条件概率与乘法公式

条件概率

乘法公式

引 例 1

一班与二班各有40人合班上课，其中一班有20名女生，二班有18名女生。现随机地从合班中挑选一名学生，若已知选到的是一班学生，问她是女生的可能性是多少？

A: 选到的是女生　B: 选到的是一班学生 → 新样本空间

Ω ={从合班中挑选一名学生的所有可能}

$$P(A)=\frac{38}{80} \neq P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{20}{40}$$

引 例 1

一班与二班各有40人合班上课，其中一班有20名女生，

二班有18名女生。现随机地从合班中挑选一名学生，

若已知选到的是一班学生，问她是女生的可能性是多少？

A: 选到的是女生　B: 选到的是一班学生

$$n(\Omega)=80 \qquad n(B)=40$$

$$\frac{20}{40}=P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{n(AB)/n(\Omega)}{n(B)/n(\Omega)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率的定义

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B\in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$, 则对任意$A\in \mathcal{F}$, 令

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

并称$P(A|B)$为在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率.

条件概率的性质

(1) 非负性： $P(B|A) \geq 0$;

(2) 规范性： $P(\Omega|B) = 1, P(\emptyset|B) = 0$

(3) $P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

(4) $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B)$.

(5) 可列可加性:对 $\mathcal{F}$中任何可列无穷多个互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots$

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k|B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|B)$$

条件概率的计算

样本空间为Ω ← $\boxed{\text{定义式}}$ → $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

新的样本空间为B ← $\boxed{\text{缩减样本空间}}$ → $P(A|B)=\dfrac{n(AB)}{n(B)}$

条 件 概 率

例1　一盒子装有4 只产品, 其中有3 只一等品、　1只二等品. 从中取产品两次, 每次任取一只, 作不放回抽取.

已知第一次取到一等品，求第二次也取到一等品的概率

A：“第一次取到一等品”　B:“第二次取到一等品”

利用条件概率的定义式

$$n(\Omega)=4\times 3\quad n(A)=3\times 3\quad n(AB)=3\times 2$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/12}{9/12}=\frac{2}{3}.$$

条 件 概 率

例1　一盒子装有4 只产品, 其中有3 只一等品、　1只二等品. 从中取产品两次, 每次任取一只, 作不放回抽取.

已知第一次取到一等品，求第二次也取到一等品的概率

解：　A：“第一次取到一等品”　B:“第二次取到一等品”

利用缩减样本空间的方法　$P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{2}{3}$

引 例 2

一班与二班各有40人合班上课，其中一班有20名女生，二班有18名女生。现随机地从合班中挑选一名学生，问选到一班女生的可能性是多少？

引例1： 若已知选到的是一班学生，问她是女生的可能性是多少？

A: 选到的是女生　　B: 选到的是一班学生

引例1求 $P(A|B)$　　引例2求 $P(AB) = P(A|B)P(B)$

乘 法 公 式

$P(B)>0 \quad P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)} \longrightarrow P(AB)=P(A|B)P(B)$

一般乘法公式

若$A_1,\cdots A_n$ 是$\mathcal{F}$中任意n个事件，且$P(A_1\cdots A_{n-1})>0$,$n\geq 2$, 则

$$P(A_1\cdots A_{n-1}A_n)=P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})\,P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})$$

$$\cdots\ P(A_3|A_1A_2)\,P(A_2|A_1)\,P(A_1)$$

$P(AB)>0 \longrightarrow P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$

乘 法 公 式

例2 设袋中装有r只红球、t只白球。每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入a只与所取出的那只球同色的球，若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

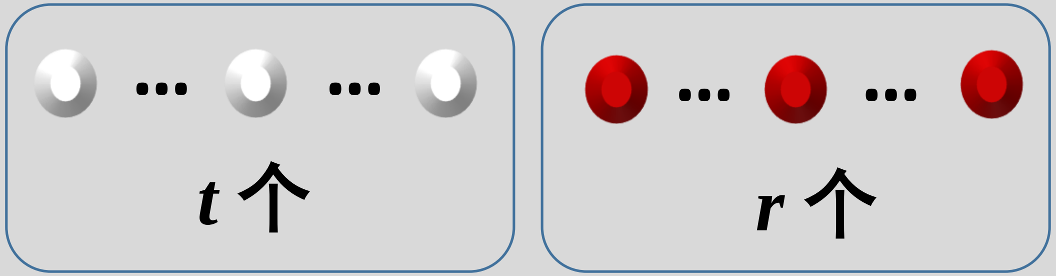
解：设$A_i, i = 1, 2, 3, 4$为事件"第 i 次取到红球"

则 $\overline{A_3}, \overline{A_4}$ 为事件第三、四次取到白球． 求 $P(A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4})$

乘 法 公 式

$A_i(i=1,2,3,4)$:第 i 次取到红球　放入a只与取出的那只球同色的球

由乘法公式



$$P(A_1A_2\overline{A_3}\ \overline{A_4})$$

$$=P(\overline{A_4}\,|A_1A_2\overline{A_3})\,P(\overline{A_3}\,|A_1A_2)\,P(A_2|A_1)\,P(A_1)$$

$$=\frac{t+a}{r+t+3a}\quad\frac{t}{r+t+2a}\quad\frac{r+a}{r+t+a}\quad\frac{r}{r+t}$$

乘 法 公 式

$$P(A_1) = \frac{r}{r+t} \qquad P(A_2|A_1) = \frac{r+a}{r+t+a}$$

当$a > 0$时，$\boxed{P(A_1) < P(A_2|A_1)}$

传染病模型

第一次取出红球会增加第二次取出红球的概率

当a = -1 时，为不放回摸球，且 $\boxed{P(A_1) > P(A_2|A_1)}$

第一次取出红球对第二次取出红球有影响

乘 法 公 式

$$P(A_1)=\frac{r}{r+t} \qquad P(A_2|A_1)=\frac{r+a}{r+t+a}$$

当$a=0$时，为有放回摸球 $\Longrightarrow$ $\boxed{P(A_2|A_1)=P(A_2)=P(A_1)}$

第一次取出红球对第二次取出红球没有影响

小　　结

条件概率　$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$　$P(B)>0$

乘法公式　$P(AB)=P(A|B)P(B)$　$P(B)>0$

全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式

贝叶斯公式

引 例 3

袋中有10个球，其中有4个红球，6个白球。不放回的依次任取两个球。

求第二次取到红球的概率。

分析：A: 第二次取到红球　B:第一次取到红球

$$\Omega = B + \bar{B} \qquad A = A\Omega = AB + A\bar{B} \qquad (AB)(A\bar{B}) = \emptyset$$

$$\Rightarrow P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = \underbrace{P(A|B)}_{\frac{3}{9}}\underbrace{P(B)}_{\frac{4}{10}} + \underbrace{P(A|\bar{B})}_{\frac{4}{9}}\underbrace{P(\bar{B})}_{\frac{6}{10}}$$

引 例 3 的 推 广

袋中由10个球，其中有4个红球，3个白球，三个黑球。

不放回的依次任取两个球。求第二次取到红球的概率。

分析：A: 第二次取到红球　B_1:第一次取到红球

B_2:第一次取到白球　B_3:第一次取到黑球

$$\Omega = B_1 + B_2 + B_3$$

$$B_i B_j = \emptyset, i \neq j, i,j = 1,2,3$$

$$A = AB_1 + AB_2 + AB_3$$

$$(AB_i)(AB_j) = \emptyset, i \neq j, i,j = 1,2,3$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

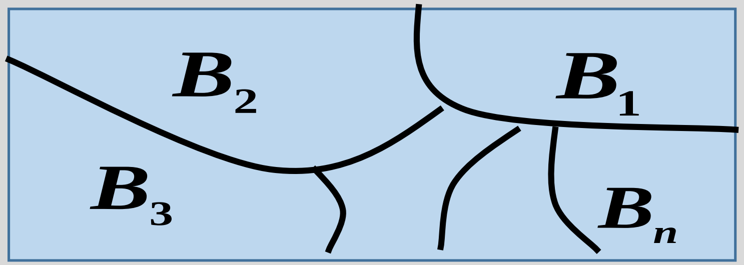
完 备 事 件 组

称$B_1,B_2,\cdots B_n(,\ldots)$为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的完备事件组，若

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = \Omega \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega\right)$$

$$B_iB_j = \emptyset \quad i \neq j, i, j = 1, \cdots n(,\ldots)$$

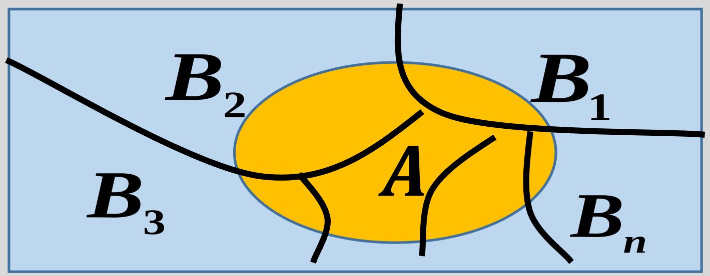
$$P(B_i) > 0, \qquad i = 1 \cdots n(,\ldots)$$



全概率公式

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = \Omega \qquad B_iB_j = \emptyset \quad i \neq j, i, j = 1 \cdots n$$

$$P(B_i) > 0, \qquad i = 1 \cdots n,$$



$$A = \sum_{i=1}^{n} (AB_i) \quad (AB_i)(AB_j) = \emptyset$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

全概率公式

$A \in \mathcal{F}$，设$B_1, B_2, \cdots B_n$为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的完备事件组，

（设$B_1, B_2, \cdots B_n, \ldots$为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的完备事件组）

则

$$\boxed{P(A)} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

全部概率

$$\left(P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i) \right)$$

部分之和

引 例 4

袋中由10个球，其中有4个红球，6个白球。不放回的依次任取两个球。

已知第二次取到了红球，求第一次也取到红球的概率。

分析： A: 第二次取到红球 B:第一次取到红球 求 $P(B|A)$

条件概率定义式

乘法公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

全概率公式

贝叶斯公式

设$B_1, B_2, \cdots B_n$为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的完备事件组，

(设$B_1, B_2, \cdots B_n, \ldots$为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的完备事件组，)

且 $P(A) > 0,\ i = 1 \cdots n,$则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)(B_j)}$$

$$\left(P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)(B_j)}\right)$$

贝叶斯公式

A: 第二次取到红球

B: 第一次取到红球

$\overline{B}$:第一次取到白球

全概率公式

结果

原因

贝叶斯公式

贝叶斯公式

例1 对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为98%，而当机器发生某种故障时，其合格率为55%.每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为95%.试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率是多少？ 求 $P(B|A)$

解：A: 产品合格 B: 机器调整良好

$$P(A|B)=0.98 \quad P(A|\overline{B})=0.55 \quad P(B)=0.95 \quad P(\overline{B})=0.05$$

贝叶斯公式

A: 产品合格　B: 机器调整良好

$P(A|B)=0.98$ $P(A|\overline{B})=0.55$　$P(B)=0.95$ $P(\overline{B})=0.05$

由贝叶斯公式得

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.98\times0.95}{0.98\times0.95+0.55\times0.05}=0.97$$

即当生产出的第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率是0.97

贝叶斯公式

例2 根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下效果：

若以A表示事件“试验反应为阳性”，用C表示事件“被诊断者患有癌症”，则 $P(A|C)=0.95, P(\bar{A}|\bar{C})=0.95.$

现在对自然人群进行普查，设被试验的人患有癌症的概率为0.005, 即 $P(C)=0.005$, 试求$P(C|A)$.

$P(\bar{C})=0.995$ $P(A|\bar{C})=0.05.$

贝叶斯公式

A:试验反应为阳性，C:被诊断者患有癌症　试求$P(C|A)$.

$$P(A|C)=0.95, P(\bar{A}|\bar{C})=0.95, P(A|\bar{C})=0.05 \quad P(C)=0.005,$$

先验概率

解:

$$P(C|A)=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\bar{C})P(\bar{C})}=\frac{0.95}{0.9+\frac{0.05}{P(C)}}$$

$$=\frac{0.95\times 0.005}{0.95\times 0.005+0.05\times 0.995}=0.087$$

后验概率

小　结

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A|B_i)P(B_i)$$

全概率公式

A 结果 $\leftarrow$ $\rightarrow$ 原因

贝叶斯公式

B_1

B_2

$\vdots$

B_n

$\vdots$

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty}P(A|B_j)(B_j)}$$