正态总体均值与方差的区间估计

单个正态总体均值的区间估计

- 方差σ^2已知时，对均值μ的区间估计
- 方差σ^2未知时，对均值μ的区间估计

单个正态总体方差的区间估计

- 均值μ已知时，对方差σ^2的区间估计
- 均值μ未知时，对方差σ^2的区间估计

方差σ^2已知时, 对均值μ的区间估计

$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2已知, 求均值μ的区间估计

- 选取枢轴量 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

- 对给定的置信度$1-\alpha$,根据正态分布的分位点的定义, 有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

- 将不等式变形整理得

$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

故未知参数μ的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\qquad \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

方差σ^2未知时, 对均值μ的区间估计

$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2未知, 求均值μ的区间估计

- 选取枢轴量 $$\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- 对给定的置信度$1-\alpha$,根据t分布的分位点的定义, 有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

- 将不等式变形整理得

$$P\left\{\bar{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \mu < \bar{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

故未知参数μ的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

方差σ^2未知时, 对均值μ的区间估计

例1. 初生婴儿的体重X近似服从 $N(\mu,\sigma^2)$, 从某地区随机抽取$\boxed{12}$名新生儿,

测得 $\bar{x}=3056.676$克, $s=359.36$克,

$n=12$

求平均体重μ的置信度为$\boxed{95\%}$的置信区间.

$\alpha=0.05$

解: 方差未知时，未知参数μ的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

查t分布表有 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(11)=2.201$

故所求平均体重u的置信度为95%的置信区间为 (2818.19 , 3295.15)

均值μ已知时, 对方差σ^2的区间估计

$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，μ已知, 求σ^2的区间估计

$X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，即 $\dfrac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$，$i = 1, 2, \ldots, n$

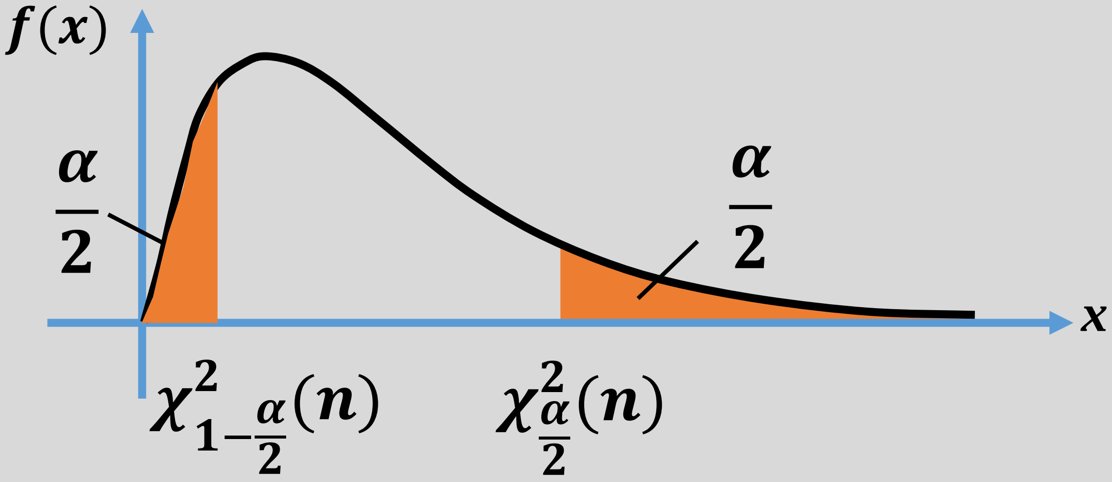
- 选取枢轴量 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$,

对给定的α, 要求常数a, b,使得

$$P\left\{a < \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} < b\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{a < \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma} < b\right\} = 1 - \alpha$$

- 对给定的置信度$1-\alpha$,根据χ^2分布的分位点的定义, 有



$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) < \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = 1 - \alpha$$

均值μ已知时，对方差σ^2的区间估计

- 将不等式变形，整理得σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$$

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) < \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = 1-\alpha$$

均值μ未知时, 对方差σ^2的区间估计

$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，μ未知, 求σ^2的区间估计

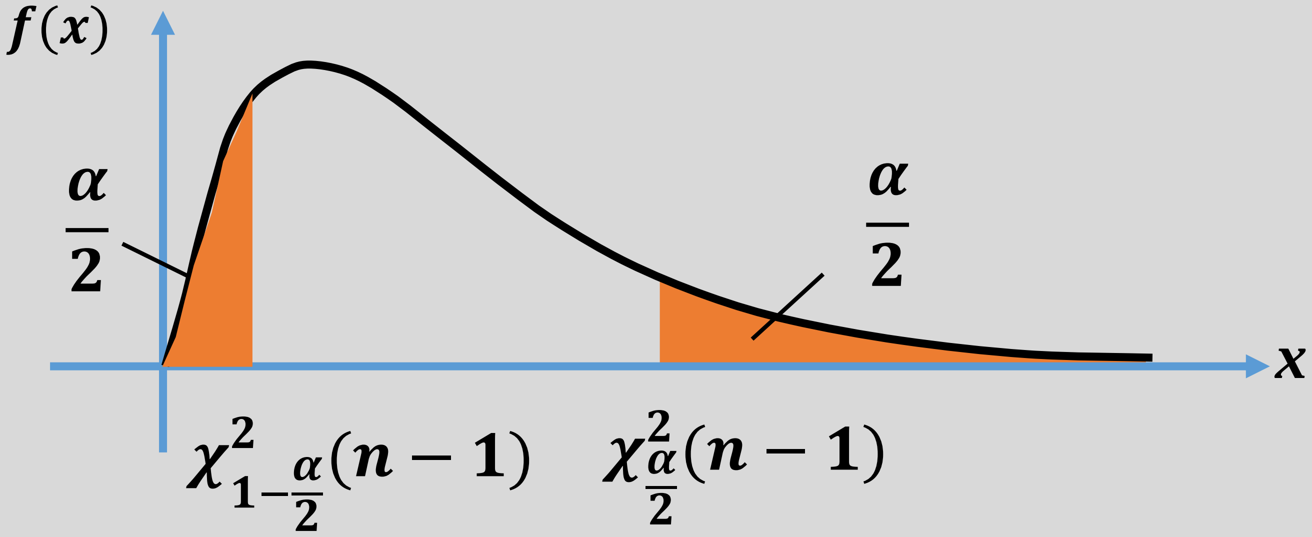
- 选取枢轴量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

对给定的α,　要求常数a, b,使得

$$P\left\{a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b\right\} = 1-\alpha$$

- 对给定的置信度$1-\alpha$,根据χ^2分布的分位点的定义，有



$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

均值μ未知时，对方差σ^2的区间估计

- 将不等式变形，整理得σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) < \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = 1-\alpha$$

均值μ未知时，对方差σ^2的区间估计

例2：设高速公路上汽车的速度服从正态分布，现对汽车的速度独立

地作了$\boxed{5次}$测试，求得这5次测试值的方差 $s^2 = 0.09\ (m/s)^2$，

$n = 5$

求汽车速度的方差σ^2的置信度为$\boxed{0.9}$的置信区间.

$\alpha = 0.1$

解：均值μ未知时，σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

查表得 $\chi^2_{0.05}(4) = 9.4877$ $\chi^2_{0.95}(4) = 0.7107$

带入已知条件，得所求方差σ^2的置信度为0.9的置信区间为 (0.038, 0.506)

两个正态总体下$\mu_1-\mu_2$的的区间估计

设$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$的样本，$Y_1,Y_2,\dots,Y_m$ 是来自正态总体$X\sim N(\mu_2,\sigma^2)$的样本，且两样本相互独立，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,\qquad S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$$

$$\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}Y_k,\qquad S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(Y_k-\bar{Y})^2$$

设μ_1,μ_2,σ^2未知, 求$\mu_1-\mu_2$的区间估计

$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知，求$\mu_1 - \mu_2$的区间估计

- 选取枢轴量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2) \quad \text{其中} \quad S_w^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

- 对给定的置信度$1-\alpha$，根据t分布的分位点的定义，有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\right\} = 1 - \alpha$$

设μ_1, μ_2, σ^2未知, 求$\mu_1-\mu_2$的区间估计

- 将不等式变形, 整理得$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2),\qquad \bar{X}-\bar{Y}+S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\right)$$

两个正态总体下σ_1^2/σ_2^2的的区间估计

设$X_1, X_2, \dots, X_m$ 是来自正态总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 是

来自正态总体$X \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立，记

$$\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k, \qquad S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(X_k - \bar{X})^2$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k, \qquad S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \bar{Y})^2$$

设μ_1, μ_2, 未知, 求σ_1^2/σ_2^2的区间估计

μ_1, μ_2, 未知, 求σ_1^2/σ_2^2的区间估计

注意到 $\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1)$ $\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$

- 选取枢轴量 $F = \dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$

- 对给定的置信度$1-\alpha$,根据F分布的分位点的定义, 有

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)\right\} = 1-\alpha$$

μ_1, μ_2, 未知, 求σ_1^2/σ_2^2的区间估计

- 将不等式变形, 整理得σ_1^2/σ_2^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)}, \quad \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)}\right)$$