1.设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta \\ 0, & else\end{cases}$ $X_1,\dots,X_n$是一个样本，

求θ^2的一个矩估计量并判断是否无偏；

求θ的极大似然估计量，并判断是否无偏；

可否求θ的一个无偏矩估计量.

2.设总体X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}, & x>\mu\\ 0, & x\le\mu\end{cases}$ $X_1,\dots,X_n$是一个样本,

求未知参数$\lambda(\lambda>0),\mu$的极大似然估计量, 并判断是否无偏.

3.设总体X的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{3\theta^3}{2x^4}, & |x|>\theta\\ 0, & else\end{cases}$ $X_1,\dots,X_n$是一个样本,

求θ的矩估计量和极大似然估计量，并判断是否无偏.

1.设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$ $X_1,\dots,X_n$是一个样本,

求θ^2的一个矩估计量并判断是否无偏;

求θ的极大似然估计量，并判断是否无偏;

可否求θ的一个无偏矩估计量.

$$X \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & -\theta \le x \le \theta \\ 0, & else \end{cases}$$

- 求θ^2的一个矩估计量并判断是否无偏；

解：$E(X^2) = [E(X)]^2 + D(X) = \dfrac{\theta^2}{3}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \dfrac{\theta^2}{3}$ $\longrightarrow$ $\widehat{\theta^2} = \dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

$$E(\widehat{\theta^2}) = E\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{3}{n}\cdot\frac{n\theta^2}{3} = \theta^2$$

$\longrightarrow$ $\widehat{\theta^2}$是θ^2的一个无偏矩估计量.

$$X \sim f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & -\theta \le x \le \theta \\ 0, & else\end{cases}$$

- 求θ的极大似然估计量，并判断是否无偏；

Step 1. 求$|X|$的分布函数与概率密度 $X \sim f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & -\theta \le x \le \theta \\ 0, & else\end{cases}$

$$\Rightarrow F_{|X|}(x)=P(-x \le X \le x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \le x < \theta \\ 1, & x \ge \theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow |X| \sim f_{|X|}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & else\end{cases}$$

$$|X_1|,\dots|X_n|\, i.i.d.\sim f_{|X|}(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$$

Step 2. 将$|X|$看作新总体，$|X_1|,\dots|X_n|$为新总体下的一个样本，求新总体下的似然函数

$$L(\theta)=L(\theta;|x_1|,\dots,|x_n|)=\theta^{-n}\quad for\ \ all\ 0\le|x_i|\le\theta, i=1,2,\dots,n$$

Step 3. 求新总体下似然函数的最大值点，从而求出θ的极大似然估计量

$L(\theta)$关于θ单调递减，故当 $\tilde{\theta}=\max\{|x_1|,\dots|x_n|\}$ 时，$L(\theta)$取得最大值

$$\longrightarrow\qquad \tilde{\theta}=\max\{|X_1|,\dots|X_n|\}$$

$$|X_1|,\dots|X_n|\,i.i.d.\sim F_{|X|}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$$

$$\tilde{\theta}=\max\{|X_1|,\dots|X_n|\}$$

Step 4. 为了判断θ的极大似然估计量的无偏性，下面求$\tilde{\theta}$的概率密度

$$F_{\tilde{\theta}}(x)=\left[F_{|X|}(x)\right]^n=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\tilde{\theta}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x<\theta\\ 0, & else\end{cases}$$

$$\max\{|X_1|,\dots|X_n|\} \sim f_{\tilde{\theta}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x<\theta\\ 0, & else\end{cases}$$

$$\tilde{\theta}=\max\{|X_1|,\dots|X_n|\}$$

Step 5. 判断θ的极大似然估计量的无偏性，下面求$E(\tilde{\theta})$

$$E(\tilde{\theta})=\int_0^\theta x\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx \quad =\frac{n}{n+1}\theta$$

$\longrightarrow$ $\tilde{\theta}$不是θ的无偏估计量

$$X \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & -\theta \le x \le \theta \\ 0, & else \end{cases}$$

- 可否求θ的一个无偏矩估计量.

$$|X| \sim f_{|X|}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & else \end{cases} \Rightarrow E(|X|) = \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i| = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

$$E(\hat{\theta}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|) = \theta \Rightarrow$$ $\hat{\theta}$是θ的一个无偏矩估计量

2.设总体X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}, & x>\mu \\ 0, & x\le\mu\end{cases}$ $X_1,\ldots,X_n$是一个样本,

求未知参数$\lambda(\lambda>0),\mu$的最大似然估计量,并判断是否无偏.

解: Step 1. 求似然函数

$$L(\lambda,\mu)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_i-\mu}{\lambda}}\right)\quad for\ all\ \ x_i\ge\mu\ , i=1,2,\ldots,n$$

$$L(\lambda,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_i-\mu}{\lambda}}\right)\quad for\ all\ x_i\geq\mu\,,i=1,2,\dots,n$$

Step 2. 求似然函数的最大值点，从而求出λ,μ的最大似然估计值

$$\ln L(\lambda,\mu)=-n\ln\lambda-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}=-\dfrac{n}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L(\lambda,\mu)}{\partial\mu}=\dfrac{n}{\lambda}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\hat{\mu}=x_{(1)}=\min\{x_1,\dots x_n\}\qquad\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-x_{(1)}$$

$$X_1, \dots X_n \; i.i.d. \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}, & x > \mu \\ 0, & x \le \mu \end{cases}$$

- **判断μ的最大似然估计量的无偏性** $\hat{\mu} = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots X_n\}$

Step 1. 求总体的分布函数 $F_X(x)$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < \mu \\ \int_{\mu}^{x} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t-\mu}{\lambda}} dt, & x \ge \mu \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < \mu \\ 1 - e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}, & x \ge \mu \end{cases}$$

$$X_1, \ldots X_n \ i.i.d. \sim F(x) = \begin{cases} 0, & x < \mu \\ 1 - e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}, & x \geq \mu \end{cases},$$

$$\hat{\mu} = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots X_n\}$$

Step 2. 求$\hat{\mu}$的分布函数 $F_{\hat{\mu}}(x)$和概率密度函数

$$F_{\hat{\mu}}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n = 1 - e^{-\frac{n(x-\mu)}{\lambda}}, \qquad x \geq \mu$$

$$f_{\hat{\mu}}(x) = F'_{\hat{\mu}}(x) = \frac{n}{\lambda} e^{-\frac{n(x-\mu)}{\lambda}}, \qquad x \geq \mu$$

$$\min\{X_1,\dots X_n\} \sim f_{\hat{\mu}}(x)=\begin{cases}0, & x<\mu\\ \frac{n}{\lambda}e^{-\frac{n(x-\mu)}{\lambda}}, & x\geq\mu\end{cases},$$

$$\hat{\mu}=X_{(1)}=\min\{X_1,\dots X_n\}$$

Step 3. 判断$\hat{\mu}$的无偏性，求$E(\hat{\mu})$

$$E(\hat{\mu})=E(\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\})=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\hat{\mu}}(x)\,dx \;=\int_{\mu}^{\infty} x\frac{n}{\lambda}e^{-\frac{n(x-\mu)}{\lambda}}dx$$

$$\underline{\underline{t=\frac{n(x-\mu)}{\lambda}}}\quad \int_0^{\infty}\left(t+\frac{n}{\lambda}\mu\right)e^{-t}\frac{\lambda}{n}dt \;=\int_0^{\infty} te^{-t}\frac{\lambda}{n}dt+\int_0^{\infty}\mu e^{-t}dt \;=\mu+\frac{\lambda}{n}$$

$\Rightarrow$ $\hat{\mu}$不是μ的无偏估计

$$X_1, \dots X_n \; i.i.d. \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}, & x > \mu \\ 0, & x \le \mu \end{cases}$$

$$\hat{\mu} = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots X_n\} \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - X_{(1)}$$

Step 4. 判断$\hat{\lambda}$的无偏性, 求$E(\hat{\lambda})$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{\mu}^{\infty} x \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}} dx = \mu + \lambda$$

$$E(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) - E(X_{(1)}) = \mu + \lambda - \left(\mu + \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\lambda$$

$\Rightarrow$ $\hat{\lambda}$不是λ的无偏估计

3.设总体X的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3\theta^3}{2x^4}, & |x|>\theta \\ 0, & else\end{cases}$ $X_1,\dots,X_n$是一个样本,

求θ的矩估计量和最大似然估计量，并判断是否无偏.

解:
- 求θ的矩估计量, 并判断是否无偏

Step 1. 求$F_{|X|}(x)$

$$F_{|X|}(x)=\begin{cases}0, & x\le\theta \\ 2\displaystyle\int_\theta^x \frac{3\theta^3}{2t^4}dt, & x>\theta\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le\theta \\ 1-\dfrac{\theta^3}{x^3}, & x>\theta\end{cases}$$

$$|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|, i.i.d. \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{3\theta^3}{x^4}, & x > \theta \\ 0, & else \end{cases}$$

- 求θ的矩估计量，并判断是否无偏

Step 2. 求$f_{|X|}(x)$

$$f_{|X|}(x) = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ \dfrac{3\theta^3}{x^4}, & x > \theta \end{cases}$$

Step 3. 求新总体下θ的矩估计量

$$E(|X|) = \int_{\theta}^{\infty} x \frac{3\theta^3}{x^4} dx = \frac{3\theta}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i| = \frac{3\theta}{2} \longrightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

$$|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|, i.i.d.\sim f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{3\theta^3}{x^4}, & x > \theta \\ 0, & else \end{cases}$$

- 求θ的矩估计量, 并判断是否无偏

$$\hat{\theta} = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

Step 4. θ的矩估计量的期望, 从而判断是否无偏

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right) = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|) = \theta$$

→ $\hat{\theta}$是θ的无偏矩估计量

$$|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|, i.i.d. \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{3\theta^3}{x^4}, & x > \theta \\ 0, & else \end{cases}$$

- 求θ的最大似然计量, 并判断是否无偏

Step 1. 求新总体$|X|$下的似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{|X_i|}(|x_i|) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{3\theta^3}{x_i^4}\right) \quad for\ \ all\ |x_i| > \theta, i = 1, 2, \dots, n$$

$L(\theta)$关于θ单调递增, 故当 $\tilde{\theta} = \min\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ 时, $L(\theta)$取得最大值

$\Rightarrow$ $\tilde{\theta} = \min\{|X_1|, \dots, |X_n|\}$ 是θ的最大似然计量

$$|X_1|,|X_2|,\dots,|X_n|,i.i.d.\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3\theta^3}{x^4}, & x>\theta\\ 0, & else\end{cases}$$

- 求θ的最大似然计量，并判断是否无偏

Step 2. 求$\widetilde{\theta}$的分布函数$F_{\widetilde{\theta}}(x)$ $\widetilde{\theta}=\min\{|X_1|,\dots,|X_n|\}$

$$F_{\widetilde{\theta}}(x)=1-[1-F_{|X|}(x)]^n=1-\theta^{3n}x^{-3n},\qquad x>\theta$$

Step 3. 求$\widetilde{\theta}$的概率密度函数$f_{\widetilde{\theta}}(x)$

$$f_{\widetilde{\theta}}(x)=3n\theta^{3n}x^{-3n-1},\qquad x>\theta$$

$$|X_1|,|X_2|,\dots,|X_n|, i.i.d. \sim f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3\theta^3}{x^4}, & x>\theta\\ 0, & else\end{cases}$$

- 求θ的最大似然计量，并判断是否无偏

Step 4. 求$\widetilde{\theta}$的期望，从而判断θ的最大似然计量是否无偏 $\widetilde{\theta}=\min\{|X_1|,\dots,|X_n|\}$

$$f_{\widetilde{\theta}}(x)=3n\theta^{3n}x^{-3n-1},\qquad x>\theta$$

$$E(\widetilde{\theta})=\int_{\theta}^{\infty}x\cdot 3n\theta^{3n}x^{-3n-1}dx=\frac{3n\theta}{3n-1}$$

→ θ的最大似然估计量$\widetilde{\theta}$不是无偏估计量