由题设知 $f(x)$ 在 $x_0 \leqslant x < x_0 + 1$ 上有界，故存在正数 $x_1$，使当 $x > x_1$ 时，有

$$\left|\frac{f(x_0+L)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (0 \leqslant L < 1).$$

又显然存在正数 $x_2$，使当 $x > x_2$ 时，有

$$\left|\frac{x_0+L}{x}A\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (0 \leqslant L \leqslant 1).$$

令 $X = \max\{x_0+1, x_1, x_2\}$，于是当 $x > X$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{x} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = A$.

## 三、教材思考题解疑

### 第 2 节——数列极限

1. $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是不是 $\{x_n\}$ 的一个子列？

**解**　数列本身是其自身的子列，这里 $n_i = i$.

2. 试比较 $n_i$ 与 $i$ 的大小.

**解**　$i \leqslant n_i$.

3. 下面的表述能否作为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$ 的定义？为什么？

(1)　对于某个给定的 $\varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{Z}^+$，当 $n > N$ 时，$|x_n - A| < \varepsilon$ 恒成立；

(2)　对于无穷多个给定的 $\varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{Z}^+$，当 $n > N$ 时，$|x_n - A| < \varepsilon$ 恒成立；

(3)　对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{Z}^+$，当 $n > N$ 时，有无穷多项 $x_n$，使 $|x_n - A| < \varepsilon$ 成立；

(4)　对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，数列 $\{x_n\}$ 中只有有限多项不满足 $|x_n - A| < \varepsilon$；

(5)　对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{Z}^+$，当 $n > N$ 时，$|x_n - A| < K\varepsilon$ 恒成立（$K$ 为一正常数）；

(6) 对于任意的正整数 $m$，$\exists N \in \mathbf{Z}^{+}$，当 $n > N$ 时，$|x_n - A| < \frac{1}{m}$ 恒成立.

**解** (1) 不能作为定义. 因为给定的 $\varepsilon > 0$，不能描述极限的无限变化趋势.

(2) 不能作为定义. 因为无穷多个给定的 $\varepsilon > 0$，也不能描述极限的无限变化趋势.

(3) 不能作为定义. 无穷多项不能表示从某项开始后的所有项.

(4) 能作为定义. "只有有限多项不满足 $|x_n - A| < \varepsilon$" 说明从某项开始无穷多项满足 $|x_n - A| < \varepsilon$.

(5) 能作为定义. 因 $\varepsilon$ 具任意性，"$K\varepsilon$" 同样可以表示任意小.

(6) 能作为定义. $\frac{1}{m}$ 可以表示任意小.

4. 如何给出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq A$ 的定义?

**解** 可以定义为：存在某个 $\varepsilon_0 > 0$，对任意的 $N > 0$，存在 $n_0 > N$，使得 $|x_{n_0} - A| \geqslant \varepsilon_0$.

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ 存在，能否保证极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在?

**解** 不能保证，如 $x_n = (-1)^n$.

6. 有界数列是否一定收敛? 发散数列是否一定无界?

**解** 有界数列不一定收敛，发散数列也不一定无界，如 $x_n = (-1)^n$.

7. 能否证明：在原定理 2.3 条件下，$\exists N \in \mathbf{Z}^{+}$，使得当 $n > N$ 时，有 $x_n > \frac{99A}{100}$?

**解** 可以证明，如取 $\varepsilon = \frac{A}{100}$.

8. 请你根据 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$，求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ （答案：e）；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}$ $\left(\text{答案：}\frac{\mathrm{e}}{4}\right)$.

**解** (1) 取 $x_n = \frac{n^n}{n!}$.

(2) 取 $x_n = \dfrac{n^n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

9. 若将推论2中条件 $x_n \geqslant 0$ 改为 $x_n > 0$，结论能否改为 $A > 0$？

**解**　不能，如 $x_n = \dfrac{1}{n}$.

10. 若某数列存在收敛的子列，原数列是否收敛？

**解**　不一定，如 $x_n = (-1)^n$.

11. 若某原数列发散，其子列是否一定发散？

**解**　不一定，如 $x_n = (-1)^n$，而子列 $\{x_{2n-1} = 1\}$ 收敛.

12. 若某原数列存在发散的子列，原数列是否发散？

**解**　一定发散.

13. 若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 均不存在极限，$\{x_n \pm y_n\}$ 的极限是否存在？$\{x_n y_n\}$ 的极限是否存在？

**解**　$\{x_n \pm y_n\}$ 的极限可能存在，如 $x_n = y_n = (-1)^n$，则 $\{x_n - y_n\}$ 收敛；若取 $x_n = (-1)^n$，$y_n = (-1)^{n+1}$，则 $\{x_n + y_n\}$ 收敛.

$\{x_n y_n\}$ 的极限也可能存在，如上例. 又如：

$$x_n = \begin{cases} 0, & n\text{ 为奇数}, \\ n, & n\text{ 为偶数}, \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} n, & n\text{ 为奇数}, \\ 0, & n\text{ 为偶数}. \end{cases}$$

14. 若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 中一个极限存在，一个极限不存在，$\{x_n \pm y_n\}$ 的极限是否存在？$\{x_n y_n\}$ 的极限是否存在？

**解**　$\{x_n \pm y_n\}$ 的极限一定不存在. 但 $\{x_n y_n\}$ 的极限可能存在，如取 $x_n = 0$，$y_n = n$.

15. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ 吗？反之如何？

**解**　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. 反之不对，如 $x_n = (-1)^n$.

16. 若 $\{x_n y_n\}$ 收敛，能否断定 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 也收敛？

**解**　不一定，如

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \in \{n\text{ 为奇数}\}, \\ n, & n \in \{n\text{ 为偶数}\}, \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} n, & n \in \{n\text{ 为奇数}\}, \\ 0, & n \in \{n\text{ 为偶数}\} \end{cases}$$

均不收敛. 若其中之一收敛且不收敛于零，则可断定另一数列必收敛.

## 第3节 —— 函数极限

1. 如何叙述：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$？

**解** 类似于数列，可定义为：若存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta>0$，存在 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，使得 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

## 第4节 函数极限的性质与运算法则

1. 上述定理的结论(1)中的"$A>0$"，"$A<0$"能否分别改为"$A\geqslant 0$"，"$A\leqslant 0$"?

**解** 不能. 如函数 $f(x)=x$，$x_0=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，但不存在 $\delta$，使得 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$.

2. 在函数局部保号性定理的结论(2)中，能否改为：若 $f(x)>0$，是否有 $A>0$?

**解** 不能. 如函数 $f(x)=x^2$，在 $x_0=0$ 处.

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

(1) 若在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有 $f(x)<g(x)$，问是否有 $A<B$? 为什么?

(2) 证明：若 $A>B$，则在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$.

**解** 用 $f(x)-g(x)$ 代替原定理中的 $f(x)$ 即可.

4. 若已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{A}{B}$ 存在，关于极限 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 可以有什么结论? 两者是否一定存在? 若其中一个存在，另一个是否一定存在? 若 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=B\neq 0$，那么结论如何?

对定理 4.4 的(1)，(2)提出并讨论类似性质.

**解** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{A}{B}$ 存在，得不出极限 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 的相关结论，两者均不一定存在. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{A}{B}$ 不为零，则由 $v(x)=u(x)\Big/\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 可知 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 存在. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=B\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 一定存在. 对定理 4.4 (1)，(2)的相关结论略去.

## 第5节 函数极限存在条件

1. 利用归结原理，借助数列极限的性质证明函数极限的性质.

**证** 例如可以由"若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=B$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n))=A+B$”来证明：“若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$”. 证明过程略.

## 第6节 无穷小与无穷大

1. 借助于定理 6.2，证明函数极限的运算性质(定理 4.4).

**证** 只证(1). 因 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，由定理 6.2，有

$$f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta,$$

其中 $\alpha,\beta$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小. 从而有

$$f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+A\beta+B\alpha+\alpha\beta.$$

因 $A,B$ 为有限数，$\alpha,\beta$ 为无穷小，故 $A\beta+B\alpha+\alpha\beta$ 也为无穷小，从而有

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$

2. 函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 是不是 $x\to 0$ 时的无穷大？在自变量 $x$ 的怎样的变化过程中它是无穷大？

**解** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x\to 0$ 时不是无穷大，因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$. 但因 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，故 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x\to+0$ 过程中为无穷大.

3. 回答下面的问题(肯定时要证明，不肯定时要讨论)：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ (有限值)，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=?$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ (有限值)，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=?$

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=?$

(4) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=?$

**解** (1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))$ 不存在. 证明略.

(2) 当 $A=0$ 时，$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ 可能存在，如取 $f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，显然 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$，但 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))=1$. 当 $A\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$ 可能存在，也可能不存在. 考虑 $a=0$，取 $f(x)=g(x)=\dfrac{1}{x}$ 时 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$ 存在，而取 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 时

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$ 不存在.

(4) 可能存在，也可能不存在. 举例如(3).

## 第7节 —— 函数的连续性与间断点

1. 如何讨论分段函数在分界点处的连续性?

**解** 需讨论在分界点处左、右两边的极限. 若其极限相等且与函数本身在该点的值相等，则函数在该点连续，否则间断.

2. 两个不连续函数或者一个连续而另一个不连续的函数的和、积、商是否连续?

**解** 该问题实质上是求极限的问题，与第4节思考题4类似.

3. 若 $f$ 在 $x_0$ 点连续，则 $|f|,f^2$ 也在 $x_0$ 连续，反之成立否?

**解** 反之不成立，如函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$

## 第8节 —— 闭区间上连续函数的性质

1. 若闭区间、连续两个条件中有一个不满足，均无法保证定理8.1的结论成立. 请举例说明.

**解** 若区间不是闭区间，如 $f(x)=x$，区间为 $(0,1)$，则不存在最大值与最小值.

若函数不是连续函数，如取 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=0,\\ x, & x\in(0,1),\\ \dfrac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$

2. $f$ 要存在最大(小)值或有界是否一定要 $f$ 连续? 是否一定要闭区间呢?

**解** 均不一定.

## 第9节 —— 一致连续性

1. 如何给出不一致连续的定义?

**解** 若存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta>0$，存在 $x_1,x_2\in I$，$|x_1-x_2|<\delta$，但 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$，则函数 $f(x)$ 在 $I$ 上不一致连续.

# 三、教材思考题解疑

## 第1节 导数的概念

1. 下面结论是否正确，若不正确，请举反例：

(1) 若函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在点 $x_0$ 处一定可导；

(2) 若 $|f(x)|$ 在点 $x_0$ 处可导，则 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处一定可导；

(3) 若 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $f'(x)\leqslant g'(x)$.

**解** (1) 不正确，如函数 $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导，但函数 $|f(x)|=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

(2) 不正确，如函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 在任一点均不连续，更不可导，但 $|f(x)|=1$ 在任一点可导.

(3) 不正确，如函数 $f(x)=x$，$g(x)=2$，$x\in(0,1)$，有 $f(x)\leqslant g(x)$，但 $f'(x)>g'(x)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1,\end{cases}$ 用以下方法求 $f'(1)$ 对不对？

当 $x<1$ 时，$f'(x)=2x$，

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to 1^-}2x=2;$$

当 $x>1$ 时，$f'(x)=2$，

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}2=2.$$

因 $f'_-(1)=f'_+(1)$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，且 $f'(1)=2$.

**解** 这种解法不正确. 求分段点处的导数只能用定义，因

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2+1-2}{h}=2,$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2(1+h)-2}{h}=2,$$

即 $f'_-(1)=f'_+(1)$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，且 $f'(1)=2$.

## 第2节 函数的求导法则

1. 若 $u(x)$ 在点 $x_0$ 可导，$v(x)$ 在点 $x_0$ 不可导，$u(x)v(x)$ 在 $x_0$ 是否可导？若两者均不可导呢？

**解** 均不一定成立. 如 $u(x)\equiv 0$, $v(x)=|x|$, $x_0=0$. 又如：$u(x)=v(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$

2. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$, $g(x)=\ln x$, 求 $f'(g'(x))$.

**解** 因 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(x)=\mathrm{e}^x$, 故 $f'(g'(x))=f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

3. 若 $u=\varphi(x)$ 在点 $x_0$ 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 不可导，则 $y=f(\varphi(x))$ 在点 $x_0$ 必不可导吗？

**解** 不一定. 如 $u=\varphi(x)\equiv 0$, $y=f(u)=|u|$, $x_0=0$.

## 第3节 隐函数的导数、由参数方程所确定的函数的导数

1. 对 $y=x^x\ (x>0)$，判断下列求导是否正确：

(1) $y'=x\cdot x^{x-1}$;

(2) $y'=x^x\cdot\ln x$.

**解** 两种求法均不正确. 这是一个幂指函数，可用对数求导法来求.

2. 如果由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 确定的函数为 $y=y(x)$，如何求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$？

**解** 先将极坐标方程化为参数方程$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho(\theta)\sin\theta,\end{cases}$ 再按参数方程求导方法来求.

## 第4节 高阶导数

1. 下面这样求导是否正确？

(1) 设 $y=f(x^2)$，则 $y'=2xf'(x^2)$, $y''=2f'(x^2)+2x\cdot f''(x^2)$.

(2) 设$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ 则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\tan\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(-\tan\theta)'=-\sec^2\theta$.

**解** 均不正确. 正确的方法如下：

(1) 对 $y=f(x^2)$，有 $y'=2xf'(x^2)$, $y''=2f'(x^2)+2x\cdot f''(x^2)\cdot 2x$.

(2) 对$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \end{cases}$ 有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\tan\theta$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(-\tan\theta)'\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sec^2\theta}{\sin\theta}$.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$

## 第5节 —— 微分

1. 函数的微分与函数的增量有何关系？

**解** 函数的微分是函数的增量的线性部分，且在自变量的增量趋于零时，两者是等价无穷小.

2. 若 $y=f(x)$ 是线性函数，则 $\Delta y=\mathrm{d}y$，是否正确？

**解** 正确.

# 四、教材习题全解

## 习题2-1

### —— A 类 ——

1. 用导数的定义求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\cos x$； (2) $f(x)=\ln x$；

(3) $f(x)=x|x|$，求 $f'(0)$.

**解** (1) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\sin x.$$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}.$$

(3) $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(0+\Delta x)|0+\Delta x|-0}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0.$$

2. 已知 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，求

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a-2x)-f(a-x)}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}$.

$$\lim_{h\to 0}\theta\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{\theta h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{(n+1)}}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a).$$

因此$(\lim\limits_{h\to 0}\theta)f^{(n+1)}(a)=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$. 由 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$，知$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

## 三、教材思考题解疑

### 第1节 —— 微分中值定理

1. 若罗尔定理的三个条件中有一个不满足，其结论可能不成立. 请举例说明.

**解** (1) 闭区间不连续，如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0.\end{cases}$

(2) 开区间不可导，如 $f(x)=|x|$, $x\in[-1,1]$.

(3) 端点值不相等，如 $f(x)=x$, $x\in[0,1]$.

2. 例 1.5 条件"$x>0$"改为"$x>-1$"，结论是否仍成立?

**解** 不成立. 函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 在区间$[-1,x]$上不满足拉格朗日中值定理的条件.

3. 是否能这样证明柯西中值定理?

因为 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. 同理，$F(x)$在区间$[a,b]$上也满足拉格朗日中值定理的条件，故 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$. 从而有

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

**解** 这样证明不正确. 因为两个 $\xi$ 点不一定相同.

### 第2节 —— 泰勒公式

1. 若 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 是 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的 $n$ 阶泰勒公式的

余项，问下列命题是否成立？

(1) 当 $n$ 固定时，$\lim\limits_{x \to x_0} R_n(x) = 0$.

(2) 当 $x$ 固定时，$\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

解 成立.

2. 写出 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ 在点 $x_0 = 0$ 的 $n$ 阶泰勒公式.

解 其 $n$ 阶泰勒公式为 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

3. 试说明在求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 时，为什么不能用 $\tan x, \sin x$ 的等价无穷小 $x$ 分别代替它们？

解 因为两者的低阶(1 阶) 无穷小是一样的，只在高阶时才有差别.

## 第 3 节 —— 洛必达法则

求极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 3\sin x}{3x - 2\cos x}$ 时能否使用洛必达法则？

解 不能用洛必达法则. 因为这样无法求出极限，但原极限是存在的.

## 第 4 节 —— 函数的单调性与极值

下列命题是否正确？为什么？

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调增加且可导，则必有 $f'(x) > 0$.

(2) 单调可导函数的导函数必定单调.

(3) 若在 $(a,b)$ 内 $f'(x) > g'(x)$，则在 $(a,b)$ 内亦必有 $f(x) > g(x)$.

(4) 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导且 $f(x) > g(x)$，则在 $(a,b)$ 内必有 $f'(x) > g'(x)$.

(5) 若 $f'(x_0) > 0$，则在 $x_0$ 的某邻域内，$f(x)$ 必为单调增加的函数.

解 均不一定成立.

(1) 可能存在个别点的导数为零，如函数 $f(x) = x$，在区间 $(-1,1)$ 内.

(2) 单调可导函数的导函数不一定单调，如函数 $f(x) = x^3$，其导函数为 $f'(x) = 3x^2$，不是单调的.

(3) 导数仅表示函数的单调性，无法确定函数的符号及大小. 如函数 $f(x) = x^3$，$g(x) = 0$，在区间 $(-1,1)$ 内，有 $f'(x) > g'(x)$，但 $f(x) > g(x)$ 不成立.

(4) 理由同上，如函数 $f(x) = 2 - x$，$g(x) = x$，在区间 $(0,1)$ 内有

$f(x) > g(x)$，但 $f'(x) > g'(x)$ 不成立.

(5) 不正确，如：$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \dfrac{1}{x} - 2\cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$f'(0) = 1 > 0$，但原点的任意邻域内函数不单调.

## 第5节 曲线的凸性与函数作图

下面的命题是否正确？

(1) 若$(x_0, f(x_0))$为曲线 $y = f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0) = 0$.

(2) 若 $f''(x_0) = 0$，则$(x_0, f(x_0))$必为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

**解** 均不正确. 拐点的定义本身与2阶导数无关，可以构造出不具2阶导数的拐点.

# 四、教材习题全解

## 习题3-1

### A 类

1. 对于下列函数，在所示区间上应用拉格朗日中值公式，求出中值 $\xi$:

(1) $f(x) = x^2 \quad (1 \leqslant x \leqslant 5)$；
(2) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad (2 \leqslant x \leqslant 4)$；

(3) $f(x) = \sqrt{x} \quad (4 \leqslant x \leqslant 9)$；
(4) $f(x) = \ln x \quad (1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e})$.

**解** (1) $2\xi = \dfrac{5^2 - 1^2}{5 - 1}$，$\xi = 3$.

(2) $-\dfrac{1}{\xi^2} = \dfrac{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}}{4 - 2}$，$\xi = 2\sqrt{2}$.

(3) $\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}} = \dfrac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{9 - 4}$，$\xi = \dfrac{25}{4}$.

$$I(m,n)=\int\cos^{m-1}x\ \sin^n x\ \mathrm{d}\sin x=\frac{1}{n+1}\int\cos^{m-1}x\ \mathrm{d}\sin^{n+1}x$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\cos^{m-1}x\ \sin^{n+1}x+(m-1)\int\cos^{m-2}x\ \sin^{n+2}x\ \mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{n-2}x\ \sin^n x\ \mathrm{d}x$$

$$-\frac{m-1}{n+1}\int\cos^m x\ \sin^n x\ \mathrm{d}x,$$

故 $I(m,n)=\dfrac{\cos^{m-1}x\ \sin^{n+1}x}{m+n}+\dfrac{m-1}{m+n}I(m-2,n)$.

另一等式类似可证. 利用以上递推公式，可得

$$\int\cos^2x\ \sin^4x\ \mathrm{d}x=I(2,4)=-\frac{1}{6}\cos^3x\ \sin^3x+\frac{1}{2}I(2,2)$$

$$=-\frac{1}{6}\cos^3x\ \sin^3x+\frac{1}{8}\cos x\ \sin^3x+\frac{1}{8}\int\sin^2x\ \mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{6}\cos^3x\ \sin^3x+\frac{1}{8}\cos x\ \sin^3x+\frac{1}{16}\int(1+\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{6}\cos^3x\ \sin^3x+\frac{1}{8}\cos x\ \sin^3x+\frac{x}{16}-\frac{1}{32}\sin 2x+C.$$

# 三、教材思考题解疑

## 第1节 原函数与不定积分的概念

1. 说明 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 或 $(-\infty,0)$ 上有原函数，但在 $(-1,1)$ 上没有原函数.

**解** 因为

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

故 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 上连续，所以 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 上有原函数. 而 $x=0$ 是 $(-1,1)$ 内的第一类间断点，所以 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $(-1,1)$ 上没有原函数.

2. 不定积分与原函数这两个概念有什么区别？有什么联系？

**解** 若 $f(x)$ 在区间 $I$ 内存在原函数，则必有无穷多个原函数，任意两个原函数之间只相差一个常数，故任一原函数均可表示为 $F(x)+C$ 的形式. 也就是说，$f(x)$ 在区间 $I$ 内的不定积分 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 在区间 $I$ 内的原函数的一般表达式，即函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内的全部原函数，而每给定常数 $C$ 一个值，不定积分就表示相应的一个特定的原函数. 若把两个原函数相差一个常数作为“等价”看待，则可认为原函数“基本上”只有一个，即求函数的不定积分，只需求出被积函数的任一原函数，由它分别加上各个不同的常数便得到该函数的不定积分.

3. 若 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有原函数，那么 $f(x)$ 在 $I$ 内是否一定连续？原函数是否一定连续？$f(x)$ 的任何两个原函数一定相差一个常数吗？区间 $I$ 内的不连续函数是否一定没有原函数？

**解** 若 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有原函数，那么 $f(x)$ 在 $I$ 内不一定连续. 如：$f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且有原函数 $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$；而

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内有第二类间断点 $x=0$，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内有原函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处有 $F'(x)=f(x)$.

由于区间 $I$ 内的原函数是可导函数，故原函数在区间 $I$ 内一定连续.

$f(x)$ 的任何两个原函数一定相差一个常数，区间 $I$ 内的不连续函数不一定没有原函数，只有当间断点为第一类间断点时一定没有原函数.

4. 奇函数的原函数必是偶函数，偶函数的原函数必是奇函数，对吗？

**解** 奇函数的原函数必是偶函数，偶函数的原函数不一定是奇函数.

若 $F'(x)=f(x)$，且 $f(-x)=-f(x)$，则 $F(x)$ 为偶函数. 又 $G(-x)=F(-x)+C=F(x)+C=G(x)$，故奇函数的原函数必是偶函数.

由于 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的不定积分为 $\dfrac{1}{3}x^3+C$，当 $C$ 非零时不是奇函数，只有 $C=0$ 时，才是奇函数.

## 第2节 不定积分的换元积分法与分部积分法

1. 在求不定积分$\int|x|\mathrm{d}x$时，若令$x=t^2$，则

$$\int|x|\mathrm{d}x=2\int t^3\mathrm{d}t=\frac{t^4}{2}+C=\frac{x^2}{2}+C,$$

这种解法正确吗?

**解** 解法不对，原因是函数$|x|$的连续区间为$(-\infty,+\infty)$，而在变换$x=t^2$下，$x$将限制在区间$[0,+\infty)$内取值，$\frac{x^2}{2}+C$仅为函数$|x|$在区间$(0,+\infty)$内的不定积分. 要求函数$|x|$的不定积分，即求函数$|x|$在区间$(-\infty,+\infty)$内的不定积分，还应求函数$|x|$在区间$(-\infty,0)$内的不定积分，这时，$\int|x|\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}x=-\frac{x^2}{2}+C_1$. 故有

$$\int|x|\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C_1, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}+C, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

由于原函数在区间$(-\infty,+\infty)$内连续，有

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{x^2}{2}+C_1\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}+C\right),$$

于是$C_1=C$，$\int|x|\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}+C, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 故

$$\int|x|\mathrm{d}x=\frac{x|x|}{2}+C,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

2. 运用分部积分法的基本技巧有哪些?

**答** 运用分部积分法的基本技巧如下：首先可以想象，要对一个被积函数成功运用分部积分法，重要的前提就是这个被积函数必须能够写成两个因式的乘积，而使得分部积分法有效的关键，则是凑成$\int v\mathrm{d}u$的形式以后，希望$v'$变得更为简单，而$u$不至于变得更为复杂.

下面我们仔细观察一下各种基本函数积分的特征.

由于指数函数、正弦和余弦函数在求导后保持原来的函数类型，而幂函数求一阶导数后，会降一阶次，因此对于如下形式的积分：

$$\int x^n e^x dx,\ \int x^n \sin x dx,\ \int x^n \cos x dx,$$

可以通过把 $x^n$ 的部分作为 $v$，而反复运用分部积分法，降低它的阶次，最终使得被积函数部分只剩下指数函数和正弦、余弦函数.

而对于如下形式的积分：

$$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx,\ \int x^n \arcsin x\ dx,\ \int x^n \arccos x\ dx,\ \int x^n \arctan x\ dx,$$

则可以利用对数函数与反三角函数的导数为有理分式的特点，把 $x^n$ 的部分作为 $u'$，从而替换为对对数函数与反三角函数求导，得到有理分式，这样有可能简化积分过程.

有一个常用的运用分部积分法得到的积分式如下：

$$\int \sec^3 x\ dx = \frac{1}{2}\sec x\ \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

这个公式非常有用，希望读者自己动手推导一下.

## 第3节 —— 有理函数的不定积分

1. 利用部分分式计算有理分式函数不定积分时，确定部分分式中的待定系数有哪些方法？有理分式函数的不定积分，必须都用部分分式法来计算吗？

**解** 利用部分分式计算有理分式函数不定积分时，确定部分分式中的待定系数有 4 种基本方法. 下面以具体实例加以说明.

如：求不定积分$\int \frac{x-2}{x^2-8x+15}dx$，其解法如下：

由 $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$，设

$$\frac{x-2}{(x-3)(x-5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5} \quad (\text{其中 } A,B \text{ 为待定常数}).$$

去分母得 $x-2=A(x-6)+B(x-3)$，即

$$(A+B)x-(5A+3B) \equiv x-2. \qquad ①$$

由 ① 式确定待定常数的方法有：

(1) 比较系数法

比较 ① 式等号左边与右边的 $x$ 同次幂的系数，得两个方程组成的方程组，再从这个方程组解出待定系数 $A,B$ 的值，这是最基本的一种方法. 在这里我们就不计算了.

(2) 赋值法

在 ① 式中，令 $x=3$，得 $A=-\frac{1}{2}$；再令 $x=5$，得 $B=\frac{2}{3}$. 这也是一

种有效的方法.

下面介绍两种在一般教材中没有提到的方法，这两种方法用于化分母有重根或较复杂的虚根的有理函数为部分分式时，较为有效.

(3) 逐次约简法

第一步，在①式中，令 $x=3$，得 $A=-\frac{1}{2}$.

第二步，以 $A=-\frac{1}{2}$ 代人①式右端后，将以 $A$ 为系数的项移到等式的左边，再比较两边 $(x-3)$ 的系数得 $B=\frac{3}{2}$. 这样，定出一个系数，便将多项式约简一次，直到全部系数定出为止.

(4) 导数法

第一步，在①式中，令 $x=3$，得 $A=-\frac{1}{2}$.

第二步，以 $A=-\frac{1}{2}$ 代人①式右端后，将以 $A$ 为系数的项移到等式的左边后，两边求导数得 $B=\frac{3}{2}$.

比较以上方法，可见赋值法是基本的，在逐次约简或求导后，实际上还是要靠赋值来确定各系数，逐次约简法与求导法还可交叉使用，即分解因式方便时，可分解因式，约去公因式而逐次化简；分解因式麻烦时，用求导法同样能达到逐次化简的目的.

以上，为了介绍这 4 种方法，我们在解题过程中单一地使用了这些方法. 实际上各种方法可交替使用，即化到哪一步感到使用哪个方法比较方便，就用哪个方法解，尽可能地使解法更简单.

有理分式函数的不定积分，不一定都用部分分式法来计算. 用部分分式的方法求有理函数的积分，主要是从理论上证明"有理函数的原函数都是初等函数"这一结论. 对具体的积分来说，如果所给有理函数的分母能分解因式，那么用部分分式的方法，就一定能求得这个有理函数的积分. 然而，用部分分式的方法求积分往往很麻烦，而且有些有理式的分母根本就无法分解因式. 所以，当我们求有理函数的积分时，应尽可能地考虑是否有其他更简便的解法.

## 第4节 可有理化函数的不定积分

1. 三角函数有理式不定积分一般解题思路是怎样的?

**解** 应遵循以下程序：

(1) 看 $R(\cos x, \sin x)$ 能否用三角、代数恒等变换化为易积分的积分.

(2) 可否用特殊的代换化为易积分的积分.

(3) 可否用凑微分法化为易积分的积分.

(4) 当 $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$，$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$，$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ 时，可分别令

$$t = \sin x, \quad t = \cos x, \quad t = \tan x,$$

这些代换均可将三角函数有理式不定积分化为易积分的有理函数的积分.

(5) 最后考虑万能公式.

2. 简单无理函数不定积分的积分方法有哪些?

**解** 简单无理函数不定积分的积分方法一般有 6 种：

(1) 分项积分法：将被积函数化为已知或易求积分函数的代数和，然后再求积分；

(2) 有理化法：将分子或分母有理化后再求积分；

(3) 分部积分法；

(4) 降幂法；

(5) 变量替换法；

(6) 凑微分法.

## 四、教材习题全解

### 习题 4-1

#### —A 类—

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$；　　(6) $\int\left(1 - x + x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $$C_{10,15}=\int_{10-1}^{15}(2x^2-3x+2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_9^{15}$$
$$=\frac{2}{3}(15^3-9^3)-\frac{3}{2}(15^2-9^2)+2(15-9)$$
$$=1\,764-216+12=1\,560\ (\text{元}).$$

【例 41】 设某产品的平均边际成本为

$$\overline{C}'(x)=-\frac{2\,500}{x^2}-0.015+0.004x\ (\text{元}/\text{个}).$$

已知生产 10 个产品时，其平均成本为 274.05，求总成本和固定成本.

**解** 因为平均边际成本为 $\overline{C}'(x)=-\frac{2\,500}{x^2}-0.015+0.004x$，所以平均成本为

$$\overline{C}(x)=\int\left(-\frac{2\,500}{x^2}-0.015+0.004x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2\,500}{x}-0.015x+0.002x^2+C.$$

由已知 $\overline{C}(10)=274.05$，即有

$$\frac{2\,500}{10}-0.015\times10+0.002\times10^2+C=274.05,$$

得 $C=24$. 故平均成本

$$\overline{C}(x)=\frac{2\,500}{x}-0.015x+0.002x^2+24.$$

因此，总成本为

$$C(x)=x\overline{C}(x)=2\,500-0.015x^2+0.002x^3+24x\ (\text{元}),$$

固定成本 $C(0)=2\,500$ (元).

## 三、教材思考题解疑

### 第 1 节　定积分的概念

1. 在定积分的定义中，$\lambda\to0$ 是否能用 $n\to+\infty$ 来替换，为什么？

**答** 不能. 因为在定积分定义中在积分区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分

点：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将$[a,b]$分成了 $n$ 个小区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n].$$

$\lambda$ 是这 $n$ 个小区间的长度的最大者：

$$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\},$$

$n$ 是小区间的个数，故由 $\lambda\to 0$ 可得 $n\to\infty$，反之不成立. 如可让$[x_0,x_1]=\left[a,a+\frac{b-a}{3}\right]$，然后在$\left[a+\frac{b-a}{3},b\right]$内任意插入 $n-1$ 个分点，此时，$n\to\infty$，而$\lambda=\frac{b-a}{3}$不趋于零. 只有规定将积分区间$[a,b]$等分时，才有$\lambda\to 0\Leftrightarrow n\to\infty$.

2. 在定积分定义中，为什么要假设 $f(x)$ 在有限区间上有界？

**答** 由定积分定义知，

(1) 若$[a,b]$是无限区间，那么将$[a,b]$分成 $n$ 个小区间：$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{i-1},x_i]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$中，至少有一个是无限区间，故乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 中至少有一个无意义，故积分和无意义；

(2) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上无界，则 $f(x)$ 至少在 $n$ 个小区间：$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{i-1},x_i]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$ 中的一个小区间上无界，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 无界，故积分和无意义.

综上所述，定积分定义必须假设 $f(x)$ 在有限区间上有界.

## 第2节 定积分的性质

1. 证明：若 $f(x)>0$，且 $f(x)\in C[a,b]$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

**证** 设$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的积分和，任意分割

$$T:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

及 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 因为 $f(x)>0$，$x\in[a,b]$，故 $f(\xi_i)>0$. 又因 $\Delta x_i>0$，所以$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i>0$. 令 $\lambda\to 0$ 取极限，就得到$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0$，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 由教材例 2.3 知$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，故$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

2. 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

**证** $\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x$

$$+\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x.$$

由教材例 2.4 的结论，得

$$\int_a^b f(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b g^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

所以

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

即$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$

## 第 3 节 —— 定积分基本定理，牛顿 - 莱布尼兹公式

1. 牛顿 - 莱布尼兹公式成立需要怎样的条件？

**答** 满足下列条件之一，牛顿 - 莱布尼兹公式成立：

(1) $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数；

(2) $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在$(a,b)$上的一个原函数；

(3) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，且 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数为 $F(x)$；

(4) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，$F(x)$ 在$[a,b]$上连续且除了有限个点外满足条件 $F'(x)=f(x)$.

2. 变上限的函数是否一定可导？为什么？

**答** 不一定. 如 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 在$[-1,1]$上有

$$F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t = |x|-1,$$

显然 $F(x)$ 不可导. 而如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $F(x)$ 在$[a,b]$上可导.

## 第4节 —— 定积分计算

求解定积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 时，能作代换 $x=\frac{1}{t}$ 吗？为什么？

**答** 不能. 因为在换元法中要求 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数，而 $x=\frac{1}{t}$ 在 $[-1,1]$ 上有第二类间断点 $t=0$.

## 第5节 —— 定积分的几何应用

何为定积分的微元法？微元法使用的条件与步骤是怎样的？

**答** 微元法也称元素法，它是用来化实际问题为定积分问题的一种简便方法，也是物理学、力学和工程技术上普遍采用的方法. 一般来说，如果所讨论的量 $Q$ 是与某变量 $x$ 的变化区间 $I$ 有关的量，同时具有如下两个性质：

(1) 当区间 $I$ 分成 $n$ 个子区间 $[x_i,x_i+\Delta x_i]$ 时，区间 $I$ 所对应的量 $Q$ 等于各子区间上对应分量 $\Delta Q_i$ 之和；

(2) 如果 $Q$ 在区间 $[x,x+\Delta x]$（其中 $x,x+\Delta x\in I$）上的增量 $\Delta Q$ 有形如 $f(x)\mathrm{d}x$ 的近似表达式，即 $\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x$（这个量也称为待求量 $Q$ 的微元或元素），

则 $Q=\int_I f(x)\mathrm{d}x$.

因此，要求出在区间 $[a,b]$ 上的待求量 $Q$，先要求出 $Q$ 的微元 $\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x$，然后计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即求得量 $Q$，这就是所谓的微元法（元素法）.

使用微元法的步骤是：

第一步，对积分变量 $x$ 选取适当的坐标系，并确定 $x$ 的变化区间. 一般 $x$ 在 $[a,b]$ 上是连续变化的.

第二步，取 $[a,b]$ 的任意子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，求出 $Q$ 在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的近似分布 $\Delta Q\approx\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x$（注意：$f(x)\mathrm{d}x$ 应与 $Q$ 的量纲相同）.

第三步，计算积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

第四步，针对题目所提的问题给出回答.

## 第7节 —— 定积分的近似计算

定积分的近似计算解决的是哪一类问题？

**答**　定积分的近似计算主要解决一类无法或很难借助原函数来解决的积分问题. 如：由表格或图像给出函数的积分，被积函数的原函数不能用初等函数表出的定积分.

# 四、教材习题全解

## 习题 5-1

### ——A　类——

1. 利用定积分的几何意义，说明下列等式：

(1) $\int_0^1 2x\,dx = 1$；　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

**解**　(1) $\int_0^1 2x\,dx$ 表示直线 $y=2x$ 与 $x=1$ 及 $x$ 轴所围面积，由三角形面积易知

$$\int_0^1 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1.$$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ 表示曲线 $y=\cos x$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 与 $x$ 轴所围面积，从图形知所围部分均在 $x$ 轴上半部分，且由对称性知它是从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 所围面积的 2 倍，即

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx.$$

2. 按定积分定义证明：$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$.

**证**　将闭区间 $[a,b]$ 作任意分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

在每个小区间 $\Delta x_i$ 上任意取一点 $\xi_i \in \Delta x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = k(b-a).$$

$\forall \varepsilon > 0$，可取 $\delta > 0$ $(\delta < b-a)$. 显然对上述任意分割 $T$ 及任意选取的 $\xi_i$，当 $\|T\| < \delta$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - k(b-a)\right| = 0 < \varepsilon.$$

于是 $f(x)=k$，$x\in[a,b]$ 可积，且 $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$.

(2) $S'(t)=-2(1-2t)\mathrm{e}^{-2t}$. 令 $S'(t)=0$，得 $S(t)$ 有唯一驻点为 $t=\frac{1}{2}$. 又 $S''(t)=8(1-t)\mathrm{e}^{-2t}$，$S''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\mathrm{e}}>0$，故 $S\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 为极小值，它也是最小值.

【例 22】 已知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x\ (a>b>0)$.

**解** 原式

$$=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to0^+}}\left[-\int_\varepsilon^b(\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2})\mathrm{d}\,\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to0^+}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-bx^2}-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x}\Bigg|_\varepsilon^{+\infty}\right)+\int_0^{+\infty}(-2a\,\mathrm{e}^{-ax^2}+2b\,\mathrm{e}^{-bx^2})\mathrm{d}x$$

$$=0-2a\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x+2b\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-bx^2}\mathrm{d}x$$

$$=-2a\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2b\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-2\sqrt{a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+2\sqrt{b}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{b\pi}-\sqrt{a\pi}.$$

## 三、教材思考题解疑

### 第1节 积分限为无穷的反常积分

1. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可积，$f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上是否有界？

**答** 若 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可积，$f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上不一定有界. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}n^2, & n\leqslant x<n+\frac{1}{n^5},\\ 0, & n+\frac{1}{n^5}\leqslant x\leqslant n+1\end{cases}\quad(n\geqslant1)$$

在 $[1,+\infty)$ 上无界，而 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+\frac{1}{n^5}}n^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛，故 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上可积.

2. $f(x)$ 在$[a,b]$上 $R$ 可积，则$|f(x)|$在$[a,b]$上 $R$ 可积. 但反之不正确. 问若 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上可积，$|f(x)|$在区间$[a,+\infty)$ 上是否可积？反之又如何？

**答** 若 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$上可积，则$|f(x)|$在区间$[a,+\infty)$上不一定可积. 因为 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上可条件收敛. 反之成立，这时 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上绝对收敛.

3. 若 $f(x)$, $g(x)$ 在$[a,b]$上 $R$ 可积，则 $f(x)g(x)$ 在$[a,b]$上 $R$ 可积. 问若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上可积，$f(x)g(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上是否可积？

**答** 不一定. 例如，函数

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} n^2, & n\leqslant x<n+\dfrac{1}{n^5}, \\ 0, & n+\dfrac{1}{n^5}\leqslant x\leqslant n+1 \end{cases}\quad (n\geqslant 1)$$

在$[1,+\infty)$ 上可积，而

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+\frac{1}{n^5}} n^4\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散，故 $f(x)g(x)$ 在区间$[1,+\infty)$ 上不可积.

## 第 2 节 无界函数的反常积分

1. 能否利用积分限为无穷的反常积分讨论$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$？

**答** 能. 作变换 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=1$ 时，$t=1$；$x\to 0^+$ 时，$t\to+\infty$. 于是

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^1 t^p\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty} t^{p-2}\mathrm{d}t=\frac{1}{p-1}t^{p-1}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\begin{cases} +\infty, & p>1, \\ \dfrac{1}{1-p}, & p<1, \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=(\ln x)\Big|_1^{+\infty}=+\infty \quad (p=1).$$

故当 $p<1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，其值为$\frac{1}{1-p}$；当 $p\geqslant 1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，写出 $f(x)$ 在区

间$[a,b)$上的反常积分定义式，并回答：反常积分为什么采用如此定义式？反常积分与常义积分有何关系？

**答** 由函数$f(x)$在区间$[a,b)$上连续，且$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$，$f(x)$在区间$[a,b)$上的反常积分定义式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x \quad (\varepsilon>0).$$

在用和式极限为定义的定积分(常义积分)意义下，无界函数不可积. 但有些实际问题又要求我们去研究像本问题中的无界函数$f(x)$的积分. 这时，我们自然地要以极限为工具. 因为对充分小的正数$\varepsilon$，$f(x)$在$[a,b-\varepsilon]$上连续，故变上限的积分$\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$总存在，所以称极限$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$为$f(x)$在$[a,b]$上的反常积分. 既然是反常积分，必须以常义积分为其特殊情况. 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，那么由变上限积分的连续性，知

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

成立，所以常义积分确实是反常积分的特殊情况.

3. 有的反常积分通过变量代换后成为常义积分，而有的常义积分通过变量代换后也可成为反常积分，请解释其中的原因.

**答** 有的反常积分通过变量代换后成为常义积分，而有的常义积分通过变量代换后也可成为反常积分. 由于常义积分是反常积分的特殊情况，所以反常积分通过变量代换后成为常义积分，还是要认为反常积分经过变换后仍是反常积分；所以如果经过换元后反常积分变成了常义积分，那么就可以按常义积分去求积分. 而常义积分通过变量代换后成为反常积分，则是常义积分看成反常积分再换元的结果.

## 四、教材习题全解

### 习题 6-1

#### A 类

1. 判别下列反常积分的收敛性，如果收敛，则计算反常积分的值：

# 三、教材思考题解疑

## 第1节 微分方程的基本概念

1. 是否所有的微分方程都存在有通解？微分方程的通解是否包含了方程的所有解？

**解** 微分方程不一定存在解，更不一定存在通解，如 $y'^2+1=0$. 微分方程的通解也不一定能包含方程的所有解.

2. 二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0 \end{cases}$$

的几何意义是什么？

**解** 表示通过点$(x_0,y_0)$且该点处切线斜率为 $y'_0$的一条积分曲线.

## 第2节 一阶微分方程

1. 设 $y_1(x)$ 是微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的一个特解，则 $y=Cy_1(x)$ ($C$ 为任意常数) 是方程的通解吗？为什么？

**解** $y_1(x)=0$ 时不是方程的通解，因为此时本质上不含一任意常数.

2. 已知 $y=x^4$ 是微分方程 $xy'-2y=2x^4$ 的一个特解，$y=x^2$ 是对应的齐次方程的一个特解，则 $y=Cx^2+x^4$ 是微分方程的通解吗？为什么？

**解** 是方程的通解，因为它含有一个任意常数，且是方程的解.

## 第3节 可降阶的高阶微分方程

对微分方程 $y''=f(y,y')$，设 $y'=p$，其中 $p=p(y)$，为什么不设为 $y'=p=p(x)$？

**解** 否则，此时方程为 $p'(x)=f(y,p)$，形式上含有三个变量 $y,p,x$.