

第1章 函数 极限 连续

数一 (注: 下面题号后括号内数字为考题年份. 题号标红色的题有些步骤要用到后面知识, 以后再做.)

1-1(88) 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

1-2(90) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-3(90) 设 a 是非零常数, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-4(91) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-5(91) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

1-6(92) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ()

(A) 等于 2. (B) 等于 0. (C) 为 ∞ . (D) 不存在但不为 ∞ .

1-7(93) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

1-8(94) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$, 其中 $a^2 + c^2 \neq 0$, 则必有 ()

(A) $b = 4d$. (B) $b = -4d$ (C) $a = 4c$ (D) $a = -4c$

1-9(95) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-10(96) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-11(96) 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

1-12(97) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-13(00) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right]$.

1-14(03) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-15(03) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

1-16(06) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-17(06) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}$.

1-18(07) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

1-19(08) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

1-20(08) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ()

- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

1-21(09) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 ()

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$ (C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$

1-22(10) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = ()$

- (A) 1. (B) e . (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a} .

1-23(11)

(1)证明:对任意正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

(2)设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

1-24(11) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

1-25(13) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则 ()

(A) $k = 2, c = -\frac{1}{2}$. (B) $k = 2, c = \frac{1}{2}$ (C) $k = 3, c = -\frac{1}{3}$ (D) $k = 3, c = \frac{1}{3}$

1-26(14) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^t - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

1-27(15) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-28(15) 设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

1-29(16) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-30(17) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 ()

(A) $ab = \frac{1}{2}$. (B) $ab = -\frac{1}{2}$ (C) $ab = 0$ (D) $ab = 2$

1-31(18) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-32(18) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ ($n = 1, 2, \cdots$). 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

数三

1-1(87) (是非题) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$. ()

1-2(87) 下列函数在其定义域内连续的是 ()

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$. (B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

1-3(87) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

1-4(88) (是非题) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 均存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在. ()

1-5(88) 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$.

1-6(89) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 ()

- (A) $f(x)$ 是 x 等价无穷小. (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小.
(C) $f(x)$ 是比 x 更高价的无穷小. (D) $f(x)$ 是比 x 较低价的无穷小.

1-7(89) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

1-8(90) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-9(90) 设函数 $f(x) = x(\tan x)e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是 ()

- (A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

1-10(91) 下列各式中正确的是 ()

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = -e$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{-x} = e$

1-11(91) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 为给定的自然数.

1-12(92) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量? ()

- (A) x^2 (B) $1 - \cos x$ (C) $\sqrt{1-x^2} - 1$ (D) $x - \tan x$

1-13(93) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-14(98) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为 ()

- (A) 不存在间断点 (B) 存在间断点 $x=1$
(C) 存在间断点 $x=0$ (D) 存在间断点 $x=-1$

1-15(00) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ()

- (A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定为零
(C) 一定不存在 (D) 不一定存在

1-16(02) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-17(04) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-18(04) 函数 $f(x) = \frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界 ()

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

1-19(04) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 则 ()

- (A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点 (B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点
(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点 (D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

1-20(05) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-21(06) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-22(07) 同数一) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

1-23(07) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-24(08) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

1-25(08) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 则 $x=0$ 是函数 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 的 ()

- (A) 跳跃间断点 (B) 可去间断点 (C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

1-26(08) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-27(09) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-28(09) 同数一) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 ()

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$ (C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$

1-29(09) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 无穷多个

1-30(10) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{x} - (\frac{1}{x} - a)e^x] = 1$, 则 a 等于 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

1-31(10) 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有 ()

- (A) $g(x) < h(x) < f(x)$ (B) $h(x) < g(x) < f(x)$
(C) $f(x) < g(x) < h(x)$ (D) $g(x) < f(x) < h(x)$

1-32(11) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 ()

- (A) $k=1, c=4$ (B) $k=1, c=-4$ (C) $k=3, c=4$ (D) $k=3, c=-4$

1-33(11) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$.

1-34(12) 极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan x \cos x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-35(12) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

1-36(13) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用“ $o(x)$ ”表示比 x 高阶的无穷小, 则下列式子中错误的是 ()

- (A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ (B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$
(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$ (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

1-37(13) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

1-38(13) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值.

1-39(14) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 时, 则当 n 充分大时有 ()

- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ (C) $a_n > a - \frac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

1-40(14) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列结论中错误的是 ()

- (A) $a = 0$ (B) $b = 1$ (C) $c = 0$ (D) $d = \frac{1}{6}$

1-41(14 同数一) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^t - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

1-42(15) 设 $\{x_n\}$ 是数列. 则下列命题中不正确的是 ()

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$ (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

1-43(15 同数一) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-44(15 同数一) 设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

1-45(16) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

1-46(16) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

1-47(17 同数一) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 ()

- (A) $ab = \frac{1}{2}$ (B) $ab = -\frac{1}{2}$ (C) $ab = 0$ (D) $ab = 2$

1-48(18) 已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax+b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$, 求 a, b .

1-49(18 同数一) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.