概率论与数理统计复习题（1）

一．填空.

1．$P(A)=0.4, P(B)=0.3$。若 A 与 B 独立，则 $P(A-B)=$____；若已知 A,B 中至少有一个事件发生的概率为 0.6，则 $P(A-B)=$____。

2．$p(AB)=p(\overline{A}\overline{B})$ 且 $P(A)=0.2$，则 $P(B)=$_____。

3．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P\{X<2\}=P\{X\geq 2\}$, $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $\mu=$____；$P\{X>0\}=$_____。

4．$E(X)=D(X)=1$。若 X 服从泊松分布，则 $P\{X\neq 0\}=$____；若 X 服从均匀分布，则 $P\{X\neq 0\}=$____。

5．设 $X\sim b(n,p), E(X)=2.4, D(X)=1.44$，则 $P\{X=n\}=$ ________

6．$E(X)=E(Y)=0, D(X)=D(Y)=2, E(XY)=1,$ 则 $D(X-2Y+1)=$______。

7．$X\sim N(0,9), Y\sim N(1,16)$，且 X 与 Y 独立，则 $P\{-2<X-Y<-1\}=$_____（用 Φ 表示），$\rho_{XY}=$______。

8．已知 X 的期望为 5，而均方差为 2，估计 $P\{2<X<8\}\geq$______。

9．设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 均是未知参数 θ 的无偏估计量，且 $E(\hat{\theta}_1^2)>E(\hat{\theta}_2^2)$，则其中的统计量_____更有效。

10．在实际问题中求某参数的置信区间时，总是希望置信水平愈____愈好，而置信区间的长度愈____愈好。但当增大置信水平时，则相应的置信区间长度总是____________。

二．假设某地区位于甲、乙两河流的汇合处，当任一河流泛滥时，该地区即遭受水灾。设某时期内甲河流泛滥的概率为 0.1；乙河流泛滥的概率为 0.2；当甲河流泛滥时，乙河流泛滥的概率为 0.3，试求：

（1）该时期内这个地区遭受水灾的概率；

（2）当乙河流泛滥时，甲河流泛滥的概率。

三．高射炮向敌机发射三发炮弹（每弹击中与否相互独立），每发炮弹击中敌机的概率均为 0.3，又知若敌机中一弹，其坠毁的概率是 0.2，若敌机中两弹，其坠毁的概率是 0.6，若敌机中三弹则必坠毁。（1）求敌机被击落的概率；（2）若敌机被击落，求它中两弹的概率。

四．X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}kx, & 0<x<c,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 且 E(X)=$\frac{2}{3}$。（1）求常数 k 和 c；（2）求 X 的分布函数 F(x)；

五．（X,Y）的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}kx(2+y), & 2<x<4,0<y<2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$。求（1）常数 k；（2）X 与 Y 是否独立；（3）ρ_{XY}；

六．．设 X，Y 独立，下表列出了二维随机向量（X，Y）的分布，边缘分布的部分概率，试将其余概率值填入表中空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	p_i^X
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
p_j^Y	$\frac{1}{6}$			

七．．某人寿保险公司每年有 10000 人投保，每人每年付 12 元的保费，如果该年内投保人死亡，保险公司应付 1000 元的赔偿费，已知一个人一年内死亡的概率为 0.006。用中心极限定理近似计算该保险公司一年内的利润不少于 60000 元的概率.

概率与数理统计复习题（1）

一、填空

1. P(A-B)=0.28　　　P(A-B)=0.3

分析：$\left.\begin{array}{l}P(A)=0.4\\ P(B)=0.3\\ A,B\text{独立}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}P(AB)=P(A)*P(B)=0.12\\ P(AB)+P(A\bar{B})=P(A)\end{array}\right\}\Rightarrow P(AB)=0.28$

$$\left.\begin{array}{l}P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\\ P(A+B)=0.6\quad P(A)=0.4\quad P(B)=0.3\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}P(AB)=0.1\\ P(A)=0.4\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\bar{B})=0.3$$

$2.P(B)=0.8$

分析： $P(AB)=P(\overline{AB})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}1-P(A)-P(B)=0\\ P(A)=0.2\end{array}\right\}\Rightarrow P(B)=0.8$$

3.$\mu=2$ $\quad P\{x>0\}=0.8$

分析: $P\{x<2\}=P\{x\geq 2\}\Rightarrow P\{x<2\}=1-P\{x<2\}\Rightarrow 2P\{x<2\}=1\Rightarrow$

$$P\{x<2\}=0.5\Rightarrow F(2)=0.5\Rightarrow \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)=0.5\Rightarrow \frac{2-\mu}{\sigma}=0\Rightarrow \mu=2$$

$$\left.\begin{array}{l}P\{x>0\}=1-P\{x\leq 0\}=1-F(0)=1-\Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\\ P\{2<x<4\}=0.3\Rightarrow F(4)-F(2)=0.3\Rightarrow \Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)=0.3\Rightarrow \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8\end{array}\right\}\Rightarrow P\{x>0\}=0.8$$

4.$P\{x\neq 0\}=1-\frac{1}{e}$ $\quad P\{x\neq 0\}=1$

分析： a. x服从泊松分布,则 $\left.\begin{array}{l}P\{x=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ Ex=Dx=1\Rightarrow\lambda=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P\{x=k\}=\frac{1}{k!}e^{-1}\\ P\{x\neq 0\}=1-P\{x=0\}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$P\{x\neq 0\}=1-\frac{1}{e}$$

b . x服从均匀分布, 属连续分布, 则$P\{x=0\}=0\Rightarrow P\{x\neq 0\}=1-P\{x=0\}=1$

5.$P\{x=n\}=0.4^6$

分析: $x\sim b(n,p)\Rightarrow \left.\begin{array}{l}Ex=np\\ Dx=np(1-p)\\ E(x)=2.4\ \ D(x)=1.44\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\Rightarrow n=6\qquad p=0.4\\ x\sim b(n,p)\Rightarrow P\{x=n\}=C_n^n p^n q^{n-n}=p^n\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$P\{x=n\}=0.4^6$$

6.$D(x-2y+1)=6$

分析： $D(x-2y+1)=D(x-2y)=Dx+D(2y)+\mathrm{cov}(x,-2y)=Dx+4Dy-2\,\mathrm{cov}(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l}=Dx+4Dy-2(Exy-ExEy)\\ E(x)=E(y)=0\ \ Dx=Dy=2\ \ Exy=1\end{array}\right\}\Rightarrow D(x-2y+1)=6$$

7.$P\{-2<x-y<-1\}=\Phi(\frac{1}{5})-0.5$ $\qquad Pxy=0$

$$\text{分析}:\left.\begin{array}{l} x\sim N(0,9) \\ y\sim N(1,16) \\ x,y\text{相互独立}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} E(x-y)=Ex-Ey=0-1=-1 \\ D(x-y)=Dx+Dy=9+16=25\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x-y\sim N(-1,5^2) \\ P\{-2<x-y<-1\}=F(-1)-F(-2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$P\{-2<x-y<-1\}=\Phi(\frac{-1-(-1)}{5})-\Phi(\frac{-2-(-1)}{5})=\Phi(0)-\Phi(-\frac{1}{5})=\Phi(\frac{1}{5})-0.5$$

$$\left.\begin{array}{l} x,y\text{相互独立}\Rightarrow \operatorname{cov}(x,y)=0 \\ \rho xy=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{Dx}\sqrt{Dy}}\end{array}\right\}\Rightarrow \rho xy=0$$

8. $P\{2<x<8\}\geq\frac{7}{9}$

$$\text{分析:由切比雪夫不等式}\quad\left.\begin{array}{l} P\{|x-Ex|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{Dx}{\varepsilon^2} \\ Ex=5 \quad\Rightarrow P\{2<x<8\}=P\{|x-5|<3\} \\ Dx=2\end{array}\right\}\Rightarrow P\{|x-5|<3\}\geq 1-\frac{2}{3^2}=\frac{7}{9}$$

9. $\hat{\theta}_2$

$$\text{分析}:\left.\begin{array}{l} \hat{\theta}_1\text{与}\hat{\theta}_2\text{均是未知参数的无偏估计}\Rightarrow E(\hat{\theta}_2)=E(\hat{\theta}_2)=E\theta \\ D(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_1)^2-(E\hat{\theta}_1)^2\Rightarrow E(\hat{\theta}_1)^2=D(\hat{\theta}_1)+E(\hat{\theta}_1)^2 \\ D(\hat{\theta}_2)=E(\hat{\theta}_2)^2-(E\hat{\theta}_2)^2\Rightarrow E(\hat{\theta}_2)^2=D(\hat{\theta}_2)+E(\hat{\theta}_2) \\ \qquad\qquad E(\hat{\theta}_1)>E(\hat{\theta}_2)\end{array}\right\}\Rightarrow D(\hat{\theta}_1)>D(\hat{\theta}_2)\Rightarrow\hat{\theta}_2\text{更有效}$$

10.高,小,变大

二. 解: A_1:甲河流泛滥　　A_2:乙河流泛滥　　B:某地区受灾

$$\left.\begin{array}{l} P(B)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) \\ (1)\left.\begin{array}{l} P(A_1)=0.1 \\ P(A_2)=0.2 \\ P(\dfrac{A_2}{A_1})=0.3\Rightarrow\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=0.3\end{array}\right\}\Rightarrow P(A_1A_2)=0.03\end{array}\right\}\Rightarrow P(B)=0.1+0.2-0.03=0.27$$

$$(2)P(\frac{A_1}{A_2})=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{0.03}{0.2}=0.15$$

三.解：设A_1 = 敌机中了弹　　　B = 敌机被击落

$$P(\frac{B}{A_1})=0.2, P(\frac{B}{A_2})=0.6, P(\frac{B}{A_3})=1$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)*P(\frac{B}{A_i})=\sum_{i=1}^{3}C_3^i*(0.3)^i(0.7)^{3-i}*P(\frac{B}{A_i})=0.2286$$

$$P(\frac{A_2}{B})=\frac{P(A_2)*P(\frac{B}{A_2})}{P(B)}=0.496$$

四、解：由密度函数的性质及数学期望的定义，有

① $\begin{cases}\int_0^c f(x)=1\\ \int_0^c x\cdot f(x)=\frac{2}{3}\end{cases}$ 即 $\left.\begin{cases}\int_0^c kxdx=1\\ \int_0^c kx^2dx=\frac{2}{3}\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases}c=1\\ k=2\end{cases}$

②由①知 x 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

当 $x\le 0$时　$F(x)=0$；

当$0<x<1$时　$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x 2tdt=x^2$

当$x\ge 1$时　$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^1 2xdx=1$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^2 & \infty<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

五、由（x、y）联合密度的性质有：

①. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x,y)dxdy=1$ 即 $\int_2^4\int_0^2 kx(2+y)dxdy=1 \Rightarrow k=\frac{1}{36}$

②. 由①可求出（x，y）的联合密度：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{36}x(2+y) & 2<x<4,,0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$f_X(x)=\int f(x,y)dy=\int_0^2\frac{1}{36}x(2+y)dy=\frac{1}{6}x \quad (0<y<2)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_2^4\frac{1}{36}x(2+y)dx=\frac{1}{6}(2+y) \quad (2<x<4)$$

$\therefore\ f_X(x)\begin{cases}\frac{1}{6}x & 0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$ $\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}(2+y) & 2<x<4\\ 0 & 其他\end{cases}$

$\therefore f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 故 x, y 相互独立。

③. 由②知(x,y)相互独立。$\therefore \rho_{xy=0}$

六、略

七、解：令 x 为一年内死亡人数，题中 10000 人投标，每人每年死亡率 0.006 且每人每年死亡相互独立，故 x~ N（10000*0.006，10000*0.006*0.994）即 x~ N（60，59.64）

设 A：保险公司一年内的利润不少于 60000 元。即 A：10000*12-1000x≥60000$\Rightarrow x\le 60$

$$P(A)=P\{x\le 60\}=\Phi_0(60)=\Phi_0\left(\frac{60-60}{\sqrt{59.64}}\right)=\Phi_0(0)=0.5$$

$\therefore$该保险公司一年的利润不少于60000元的概率为0.5

概率论与数理统计复习题（2）

一. 选择题（18 分，每题 3 分）

1．设 A,B 为随机事件，且 $P(B|A)=1$，则必有_________

(A) A 是必然事件；(B) $P(B|\overline{A})=0$；(C) $A\subset B$；(D) $A\supset B$.

2．口袋中有 6 只红球，4 只白球，任取 1 球，记住颜色后再放入口袋。共进行 4 次，记 X 为红球出现的次数，则 X 的数学期望 $E(X)=$_________

(A) $\frac{16}{10}$；　(B) $\frac{24}{10}$；　(C) $\frac{4}{10}$；　(D) $\frac{4^2\times 6}{10}$.

3．设随机变量 X 的分布密度函数和分布函数为 $f(x)$ 和 $F(x)$，且 $f(x)$ 为偶函数，则对任意实数 a，有___________

(A) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$　　(B) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$

(C) $F(-a)=F(a)$　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$

4．设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 区间上的均匀分布，则仍服从均匀分布的随机变量是_________

(A) $Z=X+Y$　(B) $Z=X-Y$　(C) (X,Y)　(D) (X,Y^2)

5．已知随机变量 X 和 Y 都服从正态分布：$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,3^2)$，设 $p_1=(X\ge\mu+4)$，$p_2=P(Y\le\mu-3)$，则___________

(A) 只对 μ 的某些值，有 $p_1=p_2$　　(B) 对任意实数 μ，有 $p_1<p_2$

(C) 对任意实数 μ，有 $p_1>p_2$　　(D) 对任意实数 μ，有 $p_1=p_2$

6．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，则 μ 的置信度为95%的置信区间为_________

(A) $(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025})$　　(B) $(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025})$

(C) $(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05})$　　(D) $(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05})$

二. 填空题（21 分，每题 3 分）

1． 已知随机事件 A，B 有概率 $P(A)=0.7$，$P(\overline{B})=0.8$，条件概率 $P(\overline{B}\mid A)=0.6$，则

$P(A\cup B)=$____________.

2．已知随机变量 (X,Y) 的联合分布密度函数如下，则常数 $K=$____________

$$f(x,y)=\begin{cases}K\,y(1-x), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x;\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

3 某人射击直到中靶为止，已知每次射击中靶的概率为 0.75. 则射击次数的数学期望与方差分别为 $E(X)=$__________，$D(X)$____________

4．已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，试用 $F(x,y)$ 表示概率

$P(X>a,Y>b)=$__________________________________.

5．设 X_1,X_2,X_3 是取自 $N(\mu,1)$ 的样本，$\hat{\mu}_1=kX_1+3X_2+(2-2k)X_3$ 是 μ 的无偏估计量则常数 $k=$__________

6．设（$X_1,X_2,\cdots,X_6$）是来自正态分布 $N(0,1)$ 的样本，

$$Y=\left(\sum_{i=1}^{3}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=4}^{6}X_i\right)^2$$

当 $c=$________时，cY 服从 χ^2 分布，$E(\chi^2)=$__________.

7．设离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

(X,Y)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
P	0.4	0.2	a	b

若 $E(XY)=0.8$，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=$________.

三．计算题 （54 分，每题 9 分）

1．某种产品分正品和次品，次品不许出厂。出厂的产品 n 件装一箱，并以箱为单位出售。由于疏忽，有一批产品未经检验就直接装箱出厂，某客户打开其中的一箱，从中任意取出一件，求：

（1）取出的是件正品的概率；（2）这一箱里没有次品的概率

2．设二维随机变量（X,Y）在区域 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,|y|\le x\}$ 上服从均匀分布。求：边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$.

3．已知随机变量$(X,Y)\sim N(0.5,4\text{；}0.1,9\text{；}0)$，$Z=2X-Y$，

试求：方差$D(Z)$，协方差$COV(X,Z)$，相关系数ρ_{XZ}

4．学校某课程的考试，成绩分优秀，合格，不合格三种，优秀者得 3 分，合格者得 2 分，不合格者得 1 分。根据以往的统计，每批参加考试的学生中考得优秀、合格、不合格的，各占 20%、70%、10%。现有 100 位学生参加考试，试用中心极限定理估计 100 位学生考试的总分在 180 至 200 分之间的概率。

（$\Phi(1.856)=0.9680$）

5．设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的一个样本，总体

$$X\sim f(x,\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}\,x^{\sqrt{\theta}-1}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}\quad,\ (\theta>0)\text{。}$$

试求：(1) 未知参数θ的矩估计量$\widehat{\theta}$；(2) 未知参数θ的极大似然估计量$\widehat{\theta}_L$；

(3) $E(X^2)$的极大似然估计量.

6．某种产品的一项质量指标$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，在 5 次独立的测试中，测得数

据（单位：cm） 1.23　1.22　1.20　1.26　1.23 试检验（$\alpha=0.05$）

（1） 可否认为该指标的数学期望$\mu=1.23\,cm$？

（2） 若指标的标准差$\sigma\le 0.015$，是否可认为这次测试的标准差显著偏大？

附　分布数值表

$\Phi(1.45)=0.926$，$\Phi(1.62)=0.9474$，$\Phi(1.30)=0.9032$，$\Phi(2.33)=0.99$

$t_{0.025}(4)=2.7764$，$t_{0.025}(5)=2.5706$，$t_{0.05}(4)=2.1318$，$t_{0.05}(5)=2.0150$

$\chi^2_{0.025}(4)=11.143$，$\chi^2_{0.975}(4)=0.484$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$，$\chi^2_{0.95}(4)=0.711$

概率论与数理统计复习题（2）答案

一．选择题（18 分，每题 3 分）

c　b　a　c　d　b

二．填空题（21 分，每题 3 分）

1．0.62；　　2．24；　　3．4/3　9/4

4．$1+F(a,b)-F(a,+\infty)-F(+\infty,b)$；

5． 4 ； 6． 1/3 2； 7． 0,1

三． 计算题（54 分，每题 9 分）

1． 解：令 A={取出为正品}， B_t={箱子中有 t 个正品}，$t=0,1,2,\cdots,n$ ．

由已知条件，$P(B_t)=\dfrac{1}{n+1}$，$P(A|B_t)=\dfrac{t}{n}$, $t=0,1,2,\cdots,n$，

（1）由全概率公式，$P(A)=\sum_{t=0}^{n}P(B_t)P(A|B_t)=\dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{n}\sum_{t=0}^{n}t=\dfrac{1}{2}$，

（2）由 Bayes 公式，$P(B_n|A)=\dfrac{P(B_n)P(A|B_n)}{P(A)}=\dfrac{1}{2(n+1)}$．

2． 解： $f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

3． 解： $E(Z)=0.9\quad D(Z)=25$

$$\operatorname{cov}(X,Z)=8$$

$$\rho_{XZ}=\frac{4}{5}$$

4． 解：设 X_i 为第 I 位学生的得分 $(i=1,2,\cdots 100)$，则总得分 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$

$$E(X_i)=1.9\qquad D(X_i)=0.29$$

$$E(X)=100\times 1.9=19\qquad D(X)=100\times 0.29$$

$$P(180<X<200)=\Phi(\frac{200-190}{\sqrt{29}})-\Phi(\frac{180-190}{\sqrt{29}})$$

$$=2\Phi(1.856)-1=0.936$$

5． 解：（1） 矩估计量 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$

（2） 极大似然估计量 $\hat{\theta}_L=\dfrac{n^2}{\left(\sum_{i-1}^{n}\ln X_i\right)^2}$

（3） $E(X^2)$ 的极大似然估计量 $\hat{E}(X^2)=\dfrac{\hat{\theta}_L}{\hat{\theta}_L+2}=\dfrac{n^2}{n^2+2(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$

7．解：（1）假设 $H_0:\mu=1.23;H_1:\mu\neq1.23$.

当 H_0 为真，检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(4)=2.7764$ ， 拒绝域 $W=(-\infty,-2.7764]\cup[2.7764,+\infty)$

$\overline{x}=1.246,s^2=0.0288^2$， ［ $\overline{x}=1.23,s^2=0.0224^2$ ］

$T_0=1.242\notin W$，接受 H_0. ［ $T_0=3.571\in W$，拒绝 H_0 ］

（2）假设 $H_0:\sigma^2=0.015^2;H_1:\sigma^2>0.015^2$.

当 H_0 为真，检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

$\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(4)=9.488$， 拒绝域 $W=[9.488,+\infty)$.

$\chi_0^2=14.86\in W$，拒绝 H_0 .

概率论与数理统计复习题（3）

一．判断题（10 分，每题 2 分）

1．在古典概型的随机试验中，$P(A)=0$ 当且仅当 A 是不可能事件（ ）

2．连续型随机变量的密度函数 $f(x)$ 与其分布函数 $F(x)$ 相互唯一确定（ ）

3．若随机变量 X 与 Y 独立，且都服从 $p=0.1$ 的（0，1）分布，则 $X=Y$ （ ）

4．设 X 为离散型随机变量，且存在正数 k 使得 $P(|X|>k)=0$，则 X 的数学期望 $E(X)$ 未必存在（ ）

5．在一个确定的假设检验中，当样本容量确定时，犯第一类错误的概率与犯第二类错误的概率不能同时减少（ ）

二．选择题（15 分，每题 3 分）

1． 设每次试验成功的概率为 $p\,(0<p<1)$，重复进行试验直到第 n 次才取得 $r\,(1\le r\le n)$ 次成功的概率为_______.

（a） $C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$； （b） $C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$；

（c） $C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r+1}$； （d） $p^r(1-p)^{n-r}$.

2. 离散型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $P(X=x_k)=$_______.

（a） $P(x_{k-1}\le X\le x_k)$； （b） $F(x_{k+1})-F(x_{k-1})$；

（c） $P(x_{k-1}<X<x_{k+1})$； （d） $F(x_k)-F(x_{k-1})$.

3. 设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\max(X,2003)$ 的分布函数_______.

（a）是连续函数； （b）恰好有一个间断点；

（c）是阶梯函数； （d）至少有两个间断点.

4. 设随机变量 (X,Y) 的方差 $D(X)=4, D(Y)=1,$ 相关系数 $\rho_{XY}=0.6,$ 则方差 $D(3X-2Y)=$_______.

（a）40； （b）34； （c）25.6； （d）17.6

5. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 $N(1,2^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是_______.

（a） $\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim t(n)$； （b） $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim F(n,1)$；

（c） $\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$； （d） $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim \chi^2(n)$.

二. 填空题（28 分，每题 4 分）

1. 一批电子元件共有 100 个，次品率为 0.05. 连续两次不放回地从中任取一个，则第二次才取到正品的概率为__________

2. 设连续随机变量的密度函数为 $f(x)$，则随机变量 $Y=3e^X$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=$________________

3. 设 $\overline{X}$ 为总体 $X\sim N(3,4)$ 中抽取的样本（X_1,X_2,X_3,X_4）的均值，则 $P(-1<\overline{X}<5)=$__________.

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1;\\ 0, & 其\ 他\end{cases}$$

则条件密度函数为，当______时，$f_{Y|X}(y|x)=$ ____________

5. 设 $X\sim t(m)$，则随机变量 $Y=X^2$ 服从的分布为________（ 需写出自由度 ）

6. 设某种保险丝熔化时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（单位：秒），取 $n=16$ 的样本，得样本均值和方差分别为 $\overline{X}=15, S^2=0.36$，则 μ 的置信度为 95%的单侧置信区间上限为____________

7. 设 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

已知一个样本值 $(x_1,x_2,x_3)=(1,2,1)$，则参数的极大似然估计值为__________

三. 计算题（40 分，每题 8 分）

1. 已知一批产品中 96 %是合格品. 检查产品时，一合格品被误认为是次品的概率是 0.02；一次品被误认为是合格品的概率是 0.05. 求在被检查后认为是合格品的产品确实是合格品的概率

2．设随机变量 X 与 Y 相互独立，X，Y 分别服从参数为 $\lambda,\mu(\lambda\neq\mu)$ 的指数分布，试求 $Z=3X+2Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$．

3．某商店出售某种贵重商品．根据经验，该商品每周销售量服从参数为 $\lambda=1$ 的泊松分布．假定各周的销售量是相互独立的．用中心极限定理计算该商店一年内（52 周）售出该商品件数在 50 件到 70 件之间的概率．

4．总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的一个样本．

求常数 k，使 $k\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\overline{X}\right|$ 为 σ 的无偏估计量．

5．（1） 根据长期的经验，某工厂生产的特种金属丝的折断力 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（单位：kg）．已知 $\sigma=8$ kg，现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取 10 个样品，测得样本均值 $\bar{x}=575.2$ kg．问这批特种金属丝的平均折断力可否认为是 570 kg？（$\alpha=5\%$）

（2） 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布 $N(\mu,0.048^2)$．某日抽取 5 个样品，测得其纤度为：1.31，1.55，1.34，1.40，1.45．问这天的纤度的总体方差是否正常？试用 $\alpha=10\%$ 作假设检验．

四. 证明题（7 分）

设随机变量 X,Y,Z 相互独立且服从同一贝努利分布 $B(1,p)$．试证明随机变量 $X+Y$ 与 Z 相互独立．

附表：标准正态分布数值表　　χ^2 分布数值表　　t 分布数值表

标准正态分布数值表	χ^2 分布数值表	t 分布数值表
$\Phi(0.28)=0.6103$	$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$	$t_{0.025}(15)=2.1315$
$\Phi(1.96)=0.975$	$\chi^2_{0.95}(4)=0.711$	$t_{0.05}(15)=1.7531$
$\Phi(2.0)=0.9772$	$\chi^2_{0.05}(5)=11.071$	$t_{0.025}(16)=2.1199$
$\Phi(2.5)=0.9938$	$\chi^2_{0.95}(5)=1.145$	$t_{0.05}(16)=1.7459$

概率论与数理统计复习题（3）参考答案

一．判断题（10 分，每题 2 分）　　是　非　非　非　是．

二．选择题（15 分，每题 3 分）　　（a）（d）（b）（c）（d）．

三．填空题（28 分，每题 4 分）

1. 1/22 ；　　2. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}f[\ln(y/3)]) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$ ；　　3. 0.9772 ；

4. 当 $0<x<1$ 时 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}1/(2x) & -x<y<x\\ 0 & \text{其　他}\end{cases}$ ；

5. $F(1,m)$　　6. 上限为 15.263 ．　　7. 5 / 6 ．

四．计算题（40 分，每题 8 分）

1. A—— 被查后认为是合格品的事件，B—— 抽查的产品为合格品的事件．　　（2 分）

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.96\times0.98+0.04\times0.05=0.9428，\quad（4 分）$$

$$P(B|A)=P(B)P(A|B)/P(A)=0.9408/0.9428=0.998.\quad（2 分）$$

2. $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$　　（1 分）

$z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$，从而 $f_Z(z)=0$；　　（1 分）

$z\le 0$ 时，$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y[(z-3x)/2]dx$　　（2 分）

$$=\frac{1}{2}\int_0^{z/3}\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu[(z-x)/2]}dx=\frac{\lambda\mu}{3\mu-2\lambda}(e^{-\lambda z/3}-e^{-\mu z/2})\quad（2 分）$$

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\mu}{3\mu-2\lambda}(e^{-\lambda z/3}-e^{-\mu z/2}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$\left[\ f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\mu}{2\mu-3\lambda}(e^{-\lambda z/2}-e^{-\mu z/3}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}\ \right]\quad（2分）$$

3. 设 X_i 为第 i 周的销售量，　$i=1,2,\cdots,52$　　$X_i\sim P(1)$　　（1 分）

则一年的销售量为 $Y=\sum_{i=1}^{52} X_i$，$E(Y)=52$，$D(Y)=52$. （2 分）

由独立同分布的中心极限定理，所求概率为

$$P(50<Y<70)=P\left(\frac{-2}{\sqrt{52}}<\frac{Y-52}{\sqrt{52}}<\frac{18}{\sqrt{52}}\right)\approx\Phi\left(\frac{18}{\sqrt{52}}\right)+\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{52}}\right)-1 \quad （4\ 分）$$

$$=\Phi(2.50)+\Phi(0.28)-1=0.9938+0.6103-1=0.6041. \quad （1\ 分）$$

4. 注意到

$$X_i-\overline{X}=\frac{1}{n}\left(-X_1-X_2\cdots+(n-1)X_i-\cdots-X_n\right)$$

$$E(X_i-\overline{X})=0,\quad D(X_i-\overline{X})=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \quad (2分)$$

$$X_i-\overline{X}\sim N\left(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2\right) \quad (1分)$$

$$E(|X_i-\overline{X}|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}}dz$$

$$=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma \quad (3分)$$

$$E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|\right)=k\left(\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\overline{X}|\right)=kn\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma\overset{令}{=}\sigma$$

$$k=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} \quad （2分）$$

5. （1） 要检验的假设为 $H_0:\mu=570,\ H_1:\mu\neq570$ （1 分）

检验用的统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

拒绝域为 $|U|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=z_{0.025}=1.96$. （2 分）

$|U_0|=\dfrac{575.2-570}{8/\sqrt{10}}=0.65\sqrt{10}=2.06>1.96$，落在拒绝域内，

故拒绝原假设 H_0，即不能认为平均折断力为 570 kg .

[$|U_0|=\dfrac{571-569.2}{9/\sqrt{10}}=0.2\sqrt{10}=0.632<1.96$，落在拒绝域外，

故接受原假设 H_0，即可以认为平均折断力为 571 kg ．］ （1 分）

（2）要检验的假设为 $H_0:\sigma^2=0.048^2$，$H_1:\sigma^2\neq 0.048^2$ （1 分）

［$H_0:\sigma^2=0.79^2$，$H_1:\sigma^2\neq 0.79^2$］

检验用的统计量 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，

拒绝域为 $\chi^2>\chi_{\alpha}^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(4)=9.488$ 或

$\chi^2<\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)=\chi_{0.95}^2(4)=0.711$ （2 分）

$\bar{x}=1.41$ ［$\bar{x}=1.49$］

$\chi_0^2=0.0362/0.0023=15.739>9.488$， 落在拒绝域内，

［$\chi_0^2=0.0538/0.6241=0.086<0.711$，落在拒绝域内，］

故拒绝原假设 H_0，即认为该天的纤度的总体方差不正常 ． （1 分）

五、证明题（7 分） 由题设知

X	0	1
P	q	p

$X+Y$	0	1	2
P	q^2	$2pq$	p^2

（2 分）

$P(X+Y=0,Z=0)=q^3=P(X+Y=0)P(Z=0)$；

$P(X+Y=0,Z=1)=pq^2=P(X+Y=0)P(Z=1)$；

$P(X+Y=1,Z=0)=2pq^2=P(X+Y=1)P(Z=0)$；

$P(X+Y=1,Z=1)=2pq^2=P(X+Y=1)P(Z=1)$；

$P(X+Y=2,Z=0)=pq^2=P(X+Y=2)P(Z=0)$；

$P(X+Y=2,Z=1)=p^3=P(X+Y=2)P(Z=1)$.

所以 $X+Y$ 与 Z 相互独立. （5 分）

概率论与数理统计复习题（4）及参考答案

1：

6 个毕业生，两个留校，另 4 人分配到 4 个不同单位，每单位 1 人．则分配方法有 ________ 种．

答 $(6\times5\times4\times3)=360$.

2：

6 个学生和一个老师并排照相，让老师在正中间共有 ______ ______ 种排法．

解 $6!=720$.

3：

事件 A, B 相互独立，且 $P(A)=p$，$(0<p<1)$，$P(B)=q\,(0<q<1)$，则 $P\{A\cup B\}=$ ______________ .

答 $1-pq$.

4：

欲使 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{x}, & x<0;\\ A-\frac{1}{3}e^{-2x}, & x\geq 0.\end{cases}$ 是某随机变量的分布函数，则要求 $A=$ ________.

答 1.

5：

重复独立地掷一枚均匀硬币，直到出现正面为止，设 ξ 表示首次出现正面的试验次数，则 ξ 的分布列 $P\{\xi=k\}=$ ______.

答 $\frac{1}{2^k}$, $(k=1, 2, 3, \cdots)$.

6：

二维随机变量（ξ，η）的联合分布函数 $F(x, y)$ 的定义是对任意实数 x, y，$F(x, y)$ __________ .

答 $P\{\xi \le x,\ \eta \le y\}$.

7：

若 $\varphi(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(5x+2y)} & ,\ x>0,\ y>0 \\ 0 & \end{cases}$ 为随机变量（ξ，η）的联合概率密度，则常数 $A=$__________.

答 10.

8：

设随机变量 ξ 的 $E\xi$ 与 $D\xi$ 存在，对任意给定的 $\varepsilon>0$，则有概率 $P\{|\xi-E\xi|<\varepsilon\}\ge$____________.

答 $1-\dfrac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$.

9：

若总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 则 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim$ ________ 其中 n 为样本容量.

答 $N(0,\ 1)$.

10：

设假设检验中犯第一类弃真错误的概率为 α，犯第二类取伪错误的概率为 β，为了同时减少 α 和 β，那么只有________.

答：增大样本容量

二：

11：

在房间里有 10 人，分别佩戴着 1~10 号的纪念章，任意选 4 人记录其纪念章的号码，求最大的号码为 5 的概率.

解 A 表示事件“最大的号码为 5”基本事件总数 C_{10}^4，

A 所包含的基本事件数 C_4^3，

$$P(A)=\frac{4}{210}=\frac{2}{105}\ .$$

12：

设每 100 个男人中有 5 个色盲者, 而每 10000 个女人中有 25 个色盲者, 今在 3000 个男人和 2000 个女人中任意抽查一人, 求这个人是色盲者的概率.

解 A:“抽到的一人为男人”，B:“抽到的一人为色盲者”.

则
$$P(A)=\frac{3}{5},\quad P(B|A)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20},$$

$$P(\mathbf{A})=\frac{2}{5},\quad P(B|\mathbf{A})=\frac{25}{10000}=\frac{1}{400}\ .$$

于是

$$P(B)=P(A)\,P(B|A)+P(\mathbf{A})\,P(B|\mathbf{A})$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{20}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{400}=\frac{31}{1000}\quad .$$

13:

设随机变量 ξ 的分布律是

$$P\{\xi=k\}=A\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ \ k=1,2,3,4\,.$$

求 $P\left\{\frac{1}{2}<\xi<\frac{5}{2}\right\}$.

解 $$\sum_{k=1}^{4}P(\xi=k)=A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)=\frac{15}{16}A,$$

令 $\frac{15}{16}A=1$，得 $A=\frac{16}{15}$.

$$P\left(\frac{1}{2}<\xi<\frac{5}{2}\right)=p(\xi=1)+p(\xi=2)=\frac{16}{15}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=0.8\,.$$

14:

设随机变量（ξ,η）的联合概率密度

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y)\,, & 0<x<2,\quad 2<y<4\\ 0\,, & \end{cases}$$

试求 $P\{\xi<1,\ \eta<3\}$.

解　$P\{\xi<1,\ \eta<3\}=\frac{1}{8}\int_0^1\int_2^3(6-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$$=\frac{3}{8}.$$

15：

设随机变量（ξ, η）的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}kxy^2,\ 0<x<1,\ 0<y<1\\0,\end{cases}$$

求常数 k，并证明 ξ 与 η 相互独立.

解　因为　$1=\int_0^1\int_0^1 kxy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{k}{6}$,

所以　　$k=6$.

ξ 的密度 $\varphi_1(x)=\begin{cases}6x\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y=2x,\ 0<x<1\\0,\end{cases}$,

η 的密度 $\varphi_2(y)=\begin{cases}6y^2\int_0^1 x\,\mathrm{d}y=3y^2,\ 0<y<1\\0,\end{cases}$.

对任何（x, y）都有，$\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$

所以 ξ 与 η 相互独立.

16：

设随机变量 ξ 的分布律为

ξ	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求　$E(\xi-E\xi)^3$.

解　$E\xi=\sum_{k=1}^{3}x_kp_k=(-2)\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$

$$E(\xi-E\xi)^3=\sum_{k=1}^{3}(x_k-E\xi)^3p_k$$
$$=[-2-(-0.2)]^3\times0.4+(0+0.2)^3\times0.3$$
$$+(2+0.2)^3\times0.3$$
$$=0.864.$$

17：

一个零件的重量是随机变量 ξ_i，$E\xi_i = 10$(克)，$D\xi_i = 1$. 试用中心极限定理求一盒同型号零件 (100个) 的重量大于 1020 克的概率的近似值 (设各个零件的重量相互独立)(已知 $F_{0,1}(2) = 0.97725$，$F_{0,1}(0.2) = 0.5793$，$F_{0,1}(20) = 1$).

解 ξ_i 表示第 i 个零件的重量，则 $E\xi_i = 10$，$D\xi_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, 100)$

记 $\xi = \sum_{i=1}^{100} \xi_i$ 则 $E\xi = 1000$，$D\xi = 100$，$\sqrt{D\xi} = 10$

$$P\{\xi > 1020\} = P\left\{\frac{\xi - 1000}{10} > \frac{1020 - 1000}{10}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\xi - 1000}{10} > 2\right\} = 1 - P\left\{\frac{\xi - 1000}{10} < 2\right\}$$

$$\approx 1 - F_{0,1}(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275.$$

18:

设总体 $X \sim N(\mu, 0.09)$ 现获得 6 个观察值：

15.1 , 15.2 , 14.8 , 14.9 , 15.1 , 14.6

求总体均值 μ 的 98% 的置信区间.

(注：$u_{0.99} = 2.33$，$u_{0.975} = 1.96$，$u_{0.995} = 2.57$，$u_{0.95} = 1.64$).

解 $1 - \alpha = 0.98$，$\frac{\alpha}{2} = 0.01$，$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99$，$n = 6$

$u_{0.99} = 2.33$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times u_{0.99} = \frac{0.3}{2.45} \times 2.33 = 0.285,\quad \overline{X} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 14.95$$

$\therefore$ μ 的 98% 的置信区间为：

$$(14.5 - 0.285, 14.95 - 0.285) = (14.665, 15.25).$$

19:

(1) 设总体 X 服从区间 $[a, 8]$ 上的均匀分布，求 a 的矩估计量.

(2) 设总体 X 服从区间 $[3, b]$ 上的均匀分布，求 b 的矩估计量.

解 (1) $\because\ E(X)=\dfrac{a+8}{2}$ 得 $a=2EX-8$

$\therefore\ a=2\overline{X}-8$.

(2) $\because\ E(X)=\dfrac{3+b}{2}$ 得 $b=2EX-3$

$\therefore\ b=2\overline{X}-3$.

20：

我国出口的凤尾鱼罐头, 标准规格是每罐净重 250 克，依据以往经验, 标准差是 3 克，现在某食品厂生产一批供出口用的这种罐头, 从中抽取 100 罐进行检验, 得其平均净重是 251 克. 按显著性水平 $\alpha=0.05$, 问该批罐头是否合乎出口标准. 据经验每罐净重 X 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$.

(已知 $u_{0.95}=1.65$).

解 问题为 $\alpha=0.05$，要检验假设

$$H_0:\ \mu=250;\quad H_1:\ \mu>250\ (\sigma\text{ 已知})$$

$$u=\frac{\boldsymbol{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{251-250}{3/\sqrt{100}}=3.33\,.$$

由于 $u=3.33>1.65=u_{0.95}=u_{1-\alpha}$，故拒绝 H_0,

即认为罐头的净重偏高.

注：用双侧检验 H_0：$\mu=250$；H_1：$\mu\neq 250$ 也可.

21：证明题：

$X\sim N(a,\ \sigma^2)$，X_1，X_2，$\cdots$，X_n 为 X 的一个样本，试证明 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n-1)\sigma^2$.

解 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=E\{(X_i-a)-(\overline{X}-a)^2\}$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2-2(\overline{X}-a)\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)+n(\overline{X}-a)^2\right]$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2-2n(\overline{X}-a)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right)+n(\overline{X}-a)^2\right]$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2-n(\underline{X}-a)^2\right]=n\sigma^2-nE(\overline{X}-a)^2$$

$$=n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}=(n-1)\sigma^2.$$

复习题（5）答案与评分标准

一．填空题（$2'\times14=28'$）

1．已知 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$,则 $P(A\cup B)=$ $\underline{\frac{1}{3}}$。

2．有零件 8 件，其中 5 件为正品，3 件为次品。从中任取 4 件，取出的零件中有 2 件正品 2 件次品的概率为 $\underline{C_5^2\cdot C_3^2/C_8^4=3/7}$；

3．抛掷均匀的硬币，直到出现正面向上为止，则抛掷次数 X 的概率分布为 $\underline{P(X=k)=0.5\cdot0.5^{k-1}=0.5^k,k=1,2,\ldots}$，$X$ 服从分布 $\underline{G(0.5)}$。

4．设随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\frac{c}{x^2}, & x\ge1\\ 0, & x<1\end{cases}$，则常数 $c=\underline{1}$，X 的分布函数

$$\underline{F(x)=\begin{cases}0, & x\le1\\ 1-1/x, & x>1\end{cases}}$$。

5．设随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则随机变量 $Y=X^2$ 的密度函数 $p_Y(y)=\underline{\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}}$。

6．已知 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，且 $a<b,c<d$，则 $P(a<X\le b,c<Y\le d)=$ $\underline{F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)}$。

7．设 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(3,4)$，且 X 和 Y 相互独立，则 $Z=2X+Y$ 的密度函数 $p_Z(z)=\underline{\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{24}},-\infty<z<+\infty}$。

8．$(X,Y)\sim N(1,0,4,9,0.5)$，则 $Y\sim \underline{N(0,9)}$，$E[(X-Y)^2]=\underline{\ 8\ }$。

9．设 (X,Y) 的联合概率分布为

X \ Y	0	1
0	**0.1**	0.1
1	0.8	0

则 X 的概率分布为

X	0	1
P	0.2	0.8

相关系数 $\rho_{XY}=\underline{-\frac{2}{3}}$。

10．设随机变量 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 独立同分布，$EX_1=\mu$，$DX_1=8$，记 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则用切比雪夫不等式估计 $P(|Y_n-\mu|<2)\ge \underline{1-\frac{2}{n}}$。

二．简答题（6′）

叙述数学期望和方差的定义（离散型），并且说明它们分别描述什么？

数学期望：$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则 $EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$。（2 分）

EX 描述 X 取值的平均。（1 分）

方差：$E(X-EX)^2$ 存在，则 $DX = E(X-EX)^2$（2 分）

DX 描述 X 相对于 EX 的偏差。（1 分）

三．分析判断题（判断结论是否正确，并说明理由，$5'\times 2 = 10'$）

1．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，$a<b$，则 $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$。

不一定正确。（2 分）

如 X 为连续型随机变量，则 $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$；如 X 为离散型随机变量，且 $P(X=a) \ne 0$，则 $P(a \le X \le b) \ne F(b) - F(a)$（或举反例）。（3 分）

2．若随机变量 X 和 Y 不相关，则 $D(X-Y) \ge DX$。

正确。（2 分）

$D(X-Y) = DX + DY - 2Cov(X,Y)$（1分）
$= DX + DY$（1分）
$\ge DX$（1分）.

四．计算题（$10'+10'+18'+8'+10' = 56'$）

1．（$4'+3'+3'=10'$）进行 4 次独立试验，在每次试验中 A 出现的概率均为 0.3。如果 A 不出现，则 B 也不出现；如果 A 出现一次，则 B 出现的概率为 0.6；如果 A 出现不少于两次，则 B 出现的概率为 1。试求：

（1）4 次独立试验中 A 出现 i 次的概率 $(0 \le i \le 4)$；

（2）B 出现的概率；

（3）在 B 出现的情况下，A 出现一次的概率。

记 X 为 4 次独立试验中 A 出现的次数，

（1）$P(X=i) = C_4^i 0.3^i 0.7^{4-i}$，$i = 0,1,2,3,4$；（4 分）

（2） $P(B)=\sum_{i=0}^{4}P(X=i)P(B\mid X=i)$ （1 分）

$=C_4^1\cdot 0.3\cdot 0.7^3\cdot 0.6+\sum_{i=2}^{4}C_4^i 0.3^i\cdot 0.7^{4-i}$ （1 分）

$=0.59526$ （1 分）

（3） $P(X=1\mid B)=\dfrac{P(X=1)P(B\mid X=1)}{P(B)}=\dfrac{C_4^1\cdot 0.3\cdot 0.7^3\cdot 0.6}{0.59526}=0.4149$ （3 分）

2.（$5'+5'=10'$）向某一个目标发射炮弹，设弹着点到目标的距离 X （单位：米）的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1250}xe^{-\frac{x^2}{2500}}, x>0\\ 0\quad ,\quad x\le 0\end{cases},$$

如果弹着点距离目标不超过 50 米时，即可摧毁目标。

求：（1）发射一枚炮弹，摧毁目标的概率；

（2）至少应发射多少枚炮弹，才能使摧毁目标的概率大于 0.95？

（1） $p=P(X\le 50)=\int_0^{50}\dfrac{1}{1250}xe^{-\frac{x^2}{2500}}dx=1-e^{-1}$ （5 分）

（2）设至少发射 n 枚炮弹，则

$1-e^{-n}\ge 0.95$，（3 分）　　　　$n\ge 3$ （2 分）

3.（$6'\times 3=18'$）设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}C\ ,\ 0<x<1, x^2<y<x\\ 0,\qquad \text{其他}\end{cases},$$

试求：（1）常数 C；

（2）边际密度函数 $p_X(x), p_Y(y)$，并讨论 X 和 Y 的独立性；

（3） $P(2Y<X)$ 。

（1）$C\int_0^1 dx\int_{x^2}^x dy = 1$（3 分）

$C = 6$ （3 分）

（2）$p_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ （2 分）$p_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ （2 分）

不独立（2 分）

(3) $P(2Y < X) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_{x^2}^{\frac{x}{2}} 6dy$（4分）

$= \dfrac{1}{8}$（2 分）

4.（8′）如果你提前 s 分钟赴约，花费为 cs（单位：元）；如果迟到 s 分钟，花费为 ks（单位：元）。假设从现在的位置到赴约地点所用的时间 $X \sim U[10,30]$（单位：分钟）。欲使平均花费最小，确定应该提前离开的时间。

设赴约前 t 分钟离开，则花费

$$C = f(X) = \begin{cases} c(t - X), X \le t \\ k(X - t), X > t \end{cases}，\text{(3 分)}$$

$$EC = Ef(X) = \int_{10}^{30} f(x)p(x)dx$$

$$= \int_{10}^{t} c(t-x)\frac{1}{20}dx + \int_t^{30} k(x-t)\frac{1}{20}dx = (\frac{c}{2} + \frac{k}{2})t^2 - (10c + 30k)t + (50c + 450k) \text{（3 分）}$$

EC 最小，$t^* = \dfrac{10c + 30k}{c + k}$（2 分）

5.（10′）已知红黄两种番茄杂交的第二代结红果的植株与结黄果的植株的比率为 $3:1$。现种植杂交种 400 株，试求结黄果植株介于 83 到 117 之间的概率。

记 X 为结黄果植株数，则 $X \sim B(400, \frac{1}{4})$（3 分），

$$P(87 \le X \le 117) \approx \Phi\left(\frac{117 - 400\cdot 0.25}{\sqrt{400\cdot 0.25\cdot 0.75}}\right) - \Phi\left(\frac{83 - 400\cdot 0.25}{\sqrt{400\cdot 0.25\cdot 0.75}}\right) \text{（4 分）}$$

$$=2\Phi(1.96)-1=0.95$$（3 分）

参考数据：

$\Phi(1.65)=0.95,\ \Phi(1.69)=0.954,\ \ \Phi(1.96)=0.975.$

复习题（6）

一、　单项选择（在每小题的四个备选答案中，选出一个正确的答案，并将答案其代码填入题干后的括号内，每题 2 分，共 20 分）

1. 设随机事件 A,B 互斥，则 $P(\overline{A\cup B})$ =（　　）

A $1-P(A)-P(B)$　　B $1-P(A)$

C $P(\overline{A})+P(\overline{B})$　　D $P(\overline{A})P(\overline{B})$

$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)$

2. 设 $P(A)$ =0.6，$P(B)$ =0.3，$P(AB)$ =0.1，则 $P(B-A)$ =（　　）

A 0.3　　B 0.2　　C 0.5　　D 0.4

$P(B-A)=P(B)-P(BA)$

3. 甲、乙、丙三人各自独立地向某一目标射击一次，三人的命中率分别为 0.5，0.6 和 0.7，则至多有两人击中目标的概率为（　　）

A 0.09　　B 0.21　　C 0.44　　D 0.79

4. 已知随机变量 $X\sim B(n,p)$，且已知 $E(X)$ =6，$D(X)$ =2 则 $P(X\geq 1)$ =（　　）

A $1-\left(\frac{2}{3}\right)^9$　　B $\left(\frac{2}{3}\right)^9$　　C $1-\left(\frac{1}{3}\right)^9$　　D $\left(\frac{1}{3}\right)^9$

X~B(n,p)二项分布，$E(X)$ =np，$D(X)$ =npq　$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

5. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从参数为 λ 的泊松分布，则 X+Y 与 2X 的关系是

A 数学期望相等　B 相同的分布　C 方差相等　D 以上均不成立

6. 设随机变量 X 服从 $N(\mu,1)$，$\phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，$P(X\leqslant\mu)$=

A $\phi(\mu)$　　B 0.5　　C $\phi(1)$　　D $1-\phi(\mu)$

$P\{X\leq x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{x-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{\mu-\mu}{1})=0.5$(查表的)

7. 设随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.4	0.2

设 F(X) 为其分布函数，则 F(2) =

A 0.2　　B 0.4　　C 0.8　　D1

F(x)=P{X≤x}称为 X 的分布函数

所以 F（2）=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=0.1+0.3+0.4=0.8

8. 设 $X_1 \Lambda X_2$ 为取自总体的 X 的样本，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$,则以下结论正确的一个是 (　　)

A $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是 μ 的无偏估计量　　　　B $\overline{X}^2$ 是 σ^2 的无偏估计

C X_i^2 是 σ^2 的无偏估计　　　　D $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计

9.设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，如需通过样本 X_1, Λ, X_n 检验假设 $H_0 = \mu_0 : \mu_1$，需用的检验统计量是（　　）

A $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$　B $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}$　C $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$　D $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n-1}}$

１０.一元线性回归模型 $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$，$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ 且相互独立，那么 Y_i～（　　）

A $N(0,\sigma^2)$　B $N(0,1)$　C $N(a+b,1)$　D $N(a+b_i,\sigma^2)$

二、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.7，在这两批种子中随机各地抽取 1 粒，则这两粒种子都能发芽的概率是__0.56__，这两粒种子仲恰好有 1 粒发芽的概率是__0.38__。

２.设离散型随即变量Ｘ的分布律为ｐ（Ｘ＝ｋ）＝$\dfrac{c}{k(k+1)}$，ｋ＝１，２，……５，则ｃ＝__ 6/5 __．Ｐ（Ｘ＜３）＝__4/5__。$P(X=1)+P(X=2)$

３.若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则随机变量 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 服从 N(0，1）分布（标准正态分布），而 $Z=\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)$ 服从 $X^2(1)$ 分布。

４.设 $X_1 \cdots\cdots X_i$ 为取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，已知 $k(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布，则ｋ的值应是______，其自由度应该是______。

５.假设检验中，犯第一类错误的概率为____________犯第二类错误的概率为__________。

三.判断题（认为对的，再题后的括号内打“√”，认为错的打“×”。每小题 2 分，共十分）

1.若事件 A,B 的概率满足 $P(A) \ge P(B)$.则必有 $A \supset B$　　（　　）

2.若事件 A、B 互斥，则 P(AB)=0.反之亦然。　　（　　）

3.若随机变量 $X \sim N(0,1)$,则随机变量 $Y=\sigma X+\mu \sim N(\mu,\sigma)$.(　　)

4、随机变量 X,Y 相互独立的充要条件是它们的相关系数　σ_{xy}=0　　（　　）

5、或σ^2为未知总体 X 的方差，$S_n^{\ 2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 为样本方差，则有 $\lim_{n\to\infty} ES_n^{\ 2}=\sigma^2$

(　　　)

四、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1、设一个袋子里装了 1－5 号的五只球，今从中任意地取出 3 只球，以 X 表示取出的三只球中的最小号码，求：（1）X 的分布律；（2）E(X)和 D(X).

2、已知连续性随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\exp(\frac{-x^2+6x-9}{6})$ ，如果 Y 的密度函数为 $g(x)=C\cdot x\cdot\exp(\frac{-x^2+6x-9}{6})$ ，$(-\infty<x<\infty)$ ，试求常 C 和 E（Y）

3、设总体 X 的概率密度函数为：$p(x_{i,\theta})=\begin{cases}\theta\cdot x^{\theta-1},0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$ （θ>0, 未知）试求未知参数θ 的矩阵计量。

解：总体的数学期望为

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot\theta\cdot x^{\theta-1}dx=\theta\int_0^1 x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}x|_0^1=\frac{\theta}{\theta+1}$$

根据矩估计意义有，$\frac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$

解得参数θ的矩估计为$\theta=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

4、设某次考试的考生成绩 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$ ，μ,σ^2 均未知，从中随机地抽取 25 名考生的成绩，计算得到平均成绩$\overline{x}$=67.5 分 ，标准差 s=10.5 分 ，试问在显著性水平α=0.05 下，是否可以认为全体考生的平均成绩为 70 分？

（$t_{0.05}$ (25)=1.708, $t_{0.025}$ (25)=2.0595, $t_{0.05}$ (24)=1.711, $t_{0.025}$ (24)=2.064)

5、已知：n=6, $\sum_{i=1}^{n}x_i$ =426, $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ =30268, $\sum_{i=1}^{n}y_i$ =21, $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ =1481, $\sum_{i=1}^{n}y_i^{\ 2}$ =79.

试计算相关系数，确定 y 关于 x 的回归直线方程。

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1、对于任意的常数 C，试证明：$E(X-C)^2 \geq D(X)$.

证明 ：对于任意的常数 C

$$E(X-C)=E[X-EX+EX-C]^2$$

$$=E\left[(X-EX)^2-2(X-EX)(EX-C)+(EX-C)^2\right]$$

$$=E(X-EX)^2+2E[(X-EX)(EX-C)]+(EX-C)^2$$

$$=D(X)+(EX-C)^2$$

由于 $(EX-C)^2 \geq 0$

所以 $E(X-C)^2 \geq D(X)$.

2、设总体 X 服从 $f(n)$ 分布，证明：X^2 服从 $F(1,n)$ 分布.

复习题（6）参考答案及评分标准

（2010）

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1、A　2、B　3、D　4、C　5、A　6、B　7、C　8、D　9、A　10、D

二. 填空题（每空处两分，共 20 分）

1. 0.56　　0.38　　2.　6/5　　4/5

3. N(0, 1) 分布（标准正态分布）　$X^2(1)$ 分布

4. η/σ^2　　1

5. $\sigma=p(拒绝H_O\,|\,H_O为真)$　β=P（接受$H_0|H_0$为假）

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

1.　×　2.　×　3. √　4.　×　5. √

四、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 解：（1）依题X的一切取值为1，2，3? …

$$P(X=1)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10},\quad P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},\quad P(X=3)=\frac{C_2^2}{C_5^3}\frac{1}{10}$$

$$(2)E(X)=1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{27}{10}$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-\left[E\left(X\right)\right]^2=\frac{27}{10}-(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{20}=0.45$$

2. 解(1)根据随机变量 X 密度函数的表达式可知，X 服从正态 N（3，$\left(\sqrt{3}\right)^2$）分布，

从而 E(X)=3.

由于 Y 的密度 $g\left(x\right)=C\cdot x\cdot\exp\left(\frac{-x^2+6x-9}{6}\right)$,， 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}C\cdot x\cdot\exp\left(\frac{-x^2+6x-9}{6}\right)dx$$

$$=C\sqrt{6\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\cdot x\cdot\exp\left(\frac{-x^2+6x-9}{6}\right)dx$$

$$=C\sqrt{6\pi}\cdot E\left(X\right)=3C\sqrt{6\pi}=1$$

$$\therefore C=\frac{1}{3\sqrt{6\pi}}$$

$$E\left(Y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot g\left(x\right)dx=\frac{1}{3}E(X^2)=\frac{1}{3}\left\{D\left(X\right)+\left[E\left(X\right)\right]^2\right\}=4$$

3. 解：总体的数学期望为

$$E\left(X\right)=\int_0^1 x\cdot\theta\cdot x^{\theta-1}dx=\theta\int_0^1 x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}x\Big|_0^1=\frac{\theta}{\theta+1}$$

根据矩估计意义有，$\frac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$

解得参数θ的矩估计为$\theta=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

4.解 依题提出原假设$H_0:\mu=67.5,$

由于主题方差σ^2未知，$\eta=25$，在H_0成立时，统计量

$$t=\frac{\overline{X}-67.5}{S/\sqrt{25}}\sim t(25)分布$$

所以检验的拒绝域为：$|t|>t_{0.025}(24)=2.064$

计算 t 统计量值：$|t|=\left|\frac{67.5-70}{10.5/\sqrt{25}}\right|=1.19<2.064$

从而接受原假设，可以认为全体考生的平均成就为 70 分。

5.解：依题意计算：n=6 $\overline{\chi}$=71 ， $\overline{y}$=3.5，

$l_{xx}=\sum x^2-n\cdot\overline{x}^2$ =22 ； $l_{yy}=\sum y^2-n\cdot\overline{y}^2$ =5.5

$l_{xy}=\sum xy-n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}=$ —10

所以，相关系数 $r=\dfrac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}}\cdot\sqrt{l_{yy}}}=\dfrac{-10}{\sqrt{22\times5.5}}=\dfrac{-10}{11}\approx0.9091$

可见 y 与 x 之间存在及其显著的线性关系。

回归系数 b= $\dfrac{l_{xy}}{lxx}=\dfrac{-10}{22}\approx-0.455$ a= $\overline{y}-b\cdot\overline{x}$ =35.773

所以，所求的回归方程为 $\hat{y}=35.773-0.455\cdot x$

五.证明 ：对于任意的常数 C

$$E(X-C)=E[X-EX+EX-C]^2$$

$$=E\left[(X-EX)^2-2(X-EX)(EX-C)+(EX-C)^2\right]$$

$$=E(X-EX)^2+2E[(X-EX)(EX-C)]+(EX-C)^2$$

$$=D(X)+(EX-C)^2$$

由于 $(EX-C)^2\geq0$

所以 $E(X-C)^2\geq D(X)$.

2.证明 ：由于总体 X 服从 $t(n)$ 分布，有 t 分布的定义

$$X=\frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$$

其中 $Y\sim N(0,1)$ 分布，$Z\sim\chi^2(n)$ 分布，并且 Y 与 Z 相互独立，

从而， $\hat{X}=\dfrac{Y^2/1}{Z/n}$

∵ Y~ N (0 , 1)分布，$Y^2\sim\chi^2(1)$ 分布，

显然，Y^2 与 Z 相互独立,所以由 F 分布定义，X^2 服从 $F(1,n)$ 分布

整理人： 刘荣德 060404213 黄少捷 060404208 陈本钳 060404202
杨敞炜 060404218 徐小凤 0604042