第一讲　基 本 概 念

- 随机试验
- 样本空间
- 随机事件

随 机 试 验

随机试验

- 可以在相同的条件下重复地进行
- 试验的所有可能结果不止一个,并且是事先知道的
- 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现

样 本 空 间

样本空间　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合，记为Ω

样 本 点　样本空间的元素，即试验E 的一个结果

样 本 空 间

例 1　抛掷一枚硬币, 观察正面H和反面T出现的情况.

$$\Omega = \{H, T\}$$

例 2　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

样 本 空 间

例 3 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

$$\boldsymbol{\Omega} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

例 4 考察某地区12月份的平均气温.

$$\boldsymbol{\Omega} = \{t: T_1 < t < T_2\}$$ 其中t为平均气温

随 机 事 件

随机事件 随机试验 E 的样本空间Ω的子集，简称事件

例如 抛掷一枚骰子，观察出现的点数

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$A=\{1,\ 3,\ 5\} \Longrightarrow \text{“出现奇数点”}$$

如果试验结果出现的样本点属于事件A $\Longrightarrow$ 事件A发生

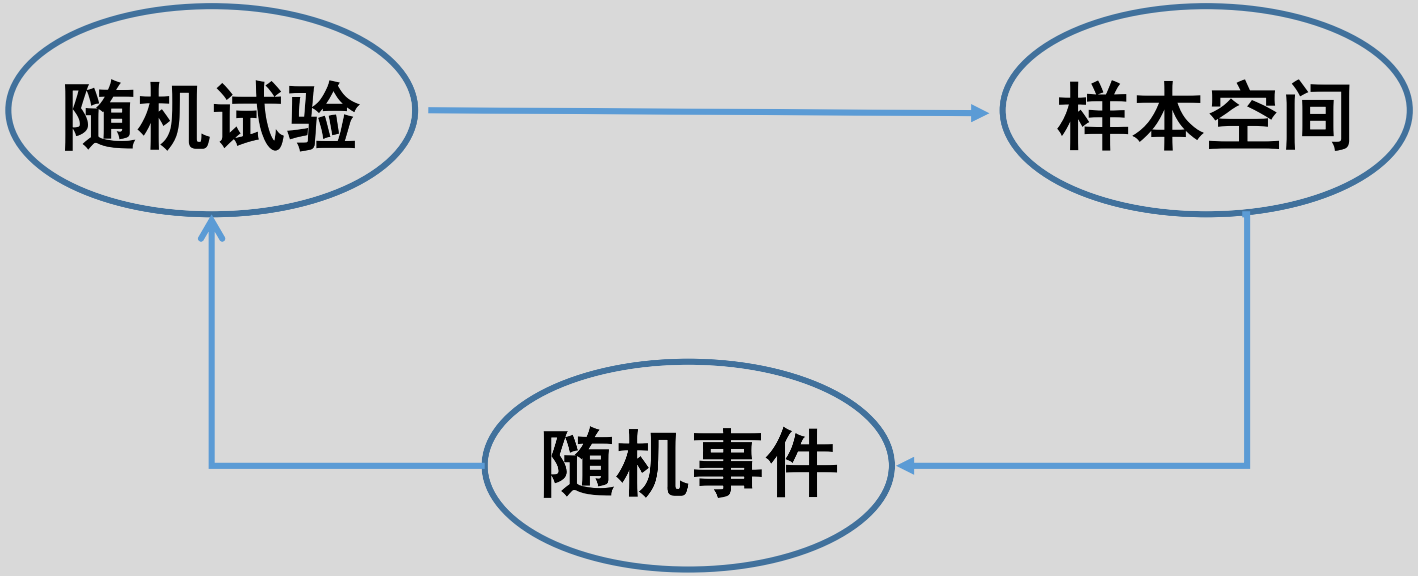
否则称A不发生.

随 机 事 件

两个特殊事件

- 必然事件Ω
- 不可能事件ϕ

随 机 事 件



事件的关系及运算

一个重要观点

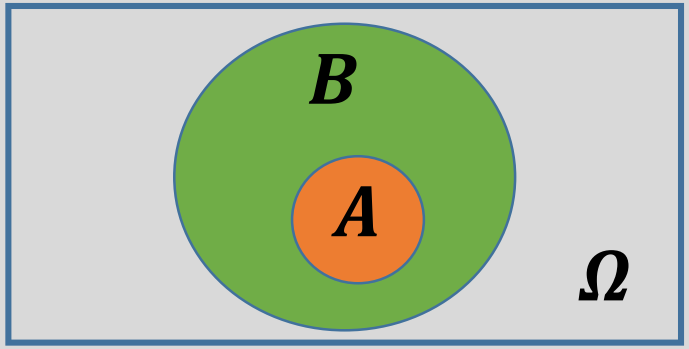
事件是试验的可能结果

事 件 的 关 系

包 含

事件 B 包含事件A $(A \subset B)$ $\Longleftrightarrow$ 事件 A 发生时B 必发生

事件 B 包含事件A $\Longleftrightarrow$ 事件 A 中的结果必在事件B 中



$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{1\} \subset B = \{1,3,5\}$$

事 件 的 关 系

相 等

事件 A 与事件B相等 $(A=B)$ $\Longleftrightarrow$ 事件 A 与事件B 相互包含

事件 A 与事件B相等 $\Longleftrightarrow$ A,B 由完全相同的试验结果构成

事 件 的 关 系

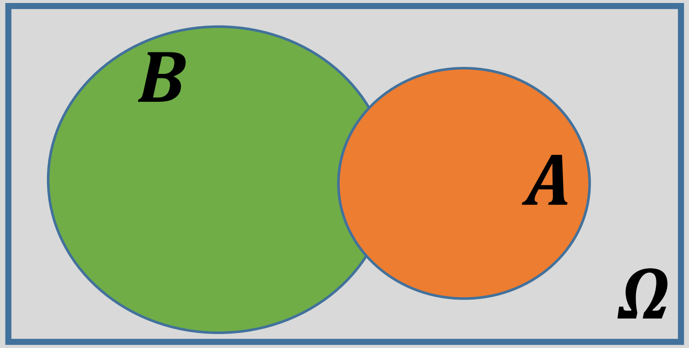
事件的和(或称并)

事件 A 与事件B的和 $(A+B)$发生 $\Longleftrightarrow$ A发生或 B发生

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{1\}\ B=\{5,6\}$

$\longrightarrow A+B=\{1,5,6\}$



事件 A 与事件B的和

$\Longleftrightarrow$ $A+B=\{x{:}\,x\in A\text{或}x\in B\}$

事 件 的 和

n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$的和事件$\sum_{i=1}^{n} A_i$

$\Longleftrightarrow$ $A_1, A_2, \ldots, A_n$至少有一个发生

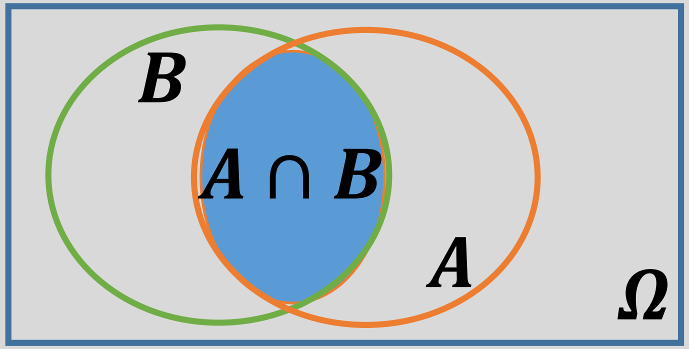
可列无穷多个事件$A_1, A_2, \ldots$的和事件$\sum_{i=1}^{\infty} A_i$

$\Longleftrightarrow$ $A_1, A_2, \ldots$至少有一个发生

事 件 的 关 系

事件的积（或称交）

事件 A 与事件B的积 (AB)发生 $\Longleftrightarrow$ A与 B都发生



$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1\}$ $B = \{1, 3, 5\}$

$\Rightarrow AB = \{1\}$

事件 A 与事件B的积

$\Longleftrightarrow$ $AB = \{x : x \in A$且$x \in B\}$

事 件 的 积

n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$的积事件$\prod_{i=1}^{n} A_i$

$\Longleftrightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$都发生

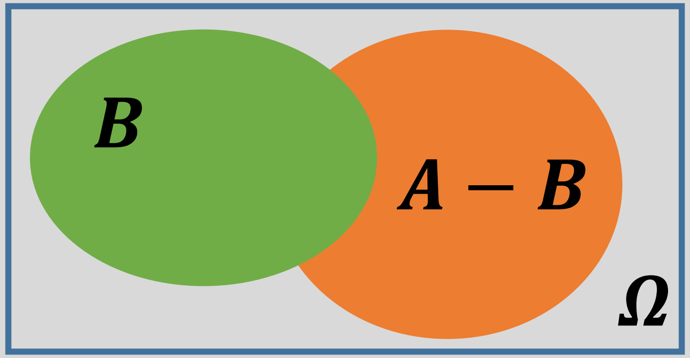
可列无穷多个事件$A_1, A_2, \ldots$的积事件$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$

$\Longleftrightarrow A_1, A_2, \ldots$都发生

事 件 的 关 系

事 件 的 差

事件 A 与事件B的差 $(A-B)$发生 $\Longleftrightarrow$ A发生但 B不发生



$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A=\{1,3,5\}\ B=\{1\}$$

$$\Rightarrow A-B=\{3,5\}$$

事件 A 与事件B的差

$$\Longleftrightarrow A-B=\{x:x\in A,x\notin B\}$$

事 件 的 关 系

事件的互斥(或称互不相容)

事件 A 与事件B互斥 $\Longleftrightarrow$ 事件 A与事件 B不同时发生

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,3,5\}$ $B = \{2\}$

$\Rightarrow AB = \emptyset$

事件 A 与事件B互斥 $\Longleftrightarrow$ $AB = \emptyset$

事 件 的 互 斥

n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$两两互斥 $n > 2$

$\Longleftrightarrow$ $A_1, A_2, \ldots, A_n$中任意两个事件互斥

$\Longleftrightarrow$ $A_iA_j = \emptyset, i, j = 1, \ldots, n$

可列无穷多个事件$A_1, A_2, \ldots$两两互斥

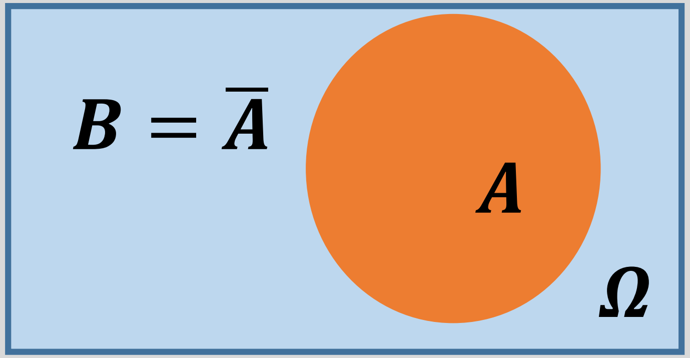
$\Longleftrightarrow$ $A_1, A_2, \ldots$中任意两个事件互斥

$\Longleftrightarrow$ $A_iA_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \ldots$

事 件 的 关 系

事 件 的 对 立

事件 A 的对立事件 $(\bar{A})$ 发生 $\Longleftrightarrow$ 事件 A不发生



事件 A 与事件B对立

$\Longleftrightarrow$ $AB=\emptyset, A+B=\Omega$

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{1,3,5\}$

$\Rightarrow \bar{A}=\{2,4,6\}$

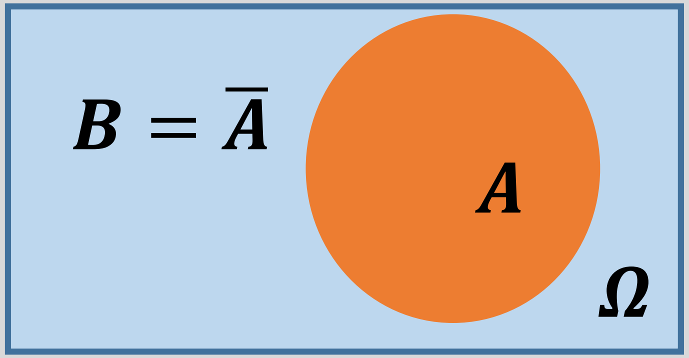
对立事件与互斥事件的区别

A、B互斥

A、B对立

$AB=\varnothing$

$A+B=\Omega, AB=\phi$



事 件 的 运 算

事件的运算规律

- 交换律
- 结合律
- 分配律
- 对偶律
- 不相容分解

对 偶 律

$$\overline{A+B} = \bar{A}\,\bar{B} \qquad \overline{A\,B} = \bar{A}+\bar{B}$$

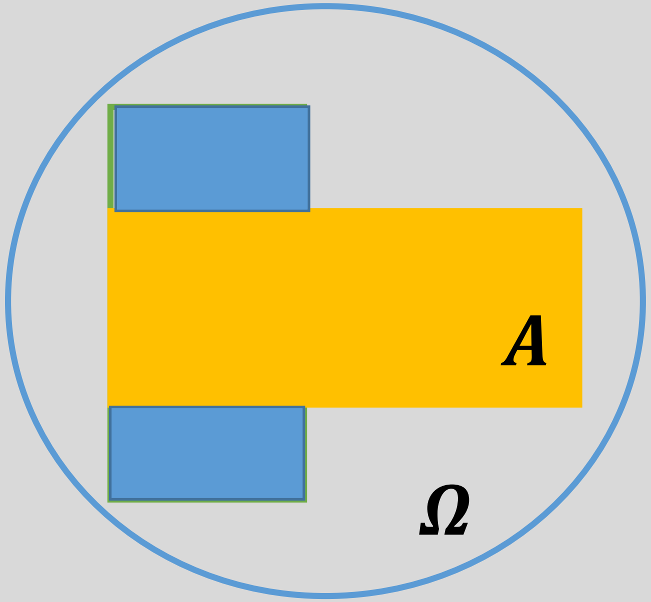
$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

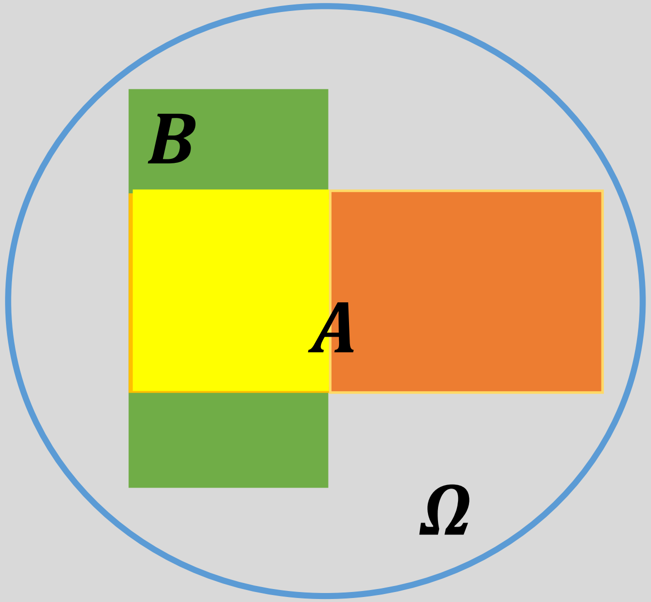
$$\overline{\sum_{i=1}^{\infty} A_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \qquad \overline{\prod_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

不 相 容 分 解

$$A + B = A + \bar{A}B$$

$$A = AB + A\bar{B}$$





$$\bar{A}B = B - A$$

$$A\bar{B} = A - B = A - AB$$

事件的关系及运算

例 设A,B,C 表示三个随机事件, 试将下列事件用A,B,C 表示出来.

(1) A 出现 但B, C 不出现 $A\,\overline{B}\,\overline{C}$

(2）三个事件都不出现 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(3) 三个事件不都出现 $\overline{A\,B\,C}$

事件的关系及运算

(4) 不多于一个事件出现

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$$

(5) 不多于两个事件出现

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + A\,B\,\overline{C} + \mathbf{A}\overline{B}\,C + \overline{A}\,BC$$

$$= \overline{ABC}$$

事 件 域

定义 设Ω为样本空间, $\mathcal{F}$为某些子集合组成的集合，如果它满足：

$$\Omega \in \mathcal{F}$$

$$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$$

$$A_k \in \mathcal{F}, k = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$$

则称$\mathcal{F}$为一个事件域，称 $\mathcal{F}$中的元素为事件.

事 件 域

最小的事件域 $\longrightarrow$ $\mathcal{F}=\{\Omega,\phi\}$

最大的事件域 $\longrightarrow$ 样本空间的所有子集全体

包含事件A的最小事件域 $\longrightarrow$ $\mathcal{F}=\{\Omega,A,\bar{A},\phi\}$