武汉大学 2021-2022 第一学期

概率论与数理统计 B 期末试题 A

一、（12 分）若事件 A,B,C 相互独立：$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$。

求 (1) $P(AUBUC)$；(2) $P((A-B)|(AUBUC))$。

二、（12 分）小王去上海坐火车、汽车、飞机的概率分别为 $0.4,0.2,0.4$，而他迟到的概率分别为 $\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{12}$，求：(1) 求他迟到的概率；(2)如果他迟到了，他是坐汽车来的概率？

三、（12 分）住同一个小区的小李和小王每天下班时间在下午 5 点半和 6 点半之间，不妨看成均匀分布。记 A 表示他们回家时间相差在半小时之内这个事件，(1) 求 $P(A)$；(2) 一周（5 天）记 A 出现的次数为 Y，写出 Y 的概率分布律和分布函数。

四、（16 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$；

(1)确定常数 a，并求随机变量 X 和 Y 的边沿概率密度 $f_x(x);f_y(y)$；(2) X 和 Y 是否独立？(3) 求 $Z=\frac{1}{2}X-\frac{1}{3}Y$ 的概率密度。

五、（12 分）某生产线一次加工产品的合格率为 0.8，剩下的为废品，已知：合格品每件获利 80 元，而废品每件亏损 20 元。1、为保证每天的平均利润不低于 30000 元，问他们至少要加工多少件产品？2、为保证每天的利润不低于 30000 元的概率大于 95%，问他们至少要加工多少件产品？（$z_{0.05}=1.65$）

六、（12 分）若 $X_1\cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是样本方差。(1) 求 S^2 的期望和方差。(2) 选取常数 a,b，

使得 $t=a\frac{\overline{X}-b}{S}$ 服从 $t(n-1)$ 分布。

七、（12 分）若总体 X 在（0，θ）上服从均匀分布，θ 未知：$X_1,X_2,\ldots.X_n$ 为样本；

(1)求 θ 的矩估计；(2)求 θ 的极大似然估计；(3)它们是否为无偏估计. 并将不是无偏估计的估计化为无偏估计。(4) 比较两个无偏估计的有效性。

八、（12 分）某地发现一个锂矿石，取 25 个样本测试，发现品位的平均值为 11.13，样本方差为 6.25；如果说品位大于 10 即为高品位矿石。问：此矿是不是高品位的？（$\alpha=0.05$）（假设铁矿石品位近似服从正态分布）

已知：$t_{0.05}(25)=1.708,t_{0.05}(24)=1.712,t_{0.025}(25)=2.060,t_{0.025}(24)=2.064$

2021-2022 第一学期 概率B

一、因为 A.B.C 独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$，$P(ABC)=\frac{1}{8}$.

(1) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

(或者用 $P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})\underset{\text{对偶律}}{=}1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})\underset{\text{独立}}{=}1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$)

(2) $P(A-B\mid A\cup B\cup C)=\dfrac{P((A-B)\cap(A\cup B\cup C))}{P(A\cup B\cup C)}=\dfrac{P(A-B)}{P(A\cup B\cup C)}\leftarrow\because A-B\subseteq A\cup B\cup C$

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore P(A-B\mid A\cup B\cup C)=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{2}{7}$.

二、A：迟到．　B_i：乘坐第 i 种交通工具．$i=1,2,3$.

(1) $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)=P(B_1)\cdot P(A\mid B_1)+P(B_2)\cdot P(A\mid B_2)+P(B_3)\cdot P(A\mid B_3)$

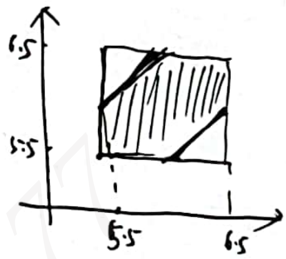
$$=0.4\times\frac{1}{8}+0.2\times\frac{1}{4}+0.4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{15}.$$

(2) $P(B_2\mid A)=\dfrac{P(B_2A)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)\cdot P(A\mid B_2)}{P(A)}=\dfrac{0.2\times\frac{1}{4}}{\frac{2}{15}}=\frac{3}{8}$

三、$\Omega=\{(x,y)\mid 5.5\le x\le 6.5,\ 5.5\le y\le 6.5\}$

x：小李下班时间．
y：小王．．．．．

$A=\{(x,y)\in\Omega \mid |x-y|\le 0.5\}$



(1) $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{1\times1-0.5^2}{1\times1}=\frac{3}{4}$.

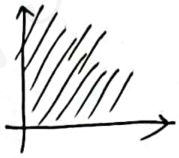
(2) $Y\sim B(5,\frac{3}{4})$

$P(Y=k)=C_5^k(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{5-k}$，$k=0,1,2,3,4,5$.

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}0, & y<0\\ P(Y=0), & 0\le y<1\\ P(Y=0)+P(Y=1), & 1\le y<2\\ P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2), & 2\le y<3\\ \sum_{k=0}^{3}P(Y=k) & 3\le y<4\\ \sum_{k=0}^{4}P(Y=k) & 4\le y<5\\ 1, & y\ge5\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{1}{1024}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{64}, & 1\le y<2\\ \frac{106}{1024}, & 2\le y<3\\ \frac{376}{1024}, & 3\le y<4\\ \frac{781}{1024}, & 4\le y<5\\ 1 & y\ge5\end{cases}$$

四.(1) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy=1 \Rightarrow \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} a\, e^{-(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)}\,dxdy=1 \Rightarrow a\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{3}}dy=1 \Rightarrow 6a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{6}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}dy, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$



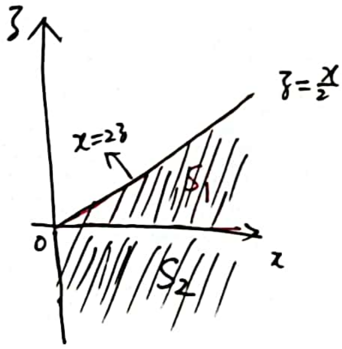
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

(2) $\because f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ $\therefore X,Y$ 独立

(3) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y)\cdot f(x,y)\,dxdy=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} h(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y)\,\frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}\,dy\right]dx$

令 $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=z$, $y=\frac{3}{2}x-3z$ $\quad dy=-3dz$, $\quad y=0 \longleftrightarrow z=\frac{x}{2}$, $y=+\infty \longleftrightarrow z=-\infty$ $\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=x-z$

$=\int_0^{+\infty}\left[\int_{\frac{x}{2}}^{-\infty} h(z)\frac{1}{6}e^{-(x-z)}(-3)dz\right]dx$



$=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}} h(z)\frac{1}{2}e^{-(x-z)}dz\right]dx = \iint\limits_{S_2} h(z)\frac{1}{2}e^{-(x-z)}dz\,dx+\iint\limits_{S_1} h(z)\frac{1}{2}e^{-(x-z)}dz\,dx$

$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_0^{+\infty} h(z)\frac{1}{2}e^{-x}e^{z}dx\right]dz+\int_0^{+\infty}\left[\int_{2z}^{+\infty} h(z)\frac{1}{2}e^{-x}e^{z}dx\right]dz$

$S_2=\{(x,z)\mid -\infty<z<0,\ 0<x<+\infty\}$

$=\int_{-\infty}^{0} h(z)\frac{1}{2}e^{z}dz+\int_0^{+\infty} h(z)\frac{1}{2}e^{-z}dz$

$S_1=\{(x,z)\mid 0<z<+\infty,\ 2z<x<+\infty\}$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{z}, & z<0\\ \frac{1}{2}e^{-z}, & z\geq 0\end{cases}$

五、 X_i：第 i 件产品的利润

X_i	80	-20
P	0.8	0.2

$\mu = E(X_i) = 80\times0.8 + (-20)\times0.2 = 60$

$E(X_i^2) = 80^2\times0.8 + (-20)^2\times0.2 = 5200$

$\sigma^2 = D(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = 5200 - 60^2 = 1600$

$\sigma = 40.$

设需至少加工 n 件产品

(1) $E(X_1+\cdots+X_n) \geqslant 30000$

$E(X_1)+\cdots+E(X_n) \geqslant 30000$

$60n \geqslant 30000 \Rightarrow n \geqslant 500$

(2) $P(X_1+\cdots+X_n \geqslant 30000) \geqslant 0.95$

$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \geqslant \frac{30000-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \geqslant \Phi(1.65)$

$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \geqslant \frac{30000-60n}{40\sqrt{n}}\right) \geqslant \Phi(1.65)$

$1-P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant \frac{30000-60n}{40\sqrt{n}}\right) \geqslant \Phi(1.65)$

$1-\Phi\left(\frac{30000-60n}{40\sqrt{n}}\right) \geqslant \Phi(1.65)$

$\Phi\left(\frac{60n-30000}{40\sqrt{n}}\right) \geqslant \Phi(1.65)$

$\frac{60n-30000}{40\sqrt{n}} \geqslant 1.65$

~~$n \geqslant 525.2$~~ $n \geqslant 526$ 至少需加工 526件.

六. (1) 由 P_{205} 定理6.2.1 知 $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

P_{213} 定理6.3.1(2)知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\therefore E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1$

$D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$

$\left(\because E(\chi^2(n-1)) = n-1,\quad D(\chi^2(n-1)) = 2(n-1)\right)$

$\therefore \frac{n-1}{\sigma^2}E(S^2) = n-1 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2$

$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2) = 2(n-1) \Rightarrow D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$

(2) 由 P_{213} 定理6.3.1(4)知

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，即 $\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t(n-1)$

$\therefore a=\sqrt{n}，b=\mu.$

七. (1) $E(X)=\bar{X}$. $\frac{0+\theta}{2}=\bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_1=2\bar{X}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\frac{1}{\theta^n}, \quad 0\le x_1,\cdots,x_n\le\theta$

要 $L(\theta)$ 取值越大，即 θ 越小越好，又 $x_1,\cdots,x_n\le\theta$

$\therefore \hat{\theta}=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$.

故 θ 之极大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$

(3) $E(\hat{\theta}_1)=E(2\bar{X})=2E(\bar{X})=2E(X)=2\times\frac{0+\theta}{2}=\theta$ ∴ 矩估计量为无偏估计

$E(\hat{\theta}_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx$

$X\sim U[0,\theta]$

$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 1 & x>\theta\end{cases}$

$\because F_{\hat{\theta}_2}(x) \xlongequal{P126(3.7.7)} F_X^n(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^n}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$

$\therefore f_{\hat{\theta}_2}(x)=F'_{\hat{\theta}_2}(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\because E(\hat{\theta}_2)=\int_0^\theta x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\int_0^\theta\frac{nx^n}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta\ne\theta$ ∴ 极大似然估计量不是无偏估计.

$\because E(\hat{\theta}_2)=\frac{n}{n+1}\theta$ $\therefore$ $E(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2)=\theta$ $\therefore$ $\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$ 为无偏估计.

(4) $D(\hat{\theta}_1)=D(2\bar{X})=4D(\bar{X})=4\cdot\frac{1}{n}D(X)=4\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$

$D(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2)=\frac{(n+1)^2}{n^2}D(\hat{\theta}_2)$

$E(\hat{\theta}_2^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\int_0^\theta\frac{nx^{n+1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$

$\therefore D(\hat{\theta}_2)=E(\hat{\theta}_2^2)-E^2(\hat{\theta}_2)=\frac{n}{n+2}\theta^2-(\frac{n}{n+1}\theta)^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$

$\therefore D(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2=\frac{\theta^2}{n(n+2)}<\frac{\theta^2}{3n}$ （$n>1$ 时）

$\therefore$ $\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$ 有效.

八. $H_0: \mu = 10$　　$H_1: \mu > 10$

检验统计量: $\frac{\bar{x}-10}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

拒绝域 $W = \left\{ \frac{\bar{x}-10}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha}(n-1) \right\} = \left\{ \frac{\bar{x}-10}{s/5} > 1.712 \right\}$

$s^2 = 6.25 \Rightarrow s = 2.5$

$\because \frac{\bar{x}-10}{s/5} = \frac{11.13-10}{2.5/5} = 2.26 > 1.712$

在拒绝域中，拒绝 H_0，接受 H_1，即此矿是高品位的.