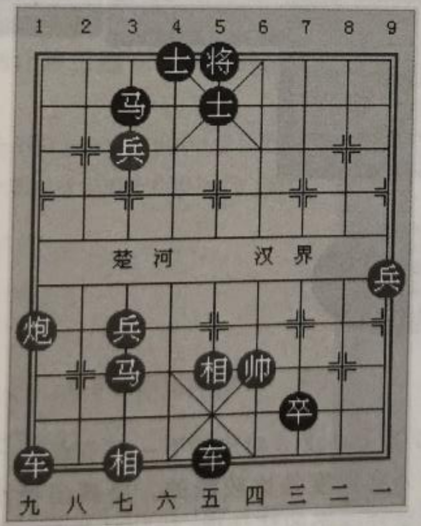

图 5.4 一盘中国象棋的残局

参考答案：

红方有 9 个棋子，每个棋子可能有几种走法，因此，以红方为树根节点的下一层节点有

几十个，图 5.5 只给出了几种走法对应的节点，因此要给出其极小极大搜索树是非常困难的。

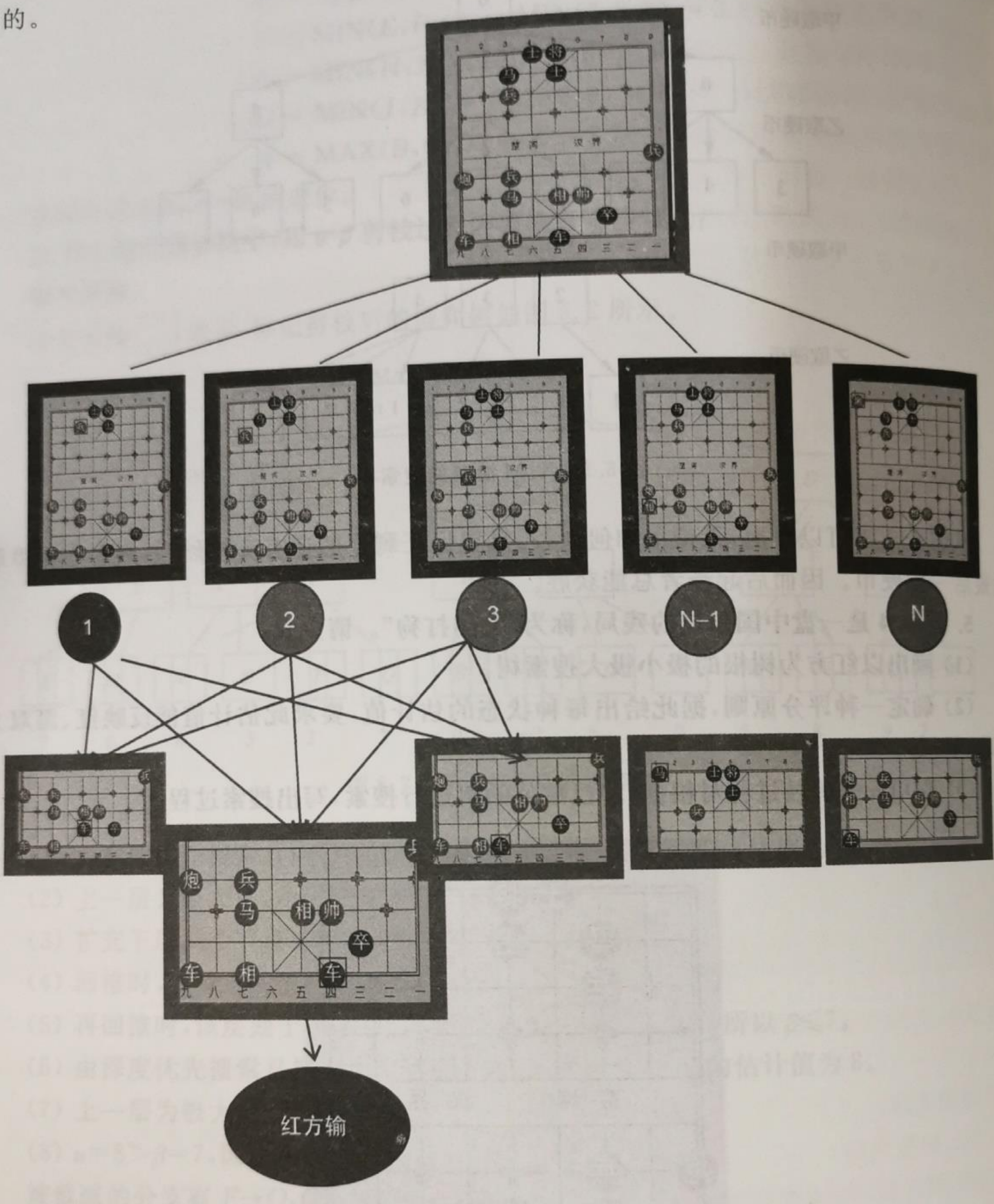

图 5.5　几种走法对应的节点

从上述不难看出，左边的节点 1、2、3 对应的下一层节点是 $-\infty$。

所以，搜索树对于某些分支深度是比较浅的。要画出极小极大搜索树，关键是要确定一种评分原则，据此给出每种状态的估计值，此估计值能反映红、黑双方的输、平、赢的结果。

评估标准是评分棋子的价值、棋子位置的价值、棋子对棋盘的控制、棋子的灵活性、棋子之间的威胁与保护。针对此棋局，需要评估每种棋子的子力和受威胁程度。评估的原则如下。

(1) 子力价值，如表 5.1 表示。

表 5.1　子力价值

棋子	将	士	相	马	车	炮	卒	过河卒
子力价值	10 000	110	110	300	600	300	70	100

(2) 威慑程度，如表 5.2 表示。

表 5.2　威慑程度

局面	将军	吃士	吃相	吃马	吃车	吃炮	吃卒	吃过河卒
威慑程度	10 000	110	110	300	600	300	70	100

(3) 灵活度系数，如表 5.3 表示。

表 5.3　灵活度系数

棋子类型	车	马	炮	相(象)	仕(士)	兵(卒)	帅(将)
灵活度系数	7	13	7	1	1	15	0

某一方综合能力的评价函数可定义为

$$\text{Value(state)}=\text{子力价值}+\text{灵活性}+\text{威慑程度}$$

根据综合能力，红方的静态估计函数可定义为

$$F(\text{steate})=\begin{cases}\infty & \boxed{\text{黑棋输}}\\ -\infty & \boxed{\text{红棋输}}\\ \text{Value(红)}-\text{Value(黑)} & \end{cases}$$

依据以上计算方法，分别计算出图 5.6 所示的棋局红黑双方的指标为

(1) 子力价值：

红棋：$10\,000+110\times2+300+300+600+2\times70+100=11\,660$

黑棋：$10\,000+110\times2+300+100+600=11\,220$

(2) 威慑程度：

红棋：10000

黑棋：300

(3) 灵活度系数：

红棋：$7\times10+13\times4+7\times8+1\times4+5=187$

黑棋：$7\times6+13\times2+1+3=72$

因此，红方的评价函数为

$$F(\text{state})=11\,600-11\,200+10\,000-300+187-72$$
$$=10\,215$$

按照这种方法，可分别计算出生成搜索树棋局的所有状态值，然后按极小极大搜索算法或 α-β 剪枝找出当前最佳走步。

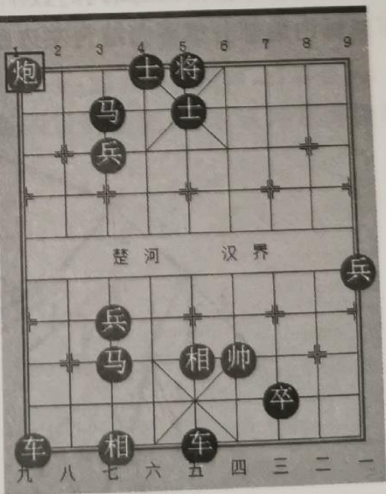

图 5.6　移动“炮”后的棋局

6. 在博弈搜索过程中，为什么是由问题的当前状态出发向目标状态搜索的，而不是由目标状态回溯到当前状态的？什么样的游戏可采用回溯策略？

参考答案：

由问题的当前状态出发向目标状态搜索，则符合人类自身博弈的习惯，都是从开局起一步一步向打败对方搜索。另外，从当前状态到目标状态可能还有比较多的步骤，也就是搜索树的深度很深，假如从目标向当前状态回溯，在还没有找到当前状态之前，就有可能产生组合爆炸问题。只有简单的游戏才有可能采用回溯策略。

7. 请指出 α 剪枝过程与 β 剪枝过程的差别。

参考答案：

α 剪枝：极大层在上层的 α 值大于在下层的极小层的 β 值时，产生剪枝。

β 剪枝：极大层在下层的 α 值大于在上层的极小层的 β 值时，产生剪枝。

8. 极小极大过程体现了什么样的一种思想？

参考答案：

极小极大过程体现了模拟下棋的对抗性过程中，要在博弈双方的角度上考虑问题，在我方下子时，要考虑使对方处于最不利位置；在对方下子时，要考虑对方会使我方处于最不利位置。

5.4 补充习题

1. N/M 问题(习题 4)的推广。推广是基于这样的考虑，既然 9 枚硬币问题是这样的，那么下面的数字应该是 13。因为先取者从 13 开始拿，这样后取者总可以让先取者进入到 9 枚硬币状态：先取者拿 1 枚，后取者就拿 3 枚，剩下 9 枚；先取者拿 2 枚，后取者就拿 2 枚，也剩下 9 枚；先取者拿 3 枚，后取者就拿 1 枚，剩下 9 枚。证明 N/M 问题的推广是：凡是 $9+4k(k=1,2,\cdots)$ 的数字都是后取者胜。

参考答案：

如图 5.7 所示，圆圈内的数字表示剩下的硬币数，斜线上的数字表示取出的硬币数，剩下未画出的部分都可归结为左边已画出的部分。

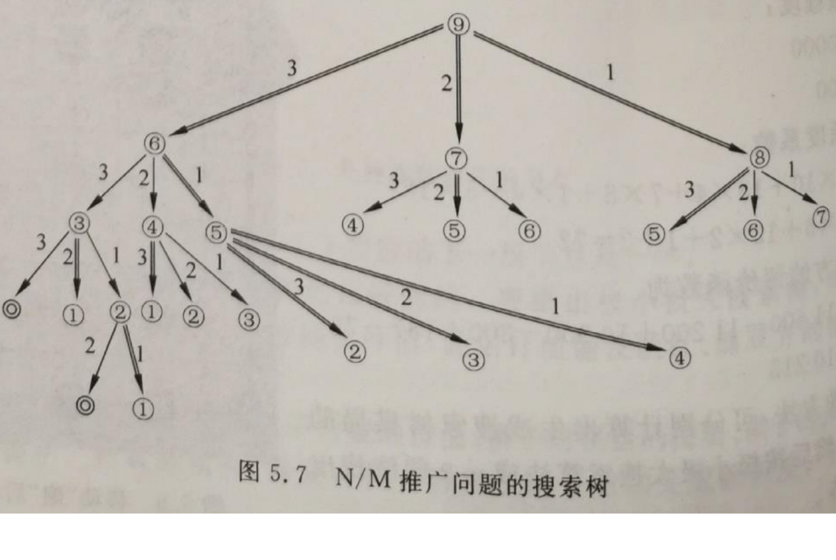

图 5.7 N/M 推广问题的搜索树

假设 A 先取，B 后取。红线表示 B 赢的取法。只要 B 按照红线方向取硬币，B 必赢。

分析该搜索树对应的搜索结果如下。

$A(3)$——$B(1)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

(1) $A(3)$——$B(1)$——$A(2)$——$B(2)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

$A(1)$——$B(3)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

$A(3)$——$B(1)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

(2) $A(2)$——$B(2)$——$A(2)$——$B(2)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

$A(1)$——$B(3)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

$A(3)$——$B(1)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

(3) $A(1)$——$B(3)$——$A(2)$——$B(2)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

$A(1)$——$B(3)$——$A(1)$——A 拿到最后一枚硬币，A 输。

由上述可知，后取者只有按照双线路线取硬币就必取胜，假如不按以上取法就未必能赢。例如，B 第一次取出的硬币数与 A 第一次取出的硬币数之和不等于 4，只要 A 按照单线方向取硬币，则 B 就必输。

$B(2)$——$A(3)$——$B(1)$——B 拿到最后一枚硬币，B 输。

(1) $A(3)$——

$B(3)$——$A(2)$——$B(1)$——B 拿到最后一枚硬币，B 输。

$B(3)$——$A(1)$——$B(1)$——B 拿到最后一枚硬币，B 输。

$B(1)$——$A(1)$——$B(2)$——$A(2)$——$B(1)$——B 拿到最后一枚硬币，B 输。

(2) $A(2)$——

$B(1)$——$A(3)$——$B(1)$——B 拿到最后一枚硬币，B 输。

$B(3)$——$A(3)$——$B(1)$——B 拿到最后一枚硬币，B 输。

$B(2)$——$A(3)$——$B(1)$——B 拿到最后一枚硬币，B 输。

(3) $A(3)$——

$B(3)$——$A(2)$——$B(1)$——B 拿到最后一枚硬币，B 输。

综上所述，后取硬币者只要保证两人第一次取出的硬币数之和等于 4，只要后者后面取硬币不犯错误，前者必输；如果两人第一次取出的硬币数之和不等于 4，前者后面取硬币只要不犯错误，则前者反败为胜，后者必输；在两人都不犯错误的情况下，前者不可能赢，后者必赢。

2. 设有如图 5.8 所示的搜索树，其中最下面的数字是假设的估值，请对该搜索树做如下工作。

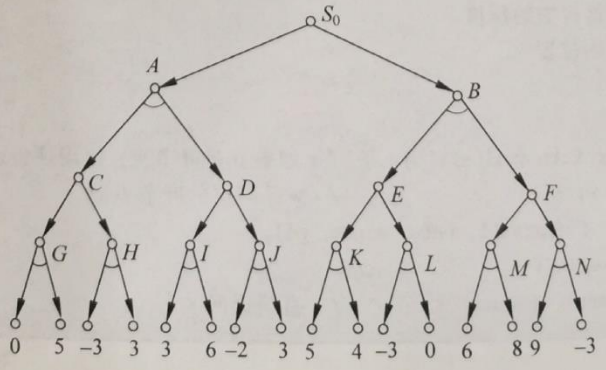

图 5.8　搜索树

(1) 计算各节点的倒推值。

(2) 利用 α-β 剪枝技术剪去不必要的分支。

参考答案:

各节点的倒推值和剪枝情况如图 5.9 所示。

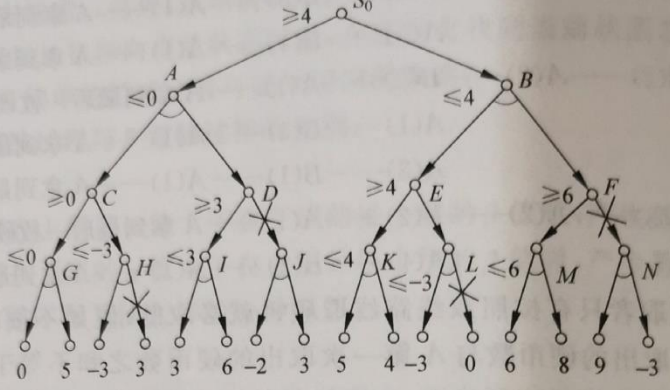

图 5.9 本题的倒推值和剪枝情况

3. 博弈搜索过程为何总是从当前状态向目标状态搜索，而不是由目标状态逆向向当前状态搜索的。

参考答案:

博弈搜索通常被限制在一定的范围，搜索的目标是确定一步好的走法(好棋)，等对手回手后，再继续搜索。因此，博弈搜索过程总是由当前状态向目标状态搜索的，而不是由目标状态向当前状态搜索的。

4. 简单写出 α-β 搜索算法的伪代码。

参考答案:

α-β 剪枝算法如下。

α 剪枝：若极小层的 $\beta \leqslant \alpha$(先辈层)，则中止这个 MIN 以下的搜索。

β 剪枝：若极大层的 $\alpha > \beta$(先辈层)，则中止这个 MAX 以下的搜索。

算法的伪代码如下。

```
double alphabeta( int depth, double alpha, double beta, Position p);
  { /* alpha 是 MAX 的当前值
      beta 是 MIN 的当前值
     depth 是在搜索树中的深度
     p 是所求节点的位置
      */
   double  t;
   if(depth = 0)  return evaluate(p);          /* 如果 p 是叶节点，使用评价函数算出 p 的值 */
   for( i = 1; i <= w; i++)
     { t = alphabeta( depth - 1, beta, alpha, pi);   /* w 是同层的叶节点 */
      if( t > alpha&&MAX)
        {if(t > beta)  return  t;           /* 直接返回 */
```

```
        else alpha = t;
        }
    if(t < alpha&&MIN)
        {if(t < beta)  return  t;                    /* 直接返回 */
        else alpha = t;
        }
    }
    return  alpha;
}
```

5. 3个小伙子A、B、C同时爱上了一个姑娘，为了决定他们谁能娶这个姑娘，他们决定用手枪进行一次决斗。A的命中率为30%，B为50%，最出色的枪手是C，他从不失误，命中率为100%。为公平起见，他们决定按这样的顺序：A先开枪，B其次，C最后。然后这样循环，直到他们只剩下一个人。那么这3个人中谁活下来的机会最大？

参考答案：

分析：

(1) A、B如果一直不能命中C，则只要两轮，他们两个都死；A要想活，就要至少争取轮不到C开第二枪。

(2) 第一轮开始的时候，A和B为了自保肯定先针对C，但是A肯定希望活着的是B，B能活说明A或者B第一枪已经命中C。所以，第一轮结束的时候，不是B死就是C死，A才有可能活着，因为如果A跟B都没杀死C，C肯定先杀死B。因此原则上A会帮着B打C。

(3) 不过A考虑万一他第一枪把C打死了，B下一个开枪，肯定对象是他；即使B第一枪打不中他，轮到A开第二枪，而以A自己30%的命中率，不大可能连续两枪都命中的，所以这一枪很可能失误，下一次轮到B的时候，第二枪打死他的可能性很大。

总结：为了争取最大的生存可能，A希望第一轮C倒下，但并不是他开的枪，因此第一枪很可能会考虑放弃，这样虽然坑了B，但是增大了自己的生存机会，是弱者为求自保不去招惹强者的做法。

详细讨论：

先考虑双人决斗。

(1) A和B决斗：

A存活的概率为

$$N_A = 30\% + (70\% \times 50\% \times 30\%) + (70\% \times 50\% \times 70\% \times 50\% \times 30\%) + \cdots$$
$$= 30\% \times (1 + a + a^2 + \cdots) = 30\% \times 1/(1-35\%)$$
$$= 30\%/65\% \approx 0.462$$

B存活的概率为

$$N_B \approx 0.538$$

(2) A和C决斗：

A存活的概率为

$$N_A=30\%$$

C 存活的概率为

$$N_C=70\%$$

(3) B 和 C 决斗：

B 存活的概率为

$$N_B=50\%$$

C 存活的概率为

$$N_C=50\%$$

下面分两种情况解答。

情况一：A 第一枪打 C。

A 活的可能性：A 活下来有 3 种情况。

注：当 C 先死，而且接下来由 A 开枪的情况下，A 存活的概率为 $30\%+70\%\times50\%\times30\%+70\%\times50\%\times70\%\times50\%\times30\%+\cdots=0.3/0.65$。

(1) A 杀了 C，B 杀不死 A，A 又杀了 B，概率为 $30\%\times50\%\times0.3/0.65\approx0.069$。

(2) A 杀不死 C，B 杀了 C，A 又杀了 B，概率为 $70\%\times50\%\times0.3/0.65\approx0.162$。

(3) A 杀不死 C，B 杀不死 C，C 杀了 B，A 杀了 C，概率为 $70\%\times50\%\times30\%=0.105$。

所以 A 活下来的可能性为 $30\%\times50\%\times0.3/0.65+70\%\times50\%\times0.3/0.65+70\%\times50\%\times30\%\approx0.105+3/13=0.336$。

B 活的可能性：B 活有以下 3 种情况。

(1) A 枪杀 C，B 杀死 A，B 活的概率为 $30\%\times50\%=0.15$。

(2) A 枪杀 C，B 失误未杀死 A，A 和 B 决斗，B 活的概率为 $30\%\times50\%\times35\%/65\%\approx0.081$。

(3) A 失误未杀掉 C，B 杀了 C，A 和 B 决斗，B 活的概率为 $70\%\times50\%\times35\%/65\%\approx0.188$。

$$N_B\approx0.419$$

C 活的可能性：A 和 B 均失误，C 杀了 B，A 和 C 决斗，C 活的概率为 $N_C=70\%\times50\%\times70\%=0.245$。

如果 A 第一枪打 C，则 B 生存的机会最大。

情况二：A 第一枪放弃。

A 存活的可能性：A 活有以下两种情况。

(1) B 杀了 C，A 和 B 决斗，最终 A 活的概率为 $50\%\times30\%/65\%\approx0.231$。

(2) B 未杀掉 C，C 杀了 B，A 和 C 决斗，A 活的概率为 $50\%\times30\%=0.15$。

$$N_A\approx0.381$$

B 活的可能性：B 杀掉 C，A 和 B 决斗，B 活的概率为 $N_B=50\%\times35\%/65\%\approx0.269$。

C 活的可能性：他知道自己的枪法是最准的，一击致命，是 A 和 B 首先攻击的目标。而 B 是自己最大的潜在威胁，并且也知道 B 会首先杀自己，所以一定会先射杀 B，再射杀 A。B 失误未杀掉 C，C 杀了 B，A 和 C 决斗，C 的概率为 $N_C=0.5\times0.7=0.35$。

综上所述，结论为：当 A 第一枪放空枪时，A 生存的机会最大，概率为 0.381。