五、（12 分）某生产线加工产品的合格率为0.8，已知：合格每件可获利 8 元，不合格每件亏损 2 元。（1）为保证每天的平均利润达到 30000 元，问他们要加工多少件产品？此时用切比雪夫不等式估计利润大于 29000 小于 31000 的概率有多大？（2）为保证每天的利润不低于 30000 元的概率大于0.977，问他们至少要加工多少件产品？（已知 $\Phi(2.0)=0.977$）

解第一问：设要加工n件产品，并设X_k为第k件产品的利润，则

$$X_1, X_2, \dots, X_n \; i.i.d. \sim \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \longrightarrow E(X_k)=6 \qquad D(X_k)=16$$

$$\longrightarrow E(X)=\sum_{k=1}^{n} E(X_k)=30000 \longrightarrow n=5000$$

$$\longrightarrow P\left(29000 \le \sum_{k=1}^{5000} X_k \le 31000\right)=P\left(\left|\sum_{k=1}^{5000} X_k-30000\right| \le 1000\right)$$

五、（12 分）某生产线加工产品的合格率为 0.8，已知：合格每件可获利 8 元，不合格每件亏损 2 元。（1）为保证每天的平均利润达到 30000 元，问他们要加工多少件产品？此时用切比雪夫不等式估计利润大于 29000 小于 31000 的概率有多大？（2）为保证每天的利润不低于 30000 元的概率大于 0.977，问他们至少要加工多少件产品？（已知 $\Phi(2.0)=0.977$ ）

$$P\left(29000 \le \sum_{k=1}^{5000} X_k \le 31000\right) = P\left(\left|\sum_{k=1}^{5000} X_k - 30000\right| \le 1000\right)$$

$$\ge 1 - \frac{D\left(\sum_{k=1}^{5000} X_k\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{5000 \times 16}{1000^2}$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \ i.i.d. \sim \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \longrightarrow E(X_k) = 6 \quad D(X_k) = 16$$

解第二问:

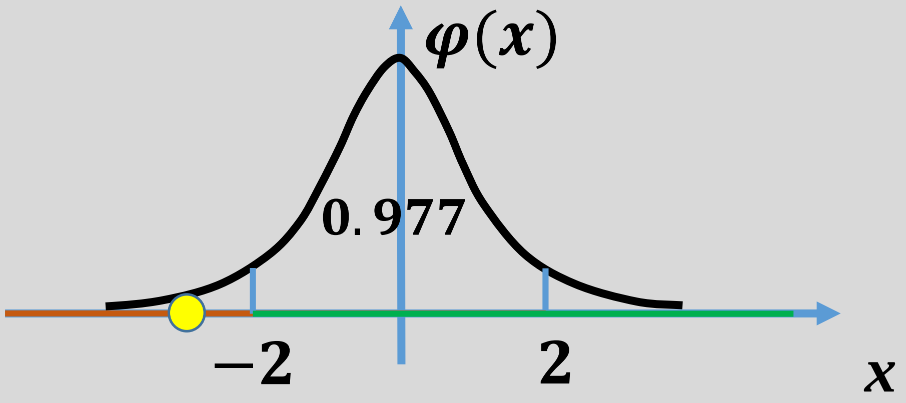
为保每天的利润不低于30000元的概率大于0.977, 设至少要加工n件产品,

由中心极限定理可知 $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N(6n, 16n)$ （近似）

$$\longrightarrow 0.977 < P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \geq 30000\right) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 6n}{4\sqrt{n}} \geq \frac{30000 - 6n}{4\sqrt{n}}\right)$$

$$0.977 < P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \geq 30000\right) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 6n}{4\sqrt{n}} \geq \frac{30000 - 6n}{4\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi(2) = 0.977$$



$$\Rightarrow \frac{30000 - 6n}{4\sqrt{n}} \leq -2$$