武汉大学 2021-2022 学年第一学期

《高等数学 B1》期中考试试卷

考试时间：9:50-12:10

一、 求下列极限 (每小题 6 分小题, 共 12 分)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.　　2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

二、 (8 分)设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\arctan^2 x}}=A$（其中 A 为正实数），求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x-\sin x}$.

三、 (8 分)设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x},\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}$.

四、 (8 分)设函数 $y=f(\varphi(x)+u)$，其中 $u=g(x)$ 由方程 $y+\mathrm{e}^y=x$ 确定，且 $f(x),\varphi(x)$ 均有二阶导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}$.

五、 (8 分)函数 $f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$ 有 2 个零点，求 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围.

六、 (8 分)设函数 $f(x)=\begin{cases} a(1+x)^x, & x>0 \\ \ln(\mathrm{e}^{2x}+bx)+3, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a,b 及导函数 $f'(x)$.

七、 (8 分)求函数 $y=\arctan x$ 的 n 阶麦克劳林公式（带佩亚诺型余项）.

八、 (8 分)设 $x_1=1,\ x_{n+1}=1-\mathrm{e}^{-x_n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$，

1) 试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n^2}$.

九、 (8 分)求函数 $y=\dfrac{x^3}{(1-x)^2}$ 的单调区间，凹凸区间，极值点，拐点.

十、 (8 分)计算如下不定积分：1) $\displaystyle\int\frac{x^2-6x+7}{x^2-8x+15}\mathrm{d}\,x$；　2) $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}\,x$.

十一、 (8 分)若函数 $f(x)=\begin{cases} \ln(x+\sqrt{1+x^2}), & x>0 \\ x\sqrt{x^2+1}, & x\le 0 \end{cases}$，求不定积分 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

十二、 (8 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=f(1)=f'(1)=0$，证明：

1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$;

2) 存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $2021f''(\eta)+\eta f'''(\eta)=0$.