随机变量的独立性

重要问题

利用随机变量的独立解决问题

随机变量独立性的判断

随机变量独立性的定义

设(X, Y)是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的二维随机变量，$F(x, y)$为其联合分布函数，

X和Y的边缘分布函数分别为$F_X(x)$ 和$F_Y(y)$.如果

$$\boxed{F(x, y)=F_X(x)\ F_Y(y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2}$$

则称随机变量X和Y相互独立.

随机变量X和Y相互独立$\Longleftrightarrow$ $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$F(x,y)=F_X(x)\,F_Y(y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$p_{ij}=P\left(X=x_i,Y=y_j\right),\qquad i\geq 1,j\geq 1,$$

关于X的边缘分布律为 $P_i(X)=P(X=x_i),\qquad i\geq 1$

关于Y的边缘分布律为 $P_j(Y)=P\left(Y=y_j\right),\qquad j\geq 1$

X和Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $p_{ij}=P_i(X)P_j(Y),\qquad i\geq 1,j\geq 1,$

$F(x,y)=F_X(x)\,F_Y(y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$,

X和Y的边缘概率密度函数分别为$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

X和Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $f_X(x)\,f_Y(y)$是(X,Y)的联合概率密度函数

X和Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $f_X(x)\,f_Y(y)$是(X,Y)的联合密度函数

(必要性) 设X和Y相互独立 $\Longrightarrow$ $F(x,y)=F_X(x)\,F_Y(y)$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\Longrightarrow\quad F(x,y)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)f_Y(v)\,dudv$$

$\Longrightarrow$ $f_X(x)\,f_Y(y)$是(X,Y)的联合概率密度

X和Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $f_X(x)\, f_Y(y)$是(X,Y)的联合密度函数

(充分性) 设$f_X(x)\, f_Y(y)$是(X,Y)的联合概率密度

$$\Longrightarrow F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u) f_Y(v)\, du dv\,, (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\, dv,$$

$$= F_X(x)\, F_Y(y),\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$\Longrightarrow$ X和Y相互独立.

X和Y相互独立 $\longleftrightarrow$ $f_X(x)\,f_Y(y)$是(X,Y)的联合密度函数

附注1　设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$,

X和Y的边缘概率密度函数分别为$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

若X和Y相互独立，则在$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 的一切公共连续点上成立

$$\boxed{f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)}$$

特别地，若$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 均为处处连续的函数，则处处成立

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

若X和Y相互独立，则在一切公共连续点上$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

例1 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率. $P\left\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\right\}$

解：设负责人和他的秘书到达办公室的时间分别为X和Y，

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 8<x<12\\ 0, & otherwise\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 7<y<9\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

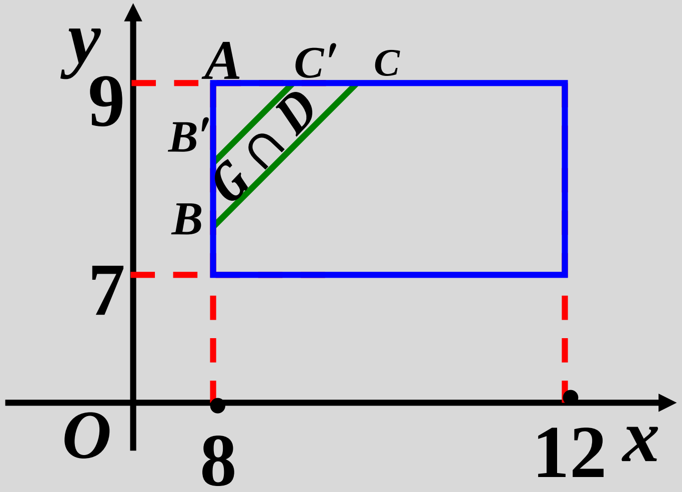
(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 8<x<12, 7<y<9\\ 0, & otherwise\end{cases}$

$$P\big((X,Y)\in G\big)=\iint_G f(x,y)\,dxdy$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 8<x<12,7<y<9\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$P\left\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\right\}=\iint_{\left\{|x-y|\le\frac{1}{12}\right\}} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\frac{1}{8}S_{G\cap D}=\frac{1}{8}\left(S_{\Delta ABC}-S_{\Delta AB'C'}\right)=\frac{1}{48}$$



X和Y相互独立 $\longleftrightarrow$ $f_X(x)\,f_Y(y)$是(X,Y)的联合密度函数

附注2 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$,

X和Y的边缘概率密度函数分别为$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

若除有限个点或可列无穷个点外，成立

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

则X和Y相互独立.

X和Y相互独立 $\longleftrightarrow$ $f_X(x)\, f_Y(y)$是(X,Y)的联合密度函数

附注3 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$,

X和Y的边缘概率密度函数分别为$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

若存在区域G (面积非零)，使得当$(x,y)\in G$时,

$$\boxed{f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)}$$

则X和Y不独立.

除有限个点或可列无穷个点外 $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$ 则X和Y相互独立

例2. 设 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$,则 X,Y相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

证：(充分性) 设 $\rho=0$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right\}}}_{f_X(x)}\;\underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}}}_{f_Y(y)}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \Longrightarrow X,Y\text{相互独立}.$$

若X和Y相互独立，则在一切公共连续点上$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

(必要性) 设X,Y相互独立 $\Longrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),(x,y)\in\mathbb{R}^2$

取 $x=\mu_1,y=\mu_2$, 则 $\quad f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \Longrightarrow \rho=0.$$

$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$, X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0.$

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，$X,Y$相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho) \Longrightarrow X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

$$\boxed{X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \quad X,Y\text{相互独立}}$$

$$\Downarrow$$

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$$

除有限个点或可列无穷个点外$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$则X和Y相互独立

例3　已知随机向量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & x>0, y>0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

问X与Y是否独立？

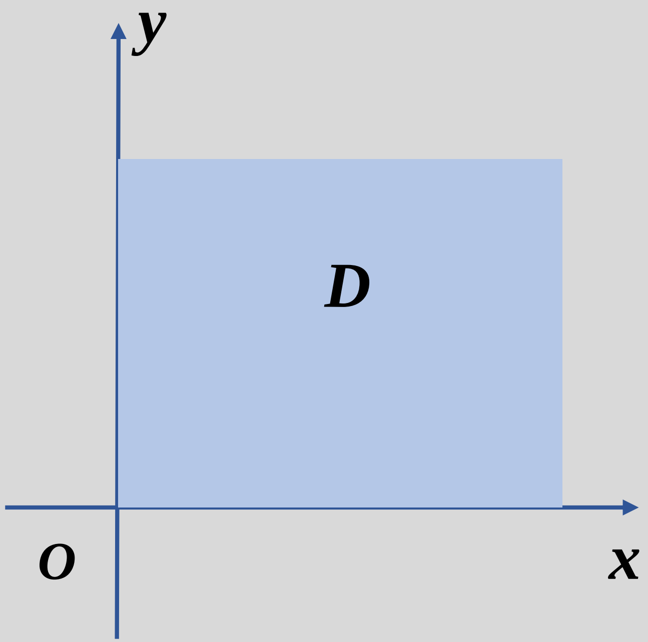
在面积非零区域G上，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ 则X和Y不独立

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

解: (1) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-x-y} dy = e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-x-y} dx = e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y), (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow$ X, Y独立

除有限个点或可列无穷个点外$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$则X和Y相互独立

例4　已知随机向量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

问X与Y是否独立？

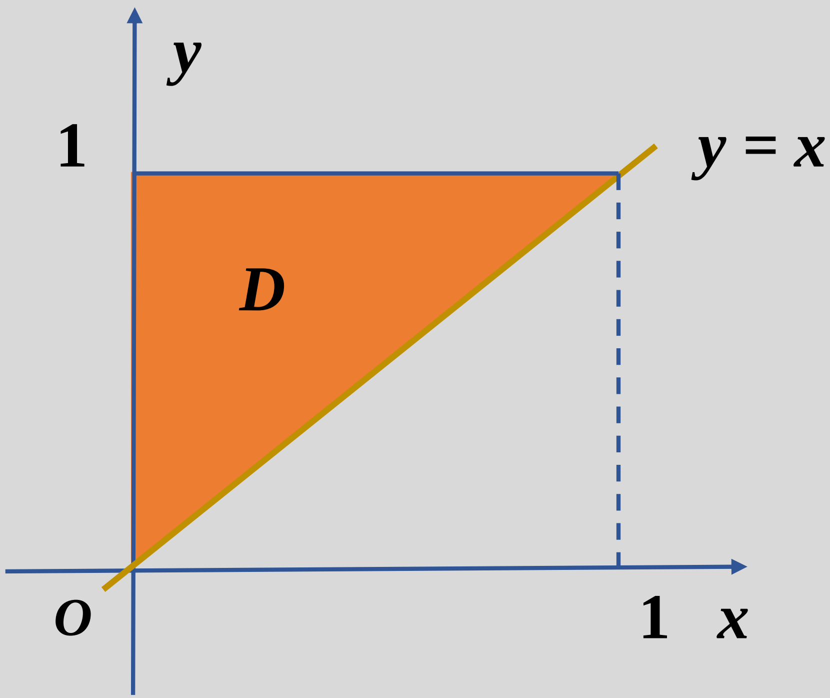
在面积非零区域G上，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$则X和Y不独立

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_x^1 8xydy\,, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

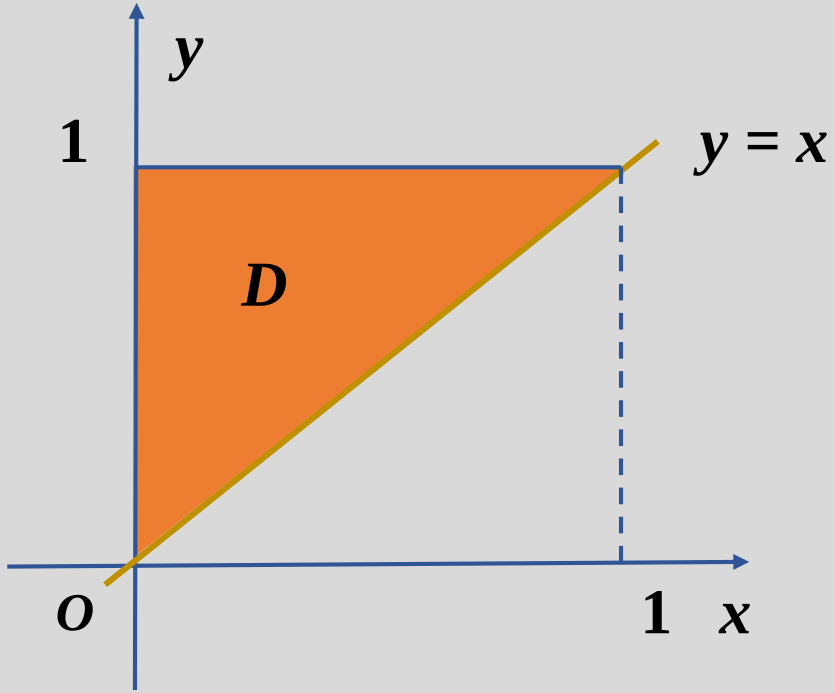


$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 8xydx\,, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



由于当 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，$f_X(x)f_Y(y) \ne f(x,y) \Longrightarrow X,Y$不独立。

随机变量函数的独立

若X和Y是相互独立的随机变量， $h(x)$和$g(y)$ 都是$(-\infty,\infty)$上的(分段)连续或(分段)单调函数，则 $h(X)$和$g(Y)$也是相互独立的随机变量.

证明：设 $h(x)$和$g(y)$ 都是$(-\infty,\infty)$上的严格单调增的函数,对$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$P(h(X)\le x, g(Y)\le y) = \boxed{P\left(X\le h^{-1}(x), Y\le g^{-1}(y)\right)} \dashrightarrow F\left(h^{-1}(x), g^{-1}(y)\right)$$

$$F_X\left(h^{-1}(x)\right)$$

$$= \boxed{P\left(X\le h^{-1}(x)\right)}\boxed{P\left(Y\le g^{-1}(y)\right)} = P(h(X)\le x)P(g(Y)\le y)$$

$$F_Y\left(g^{-1}(y)\right)$$

$\Longrightarrow$ 则 $h(X)$和$g(Y)$相互独立.

小　　结

随机变量独立性的定义

- 离散型随机变量独立的充分必要条件
- 连续型随机变量独立的充分必要条件

随机变量函数的独立