随机变量的数字特征

数学期望

方差

协方差与相关系数

数 学 期 望

数学期望的概念

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望

数 学 期 望

引例1 设某射击手在同样的条件下, 瞄准靶子相继射击90次,

(命中的环数是一个随机变量). 射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问: 该射手平均命中靶多少环?

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

解: 平均射中环数 $=\dfrac{0\times 2+1\times 13+2\times 15+3\times 10+4\times 20+5\times 30}{90}$

$$=\sum_{k=0}^{5} k\frac{n_k}{n} = 3.37$$

“平均射中环数”等于射中环数的可能值与其概率之积的累加

$$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^{5} k \boxed{\frac{n_k}{n}}$$

随机波动

频率随机波动

“平均射中环数”的稳定值 = ?

$$\sum_{k=0}^{5} k \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{5} k\, p_k$$

随机波动 → 稳定值

离散型随机变量的数学期望

引例2 设甲乙二人赌技相同，各出赌金100元，约定先胜三局者为胜，可以取得全部200元。现在甲胜2局乙胜1局的情形下赌局中止，问赌本该如何分？

解：如果继续赌局, 设 A_i:甲在第i局胜, 则 $P(A_i)=\frac{1}{2}, i=1,2.$

甲胜的概率 $p=P(A_1+\bar{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

设甲得到的数目为X

X	200	0
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

甲“期望”得到的数目为 $200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150$

离散型随机变量的数学期望

定义　设离散型随机变量X的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则当 $\sum_{n\geq 1}|x_n|\, p_n < \infty$ 时，称X 的数学期望存在，并称 $\sum_{n\geq 1} x_n\, p_n$ 为X 的数学期望，简称期望，记为$E(X)$，即 $E(X) = \sum_{n\geq 1} x_n\, p_n$.

如果 $\sum_{n\geq 1}|x_n|\, p_n = \infty$，则称$X$ 的数学期望不存在.

离散型随机变量的数学期望

- $E(X)$是一个实数, 而非变量, 它是一种加权平均, 与一般的平均值不同, 它从本质上体现了随机变量X, 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

"平均射中环数" $= \sum_{k=0}^{5} k\, p_k$

X	200	0
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

甲"期望"得到的数目为 $200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150$

当 $\sum_{n\geq 1}|x_n|\,p_n<\infty$ 时，X 的数学期望存在

- 级数的绝对收敛性保证了级数$\sum_{n\geq 1}x_n\,p_n$不随级数各项次序的改变而改变，之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X取可能值的平均值，它不应随可能值的排列次序而改变.

离散型随机变量的数学期望

例1. 设随机变量X 取 $x_k=(-1)^k\frac{2^k}{k}$ 的概率为 $p_k=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\ldots.$

则 $$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}=-\ln 2$$

但 $$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$ 发散

故X的数学期望不存在。

例2　计算二项分布的数学期望.

解: 设 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k}$

$$=\sum_{k=0}^{n} k\,\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$$

$$[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$=np\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,p^{k-1}\,(1-p)^{n-k}}$$

$$=np$$

若 $X \sim B(n, p)$，则 $E(X) = np$

特例 若$Y \sim B(1, p)$，即

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

则 $E(Y) = p = P(Y = 1)$

离散型随机变量的数学期望

例3　计算泊松分布的数学期望.

解：设 $X \sim P(\lambda)$，则

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}=\lambda$$

$$e^{\lambda}$$

连续型随机变量的数学期望

定义 设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$. 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

则称X的数学期望存在，并称 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ 为X的数学期望，

简称期望，记为$E(X)$，即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$，则称$X$的数学期望不存在.

连续型随机变量的数学期望

例4　计算均匀分布的数学期望.

解：设$X \sim U(a, b)$, 则

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$$

连续型随机变量的数学期望

例5　计算指数分布的数学期望.

解：设 $X \sim E(\lambda)$，则

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

连续型随机变量的数学期望

例6　计算正态分布的数学期望.

解： 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x\in\mathbb{R}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$dx=\sigma dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\sigma t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t}+\mu\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t}=\mu$$

0

连续型随机变量的数学期望

例7　若随机变量X的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},-\infty<x<\infty$

问随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是否存在。

解：$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$　　所以$E(X)=0.$　错！

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|p(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\infty}=\infty$$

所以$E(X)$不存在！

小　　结

数学期望的概念

离散型随机变量的数学期望

$$\sum_{n\geq 1} |x_n|\, p_n < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$E(X) = \sum_{n\geq 1} x_n\, p_n$$

连续型随机变量的数学期望

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

数 学 期 望

设X 是随机变量，$g(x)$ 为(分段)连续的函数，求 $Y = g(X)$的数学期望

随机变量函数的数学期望 → 一维随机变量函数的期望

随机变量函数的数学期望 → 二维随机变量函数的期望

设 (X, Y)是一个二维随机变量，$g(x,y)$ 为一个(分块)连续的二元函数，

求 $Z = g(X,Y)$ 的数学期望

一维随机变量函数的数学期望

定理1. 设X 是随机变量， $g(x)$ 为(分段)连续或(分段)单调函数,令 $Y = g(X)$,

(1) 若离散型随机变量X的分布律为 $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \ldots$

则当$\sum_{k\geq 1} |g(x_k)|\, p_k < \infty$ 时，$Y = g(X)$ 的数学期望存在，且有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k\geq 1} g(x_k)\, p_k\, .$$

一维随机变量函数的数学期望

(2) 设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$, 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

则 $Y = g(X)$ 的数学期望存在，且有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

例1. 已知随机变量$X\sim N(0,1)$, 求$\mathrm{E}(X^2), E(X^3), E(X^4)$.

解：设$X\sim N(0,1)$, 则 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \quad = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\,\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0} \dashrightarrow = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

例1. 已知随机变量$X\sim N(0,1)$, 求$\mathrm{E}\left(X^2\right), E\left(X^3\right), E\left(X^4\right)$.

$$E\left(X^3\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 0$$

奇函数在对称区间上的积分等于0

$$E\left(X^4\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^3\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=3\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 3E\left(X^2\right)=3$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

例2 设随机变量X的概率密度 $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ 求 $E[\min(|X|,1)]$.

解: $$E[\min(|X|,1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \min(|x|,1)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{2x}{\pi(1+x^2)}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1+x^2)}dx \quad = \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{1}{2}$$

一维随机变量函数的数学期望

- **积分转化法** 设随机变量X的概率密度为$f_X(x)$, $g(x)$是(分段)连续或(分段)单调函数, $Y=g(X)$, 如果对任何有界连续函数$h(x)$, 成立

$$\int_{-\infty}^{\infty} h[g(x)]f_X(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} h(y)p(y)dy$$

$E(h[g(X)])$

(其中$-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$), 则$Y=g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} P(y), & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

一维随机变量函数的数学期望

$$E(h[g(X)]) = \int_{-\infty}^{\infty} h[g(x)]f_X(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} h(y)p(y)dy + \int_{(-\infty,\infty)/[\alpha,\beta]} h(y)0dy$$

$$Y = g(X)$$

$$\boxed{y = g(x)}$$

$$E[h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)dy = \int_{(-\infty,\infty)/[\alpha,\beta]} h(y)f_Y(y)dy + \int_{\alpha}^{\beta} h(y)f_Y(y)dy$$

$$\xrightarrow{\text{待证}} f_Y(y) = \begin{cases} P(y), & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

二维随机变量函数的数学期望

(1) 设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots,$$

再设$g(x, y)$ 为(分块)连续函数，令 $Z = g(X, Y)$，则当

$\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1}\left|g(x_i, y_j)\right| p_{ij} < \infty$ 时，Z的数学期望存在，

且有 $E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} g(x_i, y_j)\, p_{ij}$.

二维随机变量函数的数学期望

(2) 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为$f(x, y)$,

再设$g(x, y)$ 为(分块)连续函数,令 $Z = g(X,Y)$，若

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|f(x,y)\,\mathrm{d}x < \infty$$

则Z的数学期望存在，且有

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例3. 设随机变量X, Y相互独立，且均服从标准正态分布, 求 $E(\sqrt{X^2+Y^2})$

解： $$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$
$$dxdy = \rho d\rho d\theta$$

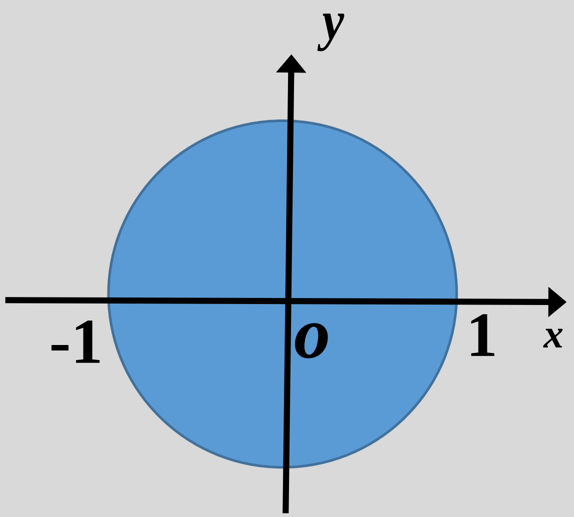
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\mathrm{d}\rho d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2}}\mathrm{d}\rho d\theta = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

二维随机变量函数的数学期望

例4. 设(X, Y)服从单位圆$D = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \leq 1\}$上的均匀分布，试求$E(X)$

解：$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{x}{\pi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

记 $g(X,Y) = X$，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

记 $g(X,Y) = h(X)$，则

$$E\big(h(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f_X(x)dx$$

数 学 期 望

随机变量函数的数学期望 （特殊情形）

（特殊情形）一维随机变量函数的期望

二维随机变量函数的期望（一般情形）

离散型随机变量函数的期望

连续型随机变量函数的期望

数学期望的性质

1. 设随机变量X 的数学期望存在, C 是常数， 则CX的期望也存在，且

$$E(CX) = CE(X)$$

2. 设$n \geq 2, X_1, X_2, \ldots X_n$ 是数学期望存在的随机变量，则有

$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的数学期望也存在，且

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$

证明：设二维连续型随机变量 (X_1,X_2) 的联合密度为$f(x,y)$，则

$$E(X_1+X_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}y\right)dx+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X_1}(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yf_{X_2}(y)dy=E(X_1)+E(X_2)$$

数学期望的性质

3. 设随机变量X, Y的数学期望存在，若$X \leq Y$，则有 $E(X) \leq E(Y)$.

4. 设 a, b 是常数，X 是一个随机变量，

   若$a \leq X \leq b$，则X的数学期望存在，且 $a \leq E(X) \leq b$.

5. 设$n \geq 2, X_1, X_2, \dots, X_n$ 是随机变量，其数学期望均存在.

   若$X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立，则乘积$X_1 X_2 \cdots X_n$的数学期望存在，且

$$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n).$$

X_1, X_2 相互独立且数学期望存在 $\Longrightarrow$ $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$

证明：设随机变量 X_1, X_2 相互独立，其联合概率密度为 $f_{X_1}(x)f_{X_2}(y)$

$$E(X_1X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X_1}(x)f_{X_2}(y)\mathrm{d}x\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X_1}(x)d\,x \int_{-\infty}^{\infty} yf_{X_2}(y)dy = E(X_1)E(X_2)$$

数学期望的性质

6. 设随机变量X的数学期望存在，则 $|E(X)| \leq E(|X|)$.

证明：因为 $-|X| \leq X \leq |X|$, 由期望的单调性有

$$E(-|X|) \leq E(X) \leq E(|X|),$$

即： $$-E(|X|) \leq E(X) \leq E(|X|),$$

故： $$|E(X)| \leq E(|X|)$$

数学期望的性质

7. (马尔可夫不等式)设随机变量X的数学期望存在，则对任何 $c > 0$,

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{E(|X|)}{c}$$

分析： $P(|X| \geq c) \leq \dfrac{E(|X|)}{c} \Longleftrightarrow P\left(\dfrac{|X|}{c} \geq 1\right) \leq E\left(\dfrac{|X|}{c}\right)$

$$P(|X| \geq c) \leq \frac{E(|X|)}{c}$$

证： 令随机变量 $Y = \begin{cases} 1, & \dfrac{|X|}{c} \geq 1 \\ 0, & 0 \leq \dfrac{|X|}{c} < 1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \frac{|X|}{c} \geq Y \Longrightarrow E\left(\frac{|X|}{c}\right) \geq E(Y) = P(Y = 1) = P\left(\frac{|X|}{c} \geq 1\right)$$

$$\Longrightarrow P(|X| \geq c) \leq \frac{E(|X|)}{c}$$

数学期望的性质

8. 若 $E(|X|)=0$，则 $P(X=0)=1.$

证：$P(X=0)=P(|X|=0)=1-P(|X|>0)$

$$P(|X|>0)=P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\{|X|\geq\frac{1}{n}\right\}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{|X|\geq\frac{1}{n}\right\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(|X|)}{\frac{1}{n}}=0$$

$$P(|X|\geq c)\leq\frac{E(|X|)}{c}$$

$$\Longrightarrow P(X=0)=1$$

$$E(X_1+\cdots+X_n)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)$$

例1　计算二项分布的数学期望.

解：设 $X\sim B(n,p)$. 在n重伯努利试验中，令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{若事件}A\text{在第}k\text{次试验中发生}\\ 0, & \text{若事件}A\text{在第}k\text{次试验中不发生}\end{cases}\qquad k=1,2,\ldots,n$$

$$\Longrightarrow E(X_k)=P(A)=p,\ X=\sum_{k=1}^{n}X_k \Longrightarrow E(X)=np$$

数学期望的性质

例2　设有n 把看上去相同的钥匙，其中一把能将把门上的锁打开，用它们去试开门上的锁，设取到每只钥匙是等可能的，若每把钥匙试开一次后除去，使用下面两种方法求试开次数X的数学期望（1）写出X的分布律；（2）不写出X的分布律.

数学期望的性质

解法一：写出试开次数X的分布律，求X的数学期望

设A_k表示第k次取到的钥匙能打开门上的锁，$k=1,\dots,n$, 则

$$P(X=k)=P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\dots\overline{A}_{k-1}A_k\right)$$

$$=P\left(A_k|\overline{A}_1\overline{A}_2\dots\overline{A}_{k-1}\right)P\left(\overline{A}_{k-1}|\overline{A}_1\overline{A}_2\dots\overline{A}_{k-2}\right)\dots p\left(\overline{A}_2|\overline{A}_1\right)p\left(\overline{A}_1\right)$$

$$=\frac{1}{n-k+1}\cdot\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2}$$

数学期望的性质

解法二：不写出试开次数X的分布律，求X的数学期望

令 $$X_k = \begin{cases} 1, & \text{前}k\text{次都没有打开门上的锁} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\Longrightarrow X = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k$$

数学期望的性质

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{前}k\text{次都没有打开门上的锁} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$E(X_k) = P(X_k = 1) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_k) = P(\overline{A}_k|\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{k-1}) \ldots p(\overline{A}_2|\overline{A}_1)p(\overline{A}_1)$$

$$= \frac{n-k}{n-k+1} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-k}{n}$$

$$E(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

数学期望的计算方法

利用概率分布求数学期望

- 随机变量的数学期望的定义
- 随机变量函数的数学期望

利用性质求数学期望

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

数 学 期 望

数学期望的概念
- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望

随机变量函数的数学期望
- 一维随机变量函数的期望
- 二维随机变量函数的期望

数学期望的性质