频 率 与 概 率

主要内容

- 频率的稳定性
- 概率的公理化定义
- 概率的基本性质

频　　率

频率的定义 设Ω为随机试验E的样本空间，事件$A\subset \Omega$.

在相同条件下将试验E重复做n次，以m表示事件A在这n次试验中发生的次数，称$\dfrac{m}{n}$为A在这n次试验中的频率，

记为$f_n(A)$，即$f_n(A)=\dfrac{m}{n}$

频 率 的 稳 定 性

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	262	0.524
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

频率有随机波动性但随 n 的增大, 频率呈现出稳定性

频　率

频率的性质

非负性　$0 \le f_n(A) \le 1$

规范性　$f(\Omega) = 1, f(\phi) = 0$

可列可加性　$A_1, \cdots A_n, \ldots$ 是可列无穷多个互不相容的事件 $\Rightarrow$ $f\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(A_k)$

概率的公理化定义

设Ω为随机试验E的样本空间，$\mathcal{F}$为Ω上的事件域，

P为定义在$\mathcal{F}$上的实值函数. 如果P满足

1) 非负性: $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \geq 0$;

2) 规范性: $P(\Omega) = 1$;

3) 可列可加性: 对 $\mathcal{F}$中任何可列无穷多个互斥的事件$A_1, A_2, \cdots$

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

则称P为$\mathcal{F}$上的概率测度，简称概率；称$(\Omega,\mathcal{F}, P)$为概率空间.

概 率 的 性 质

不可能事件概率为0　　$P(\emptyset)=0$

证明提示

$$\begin{cases} P(\Omega)=1 \\ \Omega=\Omega+\emptyset+\emptyset+\cdots+\emptyset+\cdots \\ \Omega\emptyset=\emptyset \quad \emptyset\emptyset=\emptyset \end{cases}$$

可列可加

$$A=\emptyset \Longrightarrow P(A)=0$$

$$P(A)>0 \Longrightarrow A\neq\emptyset$$

思考

$$P(A)=0 \overset{?}{\Longrightarrow} A=\emptyset$$

概 率 的 性 质

有限可加性 $A_1, \cdots A_n$ 是 $\mathcal{F}$ 中 n 个两两互不相容的事件

$$\Longrightarrow P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

证明提示

可列可加性

$$A_k \emptyset = \emptyset, k = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} A_k + \emptyset + \emptyset + \cdots$$

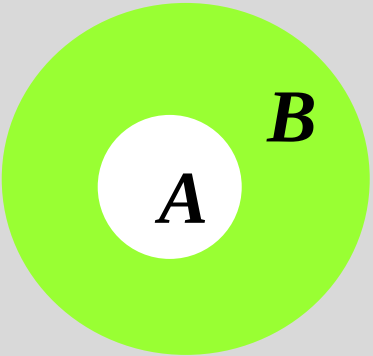
$$P(\emptyset) = 0$$

两个事件的情形 $AB = \emptyset \Longrightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$

概 率 的 性 质

可减性 $A, B \in \mathcal{F},\ A \subset B \Longrightarrow P(B-A) = P(B) - P(A) \geq 0$

证明提示 有限可加性 $\begin{cases} B = A + (B-A) \\ A(B-A) = \emptyset \end{cases}$



概 率 的 性 质

$\boxed{\text{单调性}}$ $A, B \in \mathcal{F},\quad A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

$\Longrightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1 \qquad 0 \leq P(A) \leq 1$

$\Omega = A + \bar{A} \qquad P(\Omega) = 1$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{逆事件的概率}}$ $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

概 率 的 性 质

加法公式 $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

证明: $A + B = A + (B - A)$

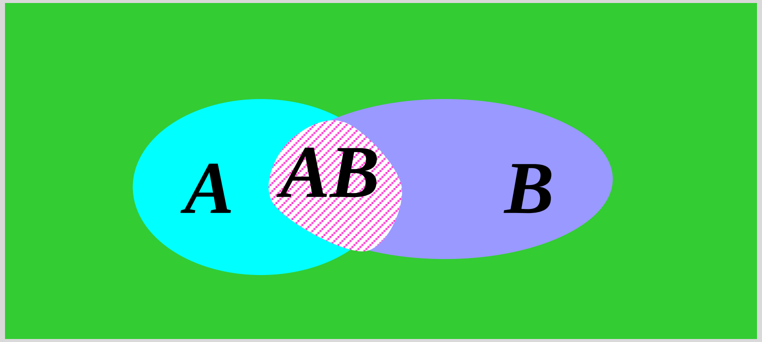
$A + B = A + (B - AB)$

$A(B - AB) = \emptyset$

$P(A+B) = P(A) + P(B - AB)$

$P(B - AB) = P(B) - P(AB)$

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



概 率 的 性 质

加法公式 $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$AB = \emptyset \Downarrow$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

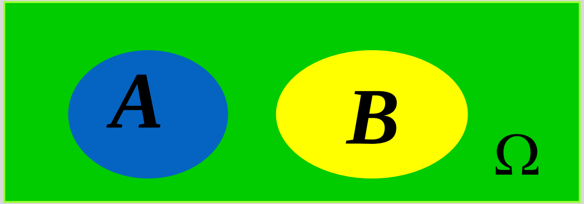
$$A_1, \cdots A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

概 率 的 性 质

例 设事件A,B的概率分别为 $\frac{1}{3}$和 $\frac{1}{2}$，求在下列三种情况下 $P(\bar{A}B)$ 的值

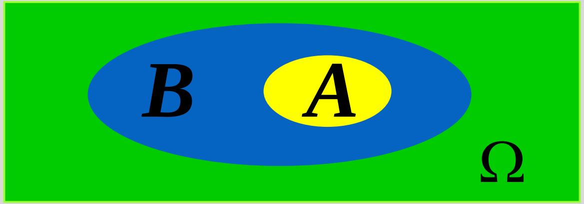
(1) A 与B互斥



$$\bar{A}B = B$$

$$P(\bar{A}B) = P(B)$$

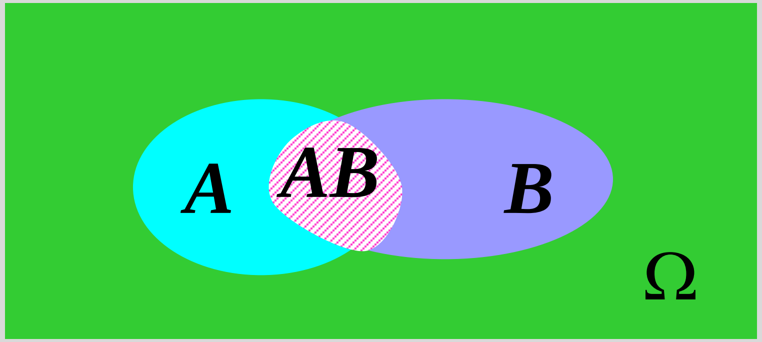
(2) $A \subset B$



$$\bar{A}B = B - A$$

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(A)$$

(3) $P(AB) = \frac{1}{8} > 0$



$$\bar{A}B = B - AB$$

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$$

小　　结

频率 → 概率的公理化定义

↓

概率的基本性质

$P(\emptyset) = 0$　有限可加性　可减性　单调性　逆事件的概率　加法公式