正态总体均值与方差的假设检验

单个正态总体均值的假设检验

- 方差σ^2已知时，对均值μ的假设检验
- 方差σ^2未知时，对均值μ的假设检验

单个正态总体方差的假设检验

- 均值μ已知时，对方差σ^2的假设检验
- 均值μ未知时，对方差σ^2的假设检验

方差σ^2已知时，对均值μ的双侧假设检验

- **提出原假设：** $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$
- **选定检验统计量：** $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
- **确定拒绝域：** $W = \left\{ \left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$
- **取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设**

方差σ^2已知时, 对均值μ的双侧假设检验

例1: 设某厂生产出一批钮扣, 其直径据经验服从正态分布 $N(\mu, 5.2^2)$,

为了检验这一车间生产是否正常, 现抽取容量n=100的样本, 得

样本均值为26.56,

要求在显著性水平$\alpha = 0.05$下检验这批纽扣的平均直径是否为26.

解: $\sigma^2 = 5.2^2$ 原假设 H_0: $\mu = \mu_0 = 26$ $\Longleftrightarrow$ H_1: $\mu \neq 26$

检验统计量 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

拒绝域 $W = \left\{ \left| \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$

$$H_0: \mu = \mu_0 = 26 \qquad \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

在显著性水平$\alpha = 0.05$下， $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

带入样本观察值得

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| = \left|\frac{26.56 - 26}{\frac{5.2}{\sqrt{100}}}\right| \approx 1.08 < 1.96 = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

从而接受原假设，认为这批纽扣的平均直径为26.

方差σ^2已知时, 对均值μ的右侧假设检验

引例：工厂生产的一种产品的某项指标平均值为μ_0,采用了新技术或新配方后, 被认为产品质量提高了, 该指标的平均值μ应该随之上升. 现欲检验μ是否有显著上升. (总体为正态分布, 方差已知)

该问题为右侧假设检验:

H_0: $\mu = \mu_0$ 即新技术或新配方对于提高产品质量无效果.

H_1: $\mu > \mu_0$ 即新技术或新配方确实有效, 提高了产品质量.

方差σ^2已知时, 对均值μ的右侧假设检验

如果原假设成立，即 H_0: $\mu = \mu_0$

那么 $\bar{X} - \mu = \bar{X} - \mu_0$ 应该比较小，

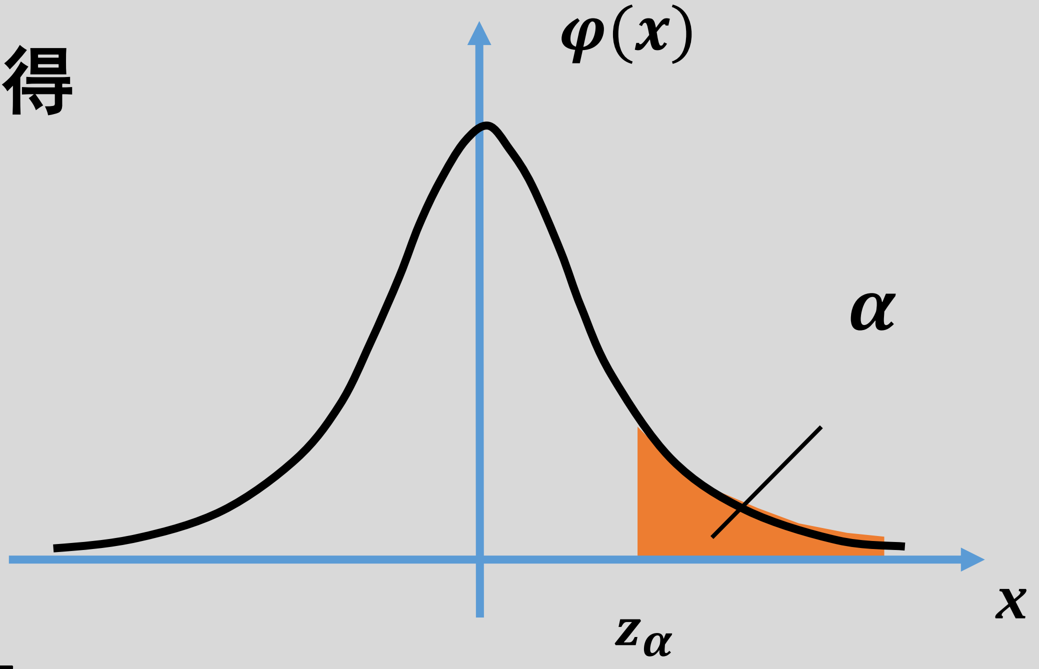
反之，如果 $\bar{X} - \mu_0$ 的值过大, 则可以推断原假设不成立.

仍旧选取检验统计量 $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

方差σ^2已知时，对均值μ的右侧假设检验

对给定的显著性水平α,求常数C, 使得

$$P_{H_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>C\right\}=\alpha$$



由标准正态分布分位点的定义，得 $C=z_\alpha$

故拒绝域为 $$W=\left\{\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>z_\alpha\right\}$$

方差σ^2已知时, 对均值μ的右侧假设检验

引例：工厂生产了一种产品, 要求某项指标平均值不超过μ_0,

现随机抽样，试通过该样本检验在给定的显著水平下

其指标平均值是否有显著提升.（总体为正态分布, 方差已知）

该问题仍为右侧假设检验:

H_0: $\mu \le \mu_0$　指标平均值不超过μ_0

H_1: $\mu > \mu_0$　指标平均值有显著提升

方差σ^2已知时，对均值μ的右侧假设检验

如果原假设成立，即 $H_0: \mu \le \mu_0$

那么 $\bar{X}-\mu \ge \bar{X}-\mu_0$ 且 $\bar{X}-\mu_0$ 应该比较小，

反之，如果 $\bar{X}-\mu_0$ 的值过大，则可以推断原假设不成立.

考虑 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 注意到

分布未知

$$\left\{\boxed{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}} > C\right\} \subset \left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > C\right\}$$

方差σ^2已知时，对均值μ的右侧假设检验

故对给定的显著性水平α,求常数C满足 $P_{H_0}\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}>\boxed{C}\right\}=\alpha$

$C=z_\alpha$

则 $P_{H_0}\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}>z_\alpha\right\}<\alpha$ 求得拒绝域 $W=\left\{\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}>z_\alpha\right\}$

$$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>C\right\}\subset\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>C\right\}$$

方差σ^2已知时, 对均值μ的右侧假设检验

- 提出原假设： $H_0: \mu = \mu_0 (\mu \le \mu_0) \Longleftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$
- 选定检验统计量： $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
- 确定拒绝域： $W = \left\{ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha \right\}$
- 取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设

方差σ^2已知时, 对均值μ的右侧假设检验

例2：微波炉在炉门关闭时的辐射量是一个重要的质量指标.

某厂该质量指标服从正态分布 $N(\mu, 0.1^2)$，且均值都

符合要求, 即不超过0.12, 为检查近期产品质量, 抽查了

25台, 测得其炉门关闭时的辐射量的均值 $\bar{x} = 0.1203$.

试问在$\alpha = 0.05$的水平上炉门关闭时的辐射量是否升高了？

解： H_0: $\mu \leq 0.12$ $\Longleftrightarrow$ H_1: $\mu > 0.12$

$$H_0: \mu \leq 0.12 \longleftrightarrow H_1: \mu > 0.12$$

检验统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 拒绝域 $W=\left\{\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha\right\}$

在显著性水平$\alpha = 0.05$下，$z_\alpha = 1.64$ 带入样本观察值得

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0.1203-0.12}{\frac{0.1}{\sqrt{25}}} \approx 0.015 < 1.64$$

从而接受原假设，认为当前炉门关闭时的辐射量没有升高.

方差σ^2已知时, 对均值μ的左侧假设检验

左侧假设检验之情形一:

原假设: $H_0: \mu = \mu_0 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \mu < \mu_0$

如果原假设成立, 即 $\mu = \mu_0$

那么 $\bar{X} - \mu = \bar{X} - \mu_0$ 不应该为很小的负数

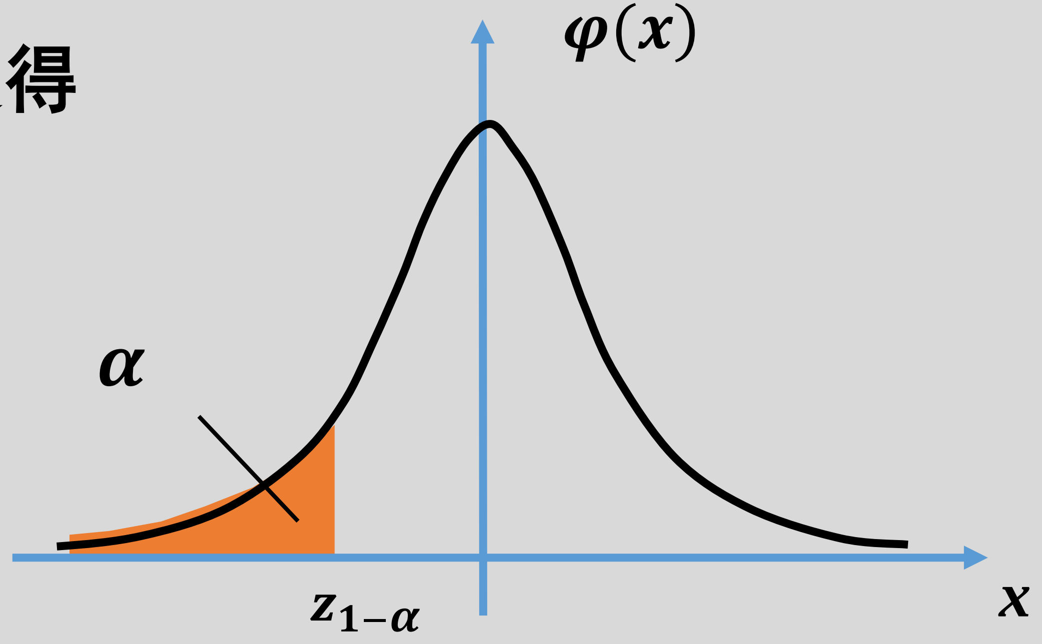
否则可以推断原假设不成立.

选取检验统计量 $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

方差σ^2已知时, 对均值μ的右侧假设检验

对给定的显著性水平α,求负数C, 使得

$$P_{H_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<C\right\}=\alpha$$



由标准正态分布分位点的定义，得 $C=z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

故拒绝域为 $$W=\left\{\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-z_\alpha\right\}$$

方差σ^2已知时, 对均值μ的右侧假设检验

左侧假设检验之另一种情形：

原假设： $H_0\colon \mu \geq \mu_0 \longleftrightarrow H_1\colon \mu < \mu_0$

如果原假设成立，则 $\bar{X} - \mu \leq \bar{X} - \mu_0$

且 $\bar{X} - \mu_0$ 不应该为很小的负数, 否则可以推断原假设不成立.

考虑 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 注意到 $\left\{\boxed{\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}} < C\right\} \subset \left\{\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < C\right\}$

分布未知

方差σ^2已知时，对均值μ的左侧假设检验

故对给定的显著性水平α,求负数C满足 $P_{H_0}\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\boxed{C}\right\}=\alpha$

$C=-z_\alpha$

则 $P_{H_0}\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-z_\alpha\right\}<\alpha$ 求得拒绝域 $W=\left\{\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-z_\alpha\right\}$

$$\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<C\right\}\subset\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<C\right\}$$

方差σ^2已知时，对均值μ的左侧假设检验

- 提出原假设： $H_0: \mu = \mu_0 (\mu \geq \mu_0) \Longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$

- 选定检验统计量： $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

- 确定拒绝域： $W = \left\{ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_\alpha \right\}$

- 取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设

方差σ^2已知时，对均值μ的左侧假设检验

例3：某厂生产需用玻璃纸作包装，按规定供应商供应的玻璃纸的横向延申率不应低于65. 已知该指标服从正态分布，均方差一直稳定于5.5. 从近期来货中抽查了100个样品得样本均值$\bar{x} = 55.06$. 问在$\alpha = 0.05$的水平上能否接受这批玻璃纸？

解：H_0: $\mu \geq 65$ $\longleftrightarrow$ H_1: $\mu < 65$

检验统计量 $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$H_0: \mu \geq 65 \longleftrightarrow H_1: \mu < 65$$

拒绝域 $W = \left\{ \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_\alpha \right\}$

在显著性水平$\alpha = 0.05$下，$z_\alpha = 1.64$ 带入样本观察值得

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{55.06 - 65}{\dfrac{5.5}{\sqrt{100}}} \approx -18.07 < -1.64$$

从拒绝原假设，不能接受这批玻璃纸.

方差σ^2未知时, 对均值μ的双侧假设检验

- 提出原假设： $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

  如果原假设成立，那么 $|\bar{X} - \mu| = |\bar{X} - \mu_0|$

  不应该太大，否则可以推断原假设不成立.

- 根据 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 选定检验统计量：$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

  $C_\alpha = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

  对给定的显著性水平α,求常数C_α, 使得 $P_{H_0}\left\{\left|\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| > \boxed{C_\alpha}\right\} = \alpha$

方差σ^2未知时, 对均值μ的双侧假设检验

- 确定拒绝域： $W=\left\{\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

- 取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设

方差σ^2未知时, 对均值μ的右侧假设检验

方差未知时，对均值μ的右侧假设检验之情形一：

原假设：H_0: $\mu = \mu_0$ ⟷ H_1: $\mu > \mu_0$

如果原假设成立，那么

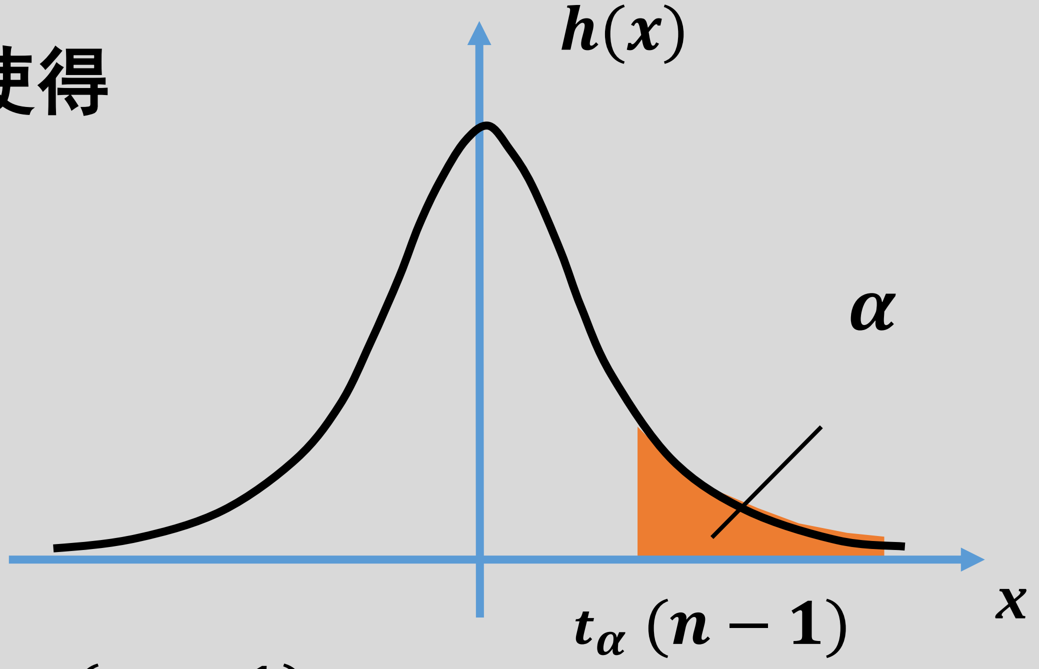
$\bar{X} - \mu = \bar{X} - \mu_0$ 不应该太大，否则可以推断原假设不成立.

根据 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 选取检验统计量 $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

方差σ^2未知时，对均值μ的右侧假设检验

对给定的显著性水平α,求常数C_α, 使得

$$P_{H_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > C_\alpha\right\} = \alpha$$



由t分布分位点的定义，得 $C_\alpha = t_\alpha(n-1)$

故拒绝域为 $$W = \left\{\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_\alpha(n-1)\right\}$$

方差σ^2未知时, 对均值μ的右侧假设检验

方差未知时，对均值μ的右侧假设检验之情形二：

原假设：H_0: $\mu \le \mu_0$ $\longleftrightarrow$ H_1: $\mu > \mu_0$

如果原假设成立，那么 $\bar{X} - \mu > \bar{X} - \mu_0$

且 $\bar{X} - \mu_0$ 不应该太大，否则可以推断原假设不成立.

根据 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 选取检验统计量 $\boxed{\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}$ 分布未知

方差σ^2未知时, 对均值μ的右侧假设检验

故对给定的显著性水平α,求常数C_α满足 $P_{H_0}\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \boxed{C_\alpha}\right\} = \alpha$

$C_\alpha = t_\alpha(n-1)$

注意到

$$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)\right\} \subset \left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)\right\}$$

故

$$P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_\alpha(n-1)\right\} < \alpha$$

即拒绝域

$$W = \left\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_\alpha(n-1)\right\}$$

方差σ^2未知时, 对均值μ的右侧假设检验

- **提出原假设：** $H_0: \mu = \mu_0 (\mu \leq \mu_0)$ $\Longleftrightarrow$ $H_1: \mu > \mu_0$
- **选定检验统计量：** $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$
- **确定拒绝域：** $W = \left\{ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_\alpha(n-1) \right\}$
- **取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设**

方差σ^2未知时, 对均值μ的左侧假设检验

左侧假设检验之情形一：

原假设： $H_0: \mu = \mu_0$ $\Longleftrightarrow$ $H_1: \mu < \mu_0$

如果原假设成立，则

$\bar{X} - \mu = \bar{X} - \mu_0$ 不应该为很小的负数

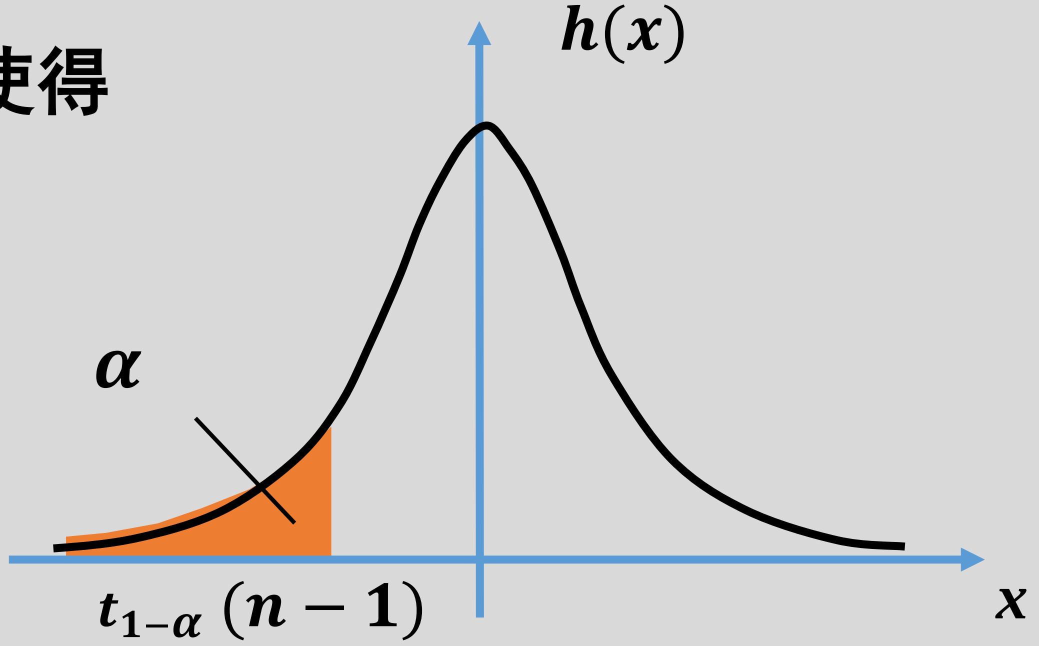
否则可以推断原假设不成立.

根据 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 选取检验统计量 $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

方差σ^2未知时, 对均值μ的左侧假设检验

对给定的显著性水平α,求负数C_α, 使得

$$P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<C_\alpha\right\}=\alpha$$



由t分布分位点的定义，得 $C_\alpha=-t_\alpha(n-1)$

故拒绝域为 $$W=\left\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}<-t_\alpha(n-1)\right\}$$

方差σ^2未知时, 对均值μ的左侧假设检验

左侧假设检验之另一种情形：

原假设：H_0: $\mu \geq \mu_0$ $\longleftrightarrow$ H_1: $\mu < \mu_0$

如果原假设成立，则 $\bar{X} - \mu \leq \bar{X} - \mu_0$

且 $\bar{X} - \mu_0$ 不应该为很小的负数, 否则可以推断原假设不成立.

根据 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 选取检验统计量 $\boxed{\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}$

分布未知

方差σ^2未知时，对均值μ的左侧假设检验

对给定的显著性水平α,求负数C_α满足 $$P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<\boxed{C_\alpha}\right\}=\alpha$$

$$C_\alpha=-t_\alpha(n-1)$$

注意到

$$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}<-t_\alpha(n-1)\right\}\subset\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<-t_\alpha(n-1)\right\}$$

故

$$P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<-t_\alpha(n-1)\right\}<\alpha$$

即拒绝域

$$W=\left\{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}<-t_\alpha(n-1)\right\}$$

方差σ^2未知时, 对均值μ的左侧假设检验

- **提出原假设：** $H_0: \mu = \mu_0 (\mu \geq \mu_0) \longleftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$
- **选定检验统计量：** $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$
- **确定拒绝域：** $W = \left\{ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} < -t_\alpha(n-1) \right\}$
- **取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设**

方差σ^2未知时，对均值μ的双侧假设检验

例4：某糖厂用自动打包机打包，每包标准重量为100公斤，每天开工后需检验一次打包机是否正常工作，某日开工后测得九包重量为

$$99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.1, 100.5$$

假设每包的重量服从正态分布，在显著性水平$\alpha = 0.05$的水平下，打包机工作是否正常？

$$H_0: \mu = 100 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq 100$$

检验统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$　拒绝域 $W = \left\{ \left| \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$

在显著性水平$\alpha = 0.05$下，$t_{0.025}(8) = 2.3060$带入样本观察值得

$$\left| \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| = \left| \frac{99.98-100}{\frac{1.212}{\sqrt{9}}} \right| \approx 0.05 < 2.3060$$

故接受原假设，可以认为打包机工作正常.

方差σ^2未知时，对均值μ的右侧假设检验

例5：根据某地环境保护法规定，倾入河流的废水中某种有毒化学物质的含量不得超过3ppm. 该地区环保组织沿河各厂检查测量每日倾入河流的废水中该有毒化学物质的含量，某厂连日的记录为

$$3.1;\ 3.2;\ 3.3;\ 2.9;\ 3.5;\ 3.4;\ 2.5;\ 4.3;\ 2.9;\ 3.6;\ 3.2;\ 3.0;\ 2.7;\ 3.5;\ 2.9$$

假定废水中该有毒化学物质的含量服从正态分布，试在$\alpha = 0.05$下检验该厂是否符合环保规定.

$H_0: \mu \le 3 \longleftrightarrow H_1: \mu > 3$

检验统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 拒绝域 $W=\left\{\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_\alpha(n-1)\right\}$

在显著性水平$\alpha = 0.05$下，$t_{0.05}(14) = 1.7613$带入样本观察值得

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{3.2-3}{\frac{0.436}{\sqrt{15}}} \approx 1.7766 > 1.7613$$

从而拒绝原假设，认为该厂不符合环保规定.

均值μ未知时，对方差σ^2的双侧假设检验

- 提出原假设： $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ⟷ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

  如果原假设成立，那么 $\dfrac{S^2}{\sigma^2} = \dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$

  且比值 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 应在1的附近，否则可以推断原假设不成立.

- 根据 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 选定检验统计量：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

对给定的显著性水平α,求常数$C_{1\alpha}, C_{2\alpha}$使得

$$P_{H_0}\left(\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < C_{1\alpha}\right\} \cup \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > C_{2\alpha}\right\}\right) = \alpha$$

取

$$P_{H_0}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \boxed{C_{1\alpha}}\right\} = \frac{\alpha}{2} \qquad P_{H_0}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \boxed{C_{2\alpha}}\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

$$C_{1\alpha} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \qquad C_{2\alpha} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

均值μ未知时，对方差σ^2的双侧假设检验

- 确定拒绝域：

$$W=\left\{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}\cup\left\{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

- 取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设

均值μ未知时，对方差σ^2的右侧假设检验

- 提出原假设： $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \ (\sigma^2 \le \sigma_0^2) \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

  如果原假设成立，那么 $\dfrac{S^2}{\sigma^2} = \dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \ \left(\dfrac{S^2}{\sigma^2} \ge \dfrac{S^2}{\sigma_0^2}\right)$

  且比值 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 不会比1大很多，否则可以推断原假设不成立.

- 根据 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 选定检验统计量： $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

- 确定拒绝域： $W = \left\{ \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1) \right\}$

均值μ未知时，对方差σ^2的左侧假设检验

- 提出原假设： $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \ (\sigma^2 \geq \sigma_0^2) \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

  如果原假设成立，那么 $\dfrac{S^2}{\sigma^2} = \dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \left(\dfrac{S^2}{\sigma^2} \leq \dfrac{S^2}{\sigma_0^2}\right)$

  且比值 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 不会比1小很多，否则可以推断原假设不成立.

- 根据 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 选定检验统计量： $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

- 确定拒绝域： $W = \left\{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right\}$

方差μ未知时，对均值σ^2的右侧假设检验

例6：某种导线的电阻服从正态分布，μ未知，其中一个质量指标是电阻标准差不得大于0.005欧. 现从中抽取了九根导线测其电阻，测得样本标准差$s = 0.0066$，试问在$\alpha = 0.05$ 水平上能否认为这批导线的电阻波动合格？

解：原假设　$H_0: \sigma^2 \le 0.005^2 \Longleftrightarrow H_1: \sigma^2 > 0.005^2$

选定检验统计量：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

$$H_0: \sigma^2 \leq 0.005^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 > 0.005^2$$

确定拒绝域： $W = \left\{ \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1) \right\}$

在显著性水平$\alpha = 0.05$下，$\chi_{0.05}^2(8) = 15.507$ 带入样本观察值得

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{8 \times 0.0066^2}{0.005^2} = 13.94 < 15.507$$

故接受原假设，认为这批导线的电阻波动合格.

均值μ已知时，对方差σ^2的双侧假设检验

- **提出原假设：** $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \leftrightarrow \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- **根据** $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ **选定检验统计量：** $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$
- **确定拒绝域：**

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \right\} \cup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \right\}$$

- **取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设**

均值μ已知时，对方差σ^2的右侧假设检验

- 提出原假设： $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \ (\sigma^2 \le \sigma_0^2) \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

- 选定检验统计量： $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$

- 确定拒绝域： $W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n) \right\}$

- 取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设

均值μ已知时，对方差σ^2的左侧假设检验

- 提出原假设： $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \ (\sigma^2 \geq \sigma_0^2) \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

- 选定检验统计量： $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$

- 确定拒绝域： $W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n) \right\}$

- 取样，根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设