离散型随机变量

- 离散型随机变量的分布律
- 常见离散型随机变量的分布

离散型随机变量的分布律

主要内容

离散型随机变量的分布律

分布律与分布函数的关系

离散型随机变量的分布律

重要问题

已知分布律求分布函数（以及求事件的概率）

已知分布函数求分布律（以及求事件的概率）

离散型随机变量的分布律

定 义

设X是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量，如果X只取有限个或可列无穷多个值$x_1,x_2,\dots,$则称X为离散型随机变量，称

$$p_k=P(X=x_k),\qquad k\ge 1$$

为X的分布律或分布列.

离散型随机变量的分布律

离散型随机变量的分布律也可表示为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

或 $$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

$$p_k \geq 0, k \geq 1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

离散型随机变量的分布律

例1 将一枚硬币连掷两次, X表示“两次中正面出现的次数”，

求X的分布律及分布函数，并求下列概率值

$P(0 < X \leq 2)$　　$P(0 < X < 2)$　　$P(X > 1)$

解：　X的分布律为

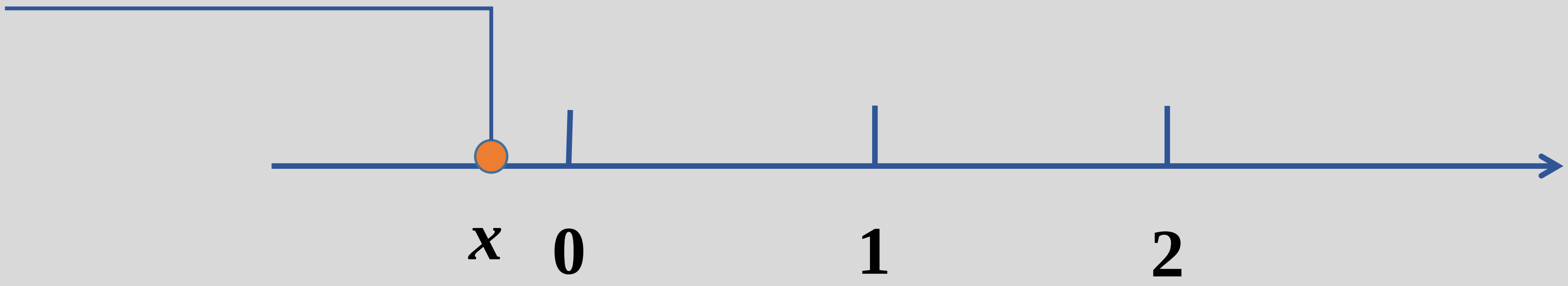
X	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$F(x) = P(X \le x), x \in \mathbb{R}$

X	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

当$x < 0$时， $F(x) = P(X \le x) = 0$

当$0 \le x < 1$时， $F(x) = P(X \le x) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$

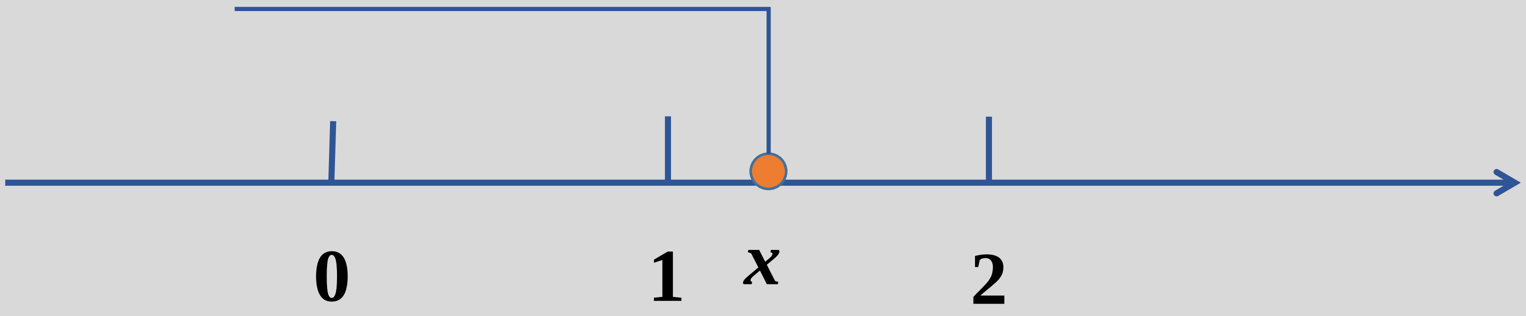


$$F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

X	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

当$1 \leq x < 2$时，$F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$

当$x \geq 2$时，$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$



离散型随机变量的分布律

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

$$P(0 < X \le 2) = F(2) - F(0) = \frac{3}{4}$$

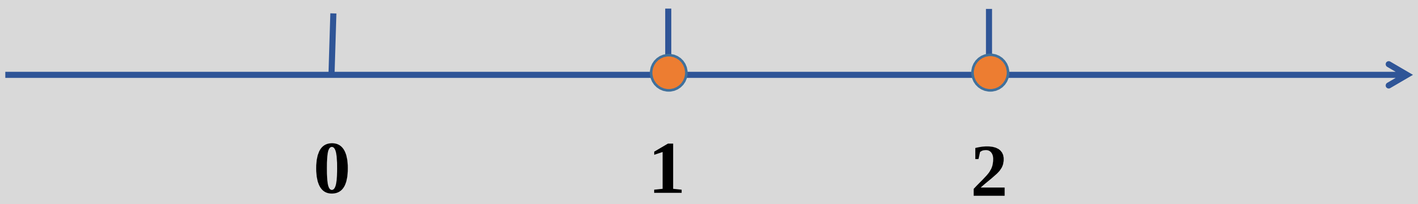
$$P(0 < X < 2) = F(2-0) - F(0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X > 1) = 1 - F(1) = \frac{1}{4}$$

离散型随机变量的分布律

X	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

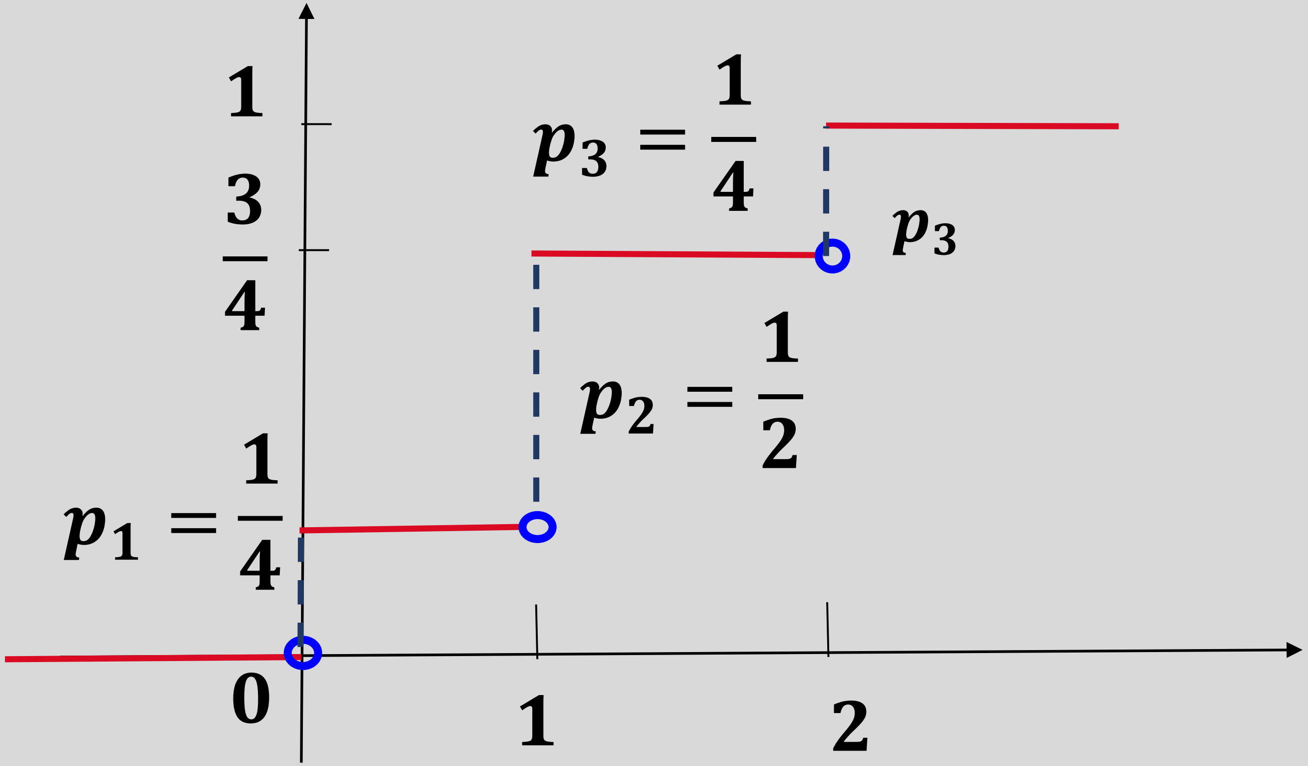
$$P(0 < X \leq 2) = \frac{3}{4} \qquad P(0 < X < 2) = \frac{1}{2} \qquad P(X > 1) = \frac{1}{4}$$



离散型随机变量的分布律

X	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0\le x<1 \\ \frac{3}{4} & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

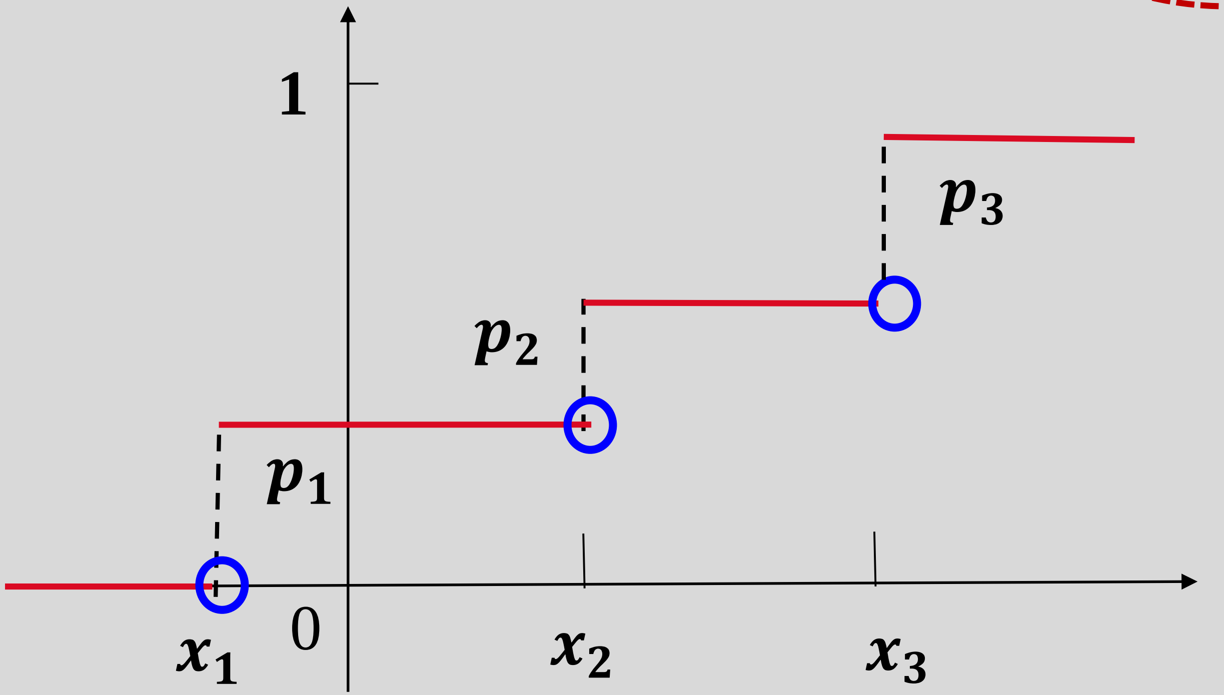


离散型随机变量的分布律

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$

$\Longleftrightarrow$

$$F(x)=\sum_{x_i\le x}p_i=\begin{cases}0 & x<x_1\\ p_1 & x_1\le x<x_2\\ p_1+p_2 & x_2\le x<x_3\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$



$\Downarrow$

$$P(X=x_k)=F(x_k)-F(x_k-0)$$

离散型随机变量的分布律

分布律与分布函数的关系

分布律 $p_k = P\{X = x_k\}$

$\Downarrow \Uparrow$

分布函数 $F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_k$

离散型随机变量的分布律

重要问题

已知分布律求分布函数 (以及求事件的概率)

已知分布函数求分布律 (以及求事件的概率)

常见离散型随机变量的概率分布

两点分布

二项分布

泊松分布

两 点 分 布

在一次伯努利试验中，定义 $X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生}\\0, & \overline{A}\text{ 发生}\end{cases}$

$\Longrightarrow$

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$\Longrightarrow$ X 服从 两点分布

n重伯努利试验

$P(A)=p$ ， $0<p<1$

试验独立重复n次

$$P\,(A\text{发生}k\text{次})=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}\quad k=0,1,\ldots,n$$

n重伯努利试验

X: 事件A发生的次数, 可能取值为 $0, 1, 2, \ldots, n$

$$P(X=k)=p_k=C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\ldots,n$$

$$1=[p+(1-p)]^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}$$

两 点 分 布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值，它的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称 X 服从 (0—1) 分布或两点分布或伯努利分布.

二项分布

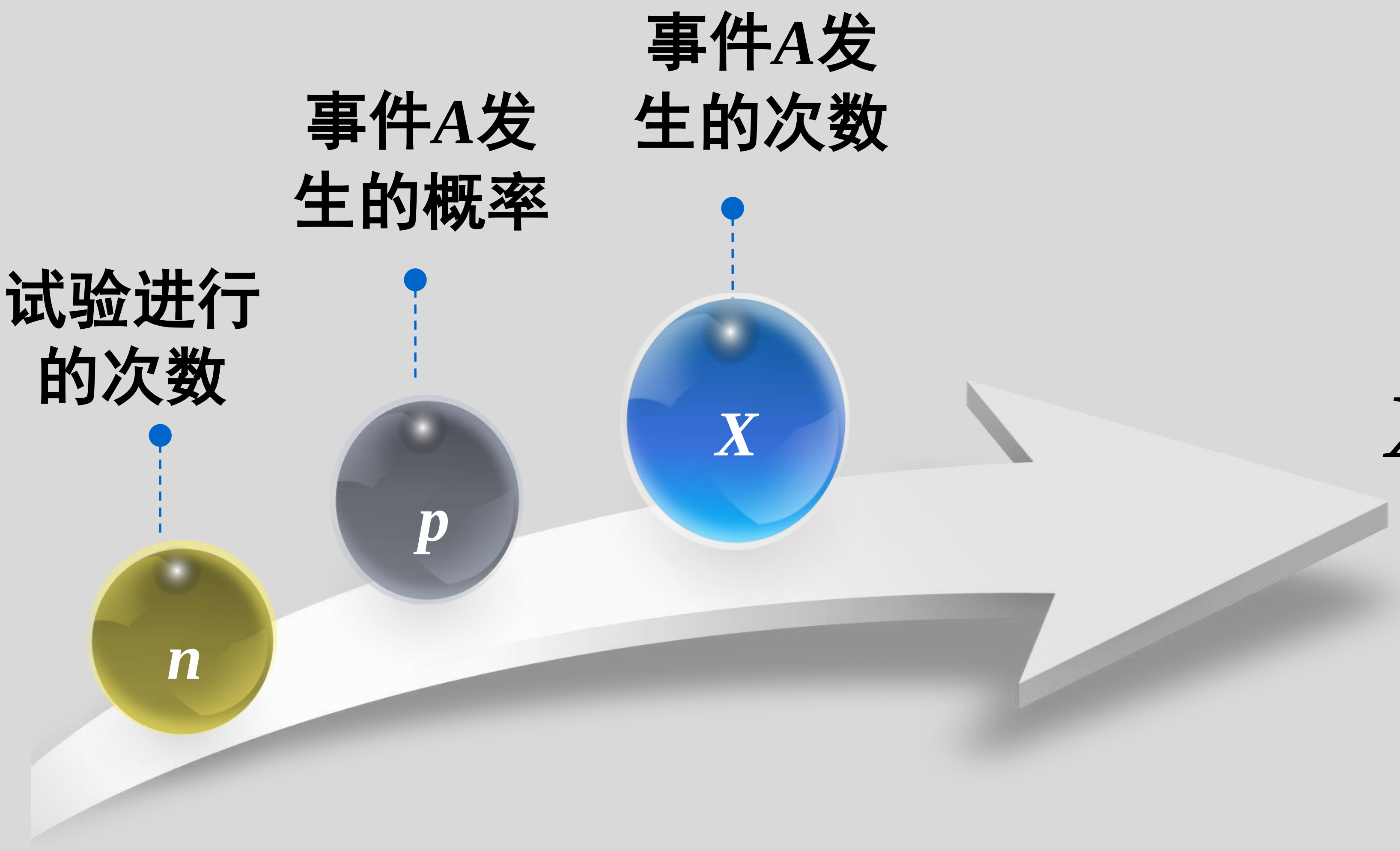
设随机变量X的可能取值为0, 1,…, n，且其分布律为

$$P(X=k)=C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k}\quad k=0,1,\ldots,n$$

其中$0<p<1$,则称随机变量X服从以n,p为参数的二项分布

记为 $X\sim B(n,p)$

二项分布



$X \sim B(n, p)$

二项分布

例1. 某电话总机有300个用户，但只有8条线路可供打进电话，在每个时刻各用户通话与否相互独立，各用户通话的概率均为 $\frac{1}{60}$. 求在某给定时刻有用户打不进电话的概率。

分析：在某给定时刻，将一个用户通话与否看作一次试验

A：用户通话 $P(A)=\frac{1}{60}$ $n=300$

设有X个用户通话 $\Longrightarrow$ $X\sim B(300,\frac{1}{60})$ $P(X>8)=?$

$$n = 300 \quad P(A) = \frac{1}{60} \quad X \sim B(300, \frac{1}{60})$$

$$P(X > 8) = \sum_{k=9}^{300} P(X = k) = \sum_{k=9}^{300} C_{300}^{k} (\frac{1}{60})^{k} (1 - \frac{1}{60})^{300-k} \;=?$$

泊松定理

设对每个自然数n，$0 < p_n < 1$.　若存在极限 $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$,

则对每个非负整数k, 有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k\, p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\Downarrow$$

若n很大(通常不小于20), p很小(通常不大于0.05), 则

$$C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \lambda = np \quad k=0, 1,\dots, n$$

$$n = 300 \quad P(A) = \frac{1}{60} \Longrightarrow \lambda = 5$$

$$P(X \geq x) = \sum_{r=x}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

x	λ=4.0	λ=4.5	λ=5.0
9	0.021363	0.040257	0.068094

$$P(X > 8) = P(X \geq 9) \approx 0.068$$

泊松定理

例2. 某电话总机有300个用户，在每个时刻各用户通话与否相互独立，各用户通话的概率均为 $\frac{1}{60}$. 为了保证在某给定时刻有用户打不进电话的概率小于0.01. 问应至少设置多少条线路可供打进电话？

分析： A： 用户通话　　$P(A)=\frac{1}{60}$　　$n=300$

设有X个用户通话 $\Longrightarrow$ $X\sim B(300,\frac{1}{60})$

$P(X>x)<0.01 \Longrightarrow x\geq ?$

泊松定理

$n(=300)$

$P\left(=\frac{1}{60}\right)$

$\lambda(=5)$

$x(\geq 8)$

$P(X>x)=P(X\geq x+1)$

<0.01

$$n = 300 \quad P(A) = \frac{1}{60} \Longrightarrow \lambda = 5$$

$$P(X \geq x) = \sum_{r=x}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

$$P(X > x) = P(X \geq x + 1) < 0.01$$

$$\Downarrow$$

$$x + 1 \geq 12 \Longrightarrow x \geq 11$$

x	λ=5.0
9	0.068094
10	0.031828
11	0.013695
12	0.005453

泊 松 分 布

$$\left.\begin{array}{r} 0 < p_n < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

设随机变量X的可能取值为0,1,…, 且X的分布律为

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k=0,\ 1,\dots$$

则称X服从以λ为参数的泊松分布，记为

$$X \sim P(\lambda)$$

泊 松 分 布

例3. 实验室器皿产生甲、乙两类细菌的机会是相等的，

且产生的细菌总数服从参数为λ的泊松分布. 试求

产生了甲类细菌但没有乙两类细菌的概率。

分析：用Z表示产生的细菌总数，则 $Z \sim P(\lambda)$

X表示产生的甲类细菌数；

求 $P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{X=n, Z=n\}\right)$

泊松分布

Z：产生的细菌总数， $Z\sim P(\lambda)$ X:产生的甲类细菌数

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{X=n,Z=n\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n|Z=n\}P\{Z=n\}$$

由 $Z\sim P(\lambda)$可得， $P\{Z=n\}=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

在已知产生了n个细菌的条件下，甲类细菌数$X\sim B(n,\frac{1}{2})$，故

$$P\{X=n|Z=n\}=C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

泊松分布

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{X=n, Z=n\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P\{X=n|Z=n\}P\{Z=n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$$

$$x=\frac{\lambda}{2}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right)$$

小　　结

一次伯努利试验 → 两点分布

↓

n重伯努利试验 → 二项分布 ← 正态分布

↑

泊松分布

习题解答

13：若每条蚕的产卵数服从参数为λ的泊松分布，而每个卵变为成虫的概率为p，且各卵是否变为成虫彼此独立。求每蚕养活k只小蚕的概率.

解：设每条蚕的产卵数为Z, 则 $Z\sim P(\lambda)$. 又设每条蚕养活X只小蚕, 则

$$P(X=k)=P\left(\sum_{n=k}^{\infty}\{X=k,Z=n\}\right)=\sum_{n=k}^{\infty}P\{X=k,Z=n\}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}P\{X=k|Z=n\}P\{Z=n\}=\sum_{\boxed{n=k}}^{\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

$$m=n-k$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$