Ch3 中值定理与导数的应用 习题课课件中例子参考解答 ①

微分中值定理.

例4

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi) \qquad (a>0)$$

分析：法1. $2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(x)$

$$\Downarrow$$

$$(b^2-a^2)f'(x)-2x[f(b)-f(a)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$F(x)=(b^2-a^2)f(x)-[f(b)-f(a)]x^2$$

验证 $F(a)=(b^2-a^2)f(a)-[f(b)-f(a)]a^2=b^2f(a)-a^2f(b)$

$F(b)=(b^2-a^2)f(b)-[f(b)-f(a)]b^2=b^2f(a)-a^2f(b)$

对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上用罗尔定理.

法2.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\Bigg|_{x=\xi}$$

对 $f(x)$ 与 x^2 在 $[a,b]$ 上用柯西中值定理.

思考：若将 $a>0$ 条件去掉，这时 b^2-a^2 可能为0，故法2不能用. 但可采用法1来证.

例5.

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

分析：结论中出现了两个中值点，故应用两次中值定理.

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f'(\xi)}{a+b}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f'(\eta)}{(x^2)'}\Bigg|_{x=\eta}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{柯西定理}}}{\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}}=\frac{1}{a+b}\cdot\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{=f'(\xi)}$$

拉格朗日定理.

例6. 证明 $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x}$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$

证: 对 $f(t)=\tan t$ 在 $[0,x]$ 上用拉格朗日定理.

$$\tan x - \tan 0 = \sec^2\xi\cdot(x-0) = x\sec^2\xi = \frac{x}{\cos^2\xi}. \qquad 0<\xi<x$$

又 $x = \dfrac{x}{\cos^2 0} < \dfrac{x}{\cos^2\xi} < \dfrac{x}{\cos^2 x}$ (因 $\cos^2\xi$ 在 $0<\xi<x<\frac{\pi}{2}$ 时递减)

故 $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x}$ $0<x<\frac{\pi}{2}$

例7 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(-\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x})\cos\frac{1}{x}}{(e^{\frac{1}{x}+a}-e^a)^2\sin\frac{1}{x}}$

解: 令 $\frac{1}{x}=t$, 则

$$原式 = \lim_{t\to0}\frac{(-\sin t+t\cos t)\cos t}{(e^{t+a}-e^a)^2\sin t} = \lim_{t\to0}\frac{-\sin t+t\cos t}{e^{2a}(e^t-1)^2\sin t}$$

$$= e^{-2a}\lim_{t\to0}\frac{-\sin t+t\cos t}{t^3} = e^{-2a}\lim_{t\to0}\frac{-\cos t+\cos t-t\sin t}{3t^2}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-2a}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

解: 原式 $\displaystyle = \lim_{x\to0}\frac{(e^x-\sin x-1)(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$\displaystyle = 2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}$

$\displaystyle = 2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{2x}$

$\displaystyle = 2\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{2}$

$= 1$

利用 $x\to0$ 时, $(1+x)^\alpha \sim \alpha x$.

或 原式 $\displaystyle = \lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}$

$= \cdots$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

解: 令 $\frac{1}{x}=t$

$$原式=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $\arcsin x=t$

$$原式=\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{\frac{1}{\sin^2 t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\sin^2 t}\ln\frac{t}{\sin t}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln t-\ln\sin t}{\sin^2 t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln t-\ln\sin t}{t^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{\cos t}{\sin t}}{2t}\right)}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t-t\cos t}{2t^3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{6t^2}}=e^{\frac{1}{6}}$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

解: $原式=\lim\limits_{x\to\infty}|x|\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$

$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}$

$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{6}}-(1-t)^{\frac{1}{6}}}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\left[\frac{1}{6}(1+t)^{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{6}(1-t)^{-\frac{5}{6}}\right]=\frac{1}{3}$

$-\lim\limits_{t\to0^-}\frac{(1+t)^{\frac{1}{6}}-(1-t)^{\frac{1}{6}}}{t}=-\frac{1}{3}$

注: 建议将题中 $x\to\infty$ 改为 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$.

例18 (1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln^4(1+x)}$

解: 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5) - 1 - (-\frac{x^2}{2}) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4)}{x^4}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$

(2) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x - x^2 \ln(1+\frac{1}{x})\right)$

解: $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \left\{x - x^2\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right]\right\}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{1}{2} - x^2 o(\frac{1}{x^2})\right] = \frac{1}{2}$

注: 前面用洛(必达)法则做了一次.

导数的应用

例1 (1) 选(D).

(2) 选(B)

(3) 选(A)

(4) 选(C)

例2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=k\ (k\neq 0)$ 讨论 $f(x)$ 在 x_0 处是否有极值.

解: $k>0$ 时, 由极限保号性, 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}>0$.

若 n 为偶数, 有 $f(x)>f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 为极小值.

若 n 为奇数, 当 $x<x_0$ 时, 有 $f(x)<f(x_0)$

当 $x>x_0$ 时, 有 $f(x)>f(x_0)$

故此时 $f(x_0)$ 不是极值.

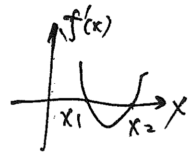
$k<0$ 时, 类似可得. 若 n 为偶数, 则 $f(x_0)$ 为极大值.

若 n 为奇数, 则 $f(x_0)$ 不是极值.

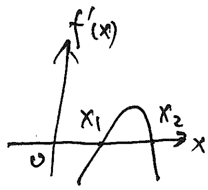
例3. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad(a\neq 0)$ 确定 a,b,c 使 $f(x)$ 有极值.

解: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

当 $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)>0$, 即 $b^2-3ac>0$ 时, $f'(x)$ 有2个零点, 则 $f(x)$ 有2个极值点.



$(a>0)$



当 $\Delta=0$, 即 $b^2-3ac=0$ 时, $f'(x)$ 有1个零点, 但 $f'(x)$ 的符号不变化, 故 $f(x)$ 无极值.

当 $\Delta<0$, 即 $b^2-3ac<0$ 时, $f'(x)$ 无零点, $f(x)$ 无极值.

例4. $f(0)=0$，$f''(x)>0$，证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单增.

证 $F'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，则

$g'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)>0 \quad x\in(0,1)$

故 $g(x)=xf'(x)-f(x)>g(0)=0$

从而 $F'(x)>0$，即 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单增.

补1，见课件.

例5. (1) $y=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$

解: $y'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$

由 $y'=0 \Rightarrow x=e$.

$0<x<e$ 时，$y'>0$

$x>e$ 时，$y'<0$，故有极大值 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

(2) $y=e^x\cos x$

解: $y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)=-\sqrt{2}e^x\sin(x-\frac{\pi}{4})$

由 $y'=0 \Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in Z \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$. $k\in Z$

又 $y''=-2e^x\sin x$

~~时 $y''(k\pi+\frac{\pi}{4})$~~ 又 $\sin(k\pi+\frac{\pi}{4})=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2} & k=2m,\ m\in Z\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & k=2m+1,\ m\in Z.\end{cases}$

所以 当 $x=2m\pi+\frac{\pi}{4}$，$m\in Z$ 时，$y''(2m\pi+\frac{\pi}{4})<0$，此时 y 有极大值

$y(2m\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2m\pi+\frac{\pi}{4}}$.

当 $x=(2m+1)\pi+\frac{\pi}{4}$，$m\in Z$ 时，$y''(2m\pi+\frac{\pi}{4})>0$，此时 y 有极小值.

$y(2m\pi+\frac{5\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2m\pi+\frac{5\pi}{4}}$.

例6 $x^2y^2+y=1 \quad (y>0)$

解: $2xy^2+x^2\cdot 2y\cdot y'+y'=0$ ①

令 $y'=0$，则 $2xy^2=0 \Rightarrow x=0 \quad (y>0)$

$x=0$ 代入原方程有 $y=1$.

对①式两边继续求导，有

$$2y^2+2x\cdot 2y\cdot y'+2x\cdot 2yy'+x^2\cdot 2y'\cdot y'+x^2\cdot 2y\cdot y''+y''=0 \quad ②$$

将 $x=0,\ y=1,\ y'(0)=0$ 代入②式，有

$$2+y''(0)=0 \Rightarrow y''(0)=-2<0.$$

所以隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处有极大值 $y(0)=1$.

例7. $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 见课件.

补2. $y=e^{x^{-2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$，渐近线有几条?

解: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{x^{-2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$

故 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 是曲线的水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=e\cdot\dfrac{\pi}{2}$ 不是铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$ 故曲线有铅直渐近线 $x=0$.

曲线有2条渐近线.

例8. (1) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x \quad (x>0)$

证: 先证 $\sin x<x$.

对 $\sin t$ 在 $[0,x]$ 上用拉格朗日公式，有

$$\sin x-\sin 0=\cos\xi\cdot(x-0)=x\cos\xi \qquad 0<\xi<x.$$

$$\therefore \sin x=x\cos\xi<x \qquad (x>0)$$

再证 $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$.

令 $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$, $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$, $\qquad f'(0)=0$

$f''(x)=-\sin x+x>0$ (已证右侧不等式)

$$\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \qquad 0<\xi<x$$

$$=\frac{f''(\xi)}{2!}x^2>0$$

(2) $\sin x>\frac{2}{\pi}x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

证: $\sin x>\frac{2}{\pi}x \iff \frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$.

可见只要证 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单减即可.

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

令 $g(x)=x\cos x-\sin x$, $\quad g(0)=0$

$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$.

故 $g(x)<g(0)=0$.

所以 $f'(x)<0$, 即 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 单减.

因而 $\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$.

即 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$.

注: 本题用凸性也可证, 见课件.

3) $2^x > x^2 \quad (x>4)$

证 $2^x > x^2 \iff x\ln 2 > 2\ln x \iff \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 4}{4}$.

可见只需证 $\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $x>4$ 时单减即可.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0 \quad$ ($x>4$ 时, $\ln x > \ln 4 > \ln e = 1$)

所以 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ 在 $x>4$ 时单减, 则所证不等式成立.

4) $x^{\alpha} - \alpha x \le 1-\alpha \quad (x\geqslant 0,\ 0<\alpha<1)$

证: $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x - 1 + \alpha$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1}-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \Rightarrow f''(1) = \alpha(\alpha-1) < 0$

可见 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极大值, 也是最大值.

故 $f(x) \le f(1) \cancel{=1-\alpha-1+\alpha} = 0$, 即 $x^{\alpha} - \alpha x \le 1-\alpha$.

补3 (1) $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3 \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

证 $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$

$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x) > 0$.

(这里可以利用 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x$, 也可令 $g(x) = \tan x - x$, $g'(x) = \sec^2 x - 1 > 0$, 则 $g(x) > g(0) = 0$).

即 $f(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时单增, $f(x) > f(0) = 0$.

(2) $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x} \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

前面用中值定理已证。这里用单调性证. (证 $x<\tan x$ 见补3(1))

只证 $\tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x} \iff \tan x\cos^2 x < x \iff \sin x\cos x < x \iff \frac{1}{2}\sin 2x < x$

令 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - x$, $f'(x) = \cos 2x - 1 < 0 \ (0<x<\frac{\pi}{2})$, 故 $f(x) < f(0) = 0$.

~~(3) —— x_1~~

例9. 讨论 $x-\ln x+k=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内实根的个数.

解 $f(x)=x-\ln x+k \quad x\in(0,+\infty)$

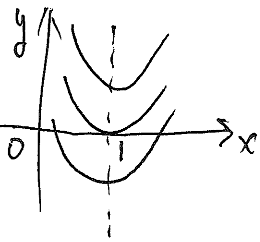
$f'(x)=1-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x=1.$

$0<x<1$ 时, $f'(x)<0$; $x>1$ 时, $f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值, 也是最小值. $f(1)=1+k$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x+k)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x+k)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}+\frac{k}{x}\right)=+\infty$



当 $f(1)=1+k>0$ 即 $k>-1$ 时, $f(x)$ 没有零点, 方程 $x-\ln x+k=0$ 在 $x>0$ 时无根.

当 $1+k=0$, 即 $k=-1$ 时, 方程仅有1个根.

当 $1+k<0$, 即 $k<-1$ 时, 方程恰有2个根.

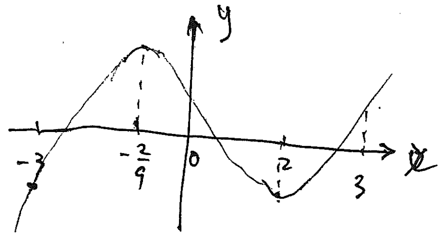
例10. $(x-2)^4(x+3)^5=1$ 的实根个数及区间.

解: $f(x)=(x-2)^4(x+3)^5-1$

$f'(x)=4(x-2)^3(x+3)^5+(x-2)^4\cdot 5(x+3)^4$

$=(x-2)^3(x+3)^4(9x+2)=0$

$\Rightarrow x_1=-3,\ x_2=-\frac{2}{9},\ x_3=2$



x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-\frac{2}{9})$	$-\frac{2}{9}$	$(-\frac{2}{9},2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	-1	↗	正数 极大	↘	-1 极小	↗

$f(x)$ 有3个零点, 分别在区间 $(-3,-\frac{2}{9})$, $(0,2)$, $(2,3)$ 内

$f(3)>0$.

补4 $xe^{-x}=a\ (a>0)$ 的实根个数

解: $f(x)=xe^{-x}-a$

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

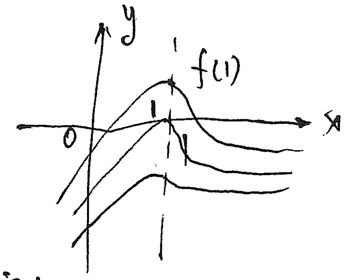
$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$

$x<1$ 时, $f'(x)>0$; $x>1$ 时, $f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值, 也是最大值 $f(1)=e^{-1}-a$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}-a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}-a=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-a+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=-a.$

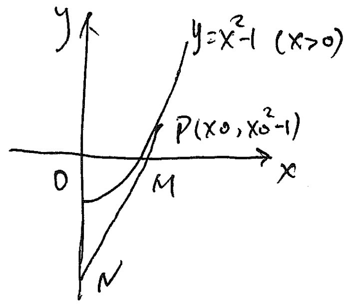


故当 $f(1)=e^{-1}-a>0$, 即 $a<\frac{1}{e}$ 时, 方程 $xe^{-x}=a$ 有2个实根.

当 $f(1)=e^{-1}-a=0$, 即 $a=\frac{1}{e}$ 时, 方程有1个实根.

当 $f(1)=e^{-1}-a<0$, 即 $a>\frac{1}{e}$ 时, 方程无实根.

例11. $C: y=x^2-1\ (x>0)$.



设 $P(x_0, x_0^2-1)$, 则过P点的切线方程为

$$y-(x_0^2-1)=2x_0(x-x_0)$$

即 $$y=2x_0x-x_0^2-1$$

M点坐标 $(\frac{x_0^2+1}{2x_0}, 0)$, N点坐标 $(0, -x_0^2-1)$

$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_0^2+1}{2x_0}\cdot(x_0^2+1)=\frac{1}{4}\frac{(x_0^2+1)^2}{x_0}$

求函数 $f(x)=\frac{1}{4}\frac{(x^2+1)^2}{x}$ 的最小值.

$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+x^2)(3x^2-1)}{x^2}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由实际问题的意义, $\triangle OMN$ 面积最小值一定存在, 故唯一驻点 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 也就是最小值点.

所以, 当点P的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3})$ 时 $\triangle OMN$ 面积最小, 且最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

~~从甲城开往乙城　总费用~~

~~例12. 设火车以速度 x km/h 行驶时每小时所耗燃料费为 $f(x)$.~~

~~$f(x)=kx^3$，又 $40=k\cdot 20^3$，则 $k=\frac{1}{200}$.~~

~~故 $f(x)=\frac{1}{200}x^3$.~~

12

例12. 设火车速度为 x km/h，甲、乙之间的距离为 a km. 则总费用为

$$f(x)=(kx^3+200)\frac{a}{x}$$

$$=a\left(kx^2+\frac{200}{x}\right)$$

又 $40=k20^3 \Rightarrow k=\frac{1}{200}$

所以 $f(x)=a\left(\frac{x^2}{200}+\frac{200}{x}\right) \quad (x>0)$

$$f'(x)=a\left(\frac{x}{100}-\frac{200}{x^2}\right)=\frac{a(x^3-20000)}{100x^2}=0$$

$$\therefore\ x=10\sqrt[3]{20}$$

根据实际问题的意义，当 $x=10\sqrt[3]{20}$ 时，总费用最小，即行驶速度最经济.