估计量的优良性准则

样本均值是否是总体均值的一个好的估计量？

样本方差是否是总体方差的一个好的估计量？

- 一个“好的”估计量具有什么特性？
- 怎样决定一个估计量是否比另一个估计量“好”？
- 如何求得合理的估计量？

估计量的优良性准则

相合性 样本容量越大,估计量$\hat{\theta}$应越接近未知参数θ的真值

无偏性 估计量$\hat{\theta}$的均值越接近未知参数θ的真值越好

有效性 估计量$\hat{\theta}$偏离未知参数的真值θ的程度越小越好

相 合 性

设$X_1, \ldots, X_n$是来自总体X的一个样本，$E(X)=\mu$，对任意$\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{X}-\mu| \geq \varepsilon\} = 0$$

$\Longrightarrow$ 样本均值是总体均值的相合估计量

相 合 性

设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$是未知参数$\theta$的估计量. 若对任意$\varepsilon>0$,

对一切$\theta\in\Theta$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)-\theta|\geq\varepsilon\}=0$

则称$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$是$\theta$的相合估计量, 又称一致估计量.

如果$g(\theta)$是一个连续函数，且$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$是$\theta$的相合估计量

则$g(\hat{\theta})=g(\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n))$是$g(\theta)$的相合估计量.

注意　如果估计量无相合性，该估计量不可取！

无 偏 性

设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$是未知参数$\theta$的估计量.

系统偏差 $E(\hat{\theta})-\theta$

若对一切$\theta\in\Theta$, $E(\hat{\theta})=\theta$

则称$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$是$\theta$的无偏估计量.

若对一切$\theta\in\Theta$, $\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta$

则称$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$是$\theta$的渐进无偏估计量.

无偏性 $E(\hat{\theta})=\theta$ 渐近无偏性 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta$

例1：设$X_1,\dots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，μ,σ^2是未知参数.

试判断μ与σ^2的极大似然估计量的无偏性.

解:已求得 $\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

又 $E(\hat{\mu})=E(\bar{X})=\mu$

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{n-1}{n}E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad \lim_{n\to\infty}E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2$$

故$\hat{\mu}$是无偏估计，$\hat{\sigma}^2$是渐进无偏估计.

例2：设$X_1,\ldots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，μ已知但 σ^2未知.

试判断下列σ^2的估计量是否无偏：

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \qquad U^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

解：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1) \longrightarrow E(S^2)=\sigma^2$$

$$\frac{X_1-\mu}{\sigma},\ldots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\ i.i.d.\sim N(0,1) \longrightarrow \frac{nU^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n) \longrightarrow E(U^2)=\sigma^2$$

$\longrightarrow$ S^2和U^2都是总体方差的无偏估计.

无偏性 $E(\hat{\theta}) = \theta$　　渐近无偏性 $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

例3　证明样本方差是总体方差的无偏估计，但样本均方差不是总体均方差的无偏估计

证：　$E(S^2) = D(X)$ ⟶ 样本方差是总体方差的无偏估计

$$\left.\begin{aligned} E(S^2) &= [E(S)]^2 + D(S) \\ D(S) &\geq 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow E(S^2) \geq [E(S)]^2$$

$$\longrightarrow E(S) \leq \sqrt{D(S)}$$

⟶ 样本均方差不是总体均方差的无偏估计

均方误差

设$X_1,\dots,X_n$是来自总体X的一个样本，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ 是未知参数θ的一个估计量.

误差： $\boxed{\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)-\theta}$

带有随机性

均方误差： $M_{\hat{\theta}}(\theta)=E_\theta\left(\left[\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)-\theta\right]^2\right)$

$$=\left[E_\theta(\hat{\theta}-\theta)\right]^2+D_\theta(\hat{\theta})$$

$$E_\theta(\hat{\theta})=\theta \Longrightarrow M_{\hat{\theta}}(\theta)=D_\theta(\hat{\theta})$$

有 效 性

设$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\dots,X_n)$和$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\dots,X_n)$都是未知参数$\theta$的无偏估计量.

若对一切$\theta\in\Theta$，均有 $D_\theta\left(\hat{\theta}_1\right)\le D_\theta\left(\hat{\theta}_2\right)$

且至少存在一个$\theta\in\Theta$，使得上述不等号严格成立，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

无偏性 $E(\widehat{\theta}) = \theta$

例4. 设X_1, X_2, X_3是来自总体X的一个样本, 证明下面的三个估计量

都是总体均值 μ 的无偏估计量，且$\widehat{\mu}_1$较$\widehat{\mu}_2, \widehat{\mu}_3$都有效.

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{X} \qquad \widehat{\mu}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3 \qquad \widehat{\mu}_3 = X_1$$

证明：因为 $E(\widehat{\mu}_1) = E(\widehat{\mu}_2) = E(\widehat{\mu}_3) = \mu$

故 $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\mu}_3$都是总体均值$\mu$的无偏估计量.

$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效 $\Longleftrightarrow D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$

$$D(\hat{\mu}_1) = D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{3}$$

$$D(\hat{\mu}_2) = D(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3) = \frac{7}{18}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_3) = D(X_1) = \sigma^2$$

因为 $D(\hat{\mu}_1) \le D(\hat{\mu}_2) \le D(\hat{\mu}_3)$ 故 $\hat{\mu}_1$较 $\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$都有效.

无偏性 $E(\hat{\theta}) = \theta$ 渐近无偏性 $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

例5. 设$X_1, \dots, X_n$是来自正态总体X的一个样本, μ已知, 设

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad U^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

试比较上述两个总体方差的无偏估计量S^2与U^2哪个更有效.

解: $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Longrightarrow D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$$

$$\Longrightarrow D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \quad U^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1) \Longrightarrow D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$\frac{X_1-\mu}{\sigma},\ldots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\ i.i.d.\sim N(0,1) \Longrightarrow \frac{nU^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$$

$$\Longrightarrow D\left(\frac{nU^2}{\sigma^2}\right)=2n \Longrightarrow D(U^2)=\frac{2\sigma^4}{n}$$

$$\Longrightarrow D(U^2)<D(S^2) \Longrightarrow U^2\text{比}S^2\text{更有效}$$

无偏性 $E(\widehat{\theta}) = \theta$　　渐近无偏性 $\lim\limits_{n\to\infty} E(\widehat{\theta}) = \theta$

例6.设$X_1, \dots, X_n$是来自总体X的一个样本, 总体X具有均匀分布, 其概率密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

求未知参数θ的矩估计量与极大似然估计量，并判断其无偏性. 如果不是无偏估计量，将其修正为无偏估计并比较修正后的两个无偏估计量的有效性。

解： 总体矩 $E(X) = \dfrac{\theta}{2} \Longrightarrow \bar{X} = \dfrac{\theta}{2} \Longrightarrow \tilde{\theta} = 2\bar{X}$

$E(\tilde{\theta}) = 2E(\bar{X}) = \theta \Longrightarrow$ 矩估计量$\tilde{\theta} = 2\bar{X}$为$\theta$的无偏估计

$$X \sim f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

已求得θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots X_n\}$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} dt = \frac{x}{\theta} \quad 0 \le x \le \theta$$

$X_1, \dots, X_n$独立且与总体 X同分布

$$F_{\hat{\theta}}(x) = [F_X(x)]^n = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

等式两边求导，得 $$f_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

无偏性 $E(\widehat{\theta})=\theta$　　渐近无偏性 $\lim_{n\to\infty} E(\widehat{\theta})=\theta$

$$f_{\widehat{\theta}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & otherwise\end{cases} \Longrightarrow E(\widehat{\theta})=\int_0^\theta x\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta$$

因为　$\lim_{n\to\infty} E(\widehat{\theta})=\theta$

故θ的极大似然估计量$\widehat{\theta}=X_{(n)}$为渐进无偏估计量

$$E(\widehat{\theta})=\frac{n}{n+1}\theta \Longrightarrow E\left(\frac{n+1}{n}\widehat{\theta}\right)=\theta \Longrightarrow \frac{n+1}{n}\widehat{\theta}=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$$ 为θ的无偏估计量

$\widehat{\theta}_1$比$\widehat{\theta}_2$有效 $\longleftrightarrow$ $D(\widehat{\theta}_1) \le D(\widehat{\theta}_2)$

比较 $\widetilde{\theta} = 2\overline{X}$ 和 $\dfrac{n+1}{n}\widehat{\theta} = \dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 的有效性

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & otherwise \end{cases} \Longrightarrow D(\widetilde{\theta}) = 4D(\overline{X}) = 4D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$f_{\widehat{\theta}}(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & otherwise \end{cases} \Longrightarrow E(\widehat{\theta}^2) = \frac{n\theta^2}{n+2} \Longrightarrow D\left(\frac{n+1}{n}\widehat{\theta}\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

当$n > 1$时， $D(\widetilde{\theta}) \ge D\left(\dfrac{n+1}{n}\widehat{\theta}\right) \Longrightarrow$ 当$n > 1$时，

修正后的极大似然估计量较矩估计量更有效

小　　结

相合性	样本容量越大，估计量$\hat{\theta}$应越接近未知参数θ的真值
无偏性	估计量$\hat{\theta}$的均值越接近未知参数θ的真值越好
有效性	估计量$\hat{\theta}$偏离未知参数的真值θ的程度越小越好