假设检验

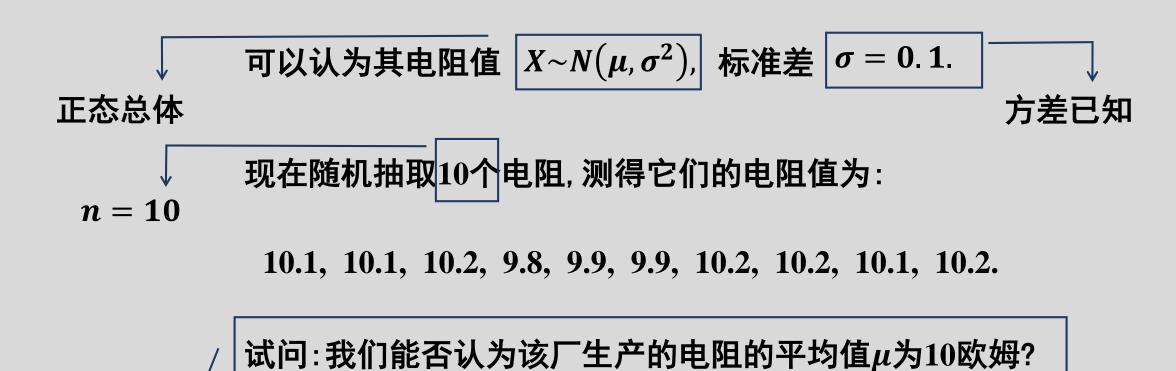
假设检验

根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确

参数假设检验 总体分布已知,检验关于未知参数的某个假设 总体分布未知时的假设检验问题 非参数假设检验

假设检验的基本思想与概念

引例:某工厂生产10欧姆的电阻.根据以往生产的电阻实际情况,



对总体均值进行检验 $\mu_0=10$

问题的建立

确定总体: 设该厂生产的电阻的测量值为X, 则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.1$.

明确任务:通过样本去检验 "X的均值 $\mu = 10$ " 是否成立.

假设: 记 H_0 : $\mu = 10$ \longleftarrow H_1 : $\mu \neq 10$

称 H_0 为原假设或零假设, H_1 为备择假设或对立假设.

解决问题的思路分析

如果原假设成立, 即 $\mu=10=\mu_0$, 那么 $|\overline{X}-\mu|=|\overline{X}-\mu_0|$ 应该比较小,

反之,如果 $|\overline{X} - \mu_0|$ 的值过大,那么可以推断原假设不成立.

由于方差 σ^2 已知,且若原假设 H_0 为真,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$
 \longrightarrow $\overline{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$ 检验统计量

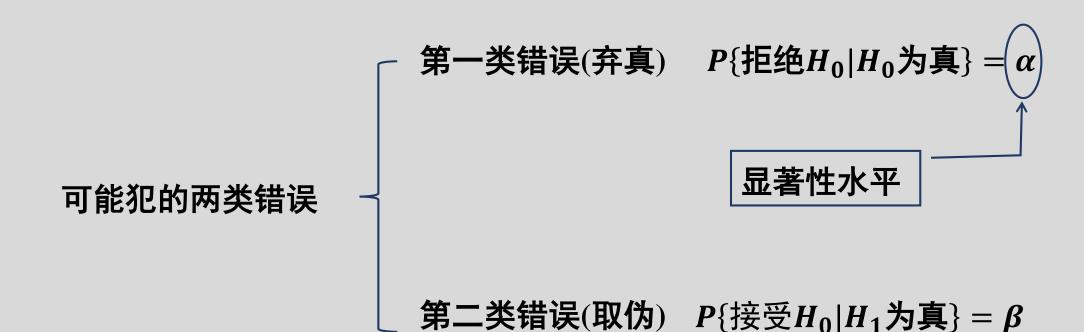
如果 $|\overline{X} - \mu_0|$ 的值过大,那么可以推断原假设不成立

$$u = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

如何求常数C, 使得

$$\left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \ge C$$
 — 拒绝原假设

解决问题的思路分析



原则: 优先控制犯第一类错误的概率

解决问题的思路分析

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

求常数C, 使得

$$C = z_{rac{lpha}{2}}$$

$$P\left\{\left|rac{\overline{X} - \mu_0}{rac{\sigma}{\sqrt{n}}}
ight| \ge C|H_0$$
为真 $\right\} = P_{H_0}\left\{\left|rac{\overline{X} - \mu_0}{rac{\sigma}{\sqrt{n}}}
ight| \ge C
ight\} = lpha$

$$\left| P_{H_0} \left\{ \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\overline{\sqrt{n}}} \right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = \alpha$$

#入观察值得
$$\left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| = \left| \frac{10.07 - 10}{\frac{0.1}{\sqrt{10}}} \right| \approx 2.26 > 1.96 = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

拒绝域

即观察值落入区域

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \ge z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

· 故拒绝原假设, 认为该厂生产的电阻均值不等于为10欧姆.

$$n = 10$$
 $\overline{x} = 10.07$ $\sigma = 0.1$ $\alpha = 0.05$ $z_{0.025} = 1.96$

基本概念与检验步骤

igoplus 提出原假设: H_0 : $\mu = \mu_0$ \longleftrightarrow H_1 : $\mu \neq \mu_0$

 H_0 为原假设或零假设, H_1 为备择假设或对立假设.

- 选定检验统计量: $\frac{X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ (σ 已知)
- 确定拒绝域: $W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \left| \frac{\overline{x} \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \ge z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$

● 取样,根据样本值是否落入拒绝域判断拒绝还是接受原假设

假设检验的基本思想

提出原假设 ====> 在原假设正确的条件下构造一个小概率事件

实际推断原理: "一个概率很小的事件在一次试验中是几乎不可能发生"

小概率事件发生 ─────────── 拒绝原假设

小概率事件没有发生 ————— 接受原假设

正态总体均值与方差的假设检验

单个正态总体均值的假设检验

方差 σ^2 已知时, 对均值 μ 的假设检验

方差 σ^2 未知时, 对均值 μ 的假设检验

对均值μ的双侧假设检验

$$H_0$$
: $\mu = \mu_0$ \longleftrightarrow H_1 : $\mu \neq \mu_0$

对均值μ的右侧假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0 \iff H_1: \mu > \mu_0$$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 & \longrightarrow & H_1: \mu > \mu_0 \\ H_0: \mu \leq \mu_0 & \longleftarrow & H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 & \longrightarrow & H_1: \mu < \mu_0 \\ H_0: \mu \ge \mu_0 & \longrightarrow & H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \iff H_1: \mu < \mu_0$$

对均值μ的左侧假设检验

正态总体均值与方差的假设检验

单个正态总体方差的假设检验

均值 μ 已知时,对方差 σ^2 的假设检验

均值 μ 未知时,对方差 σ^2 的假设检验

对方差 σ^2 的双侧假设检验

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

对方差 σ^2 的右侧假设检验

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 & \longrightarrow & H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 & \longrightarrow & H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \iff H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

对方差
$$\sigma^2$$
的左侧假设检验

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 & \longrightarrow & H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2 & \longrightarrow & H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \iff H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$