武汉大学 2017-2018 第一学期高等数学 B1 期末试题 A

1、（9 分）求函数极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$.

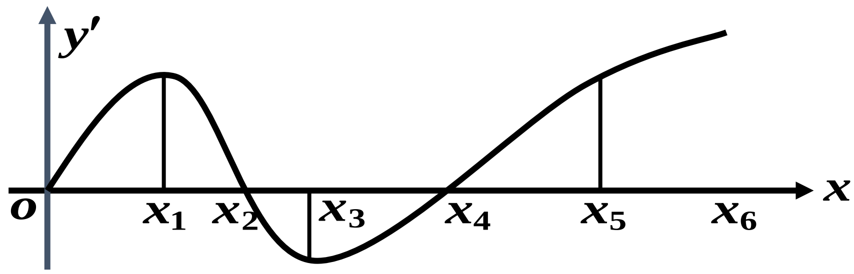
2、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3、（9 分）已知 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{\sin x}\cos^2 tdt=0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

4、（8 分）设 $a_n\neq 0$，试用“$\varepsilon-N$”语言证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$.

5、（9 分）设 $a>0$，求 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin xdx$.

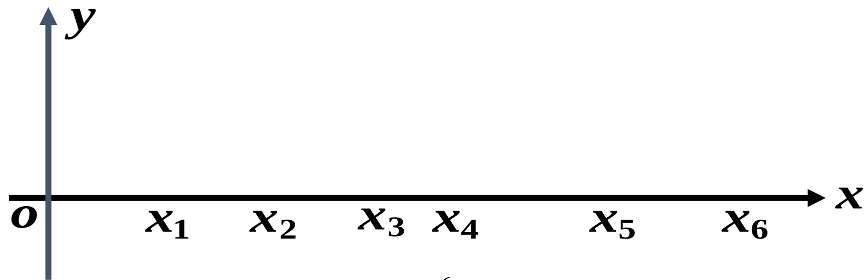
6、（9 分）根据以下导函数 $y'=f'(x)$ 的图像：



填写关于函数 $f(x)$ 的表格（其中 $f(0)=0$）：

单增区间		上凸区间	
单减区间		下凸区间	
极大值点		极小值点	

画出函数 $y=f(x)$ 的图像：



7、（9 分）确定常数 a,b，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(e^{2x}-1)&,\ x<0\\a+\sin bx&,\ x\geq 0\end{cases}$ 处处可导.

8、（9 分）求由 $\arctan x\leq y\leq x, 0\leq x\leq 1$ 所确定的平面区域的面积.

9、（8 分）设 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^2+C$，求 $\int xf(1-x^2)\,\mathrm{d}x$.

10、(1) (4 分) 求微分方程 $y''' - 2y'' + y' = 0$ 的通解；

(2) (4 分) 写出微分方程 $y'' + y = \sin x - \cos 2x$ 的特解形式.

11、（8 分）求由曲线 $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕直线 $x = -1$ 旋转而成的旋转体的体积.

12、（5 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t = a\int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x$$ （其中 $a > 1$ 为定常数）.

证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f(\xi) = 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

武汉大学2017-2018第一学期高等数学B1期末试题A解答

1、（9分）求极限$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\dfrac{\pi}{6})}$.

解　方法一：原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x(\tan^2 x-3)}{\cos(x+\dfrac{\pi}{6})}=\sqrt{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^2 x-3}{\cos(x+\dfrac{\pi}{6})}$

$$=\sqrt{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\tan x\sec^2 x}{-\sin(x+\dfrac{\pi}{6})}=-24$$

方法二：原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})}{\cos(x+\dfrac{\pi}{6})}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x(\tan x+\sqrt{3})\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x-\sqrt{3}}{\cos(x+\dfrac{\pi}{6})}$$

$$=6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 x}{-\sin(x+\dfrac{\pi}{6})}=6\cdot\frac{(-1)}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}\quad=-24$$

方法三：原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})}{\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x(\tan x+\sqrt{3})\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x-\sqrt{3}}{\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)}$$

$$=6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\dfrac{\pi}{3})}{\cos x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)}=6\cdot\frac{(-1)}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}\quad=-24$$　　9分

2、（9分）设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$所确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(\cot\dfrac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{t}{2}}{a(1-\cos t)}=\dfrac{-\csc^2\dfrac{t}{2}}{2a(1-\cos t)}$　　9分

3、（9分）已知$\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{\sin x}\cos^2 t dt=0$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解：方程两边关于x求导得　$e^{y^2}y'+\cos^2\sin x\cdot\cos x=0\Rightarrow y'=-\dfrac{\cos^2\sin x\cdot\cos x}{e^{y^2}}$　　9分

4、（8分）设$a_n\neq 0$，试用“$\varepsilon-N$”语言证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$.

解：（充分性）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$.

$\forall\varepsilon>0$. 根据无穷大的定义，对于 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$\left|\dfrac{1}{a_n}\right|>M=\dfrac{1}{\varepsilon}$， 即 $|a_n|<\varepsilon$， 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（必有性）设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$， 且 $a_n\neq 0$.

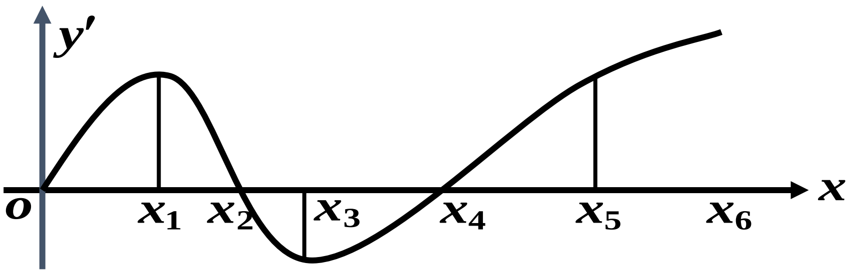
$\forall M>0$. 根据无穷小的定义，对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$|a_n|<\varepsilon=\dfrac{1}{M}$， 即 $\left|\dfrac{1}{a_n}\right|>M$， 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$.

5、（9 分）设 $a>0$，求 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x dx$.

解：原式 $=\left[e^{-ax}\left(-\dfrac{1}{1+a^2}\cos x-\dfrac{a}{1+a^2}\sin x\right)\right]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{1+a^2}$ 　　　　9 分

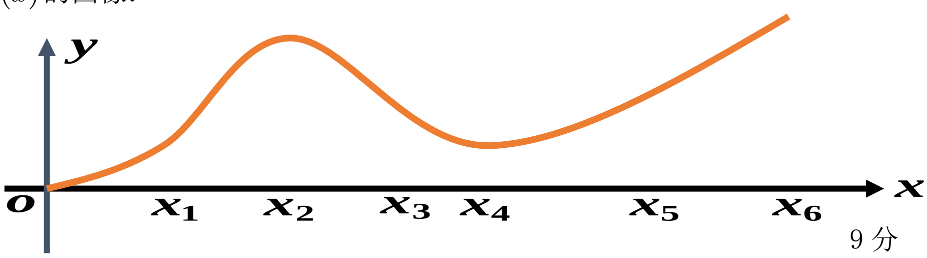
6、（9 分）根据以下导函数 $y=f'(x)$ 的图像：



填写关于函数 $f(x)$ 的表格（其中 $f(0)=0$）：

单增区间	$(0,x_2),(x_4,x_6)$	**上凸区间**	(x_1,x_3)
单减区间	(x_2,x_4)	**下凸区间**	$(0,x_1),(x_3,x_6)$
极大值点	x_2	**极小值点**	x_4

画出函数 $y=f(x)$ 的图像：



9 分

7、（9 分）确定常数 a,b，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(e^{2x}-1) & ,\ x<0\\ a+\sin bx & ,\ x\geq 0\end{cases}$ 处处可导.

解：要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 首先须在 $x=0$ 连续即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=a$

$$即a=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2e^{2x}}{1}=2，要使f(x)在x=0可导,须f'_-(0)=f'_+(0)$$

$$即f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}(e^x-1)-2}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1-2x}{x^2}=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{2+\sin bx-2}{x}=b$$

则$a=b=2$时,$f(x)$在$x=0$可导,从而处处可导。 9 分

8、（9 分）求由$\arctan x\le y\le x,0\le x\le 1$所确定的区域的面积。

解：$s=\int_0^1(x-\arctan x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\arctan x\right)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$ 9 分

9、（8 分）设$\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^2+C$，求$\int xf(1-x^2)\,\mathrm{d}x$.

解：令$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$，则$\int xf(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\,\mathrm{d}(x^2)$

$$=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\,\mathrm{d}(1-x^2)\qquad=-\frac{1}{2}F(1-x^2)=x^2-\frac{1}{2}x^4+C$$

10、(1) (4 分) 求微分方程$y'''-2y''+y'=0$的通解；

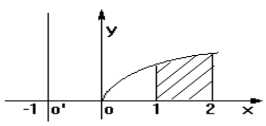
(2) (4 分) 写出微分方程$y''+y=\sin x-\cos 2x$的特解形式.

解 (1) 特征方程为$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda=0$，因此特征根为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$，因此方程的通解为$y=C_1+C_2e^x+C_3xe^x$ 4 分

(2) 特征方程为$\lambda^2+1=0$，特征根为$\lambda_{1,2}=\pm i$，所以非齐次方程的特解形式为$y=x(A\cos x+B\sin x)+(C\cos 2x+D\sin 2x)$ 4 分

11、（8 分）求由曲线$y=\sqrt{x},x=1,x=2$及x轴所围成的平面图形绕直线$x=-1$旋转而成的旋转体的体积。

解 建立新的坐标系，原点o'在原坐标的坐标点$o'(-1,0)$，则由$y=\sqrt{x'-1},x'=2,x'=3$及x轴所围成的区域绕$x'=0$旋转而成体积。



$$V_{x=-1}=2\pi\int_2^3 xydx=2\pi\int_2^3 x\sqrt{x-1}dx\qquad 设t=\sqrt{x-1}$$

$$=2\pi\int_1^{\sqrt2}2t^2(t^2+1)dt=4\pi\int_1^{\sqrt2}(t^4+t^2)dt$$

$$=4\pi\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^{\sqrt2}=\frac{8}{15}\pi(11\sqrt2-4).$$ 8 分

12、（5 分）设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=a\int_0^{\frac{1}{a}}e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$（其

中 $a>1$ 为定常数). 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=2\xi\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

证明： 令 $F(x)=e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$，则 $F'(x)=e^{1-x^2}[-2x\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)+f(x)]$

且由积分中值定理有 $F(1)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,x$

$$=e^{1-y^2}\left(\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)=f(y)\quad y\in[0,\frac{1}{3}]$$

由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(y,1)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$

即 $f(\xi)=2\xi\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 　　　　5 分