其它数字特征与切比雪夫不等式

其它数字特征

- 矩
- 中位数
- 分位数

切比雪夫不等式

矩

设X 和Y是随机变量，k, l 为正整数，

如果$E\left(X^k\right)$存在，则称$E\left(X^k\right)$ 为X的k阶原点矩. $\Longrightarrow$ $E(X)$ 为X的一阶原点矩

如果$E\left([X-E(X)]^k\right)$存在，则称$E\left([X-E(X)]^k\right)$为X的k阶中心矩.

$\Longrightarrow$ $D(X)$ 为X的二阶中心矩

如果$E\left(X^k Y^l\right)$存在，则称$E\left(X^k Y^l\right)$为X和Y的$k+l$阶混合矩.

如果$E\left([X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right)$存在，则称它为$X$和$Y$的$k+l$阶混合中心矩.

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Cov}(X, Y)$ 为X和Y的二阶混合中心矩

中位数与分位数

设连续型随机变量X 的分布函数为$F(x)$，称满足条件

$$F(x_{0.5}) = P(X \le x_{0.5}) = 0.5$$

的数$x_{0.5}$是X的或其分布 的中位数。对任意的$0 < \alpha < 1$，若

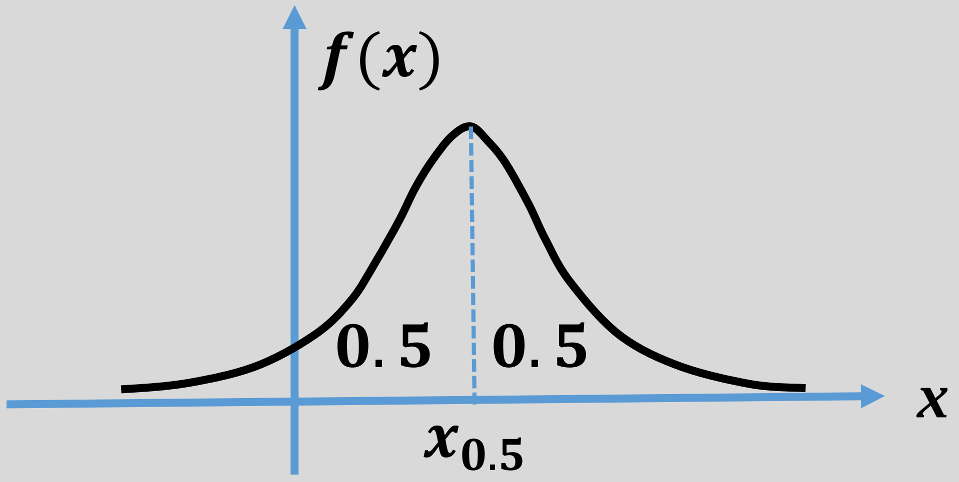
$$F(x_\alpha) = P(X \le x_\alpha) = \alpha$$

则称x_α是X或其分布的下α分位数，若

$$P(X \ge u_\alpha) = \alpha$$

则称u_α是X或其分布的上α分位数.

$$F(x_{0.5}) = P(X \le x_{0.5}) = 0.5$$



中位数和均值一样都是刻画随机变量位置的数字特征

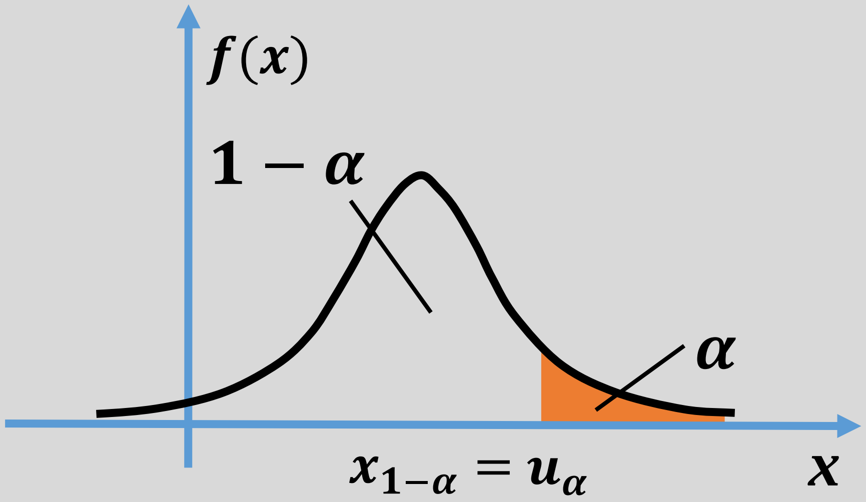
中位数不受少量特大值或特小值的影响

中位数总存在，但一般不唯一

分 位 数

$$P(X \geq u_\alpha) = \alpha \Longrightarrow P(X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha \Longrightarrow u_\alpha = x_{1-\alpha}$$

$$u_\alpha := \sup\{u_\alpha^*: P(X \geq u_\alpha^*) = \alpha\}$$



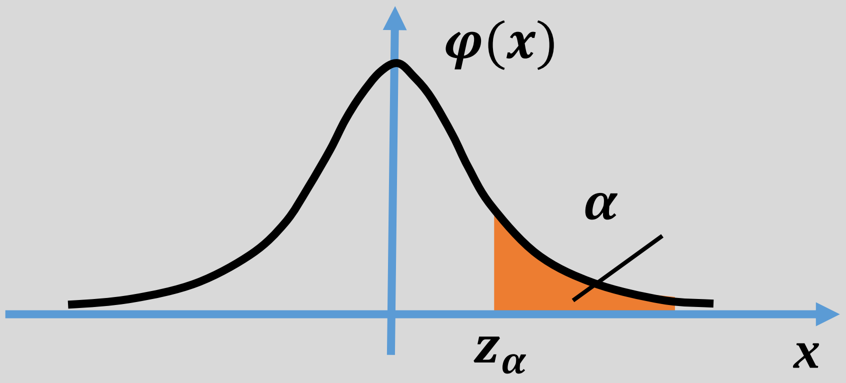
标准正态分布的上α分位数

设 $X \sim N(0,1)$, 对给定的常数$\alpha(0 < \alpha < 1)$, 若实数z_α满足

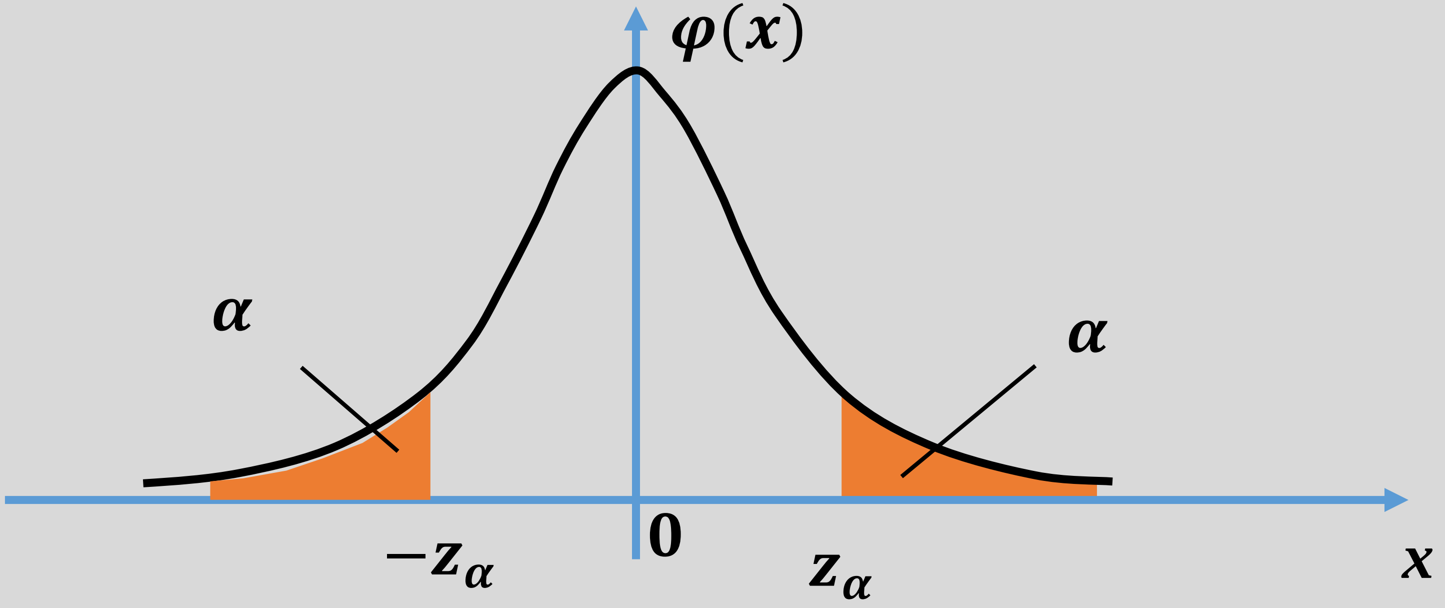
$$P(X \geq z_\alpha) = \alpha$$

即 $$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$$

则称z_α是X或标准正态分布$N(0,1)$的上α分位数.



$P(X \geq z_\alpha) = \alpha$



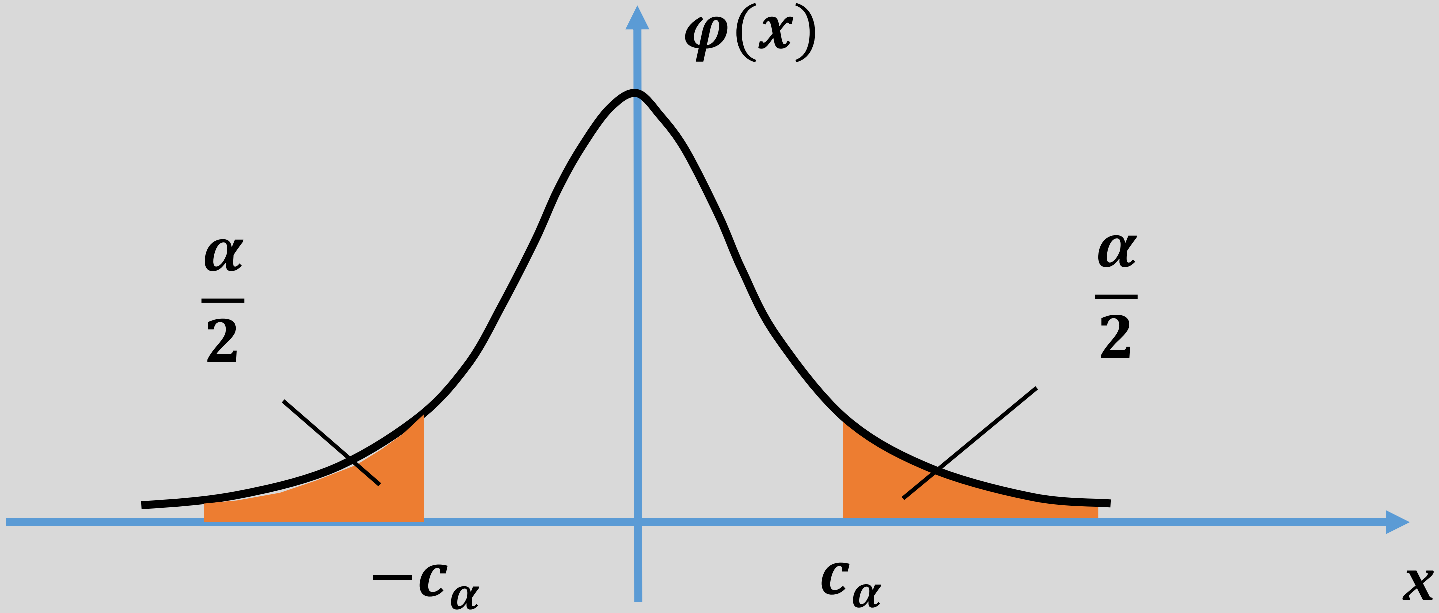
$$P(X \geq z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \alpha, \qquad (0 < \alpha < 1)$$

$$\Rightarrow \quad P(X \geq -z_\alpha) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad z_{1-\alpha} = -z_\alpha$$

$P(X \geq z_\alpha) = \alpha$

问题： 设 $X \sim N(0,1)$, 对给定的常数$\alpha(0 < \alpha < 1)$，求常数C_α使得

$$P(|X| > c_\alpha) = \alpha$$



$$P(X > c_\alpha) = \frac{\alpha}{2} \longrightarrow c_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

切比雪夫不等式

对任意随机变量X，若$D(X)$存在，则对任意$\varepsilon > 0$，有

$$P(|X-E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

或等价地，

$$P(|X-E(X)| < \varepsilon) \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

证明：由马尔可夫不等式 $P(|X|\geq c)\leq\frac{E(|X|)}{c}$ 可得

常数

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)=P\left(\underbrace{[X-E(X)]^2}_{\text{非负随机变量}}\geq\varepsilon^2\right)$$

$$\leq\frac{E\left([X-E(X)]^2\right)}{\varepsilon^2}=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X-E(X)|\geq \varepsilon)\leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

例1：设 $E(X)=E(Y)=2, D(X)=1,\ D(Y)=\ 4, \rho_{XY}=0.5$, 试估计 $P(|X-Y|\geq 6)$

解：注意到 $E(X-Y)\ =\ 0$，故由切比雪夫不等式有

$$P(|X-Y|\geq 6)=P\{|(X-Y)-E(X-Y)|\geq 6\}\ \leq \frac{D(X-Y)}{6^2}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \Longrightarrow \mathrm{Cov}\,(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=1$$

$$\Longrightarrow D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)=3$$

$$\Longrightarrow P(|X-Y|\geq 6)\leq \frac{D(X-Y)}{6^2}\leq \frac{1}{12}$$

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

例2. 有一大批种子，其中良种占 $\frac{1}{6}$，现从中任取6000粒种子，试用切比雪夫不等式估计这6000粒种子中良种所占的比例与$\frac{1}{6}$之差的绝对值不超过0. 01的概率.

解：设所取6000粒种子中良种有X粒，则求 $P\left(\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|\leq 0.01\right)$

$$X\sim B(6000,\frac{1}{6}) \Longrightarrow E(X)=6000\times\frac{1}{6}=1000$$

$$D(X)=6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{2500}{3}$$

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$E(X) = 6000 \times \frac{1}{6} = 1000 \quad D(X) = 6000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{2500}{3}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{6000} - \frac{1}{6}\right| \leq 0.01\right) = P(|X - 1000| \leq 60)$$

由切比雪夫不等式有 $\geq 1 - \frac{\frac{2500}{3}}{60^2} \approx 0.769$

小　结

其它数字特征
- 矩
- 中位数
- 分位数

切比雪夫不等式