参数估计

电池的寿命(总体)$X \sim E(\lambda)$

参数估计 →

λ未知，估计参数λ

参数估计
- 点估计
  - 矩估计
  - 极大似然估计
- 区间估计

点 估 计

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$，未知参数$\theta \in \Theta$，$X_1, X_2, \dots, X_n$

是来自总体X的样本， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是样本观察值. 选取一个

统计量 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$，以数值 $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 作为

真值θ_0的估计值, 则称 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是θ_0的估计量.

若$\{X_n\}$独立同分布，$E(X_n)=\mu$，$n=1,2,\ldots,$ 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mu$

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体X的样本，则 $X_1^k,X_2^k,\ldots,X_n^k$ 相互独立，

且与X^k具有相同的分布，当$E\left(X^k\right)=\mu_k$存在时，由辛钦大数定律，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k$$

则当样本容量n充分大时 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \approx \mu_k$

若$\{X_n\}$独立同分布，$E(X_n)=\mu$，$n=1,2,\ldots,$ 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$

$$\left.\begin{array}{l} B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2 \\ \\ \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} E(X), \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \xrightarrow{P} E\left(X^2\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow B_2 \xrightarrow{P} E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=D(X)$$

$$\Longrightarrow S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n}{n-1}B_2 \xrightarrow{P} D(X)$$

矩 估 计 法

引例　设总体X在区间 $[a, b]$上服从均匀分布，其中 a, b未知，

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体X的样本，试求a, b的估计量.

分析　　已知 $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = \mu_1(a, b)$

$$E\left(X^2\right) = D(X) + E(X)^2 = \frac{(a-b)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \mu_2(a, b)$$

由辛钦大数定律，$\quad \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \dfrac{a+b}{2} \qquad \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \approx \dfrac{(a-b)^2}{12} + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \approx \frac{a+b}{2} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \approx \frac{(a-b)^2}{12}+(\frac{a+b}{2})^2$$

解得 $a \approx \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ $\quad b \approx \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

记 $\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ $\quad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

矩 估 计 法

设总体X的分布函数为$F(x;\ \theta_1,\ldots,\theta_k)$，$\theta_1,\ldots,\theta_k$为$k$个未知参数,

$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体X的样本，$x_1,x_2,\ldots,x_n$是样本观察值.

设总体X的矩$\mathrm{E}\left(X^k\right)$存在.

- 计算出各阶矩 $\mathrm{E}(X),\mathrm{E}\left(X^2\right),\ldots,\mathrm{E}\left(X^k\right)$:

$$\mathrm{E}\left(X^i\right)=\mu_i(\theta_1,\ldots,\theta_k)\quad i=1,2,\ldots,k$$

矩 估 计 法

- 近似替换，列方程组并求解

$$\begin{cases} \mu_1(\theta_1,\ldots,\theta_k)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \\ \mu_2(\theta_1,\ldots,\theta_k)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \\ \vdots \\ \mu_k(\theta_1,\ldots,\theta_k)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \theta_i=h_i(X_1,\ldots,X_n) \\ i=1,2,\ldots,k \end{matrix}$$

未知参数θ_i的估计量：$\hat{\theta}_i=h_i(X_1,\ldots,X_n)\quad i=1,2,\ldots,k$

矩 估 计 法

例1　设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2存在但未知，

$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体X的样本，求μ,σ^2的矩估计量.

解： 已知 $E(X)=\mu$　　$E\left(X^2\right)=D(X)+E(X)^2=\sigma^2+\mu^2$

建立方程组 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\mu$　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sigma^2+\mu^2$

求解得矩估计量 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

矩 估 计 法

例2　设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$ $X_1,\dots,X_n$是一个样本，

求未知参数θ的一个矩估计量.

解法一：　$E(X)=0$　　$E(X^2)=D(X)+E(X)^2=\dfrac{\theta^2}{3}$

$$\Longrightarrow \widetilde{\theta^2}=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \Longrightarrow \tilde{\theta}=\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

矩 估 计 法

例2　设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$ $X_1,\dots,X_n$是一个样本,

求未知参数θ的一个矩估计量.

新总体

解法二： $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boxed{|X|}\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$

来自新总体的样本

$\longrightarrow$ $\boxed{|X_1|,|X_2|,\dots|X_n|}\ i.i.d.\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$

$\longrightarrow$ $E(|X|)=\dfrac{\theta}{2}$ $\longrightarrow$ $\hat{\theta}=\dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$

极大似然估计法

引例　一个盒子中装有许多白球和红球, 不知是白球多还是红球多, 但已知它们的数目之比是3:1. 设随机地从盒中取出一白球的概率是p，试估计p的值.

显然　$P=\frac{3}{4}$　或者　$P=\frac{1}{4}$

有放回地取3次球，每次取一个

取出了3个红球 $\longrightarrow$ $P=\frac{1}{4}$　取出了3个白球 $\longrightarrow$ $P=\frac{3}{4}$

$P=\frac{3}{4}$ 还是 $P=\frac{1}{4}$

有放回地取3次球 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{取出的第}i\text{个是白球}, \\ 0 & \text{取出的第}i\text{个是红球}, \end{cases}$ $i = 1, 2, 3.$

$$P\left(X_1=0, X_2=0, X_3=0 \middle| p=\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{64}>\frac{1}{64}=P\left(X_1=0, X_2=0, X_3=0 \middle| p=\frac{3}{4}\right)$$

$$P\left(X_1=1, X_2=1, X_3=1 \middle| p=\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}<\frac{27}{64}=P\left(X_1=1, X_2=1, X_3=1 \middle| p=\frac{3}{4}\right)$$

极大似然原理

比如取出3个红球

一个随机试验有若干个可能的结果，若在一次试验中结果A出现，

而导致结果A发生的原因有很多，在分析导致结果A发生的原因时，

使结果A发生的概率最大的原因，推断为导致A发生的真实原因.

比如 $P=\frac{3}{4}$ 或者 $P=\frac{1}{4}$

极大似然估计法

设总体X为离散型分布，$\theta_1,\dots,\theta_k$为分布中的k个未知参数，

记$\theta=(\theta_1,\dots,\theta_k)$，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体X的样本，

$x_1,x_2,\dots,x_n$ 是样本观察值. 则

$$P\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\ \theta)$$

记 $L(\theta)=L(\theta;x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\ \theta)$

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)$$

若在可能取值范围内,当 $\theta = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 时，$L(\theta)$ 有最大值，

即此时导致出现样本观察值$x_1, x_2, \dots, x_n$的可能性最大， 因此

$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 可以作为最像θ真值的估计值

极大似然估计值

极大似然估计法

设总体X为连续型分布, $\theta_1, \dots, \theta_k$为分布中的$k$个未知参数,

记$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体X的样本，

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 是样本观察值. 则

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)$$

记 $$L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)$$

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

若在可能取值范围内,当 $\theta = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ 时,

$L(\theta)$有最大值，即当 $\theta = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ 时,

导致出现样本观察值$x_1, x_2, \ldots, x_n$的可能性最大,

因此 $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ 可以作为最像θ真值的估计值

极大似然估计值

极大似然估计法

设总体X的分布函数为$F(x;\ \theta)$, 其中$\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k)$,$\theta_1,\ldots,\theta_k$为k个未知

参数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体X的样本, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是样本观察值. 令

$$L(\theta)=L(\theta;x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\ \theta) & X\text{是离散型且分布律为}p(x_i;\ \theta),\\ \prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta) & X\text{是连续型且概率密度为}\mathrm{f}(x_i;\ \theta),\end{cases}$$

称$L(\theta)$为似然函数.

极大似然估计法

设$L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n)$为似然函数．若存在 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$

使得

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta),$$

则称$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ 是未知参数θ的极大似然估计值，

称$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$是未知参数$\theta$的极大似然估计量.

极大似然估计法

例3. 设随机变量 X 服从参数为λ的泊松分布，$\lambda > 0$未知，$X_1, \ldots, X_n$ 是来自总体X的样本，$x_1, \ldots, x_n$ 是样本观察值. 求λ的极大似然估计值.

解:似然函数 $$L(\lambda) = L(\lambda; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}\right)$$

两边取对数得 $$\ln L(\lambda) = -n\lambda + (\ln\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

极大似然估计法

两边求导
$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

求驻点
$$-n+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \Longrightarrow \hat{\lambda}=\bar{x}$$

由于
$$\left.\frac{d^2\left(\ln L(\lambda)\right)}{d\lambda^2}\right|_{\hat{\lambda}=\bar{x}}<0$$

故λ的极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\bar{x}$

极大似然估计法

例4：设$X_1, \dots, X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，其中μ,σ^2是未知参数，

求μ与σ^2的极大似然估计量.

解：似然函数

$$L(\mu,\sigma^2)=L(\mu,\sigma^2;x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

两边取对数得

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - -\frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

分别求关于μ与σ^2的偏导数，得似然方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

经判断μ与σ^2的极大似然估计量即为 $\hat{\mu} = \bar{X} \qquad \hat{\sigma}^2 = B_2$

极大似然估计法

例5.设总体X具有均匀分布，其概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

求未知参数θ的极大似然估计量.

解：设$X_1,\dots,X_n$是来自总体X的一个样本，$x_1,\dots,x_n$是样本观察值.

似然函数 $L(\theta)=L(\theta;x_1,\dots,x_n)=\theta^{-n},\quad 0\le x_1,\dots,x_n\le\theta$

$$f(x_i;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x_i\le\theta \\ 0, & otherwise\end{cases}\quad i=1,2,\dots,n$$

即 $L(\theta)=L(\theta;x_1,\dots,x_n)=\theta^{-n},\quad 0\le x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n)}\le\theta$

故当 $\theta=x_{(n)}=max\{x_1,\dots x_n\}$ 时，$L(\theta)$取得最大值.

因此θ的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=x_{(n)}$

θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=X_{(n)}$

极大似然估计法

例6　设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$ $X_1,\dots,X_n$是一个样本，求未知参数θ的极大似然估计量.

解：$X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$ $\longrightarrow$ $|X|\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$

$\longrightarrow$ $|X_1|,|X_2|,\dots|X_n|\ i.i.d.\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & else\end{cases}$

$\longrightarrow$ θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\max\{|X_1|,|X_2|,\dots|X_n|\}$

小　　结

点估计 $\begin{cases} \text{矩估计} \\ \text{极大似然估计} \end{cases}$

设$X_1,\dots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=B_2 \qquad \hat{\sigma}_2^2=S^2$$