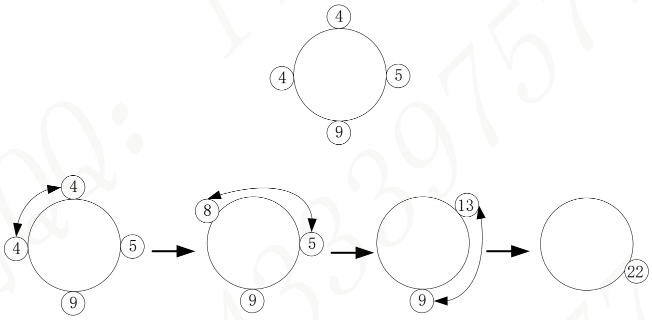
1.(15 分) 在一个圆形操场的绕着圈摆放着 n 堆石子。每次挑选顺时针或者逆时针相邻两堆石子合并为一堆，新的堆位置可以为原来两堆任意一个的位置。新的堆的石头数计为该次合并的得分。经过 n-1 次合并，石头最终合为一堆，那么 n-1 次合并有个总分数。如下图是 4 堆石头，按照合并过程，总得分=8+13+22=43。如何规划合并次序使得总分数最大呢？请思考如下问题：



(1)该问题和课本上的矩阵链问题有什么相同之处？有什么不同之处？

(2) 考虑动态规划算法，设符号 f(i,j)表示从第 i 堆开始顺时针数 j 个堆合并的最大打分。写出递推表达式，并简要阐述算法思想；

(3) 写出算法对石子数分别为 10,20,5,30 的堆(顺时针放置)合并问题的最优值和合并顺序。

答案：

(1) 该题目和矩阵链相乘问题基本类似，都是相邻两个对象进行运算，求一个对象链的最小或者最大代价。主要区别，矩阵链问题起点，终点固定；该题目起点终点不确定，因为是一个环。

(2) 设动态规划函数 f(i,j)表示以第 i 堆开始，顺时间 j 堆石子合并为一堆时的最大得分。设 n 堆石子数分别为 p1,p2,..,pn。动态规划函数的递推表达式为：

f(i,1) = 0

$$\mathrm{f(i,\ j)} = \max_{1\le k<j}\{f(i,k)+f(i+k,j-k)\}+\sum_{l=i}^{j}p_l$$

加个 mod 就更好了

所求的目标函数为: $\max_{1\le i\le n}\{f(i,n)\}$ 。

(3) 合并的最大得分为 165。最优合并顺序为：

（（30，10），20），5　或者 5,（(30,10), 20）

$$dp[i][j]=\begin{cases}0 & j=0\\ min(dp[i][k]+dp[(i+k+1)\%n][j-k-1]+sum[i][i+j]) & j>0,0\le k<j\end{cases}$$

$$sum(i,j)=\begin{cases}\sum_{k=i}^{j}a[k] & i+j<k\\ \sum_{k=i}^{n-1}a[k]+\sum_{k=0}^{(i+j)\%n}a[k] & i+j\ge n\end{cases}$$

环形合并

相邻合并

我们熟悉矩阵连乘，知道矩阵连乘也是每次合并相邻的两个矩阵，那么石子合并可以用矩阵连乘的方式来解决。

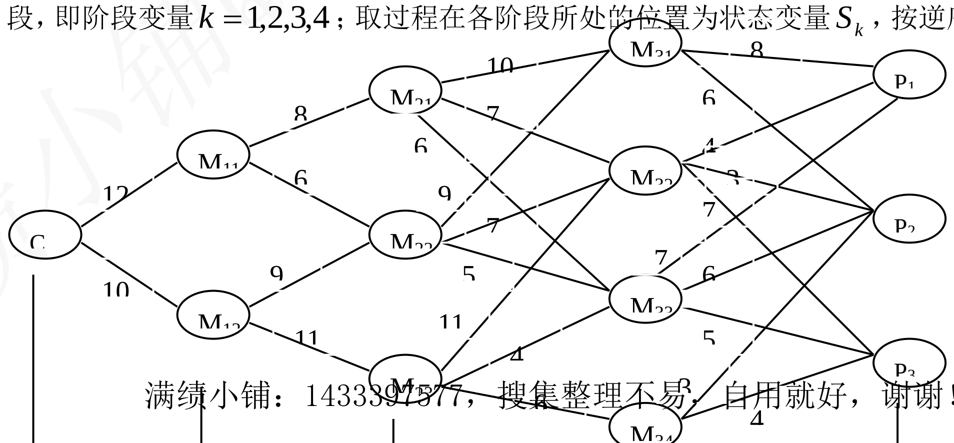
设 dp[i][j]表示第 i 到第 j 堆石子合并的最优值，sum[i][j]表示第 i 到第 j 堆石子的总数量。那么就有状态转移公式：

$$dp[i][j]=\begin{cases}0 & i=j\\ min(dp[i][k],dp[k+1][j])+sum[i][j] & i\ne j\end{cases}$$

2. 美国黑金石油公司（*The Black Gold Petroleum Company*）最近在阿拉斯加（*Alaska*）的北斯洛波（*North Slope*）发现了大的石油储量。为了大规模开发这一油田，首先必须建立相应的输运网络，使北斯洛波生产的原油能运至美国的 3 个装运港之一。在**油田的集输站**（结点 *C*）与**装运港**（结点 P_1、P_2、P_3）之间需要若干个中间站，中间站之间的联通情况如图 7-2 所示，图中线段上的数字代表两站之间的距离（单位：10 千米）。试确定一最佳的输运线路，使原油的输送距离最短。

解：最短路线有一个重要性质，即如果由起点 *A* 经过 *B* 点和 *C* 点到达终点 *D* 是一条最短路线，则由 *B* 点经 *C* 点到达终点 *D* 一定是 *B* 到 *D* 的最短路（贝尔曼最优化原理）。此性质用反证法很容易证明，因为如果不是这样，则从 *B* 点到 *D* 点有另一条距离更短的路线存在，不妨假设为 *B*—*P*—*D*；从而可知路线 *A*—*B*—*P*—*D* 比原路线 *A*—*B*—*C*—*D* 距离短，这与原路线 *A*—*B*—*C*—*D* 是最短路线相矛盾，性质得证。

根据最短路线的这一性质，寻找最短路线的方法就是从最后阶段开始，由后向前逐步递推求出各点到终点的最短路线，最后求得由始点到终点的最短路；即动态规划的方法是从终点逐段向始点方向寻找最短路线的一种方法。按照动态规划的方法，将此过程划分为 4 个阶段，即阶段变量 $k=1,2,3,4$；取过程在各阶段所处的位置为状态变量 S_k，按逆序算法求解。



当 $k=4$ 时：

由结点 M_{31} 到达目的地有两条路线可以选择，即选择 P_1 或 P_2；故：

$$f_4(S_4=M_{31})=\min\begin{Bmatrix}8\\6\end{Bmatrix}=6 \qquad \text{选择 } P_2$$

由结点 M_{32} 到达目的地有三条路线可以选择，即选择 P_1、P_2 或 P_3；故：

$$f_4(S_4=M_{32})=\min\begin{Bmatrix}4\\3\\7\end{Bmatrix}=3 \qquad \textbf{选择 } P_2$$

由结点 M_{33} 到达目的地也有三条路线可以选择，即选择 P_1、P_2 或 P_3；故：

$$f_4(S_4=M_{33})=\min\begin{Bmatrix}7\\6\\5\end{Bmatrix}=5 \qquad \textbf{选择 } P_3$$

由结点 M_{34} 到达目的地有两条路线可以选择，即选择 P_2 或 P_3；故：

$$f_4(S_4=M_{34})=\min\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}=3 \qquad \text{选择 } P_2$$

当 $k=3$ 时：

由结点 M_{21} 到达下一阶段有三条路线可以选择，即选择 M_{31}、M_{32} 或 M_{33}；故：

$$f_3(S_3=M_{21})=\min\begin{Bmatrix}10+6\\7+3\\6+5\end{Bmatrix}=10 \qquad \text{选择 } M_{32}$$

由结点 M_{22} 到达下一阶段也有三条路线可以选择，即选择 M_{31}、M_{32} 或 M_{33}；故：

$$f_3(S_3=M_{22})=\min\begin{Bmatrix}9+6\\7+3\\5+5\end{Bmatrix}=10 \qquad \textbf{选择 } M_{32} \textbf{ 或 } M_{33}$$

由结点 M_{23} 到达下一阶段也有三条路线可以选择，即选择 M_{32}、M_{33} 或 M_{34}；故：

$$f_3(S_3=M_{23})=\min\begin{Bmatrix}11+3\\4+5\\6+3\end{Bmatrix}=9 \qquad \text{选择 } M_{33} \text{ 或 } M_{34}$$

当 $k=2$ 时：

由结点 M_{11} 到达下一阶段有两条路线可以选择，即选择 M_{21} 或 M_{22}；故：

$$f_2(S_2=M_{11})=\min\begin{Bmatrix}8+10\\6+10\end{Bmatrix}=16 \qquad \textbf{选择 } M_{22}$$

由结点 M_{12} 到达下一阶段也有两条路线可以选择，即选择 M_{22} 或 M_{23}；故：

$$f_2(S_2 = M_{12}) = \min\begin{Bmatrix} 9+10 \\ 11+9 \end{Bmatrix} = 19 \quad \text{选择 } M_{22}$$

当 $k=1$ 时：

由结点 C 到达下一阶段有两条路线可以选择，即选择 M_{11} 或 M_{12}；故：

$$f_1(S_1 = C) = \min\begin{Bmatrix} 12+16 \\ 10+19 \end{Bmatrix} = 28 \quad \textbf{选择 } M_{11}$$

从而通过顺序（计算的反顺序）追踪（黑体标示）可以得到两条最佳的输运线路：C—M_{11}—M_{22}—M_{32}—P_2；C—M_{11}—M_{22}—M_{33}—P_3。最短的输送距离是 280 千米。