

武汉大学 2016-2017 学年第一学期期末考试
高等数学 B1 (A 卷答题卡)

姓名

班级

考 生 学 号															
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

填涂样例

正确填涂
错误填涂

注意
事项

1.答题前,考生先将自己的姓名、学号填写清楚,并填涂相应的考号信息点。
2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写,不得用铅笔或圆珠笔作解答题;字体工整、笔迹清楚。
3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答题无效;在草稿纸、试题卷上答题无效。
4.保持卡面清洁,不要折叠、不要弄破。

1、(8分) 计算极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n + k}$ 。

2、(8分) 计算极限: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$ 。

3、(8分) 求反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$ 的值。

4、(8分) 求函数 $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$ 的间断点并判断其类型。

5、(8分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性。

6、(8分) 设 $f(2+x^4) = \ln \frac{5+2x^4}{x^4-1}$, 且 $f(g(x)) = \ln(1+x)$, 求积分 $\int g(x)dx$ 。

7、(8分) 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处的切线方程和法线方程。

8、(8分) 求解微分方程 $\begin{cases} y'' + y = 2xe^x + 4\sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

9、(10分) 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t(x-t)| dt$ ($0 < x < 1$), 求函数 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间。

10、(8分) 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求积分 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$ 。

11、(8分) 把曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得到一个旋转体, 它介于 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的体积记作 $V(\xi)$, 求 a 等于何值时, 能使 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi)$ 。

12、(5分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 证明: 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上存在原函数。

13、(5分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, c]$ 上连续, 在 $(0, c)$ 内可导, 且 $f'(x)$ 为 x 的递减函数。若 $f(0) = 0$, 证明: 对于任何 a, b 满足 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$ 都有 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ 。

武汉大学 2016-2017 第一学期 高等数学 B1 期末试题 A 解答

1、(8 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n + k}$

$$\text{解: } \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n+k} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{由夹逼定理可知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n+k} = \frac{1}{2}$$

8 分

2、(8 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos \sqrt{x})}$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x \cdot (\frac{1}{2}x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1-\cos x)}{x^2 \cdot (1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad 8 \text{ 分}$$

$$3、(8 \text{ 分}) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)} \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + \ln \frac{1+x}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} = 1 - \ln 2$$

$$4、(8 \text{ 分}) \text{ 解: 因 } y = \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

由于 y 在 $x=1, x=3$ 处无意义, 而 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$, 所以 $x=1$ 为无穷间断点。

而 $\lim_{x \rightarrow 3} y = 3$, 所以 $x=3$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。 8 分

$$5、(8 \text{ 分}) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \text{ 讨论 } f'(x) \text{ 在点 } x=0 \text{ 处的连续性。}$$

$$\text{解: 当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = \arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4}$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4} \right) = \frac{\pi}{2} = f'(0)$$

所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续。 8 分

$$6、(8 \text{ 分}) \text{ 设 } f(2+x^4) = \ln \frac{5+2x^4}{x^4-1}, \text{ 且 } f(g(x)) = \ln(1+x), \text{ 求 } \int g(x) dx$$

$$\text{解 由 } f(2+x^4) = \ln \frac{5+2x^4}{x^4-1} = \ln \frac{2(x^4+1)+1}{(x^4+2)-3}, \text{ 所以有 } f(t) = \ln \frac{2t+1}{t-3}$$

$$\text{又 } f(g(x)) = \ln \frac{2g(x)+1}{g(x)-3} = \ln(1+x), \text{ 即有 } \frac{2g(x)+1}{g(x)-3} = x+1$$

故有 $g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$ 所以 $\int g(x)dx = 3x + 4\ln|x-1| + c$ 8 分

7. 解: 由 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$ 可得 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, 所以在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处切线斜率为 $y'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1$, 法线斜率为 1, 故切线方程为 $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$ 即 $x + y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, 法线方程为 $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $x - y = 0$ 。

8、(8 分) 求解微分方程 $\begin{cases} y'' + y = 2xe^x + 4\sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

解. 特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$ 齐次方程通解 $\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 非齐次方程特解:

1) 由 $r = 1$ 不是特征根, 故 $y_1^* = (Ax + B)e^x$,

代入方程得: $A = 1, B = -1$, $y_2^* = (x - 1)e^x$

2) 由 $r = i$ 是特征根, 故 $y_2^* = (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$,

代入方程得: $A = 0, B = 0, C = -2, D = 0$, $y_3^* = -2x \cos x$

所以 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x(x - 1) - 2x \cos x$ 由 $y(0) = y'(0) = 0$ 可得

$c_1 = 1, c_2 = 2$ 得解 $y = \cos x + 2\sin x + e^x(x - 1) - 2x \cos x$ 8 分

9、(10 分) 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t(t-x)| dt$ ($0 < x < 1$), 求函数 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间。

解 $f(x) = \int_0^1 |t(t-x)| dt = \int_0^x t(x-t) dt + \int_x^1 t(t-x) dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$ 5 分

令 $f'(x) = x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 由 ($0 < x < 1$), 故 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $f''(x) = 2x > 0$ ($0 < x < 1$), 所以 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为:

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$, 且曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内是凹的。

由 $f'(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ 知, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 内单调递减, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 内单调递增。 5 分

10、(8 分) 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$

解: 由 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$ 知, $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{-x^2+2x}$

$\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{1}{3}(x-1)^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx$
 $= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d(x-1)^2 = \frac{e}{6} \int_0^1 t e^{-t} dt = \frac{1}{6}(e-2)$ 8 分

11、(8 分) 把曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得到一个旋转体, 它介于 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的体积记作 $V(\xi)$, 求 a 等于何值时, 能使 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi)$ 。

解: 旋转体体积为 $V(\xi) = \int_0^\xi \pi y^2(x) dx = \int_0^\xi \pi \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{1+\xi^2})$, 则

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi) = \frac{\pi}{2}, \text{ 而 } V(a) = \frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{1+a^2}) = \frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } a=1. \text{ 8 分}$$

12、(5 分) 设 $f(x)$ 函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 证明: $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上存在原函数。

证 由于 $f(x)$ 函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 可设 $\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx, x \in [a, b]$

$$\text{由于 } \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx, x+\Delta x \in [a, b]$$

$$\text{从而 } \Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot f(\xi) \Delta x, \xi$$

位于 $x+\Delta x$ 与 x 之间, 再由连续性, 从而 $\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$, 由原函数的定义知 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 因此 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上存在原函数 5 分

13、(5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, c]$ 上连续, 在 $(0, c)$ 内可导, 且 $f'(x)$ 为 x 的递减函数。若 $f(0)=0$, 证明: 对于任何 a, b 满足 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$ 都有 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ 。

证明: 由 Lagrange 中值定理有 $f(a) = f(a) - f(0) = f'(\xi)a, 0 < \xi < a,$
 $f(a+b) - f(b) = f'(\eta)a, b < \eta < a+b,$

由 $f'(x)$ 的单调递减可知 $f'(\xi) \geq f'(\eta)$, 因此 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ 5 分