第 9 章　多元函数微分法及其应用

本章讨论多元函数的微分学．多元函数是一元函数的发展，其基本概念、理论和方法与一元函数中的概念、理论、方法有很多相似之处．只是由于自变量的增加，而使问题变得多样和复杂些．

对于多元函数的讨论，我们将着重于二元函数．以二元函数为例，讨论多元函数的性质．从一元函数到二元函数，在内容和方法上有一些会有实质性的差别和变化，而从二元函数到三元函数乃至一般的 n 元函数，只是形式上的不同，没有本质的区别．因此，掌握了二元函数的相关理论和方法后，很容易将其推广到一般的多元函数中去．

本章的主要内容有：多元函数的基本概念，多元函数的极限与连续；多元函数的偏导数与微分；多元函数的偏导数及微分的应用等．

第 1 节　多元函数的基本概念

1.1　n 维空间中的点集

我们知道，实数轴上的点与实数一一对应，直角坐标系下，平面上的点与有序实数对 (x,y) 一一对应，空间中的点与有序三元实数组 (x,y,z) 一一对应，若用 $\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 元有序实数组的全体的集合，即

$$\boldsymbol{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_k\in\boldsymbol{R},k=1,2,\cdots,n\},$$

由平面上的点与实数对的对应关系可得，实平面上的点的集合，等同于二元有序实数组的集合 $\boldsymbol{R}^2=\left\{(x,y)\,|\,x\in\boldsymbol{R},y\in\boldsymbol{R}\right\}$，称之为 2 维空间．空间中的点等同于三元有序实数组的集合 $\boldsymbol{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x\in\boldsymbol{R},y\in\boldsymbol{R},z\in\boldsymbol{R}\}$，称之为 3 维空间．与 n 元数组对应的点的集合 $\boldsymbol{R}^n$，称为 n 维空间．

一般地，对于满足某种条件的点的集合可记为

$$E=\{M\mid M\text{ 满足的条件 }\}$$

如：平面上的点集 $E=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2<4\right\}$ 表示平面上以点 $(1,1)$ 为圆心，半径为 2 的圆内的所有点的集合；$E=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ 表示 3 维空间中以坐标原点为球心，半径为 1 的球面及球的内部的所有点的集合．

n 维空间的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可称为 n 维向量，n 维空间的两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离为

$$\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\ ,$$

称 $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 为 n 维向量的模．

1.2　邻域

对于任意正数 δ，所有到点 P_0 的距离小于 δ 的点的全体，称为点 P_0 的 $\delta-$ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$．若设 $P_0(x_0,y_0)\in\boldsymbol{R}^2$，称

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

为 P_0 的 $\delta-$ 圆邻域，即平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 $\delta-$ 圆邻域是以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，δ 为半径的圆内所有点的集合．

称 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$ 为 $P_0(x_0,y_0)$ 的去心 $\delta-$ 圆邻域．

平面点集 $\left\{(x,y)\mid|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\right\}$ 称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 $\delta-$ 方邻域．点集 $\left\{(x,y)\mid|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,((x_0,y_0)\ne(0,0)\right\}$ 称为 $P_0(x_0,y_0)$ 的 $\delta-$ 去心方邻域．

容易看出，点 $P_0(x_0,y_0)$ 的任一圆邻域一定包含某个方邻域；反之，任一个方邻域也一定包含一个圆邻域．通常习惯上所说的邻域是指 $P_0(x_0,y_0)$ 的 $\delta-$ 圆邻域．

思考题：

1．集合 $E_1=\{(x,y)|0<|x-1|<\delta,0<|y-2|<\delta\}$ 与 $E_2=\{(x,y)||x-1|<\delta$，$|y-2|<\delta,(x,y)\ne(1,2)\}$ 是否相同？

1.3 内点、外点、边界点、聚点

设 $E\subseteq \boldsymbol{R}^2$ ，点 $P(x,y)\in \boldsymbol{R}^2$ ，我们来考察点与点集的关系．

1．内点：若存在点 P 的某 $\delta-$ 邻域，使 $U(P_0,\delta)\subseteq E$ ，则称点 P 为集合 E 的内点．E 的全部内点构成的集合记为 E° 或 $\operatorname{int}E$ ．

2．外点：若存在点 P 的某 $\delta-$ 邻域，使 $U(P_0,\delta)\bigcap E=\varnothing$ ，则称点 P 为集合 E 的外点．

3．边界点：若在点 P 的任一邻域内，既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，即：$\forall\delta>0, U(P,\delta)\bigcap E\neq\varnothing$ ，$U(P,\delta)\setminus E\neq\varnothing$ ，则称点 P 为集合 E 的边界点．

E 的所有边界点的集合称为 E 的边界，记为 ∂E ．

4．聚点：若对 P 的任一去心邻域内，总有属于集合 E 的点，即 $\forall\delta>0$ ，$\mathring{U}(P,\delta)\bigcap E\neq\varnothing$ ，则称点 P 为集合 E 的聚点．E 的全部聚点记为 E' ．

5．孤立点：若 $P(x,y)\in E$ ，且不是 E 的聚点，即存在 P 的某 $\delta-$ 邻域，使 $U(P,\delta)\bigcap E=\{P\}$ ，则称点 P 为 E 的孤立点．

显然有：$\boldsymbol{R}^2=E^\circ\cup\partial E\cup E$ 的外点集；$\boldsymbol{R}^2=E'\cup E$ 的孤立点集 $\cup E$ 的外点集，且右端三个集合均互不相交．

集合 E 的内点必是聚点，外点一定不是聚点；而边界点可能是聚点，也可能不是聚点；孤立点一定是边界点，非孤立点的边界点一定是聚点．

例如：$E=\left\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2\le 4\right\}$ ，若 $P(x,y)\in\left\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<4\right\}$ ，则 P 为 E 的内点；若 $P(x,y)\in\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\right\}$ 或 $P(x,y)\in\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=0\right\}$ ，则 P 为 E 的边界点，也是聚点．

1.4 区域、闭区域

设集合 $E\subset\boldsymbol{R}^2$ ，

1．开集：若集合 E 中的所有点都是 E 的内点，则称 E 为 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个开集．

2．闭集：若 E 的余集 $E^c=\boldsymbol{R}^2\setminus E$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的开集，即 E 的所有聚点都属于 E ，则称 E 为 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个闭集．

称集合 $\bar{E}=E\bigcup E'$ 为集合 E 的闭包．

如：$\left\{(x,y)\,|\,0\le x^2+y^2\le 4\right\}$ 为 $\boldsymbol{R}^2$ 中闭集，$\left\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<2\right\}$ 为 $\boldsymbol{R}^2$

中开集，$\left\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2\le 4\right\}$ 既不是 $\boldsymbol{R}^2$ 中开集，也不是 $\boldsymbol{R}^2$ 中闭集．

关于开集和闭集，有如下结论．

定理 1.1　(1) 空集 $\varnothing$ 与全集 $\boldsymbol{R}^2$ 是开集；任意多个开集之并为开集；有限多个开集之交为开集．

(2) 空集 $\varnothing$ 与全集 $\boldsymbol{R}^2$ 是闭集；有限多个闭集之并为闭集；任意多个闭集之交为闭集．

3．有界集：设有一定点 $P_0(x_0,y_0)\in E$ ，$E\subseteq \boldsymbol{R}^2$ ，若 $\exists M>0$ ，使得 $\forall P(x,y)\in E$ ，有 $|P_0P|\le M$ ，则称 E 是有界集，否则称 E 是无界集．

4．区域：设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个开集，如果对 D 中的任意两点 P_1,P_2，都可用 D 内的一条折线 (由有限条直线段连接起来的连续曲线) 将 P_1 与 P_2 连接起来，则称 D 是一个连通的开集．连通的开集称为开区域，简称为区域．

5．闭区域：区域与它的边界一起所构成的集合，称为闭区域．

如：$D_1=\left\{(x,y)\,|\,0\le x^2+y^2\le 4\right\}$ 是闭区域；$D_2=\left\{(x,y)\,|\,x^2>y\right\}$ 是开区域；$E_1=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\right\}$ 是闭集，但不是闭区域；$E_2=\left\{(x,y)\,|\,xy>0\right\}$ 是开集，但不是开区域．

思考题：

2．无限多个开集之交是否一定为开集；无限多个闭集之并是否一定为闭集．

3．设 $G=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\middle|\, m,n\in N\right\}$ ，试指出其边界点及聚点．

1.5* 平面点列的极限

设有平面上的点列 $\{M_n\}$ ，若存在一点 A，具有以下性质：对于任意给定的正数 ε ，总存在 $N\in \boldsymbol{Z}^+$ ，当 $n>N$ 时，恒有 $M_n\in U(A,\varepsilon)$ ，则称点 A 为点列 $\{M_n\}$ 的极限．记作

$$\lim_{n\to\infty} M_n=A \quad \text{或} \quad M_n\to A(n\to\infty)\ .$$

若点列 $\{M_n(x_n,y_n)\}$ 以 $A(x_0,y_0)$ 为极限，可写为 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)$ ．

定理 1.2　平面点列 $\{M_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $A(x_0,y_0)$ 的充分必要条件是：对应的坐标数列 $\{x_n\}$ ，$\{y_n\}$ 分别收敛于 x_0,y_0 ．即

$$\lim_{n\to\infty} M_n=A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=x_0, \lim_{n\to\infty} y_n=y_0\ .$$

证　必要性．设 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=A$ ，$\forall\varepsilon>0$ ，$\exists N_0\in \boldsymbol{Z}^+$ ，当 $n>N_0$ 时，有

$$|x_n - x_0| \le \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon \ ,$$
$$|y_n - y_0| \le \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon \ ,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ， $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

充分性．设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ ．则对 $\forall\varepsilon > 0$ ，$\exists N_1 \in \boldsymbol{Z}^+$ ，当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ；$\exists N_2 \in \boldsymbol{Z}^+$ ，当 $n > N_2$ 时，有 $|y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ．取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，当 $n > N$ 时，$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$ ，故 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$ ． ∎

定理 1.3(柯西收敛定理)　平面点列 $\{M_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对 $\forall\varepsilon > 0$ ，$\exists N_0 \in \boldsymbol{Z}^+$ ，当 $n, m > N_0$ 时，有

$$|M_n M_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \varepsilon \ .$$

证明略去．

【例 1.1】　证明：P_0 是 E 的聚点的充分必要条件是：存在互异的点列 $\{P_n\} \subseteq E$ ，$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ ．

证　充分性．若存在 $\{P_n\} \subset E$ ，$P_n \ne P_0$ ，$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ ．则对 $\forall\varepsilon > 0$ ，$\exists N_0 \in \boldsymbol{Z}^+$ ，当 $n > N_0$ 时，$P_n \in \mathring{U}(P_0, \varepsilon)$ ，又 $P_n \in E$ ，故在 P_0 的任一去心邻域 $\mathring{U}(P_0, \varepsilon)$ 中都含有 E 中的点，所以 P_0 是 E 的聚点．

必要性．若 P_0 是 E 的聚点，则对 $\forall\varepsilon > 0$ ，$\exists P \in \mathring{U}(P_0, \varepsilon) \cap E$ ．令 $\varepsilon_1 = 1$ ，则存在 $P_1 \in \mathring{U}(P_0, \varepsilon_1) \cap E$ ，令 $\varepsilon_2 = \min\left\{\dfrac{1}{2}, |P_1 - P_0|\right\}$ ，则存在 $P_2 \in \overset{0}{U}(P_0, \varepsilon_2) \cap E$ ；且显然 $P_2 \ne P_1$ ，如此下去，令 $\varepsilon_n = \min\left\{\dfrac{1}{n}, |P_{n-1} - P_0|\right\}$ ，则存在 $P_n \in \mathring{U}(P_0, \varepsilon_n) \cap E$ ，且 P_n 与 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ 互异．

无限地重复以上步骤，得到 E 中的各项互异的点列 $\{P_n\}$ ，$P_n \ne P_0$ ，且由 $|P_n - P_0| < \varepsilon_n \le \dfrac{1}{n}$ ，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ ． ∎

1.6　多元函数

在一元函数中我们已知，一元函数是实数集中的子集到子集的映射，类似地，多元函数是空间中的点集到实数集中的子集的映射，多元函数与一元函数的区别在于自变量的个数由一个增加到多个．

下面我们以二元函数为主，讨论其相应的性质．其结果可以平行推广到二元以上的函数中去．

定义 1.1　设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个非空子集，从 D 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射 f 称为定义在 D 上的一个二元函数，记作

$$f: D \subseteq \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R} \quad \text{或} \quad (x,y) \mapsto z = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in D\ .$$

定义 1.1′ 设 D 是一个非空平面点集，$\boldsymbol{R}$ 为实数集，如果对于 D 中的每一个点 $P(x,y)$，按照某一确定的对应法则 f，在 $\boldsymbol{R}$ 中有唯一一个实数 z 与之对应，则称在 D 上定义了一个二元函数 f，记作：$z = f(x,y)$，$(x,y) \in D$．其中 x,y 称为函数 f 的自变量，z 称为函数 f 的因变量，D 称为 f 的定义域．

类似可得，如果 V 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的非空子集，从 V 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射 f 称为定义在 V 上的一个三元函数，记作：$u = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in V$．

一般地，n 元函数可写作：

$$y = f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\quad P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^n\ .$$

二元函数的图像为 3 维空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的点集：$\left\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\right\}$，一般它表示的是三维空间中的一张曲面，该曲面在空间直角坐标系中 xOy 面上的投影即为二元函数的定义域．

与一元函数类似，由某个解析式表示的多元函数的定义域是所有使算式有意义的自变量的点所构成的集合．

例如：函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的定义域为 $\left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\right\}$；

函数 $u = \sqrt{z - x^2 - y^2}$ 的定义域为 $\left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le z\right\}$．

思考题：

4．设 $z = f(x,y)$ 为二元函数，试问 $f(a,y)$（a 为常数）能否写为 $f(y)$？

5．$z = f(x,y)$ 与 $z = f(xy)$ 是否相等？

6．$z = \ln[x(x-y)]$ 与 $z = \ln x + \ln(x-y)$ 是否表示同一函数？为什么？

7．设 $I_1 = \int_0^1 (a+bx)^2 \,\mathrm{d}x$；$I_2 = \int_a^b (1+x^2)\,\mathrm{d}x$．问它们是否为 a,b 的二元函数？

习题 9-1

A 类

1．设集合 $E = \left\{(x.y) \middle| 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$，问点 $(1,2)$，$(2,0)$，$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，$(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 分别为集合的什么点？

2．求下列集合的内点，外点，边界点．

(1) $E_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$ ；　　(2) $E_2=\left\{(x,y)\middle|x^2\le y\right\}$ ；

(3) $E_3=\left\{(x,y)\middle|1\le y^2\le x^2+1\right\}$ ．

3．判断下列集合中，哪些是开集，闭集，有界集及区域．并指出其聚点和边界点．

(1) $E_1=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2, x\le y\le 3\right\}$ ；　　(2) $E_2=\left\{(x,y)\middle|1\le \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}<5\right\}$ ；

(3) $E_3=\left\{(x,y)\middle|x^3<y^2, x>0\right\}$ ；　　(4) $E_4=\left\{(x,y)\middle|xy\ne 0\right\}$ ；

(5) $E_5=\left\{(x,y)\middle|xy=0\right\}$ ．

4．求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{x}\ln\sqrt{x+y}$ ；　　(2) $z=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$ ；

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ ；　　(4) $u=\arcsin\dfrac{z}{x^2+y^2}$ ．

5．求解下列各题．

(1) 设 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$ ，求 $f(x,y)$ ．

(2) 设 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\arctan\dfrac{x}{y}$ ，求 $f(tx,ty)$ ．

(3) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，若 $y\ne 0$ ，求 $f(1,\dfrac{x}{y})$ ．

6．设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$ ．若当 $y=1$ 时，$z=x$ ．求函数 f 和 z ．

7．设 $F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(x-y)$ ，$F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$ ，求 $F(x,y)$ ．

B 类

1．证明：闭区域必为闭集．举例说明反之不成立．

2．试仿照 R^2 中点的邻域的定义，写出 $\boldsymbol{R}^n$ 中点的邻域的定义．

3．给 n 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的每一个元 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 赋予范数 $\|X\|=\sqrt{x_1{}^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 后，称 $\boldsymbol{R}^n$ 为欧几里得(Euclid)空间，其范数 $\|X\|$ 称为向量 X 的欧几里得长度．试证，范数有下列性质：

(1) $\|X\|\ge 0$ ；

(2) $\|\lambda X\|=|\lambda|\|X\|,\quad \forall\lambda\in R$ ；

(3) $\|X+Y\|\le\|X\|+\|y\|,\quad \forall x,y\in R^n$ ．(三角不等式)

第 2 节　多元函数的极限及连续性

2.1　多元函数的极限

下面我们以二元函数为例，给出多元函数的极限的概念．

定义 **2.1**　设 f 是定义在 $D\subset \boldsymbol{R}^2$ 上的一个二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点．若存在常数 A ，使得对 $\forall\varepsilon>0$ ，$\exists\delta>0$ ，当点 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时，有 $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$ 成立．则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当点 $P(x,y)$ 趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ ，也记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$ ．

称此极限为二重极限．

注　① 二重极限的定义也可表示为：

$\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon$（或当 $|x-x_0|<\delta$ ，$|y-y_0|<\delta$ ，且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ ）时，$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$ ．

② 对于多元函数的极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A$ ，由于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域是一个平面点集，点 $P(x,y)$ 趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，可沿邻域内的任意曲线，因此，二重极限存在的充分必要条件是：当点 $P(x,y)$ 在邻域内以任何方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都以常数 A 为极限．如果点 $P(x,y)$ 在邻域中以不同的方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋近于不同的常数，则便可断定 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处无极限存在．

③ 一元函数的极限运算法则可平行地推广到二元函数的极限运算上来．

思考题：

1．二元函数极限的定义对于 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数定义域的边界点的情形是否适用？

2．对于二元函数 $f(x,y)$ 来说，当 $P(x,y)$ 沿任意直线趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，极限值都存在且相等，问 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)$ 是否存在？

【例 2.1】　用定义验证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$ ．

解　因为　$x^2 \le x^2 + y^2$，$y^2 \le x^2 + y^2$，所以，

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 ,$$

于是　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$，当 $|x| < \delta$，$|y| < \delta$，且 $(x,y) \ne (0,0)$ 时，

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| \le x^2 + y^2 < (\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}})^2 + (\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}})^2 = \varepsilon ,$$

故有　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$． ▮

【例 2.2】　求极限　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x}$．

解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [\frac{\ln(1+xy)}{xy} \cdot y]$

因为　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy} \overset{u=xy}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x} = 0 .$$ ▮

【例 2.3】　讨论极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 是否存在．

解　考虑 $y = kx\ (k \ne 0)$，即让动点沿直线 $y = kx$ 趋近于原点，因

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{kx^2}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2} ,$$

故当点沿直线 $y = kx$ 趋近于原点时，函数趋近于数 $\frac{k}{1+k^2}$，此值与 k 的取值有关，即当 k 取不同的值时，函数趋近于不同的常数，故当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数的极限不存在． ▮

思考题：

3．运算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 0$ 正确吗？

4．因为 $\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}$ 不存在，对吗？

2.2* 二次极限

如果对于任意的 $y \ne y_0$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$，进一步，若 $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y)$ 存在，则称它为

先 $x\to x_0$ ，后 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 的二次极限（也称为累次极限），记为 $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y))$ ．

同样可定义先 $y\to y_0$ ，后 $x\to x_0$ 时 $f(x,y)$ 的二次极限：

如果对于任意的 $x\neq x_0$ ， $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\psi(x)$ ，进一步，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$ 存在，则称它为先 $y\to y_0$ ，后 $x\to x_0$ 时 $f(x,y)$ 的累次极限．记为 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))$ ．

二次极限与二重极限的关系：

1．二次极限与二重极限是完全不同的极限概念，二重极限的存在，不能保证二次极限存在；两个二次极限都存在，也不能保证二重极限存在．

2．若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ ，且对任意 $y\neq y_0$ ， $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在，则 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$ ．即 $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y))=A$ ．

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ ，且对任意 $x\neq x_0$ ， $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\psi(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$ ．即 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))=A$ ．

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ ，且 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y))$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y))=\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y))=A$ ．

3．若两个二次极限存在，但不相等，则二重极限不存在．

【例 2.4】　讨论下列函数在 $(0,0)$ 点处的二重极限与二次极限．

(1) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ ；　　(2) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ ；

(3) $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$ ；　　(4) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$

解　(1) 因 $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2}{x^2+y^2})=0$ ； $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^2}{x^2+y^2})=1$ ，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ 不存在．

(2) 显然 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在， $\lim\limits_{y\to 0}\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 也不存在，即两个二次极限不存在，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 也不存在．

(3) 因 $\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x})$ 不存在；因为 $\lim\limits_{y\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}=0$ ，故 $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}y\sin\dfrac{1}{x})=0$ ．且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y\sin\dfrac{1}{x}=0$ ．

(4) 显然 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$ ，而 $\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right)$ 不存在；同理 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right)$ 不存在．

因$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \le |x+y|$，故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$． ∎

【例 2.5】 证明：对于函数$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，有：

$\lim\limits_{x\to0}(\lim\limits_{y\to0}f(x,y))=\lim\limits_{y\to0}(\lim\limits_{x\to0}f(x,y))=0$，而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在．

证 因$\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$，故$\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=0$，

同理$\lim\limits_{x\to0}(\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2})=0$．

另一方面，若令$y=x$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=x\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=1$．

若令 $y=2x$，则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=2x\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{4x^2+1}=0$，故

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$不存在． ∎

2.3 多元函数的连续性

类似于一元函数的连续性，我们可以给出二元函数在一点连续的定义．

定义 **2.2** 设$z=f(x,y)$是定义在$D\subset \boldsymbol{R}^2$上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$是$D$的聚点且$P_0(x_0,y_0)\in D$，如果$\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续，$P_0(x_0,y_0)$称为函数$f(x,y)$的连续点；否则称$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$是间断的，$P_0(x_0,y_0)$称为函数$f(x,y)$的间断点．

函数在一点的连续性也可用"$\varepsilon-\delta$"语言描述：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall P\in U(P_0,\delta),\ \left|f(P)-f(P_0)\right|<\varepsilon.$$

如果函数$f(x,y)$在D内的每一点都连续，则称$f(x,y)$在D内连续，或称$f(x,y)$为D中的连续函数．

若区域D_1是闭区域，则当$f(x,y)$在D_1内的每一点都连续，且对于边界上的点P_0满足

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall P\in U(P_0,\delta)\cap D_1,\ \left|f(P)-f(P_0)\right|<\varepsilon,$$

则称$f(x,y)$在闭区域D_1上是连续的．

定义 **2.2′**设$z=f(x,y)$是定义在$D\subset \boldsymbol{R}^2$上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$是$D$的聚

点且 $P_0(x_0,y_0)\in D$ ．若在 $P_0(x_0,y_0)$ 处，自变量各自取得增量 $\Delta x=x-x_0$ ，$\Delta y=y-y_0$ ，则相应的函数取得增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$（称之为函数的全增量），若

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\Delta z=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]=0 ,$$

则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的连续点．

类似地，可定义 n 元函数的连续性．

对于多元函数，除可能存在间断点外，还可能存在间断线，间断面等．

多元连续函数的运算法则及多元函数的连续性与一元函数相同：

多元连续函数的和、差、积、商（分母函数不为零处）仍是连续函数，多元连续函数的复合函数也仍是连续函数．

由常量及具有不同变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而得到的，可用一个分析式子表示的多元函数称为多元初等函数．多元初等函数在其定义域内是连续的．

下面我们不加证明地给出有界闭区域上的多元连续函数的几个性质，其分别与有界闭区间上的一元连续函数的性质相对应：

定理 2.1(有界性)　有界闭区域上的多元连续函数在此闭区域上是有界的．

定理 2.2(最大值最小值定理)　有界闭区域上的多元连续函数在此区域上必存在最大值和最小值．

定理 2.3(介值定理)　有界闭区域上的多元连续函数，对于介于其最大值 M 和最小值 m 之间的任意值 μ ，必存在闭区域上的一点 $P_0(x_0,y_0)$ ，使得 $f(x_0,y_0)=\mu$ ．

定义 2.3　设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上有定义．如果对 $\forall\varepsilon>0$ ，$\exists\delta>0$ ，若 $\forall P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\in D$ ，当 $|P_1P_2|<\delta$ 时，总有 $|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$ 成立，则称 $z=f(x,y)$ 在 D 上一致连续．

即　$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_1,y_1)\in D,$ 当

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$（或 $|x_1-x_2|<\delta$ ，$|y_1-y_2|<\delta$ ）

时，都有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$ ，则称 $z=f(x,y)$ 在 D 上一致连续．

定理 2.4(一致连续性)　设 $D\subset \boldsymbol{R}^2$ 为有界闭区域，若 $f(x,y)$ 是 D 上的连续

函数，则 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续．

【例 2.6】 讨论 $f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$ 的连续性．

解 显然，当 $x^2+y^2\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ，$(k=0,1,2\cdots)$ 时，$f(x,y)$ 连续．故 $f(x,y)$ 的所有间断点是一系列以 $r=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}$ 为半径的同心圆上的点的集合． ▮

思考题:

5．如果一元函数 $f(x_0,y)$ 在 y_0 处连续， $f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续，那么二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否必然连续？反之是否成立？

习题 9-2

A 类

1．求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$ ； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ ；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)}$ ； (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{\ln(1+x)}$ ；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{\sin x}{x^2+y^2}}$ ； (6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ ．

2．证明下列极限不存在．

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ ； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ ．

3．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq0\\ y, & x=0\end{cases}$ ，求出函数的定义域，并讨论函数的连续性．

B 类

1．设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个去心邻域内有定义且 $f(x,y)>0$ ，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=A$ ，证明 $A\geq0$ ．

2．讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}, & y\neq0\\ 0, & y=0\end{cases}$ 的连续性．

3．证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 沿过此点的每一条射线 $x=t\cos\theta,y=t\sin\theta$（ $0\leq t<+\infty$ ）连续，即 $\lim\limits_{t\to0}f(t\cos\theta,t\sin\theta)=f(0,0)$ ．但函数在 $(0,0)$ 点不连续．

4．设函数 $f(x,y)$ 关于自变量 x 连续，又存在常数 $L>0$ ，使得对于任意两点 (x,y_1) ，(x,y_2) ，有 $\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$ ，证明函数 $f(x,y)$ 连续．

第 3 节　偏导数与全微分

3.1　偏导数的定义

我们知道，一元函数在某点的导数是该点处函数关于自变量的变化率，它反映了函数值随自变量变化的快慢程度．对于多元函数，同样可以讨论变化率．但因自变量的个数增加，函数的关系也就复杂一些．例如对于二元函数 $z=f(x,y)$ 来说，在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处，动点 $P(x,y)$ 在平面上沿不同的方向变化时，函数值 $f(x,y)$ 的变化快慢程度是不一样的．下面考虑 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处当变量沿两种特殊方式变化时的变化率，由此引出多元函数的偏导数的概念．

定义 **3.1**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某领域内有定义．当固定 $y=y_0$ ，而 x 在 x_0 处取得增量时，函数相应地取得增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0) ，$$

称其为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏增量．

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{3.1}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 x 的偏导数．记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ ，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ ，$z_x(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$ 等．

类似地，若固定 $x=x_0$ ，函数相应于变量 y 的偏增量为 $\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ ，若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \tag{3.2}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 y 的偏导数．记作：$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ ，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ ，$z_y(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$ 等．

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x ，y 的偏导数都存在，则称函数在

(x_0, y_0) 处可偏导．

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中的每一点 (x,y) 都是可偏导的，则称函数在 D 中可偏导．这些偏导数仍是 x，y 的函数，称它们为 $f(x,y)$ 的偏导函数，简称偏导数．记作 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$；$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$；$z_x(x,y), z_y(x,y)$；$f_x(x,y), f_y(x,y)$ 等．

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数，如 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为：

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}\ .$$

从定义中可看到，在讨论多元函数的偏导数时，我们只是让一个自变量变化，而固定了其余的变量．换句话说，即将多元函数视为某一个变量的一元函数，再考虑其求导数的问题．因此，计算多元函数的偏导数并不需要新的计算公式和方法，只需要注意在计算过程中函数是视为哪个变量的一元函数就行了．

思考题:

1．计算偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 时，能否先将 $y=y_0$ 代入 $f(x,y)$，再对 x 求导?

2．二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是几元函数，它的自变量是什么？

【例 3.1】 求 $z=x^2y+2y^2\ln x$ 在点(1,1)处的偏导数.

解 将 y 视为常量，对 x 求导，得 $z_x=2xy+2y^2\cdot\frac{1}{x}$；

将 x 视为常量，对 y 求导，得 $z_y=x^2+4y\ln x$；

所以 $z_x(1,1)=4$；$z_y(1,1)=1$． ▌

【例 3.2】 设 $u=\sqrt[z]{\frac{y}{x}}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$．

解 视 y,z 为常数，对 x 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{z}(\frac{y}{x})^{\frac{1}{z}-1}\cdot(-\frac{y}{x^2})$；

视 x,z 为常数，对 y 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}(\frac{y}{x})^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{x}$；

视 x,y 为常数，对 z 求导，得 $\frac{\partial u}{\partial z}=(\frac{y}{x})^{\frac{1}{z}}\cdot\ln(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{1}{z^2})$． ▌

【例 3.3】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f(x,y)$ 的偏导数．

解　当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

$$f_y(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\ ;$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，由偏导数的定义得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=0\ ,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{0^2+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0\ ;$$

所以
$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}\ ;$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}\ .$$

∎

注意：由例 2.3 知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续．由此例可知，对于多元函数来说，如果函数在某点处可偏导，并不能保证它在此点处是连续的，这与一元函数中关于函数的可导性与连续性之间的关系是不同的．

思考题：

3．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ ，$f_y(x_0,y_0)$ 存在，为什么不能推出 $f(x,y)$ 在该点连续?

4．考查函数 $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$ 在原点处的连续性与可导性.

【例 3.4】　设不为零的变量 x , y , z 满足方程 $xy=Rz$（ $R\neq 0$ 常数），证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial y}=-1$ ．

证　将方程变形为 $z=\dfrac{xy}{R}$ ，则有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{R}$ ；同理，将方程变形为 $y=\dfrac{Rz}{x}$ ，

则有 $\dfrac{\partial y}{\partial z}=\dfrac{R}{x}$ ； 将方程变形 $x=\dfrac{Rz}{y}$ ，得 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{Rz}{y^2}$ ；所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{y}{R}\cdot\frac{R}{x}\cdot(-\frac{Rz}{y^2})=-\frac{Rz}{xy}=-1\ . \qquad \blacksquare$$

此例的结果表明，偏导数记号与一元函数的导数记号间的一个区别：对于一元函数而言，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以看作是两个微分 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}x$ 之商，而多元函数的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 是一个整体的记号．

3.2 偏导数的几何意义

设 $z=f(x,y)$ 表示空间中的一个曲面，若固定 $y=y_0$ ，则 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 表示平面 $y=y_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 的交线，此交线位于平面 $y=y_0$ 上， $M(x_0,y_0,z_0)$ （ $z_0=f(x_0,y_0)$ ）为曲面上的点．由偏导数的定义知，$f_x(x_0,y_0)$ 等于一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数．由一元函数中导数的几何意义知， $f_x(x_0,y_0)$ 在几何上表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率．

同理，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 在几何上表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线 T_y 对 y 轴的斜率．

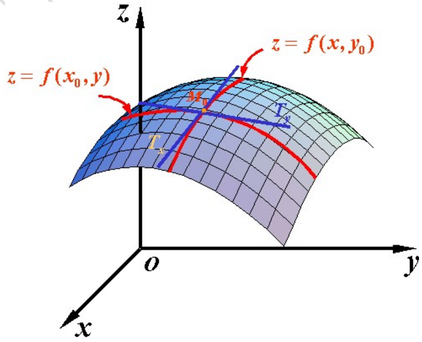


图 3.1

3.3 全微分

对于一元函数 $y=f(x)$ ，若在点 x 处可微，则 $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$ ，其中 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 为 $f(x)$ 的微分，是函数 $y=f(x)$ 的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的主要部分（线性主部），也是函数 $y=f(x)$ 的增量在点 x 处的局部线性近似．对多元函数，也可讨论相应的这种局部线性近似，从而建立全微分的概念．

下面我们以二元函数为例来讨论这一问题，先看一个例子．

设二元函数为 $z=f(x,y)=x^2y$ ．在点 (x_0,y_0) 处有改变量 $(\Delta x,\Delta y)$ 时，函数的全增量为

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)^2(y_0+\Delta y)-{x_0}^2y_0\\&=2x_0y_0\Delta x+x_0^2\Delta y+2x_0\Delta x\Delta y+y_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^2\Delta y\end{aligned}$$

当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，$2x_0\Delta x\Delta y+y_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^2\Delta y$ 是 ρ 的高阶无穷小，此时我们可以说 $2x_0y_0\Delta x+x_0^2\Delta y$ 就是 Δz 的线性主部．

定义 3.2　若函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域的内点 (x_0,y_0) 的全增量可表示为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \tag{3.3}$$

其中 A，B 是不依赖于 Δx，Δy，而仅与点 (x_0,y_0) 有关的两个常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是可微分的，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，记作：$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$ ．

全微分 $\mathrm{d}z$ 是全增量 Δz 的线性主部．

当函数在某平面区域 D 内处处可微时，称函数为 D 内的可微函数．

定理 3.1(可微的必要条件)　若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则

(1)　$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续．

(2)　$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可偏导，且 $A=f_x(x_0,y_0)$，$B=f_y(x_0,y_0)$．

证　(1) 因 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，即有

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

故 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=\lim\limits_{\rho\to 0}(A\Delta x+B\Delta y+o(\rho))=0$，亦即 $\lim\limits_{\rho\to 0}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$，故 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续．

(2) 由函数在 (x_0,y_0) 可微,得

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

令 $\Delta y=0$，则 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$，此时有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A$ ．故有　$A=f_x(x_0,y_0)$．

同理，令 $\Delta x=0$，可得 $B=f_y(x_0,y_0)$． ∎

类似于一元函数中的情形，我们约定自变量的增量等于自变量的微分，即 $\Delta x=\mathrm{d}x$，$\Delta y=\mathrm{d}y$，则函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 处的全微分可写为：

$$\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$$

若函数在区域 D 内的每一点都可微，则其全微分为

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\,\mathrm{d}x+f_y(x,y)\,\mathrm{d}y \text{ ；或 } \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \ .$$

对于三元函数 $u=f(x,y,z)$ ，可类似地给出可微和全微分的概念．若函数在区域 D 内的每一点都可微，则其全微分为

$$\mathrm{d}u=f_x(x,y,z)\,\mathrm{d}x+f_y(x,y,z)\,\mathrm{d}y+f_z(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

或 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$ ．

定理 3.1 给出了函数在一点可微的必要条件，需要注意的是，此定理的逆命题不成立，即函数在一点处连续或可偏导并不能保证其在此点可微．

【例 3.5】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，讨论函数在 $(0,0)$ 点处的连续性，可偏导性，可微性．

解 (1) 因 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=|x|\cdot\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le|x|$ ，$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ ，故

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \ ,$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$ ，故函数在 $(0,0)$ 点处连续．

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x\cdot0}{\sqrt{x^2+0^2}}}{x}=0$ ，类似地有 $f_y(0,0)=0$ ，即函数在 $(0,0)$ 可偏导．

(3) 函数在 $(0,0)$ 处的全增量为

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \ .$$

若函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则

$$\Delta z-[f_x(0,0)\,\mathrm{d}x+f_y(0,0)\,\mathrm{d}y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

应为 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小，但

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\mathrm{d}x+f_y(0,0)\mathrm{d}y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

不存在（例 2.3），所以假设不成立，函数在 $(0,0)$ 不可微． ▮

由该例可以看到,“多元函数在一点处可微”与“函数在该点连续且可偏导”是不等价的．该结论与一元函数时是不同的．

思考题：

5．若函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数都存在，是否 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 就是 $z=f(x,y)$ 的全微分？

那么，函数需要满足什么条件，才能保证其在一点处一定可微呢？下面的定理给出了函数在一点处可微的充分条件．

定理 3.2(**可微的充分条件**)　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内处处可偏导，且 $f_x(x,y)$ ，$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微．

证　设 Δx，Δy 充分小，$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为 (x_0,y_0) 的邻域内任意一点，则

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\ ,\end{aligned}$$

由一元函数的微分中值定理，有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\\&\qquad=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x\quad(0<\theta_1<1)\ ,\\&f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\quad(0<\theta_2<1)\ ,\end{aligned}$$

又因为 $f_x(x,y)$ ，$f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，故

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\alpha\ ,\quad\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\alpha=0\ ,$$

$$f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+\beta\ ,\quad\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\beta=0\ ,$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta z&=[f_x(x_0,y_0)+\alpha]\Delta x+[f_y(x_0,y_0)+\beta]\Delta y\\&=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y\end{aligned}$$

而

$$\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\left|\frac{\alpha\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|+\left|\frac{\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|$$

$$\le|\alpha|+|\beta|\to 0 \qquad (\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0)$$

因此 $\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$ ，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ，由定义可知，$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微． ■

【例 3.6】 求下列函数的全微分：

(1) $z=2x^2y+\arctan\dfrac{y}{x}$ ； (2) $u=\cos(x^2+y^2)+\mathrm{e}^{xyz}$ ．

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xy+\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\dfrac{y}{x^2})=4xy-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2+\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{1}{x})=2x^2+\frac{x}{x^2+y^2} ,$$

两个偏导数在除 $(0,0)$ 点外均连续，故

$$\mathrm{d}z=(4xy-\frac{y}{x^2+y^2})\mathrm{d}x+(2x^2+\frac{x}{x^2+y^2})\mathrm{d}y .$$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\sin(x^2+y^2)\cdot 2x+yz\,\mathrm{e}^{xyz}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\sin(x^2+y^2)\cdot 2y+xz\,\mathrm{e}^{xyz}$ ，

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy\,\mathrm{e}^{xyz}$ ，故

$$\mathrm{d}u=\left[yz\,\mathrm{e}^{xyz}-2x\sin(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x+\left[xz\,\mathrm{e}^{xyz}-2y\sin(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{e}^{xyz}\mathrm{d}z .$$

■

【例 3.7】 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，讨论函数在 $(0,0)$ 点处的连续性、可偏导性、可微性及偏导函数的连续性．

解 (1) 连续性：因

$$0<\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|<x^2+y^2\to 0\ (x\to 0,y\to 0) ,$$

故有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0) ,$$

函数 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续．

(2) 可偏导性：因

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=0 ,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}}{y}=0 ,$$

故 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导．

(3) 可微性：由上面已知，$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$，因

$$f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

而

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0 ,$$

故 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微．

(4)当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\\&=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

故

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

因 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$，$\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}f_x(x,y)$ 不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续．

同理可得

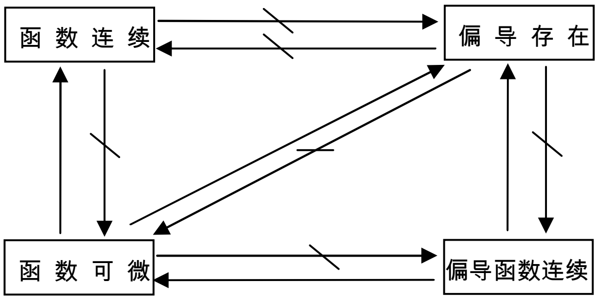
$$f_x(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处不连续． ∎

由此例可看到，偏导函数连续只是函数可微的充分条件，而不是必要条件．

多元函数在一点处的连续性，可偏导性，可微性及偏导函数的连续性之间的

关系如下：



下面简要说明微分的几何意义及其在近似计算中的应用．

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，记 $x=x_0+\Delta x$ ，$y=y_0+\Delta y$ ，则

$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho)\quad,$$

即

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho) \tag{3.4}$$

利用此式可得二元函数近似值的计算表达式

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)\quad.$$

若记

$$z=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)\quad, \tag{3.5}$$

此式表示空间过点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 且以 $\{A,B,-1\}$ 为法向量的平面．(3.4)式表明，如果函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则曲面在 (x_0,y_0) 附近的小部分可用一个平面来近似代替，这种近似代替体现了“以直代曲”的思想，此平面为曲面在 (x_0,y_0) 处的切平面(图 3.2)．关于切平面的有关内容，将在第 8 节中进一步的讨论．

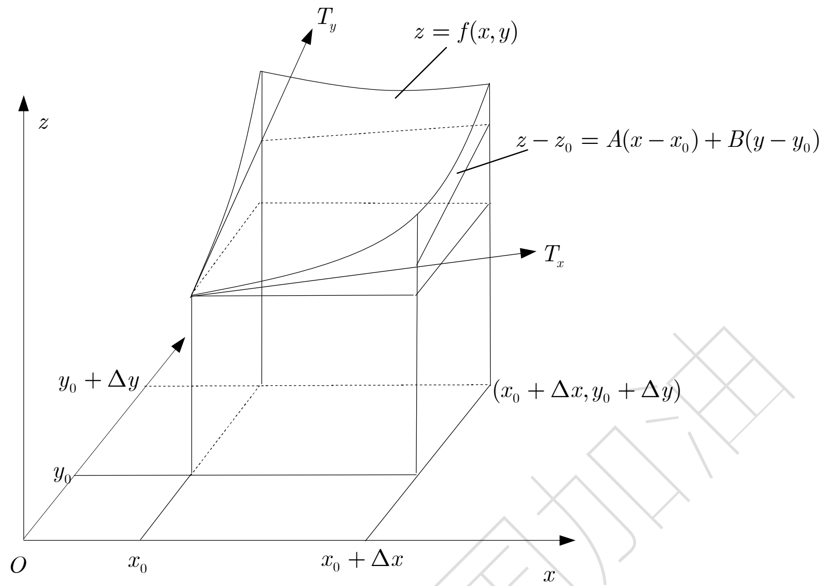


图 3.2

【例 3.8】　计算 $\sin 29^\circ\cdot\tan 46^\circ$ 的近似值．

解　设 $f(x,y)=\sin x\tan y$ ，取 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, $y_0=\dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x=-\dfrac{\pi}{180}$, $\Delta y=\dfrac{\pi}{180}$ ，因 $f(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})=\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}$ ；$f_x(x,y)=\cos x\cdot\tan y$ ，$f_y(x,y)=\sin x\cdot\sec^2 y$ ，$f_x(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$f_y(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})=1$ ，故

$$\begin{aligned}\sin 29^\circ\tan 46^\circ &\approx f(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})+f_x(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})\Delta x+f_y(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})\Delta y\\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\pi}{180})+\frac{\pi}{180}\approx 0.5023 .\end{aligned}$$ ∎

习题 9-3

A 类

1．求下列函数的偏导数．

(1)　$z=e^{xy}\sin(x^2+y^2)$ ；　　(2)　$z=\arcsin\dfrac{y}{x}$ ；

(3)　$z=(1+xy)^y$ ；　　(4)　$z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$ ；

(5)　$u=\sin\dfrac{xy^2}{1+z}$ ；　　(6)　$u=(xy)^z$ ．

2．求下列函数在指定点处的偏导数值．

(1) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(1,2)$ 处；　　(2) $z=y\sin(x+y)$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 处；

(3) $z=x^2\mathrm{e}^y+\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处；　　(4) $u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$ 在点 $(1,1,1)$ 处．

3．求函数的全微分．

(1) $z=x^2y+\dfrac{y}{2x}$ ；　　(2) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$ ；

(3) $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$ ；　　(4) $u=\mathrm{e}^{xyz}$ ；

(5) $u=x^{yz}$ ．

4．求曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2) \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 的切线关于 x 轴的倾角．

5．证明：函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，但偏导数不存在．

6．设 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，求 $f_x(0,0)$ ，$f_y(0,0)$ ．

7．设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，讨论其在 $(0,0)$ 点处的一阶偏导数及全微分是否存在．

8．利用全微分近似计算

(1) $\sqrt[3]{(2.02)^2+(1.97)^2}$ ；　　(2) $1.04^{2.02}$ ．

B 类

1．设 $u=z^{y^x}$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ ．

2．设 $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ．

3．证明函数 $z=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 连续，且偏导数存在，但在该点处不可微．

4．证明：若函数 $z=f(x,y)$ 满足不等式 $|f(x,y)|\le x^2+y^2$ ，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是可微的．

5．设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$ ，其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某邻域内连续．试问

(1) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时，$f_x(0,0)$ ，$f_y(0,0)$ 存在？

(2) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微？

6．扇形中心角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ，半径 $R=20\mathrm{cm}$ ．若将中心角增加 $\dfrac{\pi}{180}$ ，为使扇形面积不变，

应将半径缩短多少？

第 4 节　多元函数复合函数的求导法则

本节讨论多元复合函数的求导法则及一阶全微分形式不变性．

4.1　多元复合函数的求导法则

在一元函数中，我们介绍了复合函数求导的链式法则．下面将此法则推广到多元复合函数的情形中去．由于多元函数中的自变量有多个，其复合结构比一元函数复杂一些．多元复合函数的求导法则在多元函数微分学中起着重要作用．

下面按照复合结构的不同形式分别进行讨论．

1　一个自变量的情形

定理 4.1　设 $z=f(u,v)$ ，$u=u(t)$ ，$v=v(t)$ ．如果 $u=u(t)$ ，$v=v(t)$ 在点 t 处可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f\left[u(t),v(t)\right]$ 在点 t 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{4.1}$$

证　设自变量 t 有一个改变量 Δt ，相应地函数 $u=u(t)$ ，$v=v(t)$ 也有改变量 Δu ，Δv ，因为函数 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 处有连续偏导数，则有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)\ ,\ \rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\ ,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

因为 u ，v 在 t 处可导，故 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta u=0$ ，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta v=0$ ，所以有 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\rho=0$ ，又由

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2})}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}\cdot\sqrt{(\frac{\Delta u}{\Delta t})^2+(\frac{\Delta v}{\Delta t})^2}=0\ ,\end{aligned}$$

且 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ，得 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta t}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ，即有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\ .$$ ∎

上式中的 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 称为 z 对 t 的全导数．

为了分析清楚函数的变量间的关系，通常用图示形式来表示复合函数中变量间的关系．定理 4.1 中函数的变量之间的关系如图 4.1 所示．

定理 4.1 的结论可推广到更多个中间变量的情形．如：$z=f(u,v,w)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$，$w=w(t)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\ .$$

计算口诀：连线相乘，分线相加（图 4.2）.

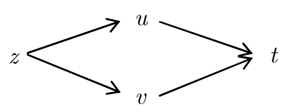


图 4.1

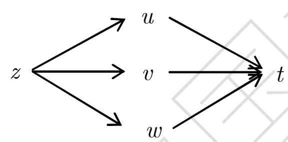


图 4.2

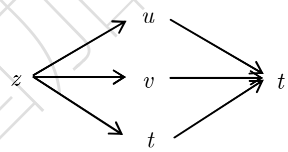


图 4.3

特别地，当某个变量既是中间变量又是自变量时，要注意区别其在求偏导过程中的地位．如：$z=f(u,v,t)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$．变量关系如图 4.3，故

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}\ .$$

注意上式中的两个记号 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\frac{\partial z}{\partial t}$ 各自的含义．等式左边的 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 是一元函数 z 对自变量 t 的导数；等式右边的 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 是三元函数 z 对中间变量 t 的偏导数，此时 u,v 看作常量．

【例 4.1】 设函数 $z=2u^2v^2+u\mathrm{e}^v$，$u=\ln t$，$v=\sin t$，求全导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$．

解 因 $\frac{\partial z}{\partial u}=4uv^2+\mathrm{e}^v$，$\frac{\partial z}{\partial v}=4u^2v+u\mathrm{e}^v$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\cos t$，故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(4uv^2+\mathrm{e}^v)\frac{1}{t}+(4u^2v+u\,\mathrm{e}^v)\cos t\\&=(4\ln t\sin^2 t+\mathrm{e}^{\sin t})\frac{1}{t}+(4\ln^2 t\sin t+\mathrm{e}^{\sin t}\ln t)\cos t\ .\end{aligned}$$ ∎

【例 4.2】 设 $z=f(x^2,\frac{\sin^2 x}{x})$，$f$ 有一阶连续偏导数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$．

解　令 $u=x^2$ ，$v=\dfrac{\sin^2 x}{x}$ ，则有 $z=f(u,v)$ ，从而有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\&=2x\cdot f_u(x^2,\frac{\sin^2 x}{x})+\frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}\cdot f_v(x^2,\frac{\sin^2 x}{x}) .\end{aligned}$$ ∎

注　有时为了方便和不引起混淆，将 $f_u(u,v)$ 简记为 f_1 ，$f_v(u,v)$ 简记为 f_2 ．即用 f_i 表示函数 f 对第 i 个中间变量的偏导数．借用此记号，上式可简写为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2xf_1+\frac{x\sin 2x-\sin^2 x}{x^2}\cdot f_2 .$$

2　多个自变量的情形

如果函数 $z=f(u,v)$ ，$u=\varphi(x,y)$ ，$v=\psi(x,y)$ ，有下面的结论：

定理 4.2　设函数 $u=\varphi(x,y)$ ，$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} ,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} .$$

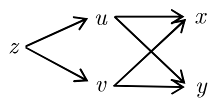


图 4.4

证略（与定理 4.1 的证明类似，参看图 4.4）．

【例 4.3】　设 $z=u^2\mathrm{e}^v$ ，$u=4xy$ ，$v=3x^2-2y$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ．

解　$\dfrac{\partial z}{\partial u}=2u\,\mathrm{e}^v$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial v}=u^2\mathrm{e}^v$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=4y$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=4x$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=6x$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2$ ，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2u\,\mathrm{e}^v\cdot 4y+u^2\mathrm{e}^v\cdot 6x=(32xy^2+96x^3y^2)\mathrm{e}^{3x^2-2y} ,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\,\mathrm{e}^v\cdot 4x+u^2\mathrm{e}^v\cdot(-2)=32x^2y(1-y)\mathrm{e}^{3x^2-2y} .$$ ∎

【例 4.4】　设 $z=f(xy,\dfrac{x^2}{y})$ ，f 有一阶连续偏导，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ．

解　设 $u=xy$ ，$v=\dfrac{x^2}{y}$ ，则 $z=f(u,v)$ ，从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=yf_1+\frac{2x}{y}f_2 ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=xf_1-\frac{x^2}{y^2}f_2 \ . \qquad \blacksquare$$

【例 4.5】 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中 f 为可微函数 . 证明：

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2} \ .$$

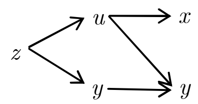


图 4.5

证 设 $u=x^2-y^2$ ，变量间的关系结构如图 4.5，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{yf'(u)}{f^2(u)}\cdot 2x \ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(\frac{\partial z}{\partial y})+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{f(u)}+\frac{f'(u)\cdot 2y^2}{f^2(u)}=\frac{f(u)+f'(u)\cdot 2y^2}{f^2(u)} \qquad (※)$$

故有 $$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'(u)}{f^2(u)}+\frac{f(u)+2y^2f'(u)}{y\cdot f^2(u)}=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{f(u)}=\frac{z}{y^2} \ . \qquad \blacksquare$$

注意：在式子（※）中，左右两边的 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$,($\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ）是不同的，左边的 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 是函数对自变量 y 的偏导数，而右边的（ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ）是函数对中间变量 y 的偏导数 .

【例 4.8】 设 $u=f(x,y,z)\,,y=\varphi(x,t)\,,t=\psi(x,z)$ ，$f\,,\varphi\,,\psi$ 有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

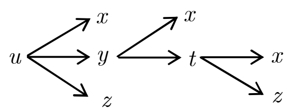


图 4.6

解 变量间的结构图如图 4.6 所示，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right] ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z} \ . \qquad \blacksquare$$

4.2 一阶全微分形式不变性

我们知道，一元函数的一阶微分具有微分形式不变性，即

$$\mathrm{d}y=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u \ .$$

对于二元函数 $z=f(x,y)$ 同样有类似的结论 .

若函数 $z=f(x,y)$ 可微，由微分知识得 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

设 $z=f(u,v)\,,u=\varphi(x,y)\,,v=\psi(x,y)$ ，$f\,,\varphi\,,\psi$ 有一阶连续偏导数，则由复

合函数求导的链式法则，有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})\mathrm{d}x+(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y)+\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y)=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v\ .$$

即不管变量是中间变量还是自变量，其全微分形式是完全一样的，这就是二元函数的一阶全微分形式不变性．

【例 4.7】　设 $z=\sin(2x+y)$ ，求 $\mathrm{d}z$ ．

解　$\mathrm{d}z=\mathrm{d}(\sin(2x+y))=\cos(2x+y)\mathrm{d}(2x+y)=\cos(2x+y)(2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

$$=2\cos(2x+y)\mathrm{d}x+\cos(2x+y)\mathrm{d}y\ .$$ ∎

【例 4.8】　$z=f(x-y^2,xy)$ ，f 有一阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ．

解　$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(x-y^2,xy)=f_1\mathrm{d}(x-y^2)+f_2\mathrm{d}(xy)$

$$=f_1\cdot(\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y)+f_2(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=(f_1+yf_2)\mathrm{d}x+(xf_2-2yf_1)\mathrm{d}y\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+yf_2\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=xf_2-2yf_1\ .$$ ∎

【例 4.9】　$z=f(x,u,v)$, $u=g(x,y)$, $v=h(x,y,u)$ ，f ，g ，h 均可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ．

解　$\mathrm{d}z=f_x\mathrm{d}x+f_u\mathrm{d}u+f_v\mathrm{d}v$

$$=f_x\mathrm{d}x+f_u(g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y)+f_v(h_x\mathrm{d}x+h_y\mathrm{d}y+h_u\mathrm{d}u)$$

$$=(f_x+f_ug_x+f_vh_x)\mathrm{d}x+(f_ug_y+f_vh_y)\mathrm{d}y+f_vh_u(g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y)$$

$$=(f_x+f_ug_x+f_vh_x+f_vh_ug_x)\mathrm{d}x+(f_ug_y+f_vh_y+f_vh_ug_y)\mathrm{d}y\ ,$$

故得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x+f_ug_x+f_vh_x+f_vh_ug_x$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_ug_y+f_vh_y+f_vh_ug_y$ ． ∎

从上面两个例子可看到，利用一阶全微分形式不变性求复合函数的偏导数，运算的层次较明确，不易出错，且计算相对较简单．

习题 9-4

A 类

1．求下列函数的一阶全导数或一阶偏导数，其中 f 有一阶连续的偏导数．

(1)　$z=\mathrm{e}^{x^2-2y}$ ，$x=\sin t$ ，$y=t^3$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ；

(2) $z=\sqrt{u}+\sin v$ ，$u=\ln x$ ，$v=x^2$ ，求 $\dfrac{dz}{dx}$ ；

(3) $z=u^2v-v^2u$ ，$u=x\cos y$ ，$v=y\sin x$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ；

(4) $z=x^2-y^2+t$ ，$x=\sin t$ ，$y=\cos t$ ，求 $\dfrac{dz}{dt}$ ；

(5) $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ；

(6) $u=f(x^2+y^2-z^2)$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ ；

(7) $u=f(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z})$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ ；

(8) $z=x^3f(2x+y,y\ln x)$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2．求下列函数的一阶全微分，其中 f，φ 有一阶连续偏导数．

(1) $u=\ln(e^{x+y}+e^{xy})$ ；　(2) $u=e^{2x}(y^2+\tan z)$ ；　(3) $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ；

(4) $z=\arctan\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ；　(5) $z=f(\sin x^2,x+y^2)$ ；　(6) $u=f(x,xy,xyz)$.

3．引入新的变量 u ，v ，设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$ ，变换方程式

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0 .$$

4．设 $z=xy\varphi(u)$ ，$u=\sin\dfrac{y}{x}$ ，$\varphi(u)$ 可导．证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy\varphi(u)$.

5．设 $z=e^{-x}-f(x-2y)$ ，$f(u)$ 可导，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6．设 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$ ，求 $\sec x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7．设 $z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$ ，$\varphi(u)$ 可导，求 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

B类

1．设 $z=f(x^2-y^2,\cos xy)$ ，$x=\rho\cos\theta$ ，$y=\rho\sin\theta$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial \rho}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

2．验证函数 $u(x,y)=x^nf(\dfrac{y}{x^2})$ 满足方程 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=nu$.

3．设 $u=f(x,y,t)$ ，$x=\sin(s^2+t^2)$ ，$y=e^{\frac{x}{s}}$ ，其中 f 有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

4．设 f 有一阶连续偏导数，且 $f(x,x^2)=1$ ，$f_x(x,x^2)=x$ ，求 $f_y(x,x^2)$.

5．设 $z=x^2f\left[1+\varphi(\dfrac{x}{y})\right]$ ，f ，φ 有一阶连续偏导数，求 dz .

6．设 $u=f(x,y)$ 是可微函数，

(1) 如果 $u=f(x,y)$ 满足方程 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，试证 f 在极坐标系中只与 θ 有关；

(2) 如果 $u=f(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}$，试证 f 在极坐标系中只是 ρ 的函数.

7．若函数 $f(x,y,z)$ 对任意实数 t 满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$，则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数．设 $f(x,y,z)$ 可微，试证：$f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数的必要条件是：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z).$$

8．设 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 点处可微，且 $f(1,1)=1$，$f_x(1,1)=2$，$f_y(1,1)=3$，$\varphi=f[x,f(x,x)]$，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$．

第 5 节　多元函数的高阶偏导数

我们知道，若一元函数的一阶导函数仍然可导，则其导函数称为函数的二阶导数，即高阶的导数是低一阶导函数的导数．对于多元函数也可类似地定义其高阶偏导数．

设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内可偏导，其偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$ 仍是二元函数，设 $h(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$g(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial y}$，若 h，g 是可偏导，则有

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

称其为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数．记作

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\text{，或 } f_{xx}\text{，}z_{xx}\text{；}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\text{，或 } f_{xy}\text{，}z_{xy}\text{；}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\text{，或 } f_{yx}\text{，}z_{yx}\text{；}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\text{，或 } f_{yy}\text{，}z_{yy}\text{．}$$

称 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 为函数 $z=f(x,y)$ 关于 x,y 的二阶偏导数，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 为函数 $z=f(x,y)$ 关于 x,y 的二阶混合偏导数．

进一步地，可定义三阶及三阶以上的各阶偏导数．二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数．

思考题:

1．$(\frac{\partial z}{\partial x})^2$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 是否相同？ $(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y})$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 是否相同？

【例 5.1】 设 $z=x^2y+2x\sin y$ ，求 z 的所有二阶偏导数．

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+2\sin y$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2x\cos y$ ，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy+2\sin y)=2y$ ，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy+2\sin y)=2x+2\cos y$ ；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2x\cos y)=2x+2\cos y$ ；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2x\cos y)=-2x\sin y$ ． ▌

【例 5.2】 设 $z=f(x+ay)+g(x-ay)$ ．证明：$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ．f,g 均二阶可微，a 为常数．

解 令 $u=x+ay$ ，$v=x-ay$ ，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}=f'(u)+g'(v)\ ,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)+g''(v)\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}=af'(u)-ag'(v)\ ,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2f''(u)+a^2g''(v)\ ,$$

从而有 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ． ▌

【例 5.3】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，求 $f_{xy}(0,0)$ ，$f_{yx}(0,0)$ ．

解 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$f_x(x,y)=\frac{2xy(x^2+y^2)-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

$x^2+y^2=0$ 时，有

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0\ ,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0\ ,$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0\cdot y^3}{(0^2+y^2)^2}}{y}=0\ .$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4-x^2\cdot 0}{(x^2+0^2)^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$ 不存在． ∎

在例 5.1 中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，在例 5.3 中 $f_{xy}(0,0)=0$，$f_{yx}(0,0)$ 不存在，这说明，在某些情况下，二阶混合偏导与求导次序无关，而在某些情况下，二阶混合偏导与求导次序有关．那么在什么情况下，二阶混合偏导与求导次序无关呢？

定理 5.1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的二阶混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 连续，则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$．

证　令

$$F=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$$

设 $g(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$，$h(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$，则有

$$F=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)，或 F=h(y_0+\Delta y)-h(y_0)，$$

由一元函数的中值定理及 f 关于 x 的偏导数存在，得

$$\begin{aligned}F&=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)=g'(x_0+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x\\&=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x\quad 0<\theta_1<1\end{aligned}$$

又 f_x 关于 y 的偏导数存在，则由中值定理得，

$$F=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x，0<\theta_2<1$$

同理，
$$\begin{aligned}F&=h(y_0+\Delta y)-y(y_0)=h'(y_0+\theta_3\Delta y)\cdot\Delta y\\&=[f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)-f_y(x_0,y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y\\&=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y\quad 0<\theta_3<1，0<\theta_4<1\end{aligned}$$

即有 $f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)$．

因 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是连续，故

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_{xy}(x_0,y_0)，$$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)=f_{yx}(x_0,y_0)，$$

所以，$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$． ∎

高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导次序无关．该结论还可推广到三元及以上的函数．

【例 5.4】　设 $u=x^y+y^2\ln x\cdot\sin z$，求 u 的二阶偏导数．

解 $u_x = yx^{y-1} + \dfrac{y^2}{x}\sin z$，$u_y = x^y \ln x + 2y\ln x \cdot \sin z$，$u_z = y^2 \ln x \cdot \cos z$，

$u_{xx} = y(y-1)x^{y-2} - \dfrac{y^2}{x^2}\sin z$ ，$u_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x + \dfrac{2y}{x}\sin z$ ，

$u_{xz} = \dfrac{y^2}{x}\cos z$ ，$u_{yy} = x^y(\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \sin z$ ，

$u_{yz} = 2y\ln x \cdot \cos z$ ，$u_{zz} = -y^2 \ln x \cdot \sin z$ ．

$u_{yx} = u_{xy}$，$u_{zx} = u_{xz}$，$u_{zy} = u_{yz}$ ． ∎

【例 5.5】 设 $z = f(u,v)$ ，$u = \varphi(x,y)$ ，$v = \psi(x,y)$ ，f ，φ ，ψ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ．

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y$ ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x)$$
$$= \frac{\partial f_u}{\partial x} \cdot u_x + f_u \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial f_v}{\partial x} \cdot v_x + f_v \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \ .$$

注意此时 $f_u(u,v), f_v(u,v)$ 仍是二元复合函数，故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial f_u}{\partial u} \cdot u_x + \frac{\partial f_u}{\partial v} \cdot v_x\right)u_x + f_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f_v}{\partial u} \cdot u_x + \frac{\partial f_v}{\partial v} \cdot v_x\right)v_x + f_v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$= (u_x)^2 f_{uu} + f_{uv} \cdot u_x \cdot v_x + f_{vu} \cdot u_x \cdot v_x + f_{vv} \cdot (v_x)^2 + f_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ .$$

引用前面给出的记号，$f_u = f_1$ ，$f_v = f_2$ ，$f_{uu} = f_{11}$ ，$f_{uv} = f_{12}$ ，$f_{vv} = f_{22}$ ，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (u_x)^2 f_{11} + f_{12} \cdot u_x \cdot v_x + f_{21} \cdot u_x \cdot v_x + f_{22} \cdot (v_x)^2 + f_1 \cdot u_{xx} + f_2 \cdot v_{xx}$$
$$= (u_x)^2 f_{11} + 2f_{12} \cdot u_x \cdot v_x + f_{22} \cdot (v_x)^2 + f_1 \cdot u_{xx} + f_2 \cdot v_{xx} \ .$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u_x f_1 + v_x f_2) = u_x \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_1 \frac{\partial u_x}{\partial y} + v_x \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 \frac{\partial v_x}{\partial y}$$
$$= u_x(f_{11} \cdot u_y + f_{12} \cdot v_y) + u_{xy} f_1 + v_x(f_{21} \cdot u_y + f_{22} \cdot v_y) + v_{xy} f_2$$
$$= u_x u_y f_{11} + (u_x v_y + v_x u_y) f_{12} + v_x v_y f_{22} + u_{xy} f_1 + v_{xy} f_2 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(u_y f_1 + v_y f_2) = u_y \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_1 \frac{\partial u_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 \frac{\partial v_y}{\partial y}$$
$$= u_y(f_{11} \cdot u_y + f_{12} \cdot v_y) + u_{yy} f_1 + v_y(f_{21} \cdot u_y + f_{22} \cdot v_y) + v_{yy} f_2$$

$$=(u_y)^2 f_{11}+2u_x v_y f_{12}+(v_y)^2 f_{22}+u_{yy} f_1+v_{yy} f_2 \ . \quad \blacksquare$$

【例 5.6】　设 $z=f(\frac{x}{y},\cos 2x)$ ，f 有二阶连续偏导数，求 z 的二阶偏导数．

解　令 $u=\frac{x}{y}$ ，$v=\cos 2x$ ，则 $z=f(u,v)$ ，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x=\frac{1}{y}\cdot f_1-2\sin 2x\cdot f_2 \ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_u\cdot u_y+f_v\cdot v_y=-\frac{x}{y^2}\cdot f_1 \ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{y}\cdot f_1-2\sin 2x\cdot f_2)\\&=\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}-2\sin 2x\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}-4\cos 2x\cdot f_2\\&=\frac{1}{y}(\frac{1}{y}f_{11}-2\sin 2x\cdot f_{12})-2\sin 2x(\frac{1}{y}f_{21}-2\sin 2x\cdot f_{22})-4\cos 2x\cdot f_2\\&=\frac{1}{y^2}f_{11}-\frac{4}{y}\sin 2x\cdot f_{12}+4\sin^2 2x\cdot f_{22}-4\cos 2x\cdot f_2 \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}f_1-2\sin 2x\cdot f_2)=\frac{1}{y}\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f_1-2\sin 2x\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}\\&=\frac{1}{y}(-\frac{x}{y^2})f_{11}-2\sin 2x(-\frac{x}{y^2})f_{21}-\frac{1}{y^2}f_1\\&=-\frac{x}{y^3}f_{11}+\frac{2x\sin 2x}{y^2}\cdot f_{21}-\frac{1}{y^2}f_1 \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{x}{y^2}f_1)=-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{2x}{y^3}f_1\\&=-\frac{x}{y^2}(-\frac{x}{y^2})f_{11}+\frac{2x}{y^3}f_1=\frac{x^2}{y^4}f_{11}+\frac{2x}{y^3}f_1 \ . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

思考题：

2．设 $z=f(x,u),u=xy$ ，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial u} \ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial u})=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u} \ ,$$

此解法是否正确？

习题 9-5

A 类

1．求下列函数的二阶偏导数．

(1) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ；　　(2) $z=\frac{\cos x^2}{y}$ ；　　(3) $z=\arctan\frac{y}{x}$ ；

(4) $z=x^3y^2+\dfrac{x^2}{2y}$ ；　　(5) $z=x\ln(xy^2)$ ；　　(6) $u=(\dfrac{x}{y})^z$ ．

2．设 f 具有连续的二阶偏导数，求下列函数的高阶偏导数．

(1) $z=f(\ln\dfrac{x}{y},xy)$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ；

(2) $z=f(x^2+y^2)$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ ，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ ；

(3) $z=yf(x+y,x^2y)$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ；

(4) $z=f(u,x,y)$ ，$u=x\mathrm{e}^y$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ；

(5) $z=f(\sin x,\cos y^2,\mathrm{e}^{x+y})$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ；

(6) $u=f(x^2+y^2+z^2)$ ，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$ ，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ ．

3．设 $u=\sin x\operatorname{ch} y$ ，求 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ ．

4．设函数 $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ ，证明 u 满足拉普拉斯方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ．

5．设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可将方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ ，求实数 a ．

6．设 $z=\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$ ，其中 φ ，ψ 有连续的二阶偏导数．试证：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 .$$

B 类

1．设 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ ，求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数．

2．证明：函数 $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ 满足热传导方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ．

3．证明：若函数 $u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程，则函数 $F=u(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2})$ 也满足拉普拉斯方程．

4．设 $u=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)-\varphi(x-at)\right]+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}f(z)\mathrm{d}z$ ，其中 φ 有二阶连续偏导数，f 有一阶连续偏导数．试证：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ．

5．求方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 满足条件 $z_x(x,0)=x$ ，$z(0,y)=y^2$ 的解 $z=z(x,y)$ ．

6．设 $z=xf(\frac{y}{x})+2y\varphi(\frac{x}{y})$，$f$，$\varphi$ 有二阶连续偏导数，a，b 为常数，

(1) 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；　　(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f(y)$．

7．引入新的函数 $v(x,y)=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$，选择适当的 a，b，化简方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0 .$$

第 6 节　隐函数的求导法则

我们知道，对方程 $F(x,y)=0$，若对某一范围内的每一个 x 值，都有一个唯一确定的 y 值满足这个方程，那么 y 是 x 的函数．由 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 就是 x 的隐函数．现在我们讨论：

(1) 在什么条件下，方程 $F(x,y)=0$ 能确定一个隐函数？

(2) 若方程 $F(x,y)=0$ 在某一范围内能确定一个隐函数，这个隐函数是否具有连续性、可导性、可微性？

6.1　一个方程的情形

定理 6.1(一元隐函数存在定理) 设二元函数 $F(x,y)$ 满足条件：$F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，且在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续偏导数，则方程 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 的某一邻域中唯一确定了一个具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足 $y_0=f(x_0)$ 及 $F[x,f(x)]\equiv 0$，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y} . \tag{6.1}$$

定理的证明从略．下面仅推导求导的公式．

设 $F(x,y)=0$ 能确定具有连续导数的函数 $y=f(x)$，将其代入方程，则有 $F[x,f(x)]=0$，将方程两边关于 x 求导，由复合函数的链式法则，得 $F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，由于 F_y 连续且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以存在 (x_0,y_0) 的一个邻域，在此邻域内 $F_y\neq 0$，故有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$．

注　①若将定理中的条件 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 改为 $F_x(x_0,y_0)\neq 0$，则相应的结论

为：方程 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内唯一地确定一个有连续导数的函数 $x=x(y)$，它满足 $x_0=g(y_0)$ 及 $F[x(y),y]=0$，且 $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{F_y}{F_x}$．

②定理的结论只是在满足条件的点 (x_0,y_0) 的某邻域内成立．

例如：方程 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 在点 $(0,5)$，$(0,-5)$，$(2,\dfrac{5}{2}\sqrt{3})$ 的某邻域内满足定理 6.1 条件，在点 $(0,5)$，$(2,\dfrac{5}{2}\sqrt{3})$ 的邻域内，$y=\dfrac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$，在点 $(0,-5)$ 的邻域内 $y=-\dfrac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$，但若将 $(2,\dfrac{5}{2}\sqrt{3})$ 的邻域范围扩大到将点 $(4,0)$ 包含进去，此时我们知道，在 $(4,0)$ 的左邻域内，不能唯一地确定函数 $y=f(x)$．

【例 6.1】 验证方程 $F(x,y)=xy^2-x^2y-2=0$ 在点 $(1,-1)$ 的某邻域内能唯一地确定一个连续可导函数 $y=f(x)$，并求 $y'(1)$．

解　$F(x,y)=xy^2-x^2y-2$，$F(1,-1)=0$，$F_x=y^2-2xy$，$F_y=2xy-x^2$，$F_y(1,-1)=-3\neq 0$，故在 $(1,-1)$ 的邻域内 $F(x,y)=0$ 满足定理 6.1 条件，所以在 $(1,-1)$ 的邻域内能唯一地确定一个有连续导数的隐函数 $y=f(x)$ 满足条件 $y(1)=-1$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y^2-2xy}{2xy-x^2}=\frac{y(2x-y)}{x(2y-x)}，\ y'(1)=\frac{-1\cdot(2+1)}{-2-1}=1．$$ ∎

【例 6.2】 求由方程 $xy+2^x+2^y=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$．

解 1　公式法．令 $F(x,y)=xy+2^x+2^y=0$，因 $F_x=y+2^x\ln 2$，$F_y=x+2^y\ln 2$，则有 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y+2^x\ln 2}{x+2^y\ln 2}$．

解 2　复合函数求导法．注意 y 是 x 的函数，方程 $xy+2^x+2^y=0$ 两边关于 x 求导，由复合函数地求导法则，得 $y+x\dfrac{dy}{dx}+2^x\ln 2+2^y\ln 2\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$，故 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y+2^x\ln 2}{x+2^y\ln 2}$．

解 3　利用全微分形式不变性．方程 $xy+2^x+2^y=0$ 两边微分，有 $d(xy+2^x+2^y)=0$，即

$$y\,dx+x\,dy+2^x\ln 2\,dx+2^y\ln 2\,dy=0，$$

于是有 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y+2^x\ln 2}{x+2^y\ln 2}$． ∎

上述隐函数存在定理可以推广到三元及三元以上方程的情形：

定理 6.2(多元隐函数存在定理)　设三元函数 $F(x,y,z)$ 满足条件：$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，且在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内，F_x，F_y，F_z 存在且连续，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内唯一确定一个连续且有连续偏导数的二元函数 $z=f(x,y)$，满足 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$，且 $z_0=f(x_0,y_0)$，其偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\ . \tag{6.2}$$

【例 6.3】　求由方程 $xz-y^2-xy+x\mathrm{e}^{xyz}=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数．

解 1　公式法．设 $F(x,y,z)=xz-y^2-xy+x\mathrm{e}^{xyz}$，则有

$F_x=z-y+\mathrm{e}^{xyz}+xyz\mathrm{e}^{xyz}$，$F_y=-2y-x+x^2z\mathrm{e}^{xyz}$，$F_z=x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-z-\mathrm{e}^{xyz}(1+xyz)}{x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+2y-x^2z\mathrm{e}^{xyz}}{x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}}\quad (x\neq 0,y\neq 0)\ .$$

解 2　复合函数求导法．注意到 z 是 x，y 的函数，方程两边关于 x 求偏导数，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+z-y+\mathrm{e}^{xyz}+xyz\mathrm{e}^{xyz}+x^2y\mathrm{e}^{xyz}\frac{\partial z}{\partial x}=0\ ,$$

解得　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-z-\mathrm{e}^{xyz}(1+xyz)}{x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}}$；

方程两边关于 y 求偏导数，得

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-2y-x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}\frac{\partial z}{\partial x}+x^2z\mathrm{e}^{xyz}=0\ ,$$

解得　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+2y-x^2z\mathrm{e}^{xyz}}{x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}}$．

解 3　利用全微分形式不变性．对方程两边微分，有

$$\mathrm{d}(xz-y^2-xy+x\mathrm{e}^{xyz})=0\ ,$$

即

$$z\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{xyz}\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{xyz}(yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z)=0\ ,$$

$$\mathrm{d}z=-\frac{z+\mathrm{e}^{xyz}-y+xyz\mathrm{e}^{xyz}}{x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}}\mathrm{d}x+\frac{2y+x-x^2z\mathrm{e}^{xyz}}{x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}}\mathrm{d}y$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-z-\mathrm{e}^{xyz}(1+xyz)}{x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+2y-x^2z\mathrm{e}^{xyz}}{x+x^2y\mathrm{e}^{xyz}}$ ． ∎

思考题:

1．求隐函数的导数或偏导数的方法有哪些?

【例 6.4】 求方程 $xy+\sin z+y=2z$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ．

解 1　公式法．设 $F(x,y,z)=xy+\sin z+y-2z$ ，有

$F_x=y$ ，$F_y=x+1$ ，$F_z=\cos z-2$ ，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{\cos z-2}=\frac{y}{2-\cos z}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+1}{2-\cos z}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{2-\cos z}\right)=\frac{-y}{(2-\cos z)^2}\cdot\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=\frac{-y\sin z}{(2-\cos z)^2}\cdot\frac{y}{2-\cos z}=-\frac{y^2\sin z}{(2-\cos z)^3}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2-\cos z}\right)$$

$$=\frac{2-\cos z-y\sin z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(2-\cos z)^2}=\frac{(2-\cos z)^2-(x+1)y\sin z}{(2-\cos z)^3}\ .$$

解 2　复合函数求导法．注意到 z 是 x , y 的函数，方程 $xy+\sin z+y=2z$ 两边对 x 求偏导数，得

$$y+\cos z\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial x}\ , \tag{6.3}$$

方程 $xy+\sin z+y=2z$ 两边对 y 求偏导数，得

$$x+\cos z\frac{\partial z}{\partial y}+1=2\frac{\partial z}{\partial y} \tag{6.4}$$

(6.3)式两边再对 x 求偏导数，得

$$-\sin z\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\cos z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{6.5}$$

(6.3)式两边对 y 求偏导数，得

$$1-\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\cos z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \tag{6.6}$$

由(6.3)式得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{2-\cos z}$ ；由(6.4)式得，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+1}{2-\cos z}$ ，分别代入(6.5)，(6.6)，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2\sin z}{(2-\cos z)^3}\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(2-\cos z)^2-(x+1)y\sin z}{(2-\cos z)^3}\ .$$ ∎

注　利用公式法和利用复合函数求导法时，必须注意求导过程中变量间的关系．利用公式时，在求 F_x,F_y,F_z 的计算过程中，x,y,z 视为相互独立的变量；而在利用复合函数的求导法则计算时，z 是 x,y 的函数．

6.2　方程组的情形

隐函数不仅产生于单个方程，也可以产生于方程组中．上面关于隐函数的存在定理的结论也可推广到方程组的情形中去．我们以含四个变量的方程组的情形为例来说明关于方程组所确定的隐函数的求导法则．

定理 **6.3(方程组情形下的隐函数存在定理)**　设函数 $F(x,y,u,v)$ ，$G(x,y,u,v)$ 满足条件：

(1) 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内，$F(x,y,u,v)$ ，$G(x,y,u,v)$ 具有一阶连续偏导数，

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ ，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ ，

(3) 由偏导数组成的行列式（称为雅可比行列式）

$$J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\right|_{P_0}\neq 0$$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0,G(x,y,u,v)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内唯一确定了两个具有连续偏导数的二元隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ ，它满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$ ，$v_0=v(x_0,y_0)$ ，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\ .$$

下面仅就上述公式作如下推导：

设

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \tag{6.7}$$

能唯一地确定一组有连续偏导数的隐函数组 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ ，对方程组 (6.7)中的各方程两边关于 x 求偏导数，得 $\begin{cases} F_x+F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=0 \\ G_x+G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=0 \end{cases}$ ，即有

$$\begin{cases} F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x=-F_x \\ G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x=-G_x \end{cases}, \tag{6.8}$$

方程组 (6.8) 是关于 u_x,v_x 的线性方程组，如果其系数行列式 $J=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\right|_{P_0}\neq 0$ ，由解线性方程组的克莱姆法则，有

$$u_x=\frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},$$

$$v_x=\frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)};$$

同理，将方程组(6.7)中的各方程两边分别关于 y 求偏导数，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

定理 6.3 的结论还可推广到 n 个 $m+n$ 元方程组成的方程组的情形．此结论虽然给出了方程组所确定的隐函数的求导公式，但一般来说，此求导公式用起来并不太方便且容易出错，建议直接从方程组出发，将复合函数的求导法则及解方程组的方法结合起来，求出方程组所确定的隐函数组的偏导数．

【例 6.5】 设有方程组 $xu-yv=x$ ， $yu+xv=1$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ．

解　方程组中的各方程两边分别关于 x 求偏导数，有

$$\begin{cases} u+xu_x-yv_x=1 \\ yu_x+v+xv_x=0 \end{cases},\quad 即\quad \begin{cases} xu_x-yv_x=1-u \\ yu_x+xv_x=-v \end{cases},$$

当 $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2+y^2 \neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x(1-u)-yv}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-xv-y(1-u)}{x^2+y^2}\ ;$$

类似地，用同样方法可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2}\ .$$

∎

【例 6.6】　设方程组为 $x^2+y^2+z^2=6\,,x+y+z=0$ ，验证方程组在点 $(1,-2,1)$ 的某邻域内能唯一地确定有连续导数的函数组 $y=f(x),z=g(x)$ ，并求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解　设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$ ，$G(x,y,z)=x+y+z$. 因为 $F_x=2x$ ，$F_y=2y$ ，$F_z=2z$ ，$G_x=1$ ，$G_y=1$ ，$G_z=1$ ，且

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}=\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1,-2,1)}=-6\neq 0\ ,F(1,-2,1)=0\ ,G(1,-2,1)=0\ ,$$

故在点 $(1,-2,1)$ 的某邻域内确定了一组有连续导数的函数组 $y=f(x),z=g(x)$.

在方程两边分别对 x 求偏导数，注意到 y,z 均为 x 的函数，有

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases},$$

有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z}\ ,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{y-z}\ .$$

∎

也可以通过求微分得到相应的结果.

【例 6.7】　设 $x=\rho\cos\theta\,,y=\rho\sin\theta$ ，求 $\frac{\partial\rho}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial x},\frac{\partial\rho}{\partial y},\frac{\partial\theta}{\partial y}$.

解　方程两边分别求微分，得 $\begin{cases} \mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\rho-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y=\sin\theta\,\mathrm{d}\rho+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$，因

$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho$ ，当 $\rho\neq 0$ 时，

$$\mathrm{d}\rho=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathrm{d}x & -\rho\sin\theta \\ \mathrm{d}y & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\cos\theta\,\mathrm{d}x+\sin\theta\,\mathrm{d}y\ ,$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\cos\theta & \mathrm{d}x\\ \sin\theta & \mathrm{d}y\end{vmatrix}=-\frac{\sin\theta}{\rho}\mathrm{d}x+\frac{\cos\theta}{\rho}\mathrm{d}y\ ,$$

故 $\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\theta$ ，$\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\theta$ ，$\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin\theta}{\rho}$ ，$\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{\cos\theta}{\rho}$ ． ▮

【例 6.8】 设函数 $x=x(u,v)$ ，$y=y(u,v)$ 在点 (u,v) 的某一邻域内有连续的偏导数，且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ ．证明：方程组 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 在点 (x,y) 的某一邻域内能唯一地确定一组单值连续且有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ ，并求反函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 对 x , y 的偏导数．

证 (1) 将方程组改写为 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=x-x(u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=y-y(u,v)=0\end{cases}$ ，则有

$$\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\ ,$$

因为在 (u,v) 的某邻域内有 $\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ ，故由隐函数存在定理 6.3 知，方程组在 (u,v) 的某邻域内能唯一地确定连续且有连续偏导数的函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ ．

(2) 各方程两边分别关于 x , y 求偏导数，得

$$\begin{cases}1-\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases},\quad \begin{cases}-\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ 1-\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases},$$

解上述方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y_v}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-y_u}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x_v}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x_u}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\ .$$ ▮

习题 9-6

A 类

1．求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数．

(1) $x^3+y^3-3axy=0$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ；

(2) $\ln(x^2+y^2)=x^3y+\sin x$ ，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ ；

(3) $x^y = y^x (x \neq y)$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ；

(4) $x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{e}^{-(x+y+z)}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ．

2．求由下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数．

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} z^2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ ，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ 在 $z = 2$ 处的导数值；

(2) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^u + u \sin v \\ y = \mathrm{e}^u - u \cos v \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ；

(3) $\begin{cases} 2xu + y^2 v = 0 \\ yu + 3xv = 1 \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ；

(4) $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ；

3．设 $\varphi(u,v)$ 为可微函数．证明：由方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 满足方程 $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = c$ ．

4．求解下列各题．

(1)设 $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ，$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ ；

(2)设 $xz - y\sin z = 0$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ；

(3)设 $\mathrm{e}^z = xyz$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ；

(4)设 $z + \ln z - \displaystyle\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = 0$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ．

5．设 $z = z(x,y)$ 由方程 $F(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}) = 0$ 确定，其中 F 有一阶连续偏导数．证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy \ .$$

6．设 $z = z(x,y)$ 由方程 $f(x^2 + z\sin y, y^2 + \cos z) = 0$ 所确定，其中 f 有一阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ ．

7．设 $u = f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，函数 $y = y(x)$ ，$z = z(x)$ 分别由下列两式确定：$\mathrm{e}^{xy} - xy = 2$ ；$\mathrm{e}^x = \displaystyle\int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ ．求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ．

B 类

1．$\begin{cases} u=f(ux^2,v+y^2) \\ v=g(2u-x,v^2y) \end{cases}$，其中 f ，g 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ．

2．设 $u=\dfrac{x+z}{y+z}$ ，其中 $z=z(x,y)$ 为由方程 $z\mathrm{e}^z=x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^y$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ．

3．证明：由方程 $u=y+x\varphi(u)$ 所确定的函数 $u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]$ ．

4．设函数 $u=u(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} u=f(x,y,z,t) \\ g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ．

5．设 $y=f(x,t)$ ，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 确定的 x ，y 的函数，f 与 F 都有一阶连续偏导数．试证：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f_xF_t-f_tF_x}{f_tF_y+F_t}$ ．

6．函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=yf(\dfrac{z}{y})$ 确定，证明：

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz\ .$$

7．求解下列各题．

(1) $x=u\cos v$ ，$y=u\sin v$ ，$z=uv$ ．求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ；

(2) $x=u\cos\dfrac{v}{u}$ ，$y=u\sin\dfrac{v}{u}$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ．

第 7 节　方向导数与梯度

7.1　方向导数

我们知道，一元函数在某点的导数表示函数在该点的变化率，它反映了在该点处函数随自变量变化的快慢程度．对于二元函数来说，由于自变量多了一个，点 (x,y) 是在 xOy 平面上变化，一般来说，动点 (x,y) 在平面上沿不同的方向变化时，函数值 $f(x,y)$ 的变化快慢是不同的．因而需要考虑函数在一点处沿不同方向的变化率，这就是所谓的方向导数．

设点 $P_0\in\boldsymbol{R}^2$ ，$\boldsymbol{l}$ 是平面上的某非零向量，其单位向量记为 $\boldsymbol{e}_l$ ，$\boldsymbol{e}_l=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$ ，讨论 $f(x,y)$ 在点 P_0 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率．过点 P_0 作与 $\boldsymbol{l}$ 平行的直线 L ，其参数方程为 $x=x_0+t\cos\alpha$ ，$y=y_0+t\cos\beta$ ，$(-\infty<t<+\infty)$ ，

设 $P(x,y)$ 为 L 上的一点．$\overrightarrow{P_0P}=\{x-x_0,y-y_0\}=\{t\cos\alpha,t\cos\beta\}=t\boldsymbol{e}$．设函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 的某邻域内有定义．若当点 P 沿直线 L 趋近于点 P_0 时，若 $\dfrac{f(P)-f(P_0)}{t}$ 的极限存在，则此极限值就反映了函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处沿直线 L（方向 $\boldsymbol{e}_l$）的变化率．

定义 7.1　设点 $P_0(x_0,y_0)\in\boldsymbol{R}^2$，$\boldsymbol{l}$ 是平面上的一非零向量，其单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$．函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 的某邻域内有定义，P_0 为平行于向量 $\boldsymbol{l}$ 的直线 L 上的定点，若极限

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在直线 L 上的点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数．记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$．

由导数的含义知，方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$ 就是函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率．特别地，若 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{i}=\{1,0\}$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\;;$$

若 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{j}=\{0,1\}$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\;.$$

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}$ 分别表示 $z=f(x,y)$ 沿着 x 轴正向、y 轴正向的变化率．所以，方向导数是偏导数的推广．

【例 7.1】　设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^4\neq0,\\ 0, & x^2+y^4\neq0\end{cases}$，求函数在点 $(0,0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{e}_l=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ 的方向导数．

解　当 $\cos\theta\neq0$ 时，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\;,$$

当 $\cos\theta=0$ 时，$f(t\cos\theta,t\sin\theta)=0$ ，故 $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=0$.

从上例可看到，若 $\theta=\frac{\pi}{4}$ ，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；若 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.即函数在点 $(0,0)$ 处沿 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 与 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 的方向导数的绝对值相等但符号相反．一般地有，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=-\left.\frac{\partial f}{\partial(-l)}\right|_{P_0}$ ，$-\boldsymbol{l}$ 为与 $\boldsymbol{l}$ 方向相反的向量．

方向导数的计算实际上仍是一元函数导数的计算．事实上，若令 $\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$ ，则

$$\lim_{t\to0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t},$$

所以 $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\varphi'(0)$. ∎

我们知道，偏导数是方向导数的特例，但是当函数可微时，却可通过偏导数来计算方向导数：

定理 7.1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则对于任一单位向量 $\boldsymbol{e}_l=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$ ，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta\ .$$

证　因 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&\quad=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_x(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})\end{aligned}$$

取 $\Delta x=t\cos\alpha$ ，$\Delta y=t\cos\beta$ ，则

$$\begin{aligned}&f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)\\&=f_x(x_0,y_0)t\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)t\cos\beta+o(\sqrt{(t\cos\alpha)^2+(t\cos\beta)^2})\\&=t[f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta]+o(|t|)\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta\ .$$

所以 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$ 存在，且 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$. ∎

思考题：

1．试考虑从求函数 $\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)$ 的导数出发，导出上述方向导数的计算公式．

【例 7.2】　设 $z=x\mathrm{e}^{xy}$，求函数在点 $P_0(1,1)$ 处的沿方向 $\boldsymbol{l}=\{1,1\}$ 的方向导数．

解　l 的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，因 $f_x(x,y)=\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}$，$f_y(x,y)=x^2\mathrm{e}^{xy}$；$f_x(1,1)=2\mathrm{e}$，$f_y(1,1)=\mathrm{e}$，故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=2\mathrm{e}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{e}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}\ .$$ ∎

方向导数的概念还可推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．设 $P_0(x_{1_0},x_{2_0},\cdots,x_{n_0})\in R^n$，$\boldsymbol{e}_l$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中某单位向量，$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_n\}$，若函数在 P_0 处的极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_{1_0}+t\cos\theta_1,x_{2_0}+t\cos\theta_2,\cdots,x_{n_0}+t\cos\theta_n)-f(x_{1_0},x_{2_0},\cdots,x_{n_0})}{t}$$

存在，称此极限为 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数．

若函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 P_0 处可微，$\boldsymbol{e}_l=\{\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_n\}$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0}\cdot\cos\theta_1+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{P_0}\cdot\cos\theta_2+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0}\cdot\cos\theta_n\ .$$

如 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}\ .$$

若 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 处是可微的，则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}&=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\cdot\cos\gamma\\&=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma\ .\end{aligned}$$ ∎

【例 7.3】　设 $u=x^2+y^2+z^2$，求它在 $P_0(1,0,-1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=\{1,2,3\}$ 的方向导数．

解　求出 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\ ,\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}\ ,\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}\ ,$$

则 $\boldsymbol{e}_l=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$.显然函数 u 是可微的，$u_x=2x$ ，$u_y=2y$ ，$u_z=2z$ ，$u_x(P_0)=2$ ，$u_y(P_0)=0$ ，$u_z(P_0)=-2$ ，故

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+(-2)\times\frac{3}{\sqrt{14}}=-\frac{4}{\sqrt{14}}\ .$$ ∎

注意，利用偏导数求方向导数的计算公式仅在函数在 P_0 点可微的条件下成立．但由方向导数存在并不能保证函数在该点处可微，因此，若函数在该点不可微时，不能用上述公式，只能用方向导数的定义来讨论．

如由例 7.1 知函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)=(0,0)$ 处沿所有方向的方向导数均存在，而由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在（为什么?），故函数在 $(0,0)$ 点不连续，因此在点 $(0,0)$ 处函数不可微．

思考题:

2．若函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ ，$f_y(x_0,y_0)$ 不存在，则方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 也不存在，对吗?

3．若函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ ，$f_y(x_0,y_0)$ 存在，且 $\boldsymbol{e}_l=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$ ，则有 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$ ．对吗？

4．若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任意方向的方向导数都存在，能否推出函数在该点处连续？反之，若函数在该点处连续，能否得到函数在该点处沿任意方向的方向导数存在?

7.2　梯度

方向导数刻画了函数在 P_0 点处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化快慢．一般来说，二元函数在给定的点处沿不同方向的方向导数是不同的．当 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}>0$ 时，函数在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化是递增的；若 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}<0$ 时，函数在点 P_0 沿方向 l 的变化是递减的．现在我们想进一步了解函数在 P_0 点沿什么方向增加得最快？也就是说，在 P_0 点处沿哪个方向，其方向导数最大．为此我们先引入梯度的概念：

定义 7.2　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可偏导，则称向量 $f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的梯度．记作 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$，或 $\nabla f(x_0,y_0)$（∇ 称为 $Nabla$ 算符，也称为向量微分算子）. 即

$$\mathbf{grad}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}=\nabla f(x_0,y_0)\ .$$

设 $\boldsymbol{e}_l=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l\quad\left(=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l\right)$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数等于该点处的梯度与单位向量的数量积．

由 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l=\left|\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\right|\cdot\left|\boldsymbol{e}_l\right|\cos\theta$（$\theta$ 为向量 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$ 与单位向量 $\boldsymbol{e}_l$ 间的夹角）. 可知，当 $\cos\theta=1$ 时，即 $\boldsymbol{l}$ 的方向与 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$ 的方向一致时，方向导数取得最大值，其最大值为梯度的模；而当 $\cos\theta=-1$ 时，即 $\boldsymbol{l}$ 的方向与梯度的方向相反时，方向导数取得最小值．

梯度的概念也可推广到二元以上的函数中去．若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可偏导，则向量

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$$

称为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度，记作：$\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)$，或 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$．

$$\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}\ .$$

若 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 $u=f(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数为：$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)\cdot\boldsymbol{e}_l$．

同样，三元函数的梯度也是这样的一个向量，它的方向是方向导数取得最大值的方向，而它的模为方向导数的最大值．

【例 7.4】　求 $u=2x^3y-3y^2z$ 在点 $P(1,2,-1)$ 沿指向点 $Q(3,-1,5)$ 方向的方向导数，并求出方向导数的最大值及取得最大值的方向．

解　因为函数可微，且 $\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3-6yz$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-3y^2$，有

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=12$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=14$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-12$，又

$$\boldsymbol{l}=\overrightarrow{PQ}=\{2,-3,6\}\text{ ，}\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{7}\{2,-3,6\}\text{ ，故}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\mathbf{grad}u(P)\cdot\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{7}(2\times12-3\times14-6\times12)=-\frac{90}{7}\text{ ，}$$

在该点处方向导数取得最大值的方向为：$\mathbf{grad}u(P)=\{12,14,-12\}$.

方向导数的最大值为 $|\mathbf{grad}u(P)|=\sqrt{12^2+14^2+(-12)^2}=22$. ∎

根据定义，容易得到梯度的运算法则：(c_1,c_2 为常数，函数 u,v,f 可微)

(1) $\mathbf{grad}(c_1u+c_2v)=c_1\,\mathbf{grad}u+c_2\,\mathbf{grad}v$ ；

(2) $\mathbf{grad}(u\cdot v)=u\,\mathbf{grad}v+v\,\mathbf{grad}u$ ；

(3) $\mathbf{grad}(\frac{u}{v})=\frac{v\,\mathbf{grad}u-u\mathbf{grad}\,v}{v^2}$ ，$v\neq0$ ；

(4) $\mathbf{grad}f(u)=f'(u)\,\mathbf{grad}u$.

7.3 梯度场、等高线、等量面

1 场

物理量随着它在时间和空间的分布情况不同，产生的物理现象也不同．要了解某一物理现象，就必须掌握发生这个物理现象的各种物理量在空间的分布情况以及它们随时间的变化规律．如某地区的气候情况与附近地区的气温、气压的分布情况及它们随时间的变化规律相关；又如，要知道电场的变化，就必须知道电位，电场强度等分布情况及它们随时间的变化规律．现在专门关注物理量的空间分布，并称物理量在空间或部分空间上的分布为场．

按照物理量是数量或向量，可以分为数量场和向量场．例如，温度场，密度场，电位场等就是数量场；而力场，速度场，电场强度场等就是向量场．场量的分布情况在数学上可以用多元数量值函数或多元向量值函数来描述．

如果空间区域Ω(或平面区域 D)上定义了数值函数 $f(M)$ ，则称 $f(M)$ 在 Ω 上确定了一个数量场，记为 $f(\Omega)$ ．或称 $f(M)$ 是一个数量场．如果空间区域 Ω 上定义了一个向量值函数 $\boldsymbol{F}(M)$ ，$\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$ ，则称 $\boldsymbol{F}(M)$ 在 Ω 上定义了一个向量场．或简称 $\boldsymbol{F}(M)$ 是一个向量场．

2 等高线与等量面

在空间解析几何中，我们研究方程的图形时，常用与某一坐标面平行的一组

平面去截空间曲面，得到一系列平面上的曲线，从这些平面曲线，可以大致了解空间曲面的形状．如 $z=f(x,y)$ ，令 $z=c$ （常数），得方程式 $f(x,y)=c$ ．它确定了一个点集，即平面 $z=c$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 相交而构成的点集，是平面 $z=c$ 上的一条曲线，将它投影到 xOy 平面上得到一条曲线，因为该曲线上的任一点到 xOy 面的距离是相等的，称其为曲面的等高线．

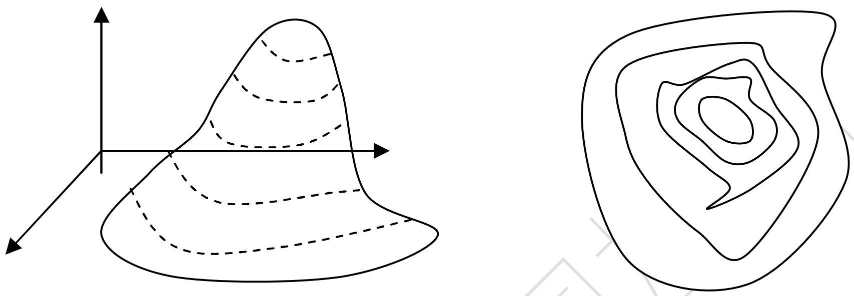


图　7.1

如果对于每一个 $z=c$ （ c 属于函数的值域），方程 $f(x,y)=c$ 都确定一条曲线，我们就得到一族等高线．容易想象，若每两条等高线的高差均相等，则 xOy 平面上等高线密集处正是曲面比较“陡峭”的地方（图 7.1）.

同理，若对于三元函数 $u=f(x,y,z)$ ，令 $u=c$ ，得等式 $f(x,y,z)=c$ ．它表示的是三维空间中的曲面，称之为函数 f 的等量面．如 $u=x^2+y^2+z^2$ 的等量面方程是 $x^2+y^2+z^2=c$ ，它表示的是以 $(0,0,0)$ 为中心， $\sqrt{c}$ 为半径的球面．

在同一等量面上具有相同的物理量．如温度场中的等量面就是等温面，电位场中的等量面就是等位面．

3　梯度场

一个由数量值函数 $f(M)$ 产生的向量函数 $\mathbf{grad}f(M)$ 称为数量场 $f(M)$ 的梯度场．反之，当一个向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 是某数值函数 $f(M)$ 的梯度场，即 $\boldsymbol{F}(M)=\mathbf{grad}f(M)$ ，称向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 为有势场（势场）.

设 $z=f(x,y)$ ， f 可微，过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度 $\mathbf{grad}f(P_0)=f_x(P_0)\boldsymbol{i}+f_y(P_0)\boldsymbol{j}$ ，曲线 $f(x,y)=c$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线方向为 $\boldsymbol{T}(P_0)=\left\{1,-\dfrac{f_x}{f_y}\right\}\Big|_{P_0}=\left\{-f_y,f_x\right\}\Big|_{P_0}$ ，由

$$\mathbf{grad}f(P_0)\cdot\boldsymbol{T}(P_0)=-f_x(P_0)\cdot f_y(P_0)+f_y(P_0)\cdot f_x(P_0)=0$$

可知，在 P_0 点处的梯度与此点处的切线是相互垂直的，所以在 $P_0(x_0,y_0)$ 处梯度为等高线上 $P_0(x_0,y_0)$ 处的法线向量，且从数值较低的方向指向数值较高的方向．

不难证明，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 点处的梯度 $\mathbf{grad}f(P_0)$ 是等量面 $f(x,y,z)=c$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的法向量，且从数值较低的等量面指向数值较高的等量面．

【例 7.5】 设点电荷 q 位于坐标原点 $O(0,0,0)$ 处，在其周围产生电场，且任一点 $M(x,y,z)$ 的电位与电场强度分别为 $u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$，$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中 ε 为介电系数，$\boldsymbol{r}$ 为点 M 的向径．求电位函数的梯度．

解 $$\mathbf{grad}u=\mathbf{grad}(\frac{q}{4\pi\varepsilon r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\mathbf{grad}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{-1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k})=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{E}\ .$$

因此，电位梯度的方向与电场强度的方向相反，即沿向径的负方向电位的增长最快． ∎

习题 9 - 7

A 类

1．求下列函数在指定点处沿指定方向的方向导数．

(1) $u=x^4y^5$ 在点 $A(1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$：

(ⅰ) 当 $\alpha=\pi$ 时； (ⅱ) 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时； (ⅲ) 当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$ 时；

(2) $z=\mathrm{e}^{x+2y}$ 在点 $O(0,0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=\{2,3\}$；

(3) $z=x^2+y^2+xy$ 在点 $A(1,1)$ 处沿着从点 $(1,1)$ 到点 $(4,5)$ 的方向；

(4) $z=3x^4+xy+y^3$ 在点 $A(1,2)$ 处沿着与 x 轴成 135° 方向；

(5) $u=3x^2+z^2-2yz+2xz$ 在点 $M(1,2,3)$ 得沿方向 $\boldsymbol{l}=\{6,3,2\}$；

(6) $u=x\arctan\dfrac{y}{z}$ 在点 $M(1,2,-2)$ 得沿方向 $\boldsymbol{l}=\{1,1,-1\}$．

2．求函数在指定点处的梯度的大小和方向．

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $A(1,2)$ 及点 $B(3,0)$；

(2) $z=x^2y+xy^2$ 在点 $A(2,5)$ 处；

(3) $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $M_1(1,1,1)$ 及点 $M_2(2,1,1)$ 处．

3．试求函数 $z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在点 $A(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处，沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法线方向上的方向导数．

4．求 $u=x+y+z$ 沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处外法线方向的方向导数．

5．求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $M(1,1,1)$ 处，沿曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 在点 $t=1$ 处的切线的指向参数 t 增大的方向的方向导数．

6．求函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点 $M_1(1,1,0)$ 与 $M_2(0,1,1)$ 处的梯度间的夹角．

7．当 a，b，c 满足什么条件时，函数 $u=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处的方向导数的最大值在 z 轴的正向取到．

8．在平面上的任一点 (x,y) 处的温度函数为 $T=\frac{100}{x^2+y^2+1}$，讨论：

(1) 温度在点 $A(3,2)$ 处增加最大的方向；温度增加最大的方向是否指向原点？

(2) 温度在点 $A(3,2)$ 处减少最快的方向；

(3) 在点 $A(3,2)$ 处求一个方向，使得在这个方向上，温度不增不减．

B 类

1．求函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿与该点的等高线垂直方向的方向导数．

2．设 $z=x^2+y^2$．证明：如果 $A(a,b)$ 是等高线 $x^2+y^2=9$ 上任一点，则在 $A(a,b)$ 点的梯度必垂直于等高线在此点处的切线．

3．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x)^2+x^8}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明函数在点 $O(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数存在，但函数在点 $O(0,0)$ 处不连续．

4．讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & x^6+y^2\neq 0,\\ 0, & x^6+y^2=0\end{cases}$，在 $O(0,0)$ 点处的方向导数是否存在，是否可微？

5．设 $f(x,y)$ 可微．已知四个点 $A(1,3)$，$B(3,3)$，$C(1,7)$，$D(6,15)$．若 $f(x,y)$ 在 A 点处沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向的方向导数等于 3，沿 $\overrightarrow{AC}$ 方向的方向导数等于 26，求 $f(x,y)$ 在 A 点处沿 $\overrightarrow{AD}$ 方向的方向导数．

第 8 节　多元函数微分学的几何应用

8.1　空间曲线的切线与法平面

在空间解析几何中，空间曲线一般用两种方式来表示，参数式方程和一般式方程．下面我们分别探求这两种情形时曲线的切线及法平面方程．

1　参数式方程表示的曲线的切线和法平面

设空间曲线 Γ 的方程为：

$$x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)\ ,\ \alpha\le t\le\beta\ . \tag{8.1}$$

并假定(8.1)式的三个函数都在 $[\alpha,\beta]$ 上可导．若记 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，则曲线的参数方程可写为：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{8.2}$$

当 $x(t)$ ，$y(t)$ ，$z(t)$ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上连续时，曲线 Γ 是一条连续曲线．设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ，$P_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ 为曲线 Γ 上对应于参量 t_0 ，$t_0+\Delta t$ 的两个点，$x'(t_0)$ ，$y'(t_0)$ ，$z'(t_0)$ 存在且不同时为零，则曲线上连接 P_0 ，P_1 的割线方程为：

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}\ ,\text{或}\quad \frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}} \tag{8.3}$$

当点 P_1 沿曲线 Γ 趋近于 P_0 时，即当 $\Delta t\to 0$ 时，割线的极限位置是曲线在 P_0 处的切线．故当 $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ 不全为零时，向量 $\boldsymbol{T}(t_0)=\left\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right\}$ 是切线的方向向量，称为曲线 Γ 在 P_0 处的切向量，故曲线 Γ 在 P_0 处的切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)} \tag{8.4}$$

若 $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ 中有个别为零，则按空间解析几何中对称式方程的说明来理解．

过点 P_0 且与其切线垂直的平面(过点 P_0 且与 P_0 处的切线垂直的所有直线都在此平面上)，称为曲线 Γ 在点 P_0 处的法平面．法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0\ . \tag{8.5}$$

【例 8.1】　求曲线 $x=t^2+t$ ，$y=t^2-t$ ，$z=t^2$ 在点 $(6,2,4)$ 处的切线和

法平面．

解　因为 $x'(t)=2t+1$ ，$y'(t)=2t-1$ ，$z'(t)=2t$ ，又由方程知，在点 $(6,2,4)$ 处，对应于 $t=2$ ，所以切线的方向向量为 $\boldsymbol{T}=\{5,3,4\}$ ．故曲线在 $(6,2,4)$ 处的切线方程为：

$$\frac{x-6}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{4}\ ,$$

法平面方程为：

$$5(x-6)+3(y-2)+4(z-4)=0\ ，即\ 5x+3y+4z=52\ .$$ ∎

【例 8.2】　若曲线 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ 在任一点的法平面都过原点，试证明：此曲线必在以原点为球心的球面上．

证　任取曲线上的点 $P(x(t),y(t),z(t))$ ，则在点 P 处的法平面方程为

$$x'(t)(X-x(t))+y'(t)(Y-y(t))+z'(t)(Z-z(t))=0\ .$$

因为原点在法平面上，故有 $x'(t)x(t)+y'(t)y(t)+z'(t)z(t)=0$ ，此方程等价于方程 $[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)]'=0$ ，故有

$$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=c\ ,$$

上述方程表示以原点为球心，$\sqrt{c}$ 为半径的球面，而曲线上的任一点 $P(x(t),y(t),z(t))$ 满足此方程，故曲线在此球面上．

若空间曲线 Γ 的方程为：$\Gamma: y=y(x)$ ，$z=z(x)$ ，$a\le x\le b$ ，取 x 为参数，则曲线方程为：$x=x$ ，$y=y(x)$ ，$z=z(x)$ ，$a\le x\le b$ ．若 $y=y(x)$ ，$z=z(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则曲线在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线向量为：$\boldsymbol{T}=\left\{1,y'(x_0),z'(x_0)\right\}$ ，故切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}\ ,$$

法平面方程为：

$$x-x_0+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0\ .$$ ∎

【例 8.3】　求曲线 $y=x,z=x^2$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处的切线和法平面方程．

解　取 x 为参数，则曲线的参数方程为：$x=x,y=x,z=x^2$ ．在 P_0 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\{1,1,2x\}\big|_{P_0}=\{1,1,2\}$ ，故曲线在 P_0 处的切线方程为：

$$x-1=y-1=\frac{z-1}{2}\ .$$

法平面方程为：

$$x-1+y-1+2(z-1)=0\text{，即}\quad x+y+2z=4\text{．}$$

2　一般方程形式表示的曲线的切线和法平面方程

设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内，F，G 连续可微．设 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}\neq 0$，则在点 P_0 的某邻域内能惟一地确定隐函数组 $y=y(x)$，$z=z(x)$，故其在 P_0 点处的切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}\text{，}$$

下面由隐函数的求导法则来求出 $y'(x_0)$，$z'(x_0)$．将方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的各方程两边关于 x 求偏导数，

$$\begin{cases}F_x+F_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\G_x+G_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+G_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}\text{，}$$

因为 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}\neq 0$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{P_0}=\left.\frac{\begin{vmatrix}-F_x & F_z\\-G_x & G_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\right|_{P_0}\text{，}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{P_0}=\left.\frac{\begin{vmatrix}F_y & -F_x\\G_y & -G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\right|_{P_0}\text{，}$$

故曲线在点 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}}\text{，}$$

即

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{P_0}}\ , \tag{8.6}$$

相应的法平面方程为：

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{P_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{P_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{P_0}(z-z_0)=0\ .$$

【例 8.4】　求曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$上点$P_0(1,-1,2)$处的切线和法平面方程．

解　设 $\begin{cases}F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9=0\\ G(x,y,z)=z^2-3x^2-y^2=0\end{cases}$，有

$F_x=4x$，$F_y=6y$，$F_z=2z$，$G_x=-6x$，$G_y=-2y$，$G_z=2z$，

则在点$P_0(1,-1,2)$处的切向量为：

$$\boldsymbol{T}\,|_{P_0}=\left\{\begin{vmatrix}6y & 2z\\ -2y & 2z\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2z & 4x\\ 2z & -6x\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}4x & 6y\\ -6x & -2y\end{vmatrix}\right\}\Bigg|_{P_0}=\{-32,-40,-28\}\ ,$$

取$\boldsymbol{T}=\{8,10,7\}$，则曲线在$P_0$处的切线方程为：$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$；法平面方程为：$8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$，即$8x+10y+7z=12$． ∎

思考题：

1．若曲线上任一点的切线向量为$\boldsymbol{T}=\{a,0,0\}$（a为常数），则此曲线是一条什么曲线？若其任一点的切线向量为$\boldsymbol{T}=\{a,b,0\}$（a,b为常数）呢?

8.2　曲面的切平面与法线

在介绍微分的几何意义时，曾指出，若函数$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$点可微，则曲面在点P_0附近的部分可用切平面$z=z_0+A(x-x_0)+B(y-y_0)$来近似表示，此平面为曲面在P_0点处的切平面．下面讨论切平面的定义及其方程．

设Σ为空间的一张曲面，其方程为$F(x,y,z)=0$，P_0为曲面Σ上一点．设F_x,F_y,F_z在P_0处连续且不同时为零．在曲面上任意作一条过P_0的光滑曲线Γ（图 8.1），设其方程为：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，当$t=t_0$时，对应点为P_0，则有$F(x(t),y(t),z(t))=0$．方程两边关于t求导，并令$t=t_0$，有

$$F_x(P_0)\cdot x'(t_0)+F_y(P_0)\cdot y'(t_0)+F_z(P_0)\cdot z'(t_0)=0\ ,$$

令 $\boldsymbol{r}(t_0)=\{x(t_0),y(t_0),z(t_0)\}$ ，

$\boldsymbol{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}\big|_{P_0}$ ，则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(t_0)=0\ .$$

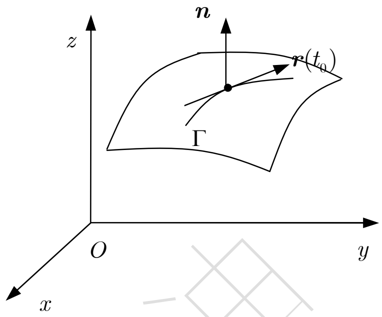


图 8.1

因为 F_x,F_y,F_z 在 P_0 不同时为零，即 $\boldsymbol{n}\neq\{0,0,0\}$ ，而 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 为曲线 Γ 在 P_0 处的切向量，由 Γ 的任意性，上式表明过 P_0 点的任意一条光滑曲线在 P_0 处的切线都与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，从而所有过 P_0 点的切线位于同一平面上．称此平面为曲面在 P_0 处的切平面． $\boldsymbol{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}\big|_{P_0}$ 也称为曲面在 P_0 处的法向量，故曲面在点 P_0 处的切平面方程为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0\ ,$$

过点 P_0 且以法向量 $\boldsymbol{n}$ 为方向向量的直线称为曲面在 P_0 处的法线，其方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}\ .$$

当 $F(x,y,z)$ 是一数量场时，所有的等量面充满了场，并且把“场”分“层”. 不同的等量面是不相交的．场内每一点有且仅有一个等量面通过，因为梯度方向是数量场变化最快的方向，而梯度又与等量面的切平面正交，因此等量面按照垂直方向从高等值向低等值迅速地变化．

【例 8.5】 求曲面 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{27}=1$ 在点 $P_0(1,2,3)$ 处的切平面和法线．

解 设 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{27}-1$ ，则

$$\boldsymbol{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}\big|_{P_0}=\left\{\frac{2x}{3},\frac{y}{6},\frac{2z}{27}\right\}\bigg|_{P_0}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{9}\right\}\ ,$$

故所求切平面方程为： $\dfrac{2}{3}(x-1)+\dfrac{1}{3}(y-2)+\dfrac{2}{9}(z-3)=0$ ，即

$$6x+3y+2z=18\ .$$

法线方程为：

$$\frac{x-1}{\frac{2}{3}}=\frac{y-2}{\frac{1}{3}}=\frac{z-3}{\frac{2}{9}}\ ，即\quad \frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}\ .$$ ▮

若曲面方程为 $z=f(x,y)$ ，且 f 可微．令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ ，则有 $F_x=f_x$ ，$F_y=f_y$ ，$F_z=-1$ ，故曲面在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0 \text{ ，}$$

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ ．

由切平面方程 $f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$ 可知 ,此式正是全微分中用微分近似代替增量的表示式(3.5)．

【例 8.6】　求曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $P_0(1,1,\dfrac{\pi}{4})$ 处的切平面和法线方程．

解　设 $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ ，　$f_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ ，　$f_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ，

故曲面在 $P_0(1,1,\dfrac{\pi}{4})$ 的法向量为　$\boldsymbol{T}=\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1\right\}$ ，

切平面方程为：$-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)-(z-\dfrac{\pi}{4})=0$ ，即　$x-y+2z=-\dfrac{\pi}{2}$ ；

法线方程为：　$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$ ．　■

我们知道，曲面 $F(x,y,z)=0$ 上点 P_0 处的切平面方程为：

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0 \text{ ，}$$

曲面 $G(x,y,z)=0$ 上点 P_0 处的切平面方程为：

$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0 \text{ ，}$$

从而若曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ ，则 Γ 上点 P_0 处的切线实际上是上面两个切平面的交线，即

$$\begin{cases}F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0\\G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0\end{cases} \tag{8.7}$$

请与(8.6)的结果进行比较，并以此方法重解例 8.4．

下面简单介绍由参数方程形式表示的曲面的切平面的求法.

设曲面 Σ 的方程为：$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$ ，$(u,v)\in D$（D 为 xOy 平面内的区域）．$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上的一点，$x_0=x(u_0,v_0)$ ，$y_0=y(u_0,v_0)$，$z_0=z(u_0,v_0)$ ，x,y,z 在包含 P_0 点的某邻域内有连续的偏导数，

$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}$，$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}$，$\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}$ 不同时为零，则曲面 Σ 在 P_0 处存在切平面，其法向量为 $\boldsymbol{n}=\left.\left\{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\}\right|_{P_0}$ （请读者自己推导），或

$$\boldsymbol{n}=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}\right|_{P_0}$$

曲面在 P_0 处的切平面方程为：

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}(z-z_0)=0\ ,$$

相应地，曲面在 P_0 处的法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}}\ .$$

【例 8.7】 设曲面 Σ 的方程为 $x=u^2+v^2$，$y=u^2-v^2$，$z=2uv$，求在参数 $u=1$，$v=1$ 处，曲面的切平面方程及法线方程．

解 易得 $x_u(1,1)=2u|_{(1,1)}=2$，$x_v(1,1)=2v|_{(1,1)}=2$，$y_u(1,1)=2u|_{(1,1)}=2$，$y_v(1,1)=-2v|_{(1,1)}=-2$，$z_u(1,1)=2v|_{(1,1)}=2$，$z_v(1,1)=2u|_{(1,1)}=2$．

当 $u=1$，$v=1$ 时，$x=2$，$y=0$，$z=2$，故曲面 Σ 在点 $(2,0,2)$ 处的法向量为：

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{vmatrix}=\{8,0,8\}\ ,$$

从而曲面在 $(2,0,2)$ 处的切平面方程为：$8(x-2)-8(z-2)=0$，即 $x=z$．法线方程为：$\begin{cases}x-2=-(z-2)\\ y=0\end{cases}$． ∎

习题 9-8

A 类

1．求下列曲线在指定点处的切线与法平面．

(1) $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，$z=4\sin\frac{t}{2}$；在点 $M(\frac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2})$ 处；

(2) $x=a\sin^2 t$ ，$y=b\sin t\cos t$ ，$z=c\cos^2 t$ ；当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时；

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ ；在点 $M(1,1,1)$ 处；

(4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases}$ ；在点 $M(a,a,\sqrt{2}a)$ 处；$(a>0)$ ；

(5) $\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=10 \end{cases}$ ；在点 $M(1,1,3)$ 处．

2．求下列曲面在指定点处的切平面和法线．

(1) $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ ，在点 $M(2,1,0)$ 处；

(2) $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ ，在点 $M(2,2,1)$ 处；

(3) $z=x^2+y^2$ ，在点 $M(1,2,5)$ ；

(4) $z=y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ ，在点 $M(1,1,\mathrm{e})$ 处；

(5) $z=y+\ln\dfrac{x}{z}$ ，在点 $M(1,1,1)$ 处．

3．求曲线 $x=t$ ，$y=t^2$ ，$z=t^3$ 上一点，使曲线在该点处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$ ．

4．证明曲线 $x=a\cos t$ ，$y=a\sin t$ ，$z=bt$ 上任一点处的切线与 Oz 轴成定角．

5．求曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 上的一点，使该点处的切平面平行于平面 $2x-3y+2z=1$ ．

6．已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上某点处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$ ，求该点坐标．

7．求由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面在点 $P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量．

8．证明：曲面 $xyz=a^3$ $(a>0)$ 上任一点的切平面与三坐标面所围成的四面体的体积为常数．

9．证明：锥面 $z=xf(\dfrac{y}{x})$ 的所有切平面过锥面的顶点．

B 类

1．求曲面 $x=u\mathrm{e}^v$ ，$y=v\mathrm{e}^u$ ，$z=u+v$ 在点 $(u_0,v_0)=(0,0)$ 处的切平面．

2．设直线 l: $\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面上，而平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $P(1,-2,5)$ ，求 a ，b 的值．

3．求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面，使它垂直于平面 $x-y-z=2$ 和 $x-y-\dfrac{1}{2}z=2$ ．

4．证明：曲线 $x=ae^t\cos t$ ，$y=ae^t\sin t$ ，$z=ae^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同．

5．设 $f(u,v)$ 为处处可微函数．试证明曲面 $f(ax-bz,ay-cz)=0$ 上任一点的切平面都与一定直线平行．并指出此曲面的特征．

6．求曲面 $x=(2-\sin\varphi)\cos\theta$ ，$y=(2-\sin\varphi)\sin\theta$ ，$z=\cos\varphi$ 在点 $M(\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 处的切平面和法线．

第 9 节　二元函数的泰勒公式

我们已知道，若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某区域内有直至 $(n+1)$ 阶的导数存在，则有泰勒公式：$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$ ，ξ 介于 x 与 x_0 之间．对于多元函数，也有相应的泰勒公式．下面仅以二元函数为例，介绍多元函数的泰勒公式：

定理 9.1(二元函数的泰勒公式)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $(n+1)$ 阶的连续偏导数，则对 $U(P_0)$ 内的任一点 (x_0+h,y_0+k) ，有

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h,y_0+k)=&f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)\\
&+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^nf(x_0,y_0)\\
&+\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\ , \qquad (9.1)
\end{aligned}
$$

其中 $0<\theta<1$ ，$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^mf(x_0,y_0)=\sum\limits_{i=0}^{m}C_m^i\left.\frac{\partial^mf}{\partial x^i\partial y^{m-i}}\right|_{P_0}\cdot h^i\cdot k^{m-i}$ ，此式称为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处带拉格朗日型余项的泰勒公式．

证　设 h,k 充分小，当 $0\le t\le 1$ 时，令 $\varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$ ，则 $\varphi(0)=f(x_0,y_0)$ ，$\varphi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$ ，由一元函数的泰勒公式，得

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta) \qquad (9.2)$$

其中 $0<\theta<1$ ．由复合函数的求导法则，可求得 $\varphi(t)$ 的各阶导数：

$$\varphi'(t)=f_x\cdot h+f_y\cdot k=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0+th,y_0+tk)\ ,$$

$$\varphi''(t)=(hf_x+kf_y)_t''=h^2f_{xx}''+hkf_{xy}''+hkf_{yx}''+k^2f_{yy}''=h^2f_{xx}''+2hkf_{xy}''+k^2f_{yy}''$$

$$=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0+th,y_0+tk)$$

$$\varphi'''(t)=(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})_t'$$

$$=h^3f_{x^3}+h^2kf_{x^2y}+2h^2kf_{xyx}+2hk^2f_{xyy}+hk^2f_{y^2x}+k^3f_{y^3}$$

$$=h^3f_{x^3}+3h^2kf_{x^2y}+3hk^2f_{xy^2}+k^3f_{y^3}=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^3f(x_0+th,y_0+tk)\ ,$$

…… ……

$$\varphi^{(n)}(t)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{(n)}f(x_0+th,y_0+tk)\ ;$$

故

$$\varphi'(0)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)\ ,\ \varphi''(0)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)\ ,\ \cdots\cdots\ ,$$

$$\varphi^{(n)}(0)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^nf(x_0,y_0)\ .$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{(n+1)}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\ ,\qquad 0<\theta<1\ .$$

将上述式子代入(9.1)式，即得二元函数的泰勒公式．∎

若 $n=0$ ，则得

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$
$$=f_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h+f_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k\ ,\tag{9.3}$$

称之为二元函数的中值公式．

特别地，若令 $x_0=0,y_0=0$ ，便得到二元函数的麦克劳林公式：

$$f(x,y)=f(0,0)+(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})f(0,0)+\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2f(0,0)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^{(n)}f(0,0)+\frac{1}{(n+1)!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^{(n+1)}f(\theta x,\theta y)\ ,$$
$$0<\theta<1\ .\tag{9.4}$$

【例 **9.1**】　设 $f(x,y)=x^y$ ，在点 $(1,4)$ 附近用二次多项式逼近 $f(x,y)$ ，并用它计算 $(1.08)^{3.96}$ 的近似值．

解　由题意，用 $f(x,y)$ 在 $(1,4)$ 处的二阶泰勒公式去掉余项即可得到所要求

的二次多项式．因为 $f_x = yx^{y-1}$ ，$f_y = x^y \ln x$ ，$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$ ，$f_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$ ，$f_{yy} = x^y(\ln x)^2$ ，得

$f(1,4)=1$ ，$f_x(1,4)=4$ ，$f_y(1,4)=0$ ，$f_{xx}(1,4)=12$ ，$f_{xy}(1,4)=1$ ，$f_{yy}(1,4)=0$ ，于是有，

$$x^y \approx 1+4(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)(y-4) \text{ ．}$$

令 $x=1.08$ ，$y=3.96$ ，故

$$(1.08)^{3.96} \approx 1+4\times 0.08+6\times 0.08^2+0.08\times(-0.04)=1.3552 \text{ ．} \blacksquare$$

【例 9.2】　求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x+3y}$ 的 n 阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式．

解　令 $2x+3y=u$ ，则有 $\mathrm{e}^{2x+3y}=\mathrm{e}^u$ ，当 $x=y=0$ 时，$u=0$ ．由一元函数的泰勒公式，有

$$\mathrm{e}^u = 1+u+\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{3!}u^3+\cdots+\frac{1}{n!}u^n+\frac{\mathrm{e}^{\theta u}}{(n+1)!}u^{n+1}, \quad 0<\theta<1 \text{ ．}$$

将 $2x+3y=u$ 代入，得，

$$\mathrm{e}^{2x+3y} = 1+(2x+3y)+\frac{1}{2!}(2x+3y)^2+\frac{1}{3!}(2x+3y)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(2x+3y)^n + \frac{\mathrm{e}^{\theta(2x+3y)}}{(n+1)!}(2x+3y)^{n+1}, \quad 0<\theta<1 \text{ ．} \blacksquare$$

习题 9-9

1．求函数 $z=\sin 2x+\cos y$ 在 $P(0,0)$ 点处的二阶泰勒多项式．

2．求函数 $z=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$ 的三阶麦克劳林公式．

3．求函数 $z=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在 $A(1,-2)$ 的邻域内的泰勒公式．

4．求函数 e^{x+y} 的 n 阶麦克劳林公式．并写出余项．

5．利用泰勒多项式求 $\sqrt{(3.012)^2+(3.997)^2}$ 的近似值．

第 10 节　多元函数的极值与最值

在生产实践中，我们常遇到“时间最短”,“效益最大”,“成本最低”等最大值，最小值问题，而其中一些是多元函数的最值问题．如某种产品的收益问题，与生产这种产品的原材料的价格，产品产量的大小，劳动的成本，市场的需求及产品的广告宣传投入等因素有关．

与一元函数相类似，多元函数的最值问题是一个整体性的问题，而函数的极值问题是一个局部性问题，但二者有着密切的联系．下面讨论多元函数的极值问题与最值问题．

本节分两种情形讨论多元函数的极值问题.一种是自变量可以在定义域内自由变化的极值问题——无约束极值问题，也称为无条件极值；另一种是自变量受到某种条件的限制时的极值问题——约束极值问题，也称为条件极值．

10.1　无条件极值与函数的最值

定义 **10.1**　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，如果对于任一点 $P(x,y)\in U(P_0)$ ，有 $f(x_0,y_0)\le f(x,y)$ （或 $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)$ ），则称函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极小值（极大值），点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的极小值点（极大值点）.

函数的极小值与极大值统称为极值．极小值点与极大值点统称为极值点．极值点一定是函数定义域的内点．上述定义可以推广到 n 元函数。

例如，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值 0，函数 $z=1-(x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值 1，而函数 $z=xy$ 在 $(0,0)$ 点不取得极值．

若函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极值,则固定 $y=y_0$ 时，$f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值；固定 $x=x_0$ 时，函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处必取得极值．由一元函数取得极值的必要条件可得：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导，则必有 $f_x(x_0,y_0)=0,\ \ f_y(x_0,y_0)=0$ ．

称使 $f_x(x_0,y_0)=0,\ \ f_y(x_0,y_0)=0$ 同时成立的点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的驻点（或称为临界点）.由上面分析可知：

定理 **10.1(函数取得极值的必要条件)**　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值，且 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导，则点 (x_0,y_0) 必为函数的驻点．

从几何上看，$z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处可偏导且取得极值时，曲面在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切平面方程为 $z=z_0$ ，即此点处的切平面平行于 xOy 面．

类似可得,若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 具有偏导数且在该点取得极值，则有

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\ \ f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\ f_z(x_0,y_0,z_0)=0\ .$$

在一元函数极值的讨论中，我们知道，可导函数的极值点一定是驻点，而驻点不一定是极值点，这个结论对多元函数一样成立．

例如函数 $z=f(x,y)=x^2-2x+y^2-4y+6$ ，因 $f(x,y)$ 处处可偏导．$f_x=2x-2$ ，$f_y=2y-4$ ，故点 $(1,2)$ 为函数 $f(x,y)$ 的驻点．因 $f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2+1$ ，故驻点 $(1,2)$ 为函数的极小值点，函数的极小值为 $f(1,2)=1$ ．

但对函数 $f(x,y)=y^2-x^2$,易求得驻点为 $(0,0)$，$f(0,0)=0$.但显然在 $(0,0)$ 点的邻域内，存在点 $(0,y_1)(y_1\neq 0)$ ，使 $f(0,y_1)>0$ ；存在点 $(x_2,0)$ $(x_2\neq 0)$ ，使 $f(x_2,0)<0$ ，故驻点 $(0,0)$ 不是函数的极值点．

函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 有极值点 $(0,0)$ ，但在点 $(0,0)$ 处，z_x，z_y 均不存在．

那么如何判断驻点是否为极值点呢？下面定理给出了一个函数取得极值的充分条件：

定理 10.2(函数取得极值的充分条件)　设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内存在二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$ ，$f_y(x_0,y_0)=0$ ．记 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$ ，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$ ，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$ ，则有

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时，(x_0,y_0) 是极值点．且当 $A>0$ 时，$P_0(x_0,y_0)$ 为极小值点；当 $A<0$ 时，$P_0(x_0,y_0)$ 是极大值点．

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，$P_0(x_0,y_0)$ 不是极值点．

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时，不能判定 $P_0(x_0,y_0)$ 是否为极值点，需要另外讨论．

证　利用二元函数的一阶泰勒公式，因

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$
$$=f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+\frac{1}{2}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0+\theta h,y_0+\theta k,\quad 0<\theta<1$$

由已知条件，$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$ ，故

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$
$$=\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^2+2f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)hk+f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k^2\right].$$

又因为 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有连续的二阶偏导数，所以，有

$$f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{xx}(x_0,y_0)+\alpha=A+\alpha ,$$
$$f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{xy}(x_0,y_0)+\beta=B+\beta ,$$

$$f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=f_{yy}(x_0,y_0)+\gamma=C+\gamma\ ,$$

其中，当 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ 时，$\alpha\to 0,\beta\to 0,\gamma\to 0$ ，故

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left[Ah^2+2Bhk+Ck^2\right]+\frac{1}{2}\left[\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2\right]\ ,$$

因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ ，故在 $U(P_0)$ 内，当 $Ah^2+2Bhk+Ck^2\neq 0$ 时，$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ 与 $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ 的符号相同．

记 $g=Ah^2+2Bhk+Ck^2$ ，$\Delta f=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ ，则

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时，有 $AC>0$ ，即 $A\neq 0$ ，$C\neq 0$ ，且二者同号．因为 $h^2+k^2\neq 0$ ，所以

$$Ag=A^2h^2+2ABhk+ACk^2=(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2>0\ ,$$

故 Δf 与 A 的符号相同．

当 $A>0$ 时 ,$\Delta f>0$,即 $f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)>f(x_0,y_0)$,此时 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极小值点．

当 $A<0$ 时 ,$\Delta f<0$,即 $f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)<f(x_0,y_0)$,此时 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极大值点．

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，

若 $A\neq 0$ ，则 $Ag=(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2$ ，当 $h\neq 0,k=0$ 时，$Ag>0$ ；当 $Ah+Bk=0,k\neq 0$ 时，$Ag<0$ ，即此时 Δf 可正可负；

若 $A=C=0$ ，$B\neq 0$ ，则 $g=2Bhk$ ，当 $hk>0$ 时，$g>0$ ；当 $hk<0$ 时，$g<0$ ，此时 Δf 可正可负；

故当 $AC-B^2<0$ 时，Δf 在 $U(P_0)$ 内可正可负，得 $P_0(x_0,y_0)$ 不是函数的极值点．

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时，

若 $A\neq 0$ ，则 $Ag=(Ah+Bk)^2>0$ ；若 $Ah+Bk=0$ ，则 $g=0$ ，此时 Δf 的符号无判断．

若 $C\neq 0$ 可得类似的结论．所以此时无法判断 $P_0(x_0,y_0)$ 是否为函数的极值点．

如：$f(x,y)=3x^2+4y^4$ 在 $(0,0)$ 点处取得极小值；$f(x,y)=2-(x^4+y^4)$ 在 $(0,0)$ 点处取得极大值，而 $f(x,y)=xy$ 在 $(0,0)$ 处无极值，但是这三个函数在 $(0,0)$ 处的偏导数都为零，且都有 $AC-B^2=0$ ． ∎

具有二阶连续偏导数的函数 $f(x,y)$ 的极值的求法：

(1) 求解方程组 $f_x(x_0,y_0)=0,\ \ f_y(x_0,y_0)=0$ ，求出 $f(x,y)$ 的所有驻点；

(2) 求出每个驻点处的二阶偏导数，以及 A,B,C ；

(3) 定出每个驻点处 $AC-B^2$ 的符号，由充分条件来判断其是否为极值点．若是极值点再来讨论是极大值点，还是极小值点．

【例 10.1】 求函数 $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+3y^3+9y^2-3xy+9y-9x$ 的极值点．

解 解方程组 $\begin{cases} f_x=x-3y-9=0 \\ f_y=9y^2+18y-3x+9=0 \end{cases}$，得 $(3,-2)$， $(12,1)$ 为函数的两个驻点．

因为 $f_{xx}=1,\ \ f_{yy}=18y+18,\ \ f_{xy}=-3$，所以 $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=18y+9$，在点 $(3,-2)$ 处，$AC-B^2=-36+9=-27<0$，故 $(3,-2)$ 不是极值点．在点 $(12,1)$ 处，$AC-B^2=18+9=27>0$，且 $A=1>0$，故 $(12,1)$ 是极小值点． ▮

思考题：

1．二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值，能否得到一元函数 $z=f(x,y_0)$ 及 $z=f(x_0,y)$ 在 (x_0,y_0) 处也取得极值？反之呢?

与一元函数类似，可以利用函数的极值来求函数的最值．我们知道，若函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，由连续函数的性质知，$f(x,y)$ 在区域 D 上定存在最大值和最小值．函数的最值可能在区域的内部取得，也可能在区域 D 的边界上取得．如果其最值在区域 D 的内部取得，那么最值点必为极值点．所以，和一元函数中求最值的方法类似，将函数的所有可能极值点与其在边界上的最值点处的函数值比较，其中最大者即为函数的最大值，最小者即为函数的最小值．通常求最值问题往往带有实际背景，由问题的实际意义可判断函数 $f(x,y)$ 在 D 上一定有最值存在，且可以判定最值一定在区域内部取得，那么当 $f(x,y)$ 在 D 的内部只有一个可疑极值点时，函数在此点处的函数值一定就是所要求的最值．

【例 10.2】 求函数 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值．

解 先求出 $f(x,y)$ 的所有驻点及驻点处的函数值．

解 $\begin{cases} f_x=2x+4xy=0 \\ f_y=2x^2+2y=0 \end{cases}$，得驻点为 $(0,0),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$．且有

$$f(0,0)=0\ ,\ f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\ ,\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\ .$$

再求出边界上函数的最值．将 $x^2+y^2=1$ 代入函数 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$（记为 $G(y)$），得

$$G(y)=1-y^2+2(1-y^2)y+y^2=1+2y-2y^3\ ,\quad -1\le y\le 1\ .$$

令 $G'(y)=2-6y^2=0$，得 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．这是边界上的可能极值点．比较边界点与可能极值点处的函数值，因

$$G(-1)=1\ ,\ G(1)=1\ ,\ G(\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\frac{4}{9}\sqrt{3}\ ,\ G(-\frac{1}{\sqrt{3}})=1-\frac{4}{9}\sqrt{3}\ ,$$

故 $G(y)$ 在边界上的最大值为 $G(\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\frac{4}{9}\sqrt{3}$，最小值为 $G(-\frac{1}{\sqrt{3}})=1-\frac{4}{9}\sqrt{3}$．

最后将区域内驻点处的函数值与边界上的最值相比较，得函数在闭区域 D 上的最大值为 $f_{\max}=G(\frac{1}{\sqrt{3}})=f(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\frac{4}{9}\sqrt{3}$，最小值为 $f_{\min}=f(0,0)=0$． ▮

【例 10.3】　某厂要做一个体积为 $8\,\mathrm{m}^3$ 的有盖长方体水箱．问当长、宽、高各为多少时，用料最省？

解　设水箱的长，宽分别为 $x\,\mathrm{m}$，$y\,\mathrm{m}$，则高为 $\dfrac{8}{xy}\,\mathrm{m}$，水箱的表面积为

$$S=2(xy+x\frac{8}{xy}+y\frac{8}{xy})=2(xy+\frac{8}{y}+\frac{8}{x})\qquad x>0,y>0$$

令 $S_x=2(y-\dfrac{8}{x^2})=0$，$S_y=2(x-\dfrac{8}{y^2})=0$，解得 $x=2$，$y=2$．

因为最小值一定是在开区域 $x>0,y>0$ 内部取得，而函数在区域内只有惟一的驻点 $(2,2)$．故当 $x=2,y=2$ 时，表面积取得最小值．即当水箱的长为 $2\,\mathrm{m}$，宽为 $2\,\mathrm{m}$，高为 $\dfrac{8}{2\times 2}=2\,\mathrm{m}$ 时所用的材料最省． ▮

思考题：

2．若二元函数 $z=f(x,y)$ 在某区域内连续且有惟一的极值点，则该点就是函数在该区域上的最大值点或最小值点．是否正确?

10.2 条件极值，拉格朗日乘数法

在无条件极值中，函数的自变量各自独立地变化，不受到其它条件的约束．但是在实际问题中，大量的极值问题中的变量都会受到一定的条件约束．这类附有约束条件的极值的问题，称为有约束极值，或条件极值．如：函数 $z=x^2+y^2$，在无约束条件下，显然 $(0,0)$ 点为其极小值点，但若加上约束条件 $x+y-1=0$，则对于有约束条件的极值问题来说，$(0,0)$ 点就不可能为函数的极值了，因为 $(0,0)$ 不满足约束条件．容易算出此时的极小值点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$．在无约束条件的极值问题中，求的是曲面 $z=x^2+y^2$ 上各点的竖坐标 z 的极小值，而在有约束极值问题中，求的是曲面与平面 $x+y-1=0$ 的交线上各点的竖坐标 z 的极小值，所以，无条件极值问题与条件极值问题是不同的．

解决条件极值问题的基本思想是将其化为无条件极值问题．如 $z=x^2+y^2$ 在约束条件 $x+y-1=0$ 下的极值问题可转化为 $z=x^2+(1-x)^2$ 的无条件极值问题．但这种方法并非对所有的条件极值问题都可行，在有些情况下，尽管可行，但计算可能会较繁．为此，我们介绍一种直接从约束条件出发，求解条件极值的方法——拉格朗日乘数法．

下面寻找函数 $z=f(x,y)$ 在约束约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件．

设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极值，则 $\varphi(x_0,y_0)=0$．设 f,φ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有连续偏导数，且 φ_x,φ_y 不全为零，则由隐函数存在定理，$\varphi(x,y)=0$ 确定一个有连续导数的函数 $y=y(x)$，且 $y_0=y(x_0)$．代入目标函数，得 $z=f(x,y(x))$．此时，我们将条件极值问题转化为无条件极值的问题．由函数取得极值的必要条件，函数应满足 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0$．而 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，由隐函数求导法则，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$，即有 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_x(x,y)-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}f_y(x,y)$，故有

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\dfrac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}f_y(x_0,y_0)=0, \\ \varphi(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\varphi_x(x_0,y_0)=0, \\ \varphi(x_0,y_0)=0 \end{cases}. \tag{10.1}$$

令

$$\lambda=-\frac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\ , \tag{10.2}$$

则方程组(10.1)和方程(10.2)可表示为

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0, \\ \varphi(x_0,y_0)=0 \end{cases} \tag{10.3}$$

上述方程组即为目标函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件．

作辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ．方程组(10.3)等价于 $F_x=0$ ，$F_y=0$ ，$F_\lambda=0$ ．由此，通过构造函数 $F(x,y,\lambda)$ ，将原来的条件极值问题转化为无条件极值问题 ,这种方法称为拉格朗日乘数法 ,以上构造的函数 $F(x,y,\lambda)$ 称为拉格朗日函数，其中引进的参数 λ 称为拉格朗日乘子．

根据上面推导，可以得到用拉格朗日乘数法求解极值问题的步骤．

(1) 构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ；

(2) 求 $F(x,y,\lambda)$ 的所有可能极值点，即解方程组

$$\begin{cases} F_x=f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0 \\ F_y=f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0 \\ F_\lambda=\varphi(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

(3) 判断所求出的可能极值点是否为目标函数的极值点．

至于如何判断，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定。

【例 10.4】　设 $f(x,y)=x+y$ ，且 $x^2+y^2=1$ ，求 $f(x,y)$ 的最值．

解　构造拉格朗日函数：$F(x,y)=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$，有

$$\begin{cases} F_x=1+2\lambda x=0 \\ F_y=1+2\lambda y=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases},$$

由前两式可得，$x=y$，代入第三个式子，得$2x^2-1=0$，故$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$．函数驻点为：$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，　$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$．

求函数$f(x,y)=x+y$在约束条件$x^2+y^2=1$下的最值，实际上就是求曲面$z=x+y$与$x^2+y^2=1$的交线上的所有点的最高点和最低点的纵坐标．又$f(x,y)=x+y$在闭区域$\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\right\}$上是连续的，故必存在最大值和最小值．

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2},\quad f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2},$$

所以，函数满足条件的最大值为$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$，最小值为$f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}$．∎

拉格朗日乘数法可推广到二元以上函数以及有多个约束条件的极值问题的情形．

【例 10.5】　求函数$u=x^2+y^2+z^2$在约束条件$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$及$z=x+y$下的最值．

解　构造拉格朗日函数：

$$F=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}-1)+\lambda_2(x+y-z),$$

分别对变量$x,y,z,\lambda_1,\lambda_2$求偏导，得

$$F_x=2x+\frac{\lambda_1}{2}x+\lambda_2=0 \tag{1}$$

$$F_y=2y+\frac{2\lambda_1}{5}y+\lambda_2=0 \tag{2}$$

$$F_z=2z+\frac{2\lambda_1}{25}z-\lambda_2=0 \tag{3}$$

$$F_{\lambda_1}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}-1=0 \tag{4}$$

$$F_{\lambda_2} = x + y - z = 0 \tag{5}$$

$(1)\cdot x + (2)\cdot y + (3)\cdot z$ ，得： $\lambda_1 = -(x^2 + y^2 + z^2) = -u$

由(1)，(2)，(3)式得

$$x = \frac{-2}{4+\lambda_1}\lambda_2\ ，\ y = \frac{-5}{10+2\lambda_1}\lambda_2\ ，\ z = \frac{25}{50+2\lambda_1}\lambda_2\ ， \tag{6}$$

所以 $\lambda_2 \neq 0$.（若 $\lambda_2 = 0$ ，则有 $x = 0, y = 0, z = 0$ ，不满足约束条件）. 将上述式子代入 (5) 式，得 $\dfrac{2}{4+\lambda_1} + \dfrac{5}{10+2\lambda_1} + \dfrac{25}{50+2\lambda_1} = 0$ ，整理可得，$17\lambda_1 + 245\lambda_1 + 750 = 0$. 即 $(17\lambda_1 + 75)(\lambda_1 + 10) = 0$ ，故 $\lambda_1 = -10$ ，$\lambda_1 = -\dfrac{75}{17}$. 由 $u = -\lambda_1$ ，得函数的最大值为 10 ，最小值为 $\dfrac{75}{17}$.

或：当 $\lambda_1 = -10$ 时，代入(6)式，得 $x = \dfrac{1}{3}\lambda_2$ ，$y = \dfrac{1}{2}\lambda_2$ ，$z = \dfrac{5}{6}\lambda_2$ ，代入(4)式解得，$\lambda_2 = \pm\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{19}} = \pm\dfrac{6\sqrt{95}}{19}$ ，由此得两个驻点

$$P_1\left(\frac{2\sqrt{95}}{19}, \frac{3\sqrt{95}}{19}, \frac{5\sqrt{95}}{19}\right)\ ，\ P_2\left(-\frac{2\sqrt{95}}{19}, -\frac{3\sqrt{95}}{19}, -\frac{5\sqrt{95}}{19}\right)\ ，$$

在此两点处 $u(P_1) = u(P_2) = 10$.

当 $\lambda_1 = -\dfrac{75}{17}$ 时，$x = \dfrac{34}{7}\lambda_2$ ，$y = -\dfrac{17}{4}\lambda_2$ ，$z = \dfrac{17}{28}\lambda_2$ ，代入(4)式，可得 $\lambda_2 = \pm\dfrac{140}{17\sqrt{646}}$ ，从而得两个驻点

$$P_3\left(\frac{40}{17\sqrt{646}}, -\frac{35}{\sqrt{646}}, \frac{5}{\sqrt{646}}\right)\ ，\ P_4\left(-\frac{40}{17\sqrt{646}}, \frac{35}{\sqrt{646}}, -\frac{5}{\sqrt{646}}\right)\ ，$$

在这两点处 $u(P_3) = u(P_4) = \dfrac{75}{17}$. 因为 $x^2 + y^2 + z^2$ 表示坐标原点 $(0,0,0)$ 到点 (x,y,z) 的距离的平方，故所求的最值问题等价于求原点到曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{25} = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 上的最近和最远距离．显然该问题存在有解，故函数的最大值为 10 ，最小值为 $\dfrac{75}{17}$. ∎

事实上，例 10.3 也可用拉格朗日乘数法求解．

思考题：

3．二元函数的极值与条件极值的几何意义是什么？若二元函数没有极值，

是否一定没有条件极值?

10.3* 最小二乘法

在生产实践中，常常需要根据测量得到的数据找出函数的关系，通常称为配曲线或找经验公式．也就是对于实验中得到的一组数据 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ ，要求寻找一个适当的函数 $y=f(x)$,使之在 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 处取得的函数值 $f(x_1)$ ，$f(x_2)$ ，…… ，$f(x_n)$ 与实验数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 在某种尺度下最接近．从几何上来说，就是确定一平面曲线，使它和实验数据点最接近．故又称为"**曲线拟合问题**". 解决这类问题较常用的方法是"直线拟合"法，即用线性函数来作逼近．

例如：炼钢是一个氧化降碳的过程．钢液含碳量的多少直接影响冶炼时间的长短．如果已测得炉料熔化完毕时钢液的含碳量 x 与冶炼时间 T（从炉料熔化完毕到出钢的时间）的一系列数据如下表

$x(0.01\%)$	104	189	190	177	147	134	150	191	204	121
T(分)	100	200	210	185	155	125	170	205	235	125

试推测出 T 与 x 的函数关系．

将数据描在方格纸上 ,可看到这些点大致在一条直线上 .因而设 $T=f(x)=ax+b$.如何合理的选择系数 a,b ？

设 $\varepsilon_i=T_i-ax_i-b$ ，它表示用函数 $f(x)=ax+b$ 近似描述 x 与 T 间的关系时所产生的偏差．此时，我们希望选择合适的系数 a,b ，使偏差值越小越好．所有点的偏差的平方和 $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}(T_i-ax_i-b)^2$ 称为总偏差，记为 $\varepsilon(a,b)$ ．我们应当确定这样的 a,b ，使得总偏差 $\varepsilon(a,b)$ 达到最小．这种确定系数的方法叫做最小二乘法．

由求最小值的方法，a,b 应满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(T_i-ax_i-b)x_i=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iT_i\right)=0\\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial b}=-2(\sum_{i=1}^{n}(T_i-ax_i-b)=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb-\sum_{i=1}^{n}T_i\right)=0\end{cases}$$

即 a,b 满足方程组 $\begin{cases}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)a+(\sum_{i=1}^{n}x_i)b=\sum_{i=1}^{n}x_iT_i\\ (\sum_{i=1}^{n}x_i)a+nb=\sum_{i=1}^{n}T_i\end{cases}$

解得

$$a=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iT_i-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}T_i)}{n(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2}\ ,\ b=\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}T_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iT_i)}{n(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2}\ .$$

例如，在上面所说的炼钢过程中，共测得 10 组数据，将数据代入上面关于 a,b 的公式，得到关于 a,b 的二元一次方程组为 $\begin{cases}265448a+1598b=287640\\1598a+10b=1720\end{cases}$

解方程组，得 $a=1.267$ ，$b=-30.51$. 即用 $T=1.267x-30.51$ 去近似表示钢液中的含碳量与冶炼时间之间的关系可达到使总偏差最小，故此时的经验公式为 $T=1.267x-30.51$.

习题 9 - 10

A 类

1．求下列函数的极值．

(1) $z=x^3-3x-y^2$ ；　　(2) $z=(x+y)(xy+1)$ ；

(3) $z=\mathrm{e}^{x^2-y}(5-2x+y)$ ；　　(4) $z=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ ；

(5) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ ，$(0\le x\le\dfrac{\pi}{2},0\le y\le\dfrac{\pi}{2})$ ．

2．求下列函数在指定的区域上的最大值与最小值．

(1) $z=xy$ 在 $D=\left\{(x,y)\middle|x\ge0,y\ge0,x+y\le1\right\}$ 上；

(2) $z=x^2+y^2$ 在 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le9\right\}$ 上；

(3) $z=1+xy-x-y$ 在曲线 $y=x^2$ 与 $y=4$ 所围的闭区域上；

(4) $z=\mathrm{e}^{-xy}$ 在 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+4y^2\le1\right\}$ 上．

3．求下列方程所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值．

(1) $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$ ；

(2) $z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0$ ．

4．证明：函数 $z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$ 有无穷多个极大值，而无极小值．

5．已知矩形的周长为 $2p$ ，将它绕其一边旋转而得一旋转体．问边长各为多少时，旋转体的体积最大？

6．求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离．

7．在圆锥 $Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$ $(R>0,h>0)$ 和平面 $z=h$ 所围成的锥体中内接底面平行于 xOy 面的长方体，求其中体积最大的长方体的体积．

8．求内接于椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的最大长方体的体积，长方体的各个面平行于坐标面．

9．直圆柱体加正圆锥为顶构成一立体，圆锥的底面半径与圆柱半径相等．若立体的表面积为 S ，试问立体的尺寸如何时，其体积最大．

10．现需制作一个容积为 $512\mathrm{m}^3$ 的长方形容器．设制作容器时，其两侧边的成本为 0.2 元 $/\mathrm{m}^2$ ，而上，下底的成本为 0.4元 $/\mathrm{m}^2$ ．试确定容器的尺寸，使制作成本最低．

B 类

1．求方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的隐函数的极值．

2．求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$ ，$x=0$ ，$y=0$ 所围成的区域 D 的最大值与最小值．

3．在第一卦限内作曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求出切点的坐标．

4．分解已知正数 a 为 n 个正的因数，使得它们的倒数和为最小．

5．已知三角形的周长为 $2l$ ．求出这样的三角形，当它绕自己的一边旋转时，所得的旋转体的体积最大．

6 .函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 有极小值的充分条件是否为此函数沿着过 $M_0(x_0,y_0)$ 点的每一条直线上都有极小值呢？研究例子 $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$ ．

7．设有一小山，取它的底所在的面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2-xy=75\}$ ，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$ ．现欲利用小山开展攀岩活动，则需在山脚寻找一个上山坡度最大的点作为起点．试确定起点的位置．

总 习 题 九

1．填空题

(1) 函数 $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是________．

(2) 设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ ，则 $f(1,\dfrac{y}{x})=$ ________．

(3) 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ ，则 $\lim\limits_{x\to0^+,y\to0^+}f(x,y)=$ ________ ；$\lim\limits_{x\to0,y\to0}f(x,y)=$ ________．

(4) $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x\cos y}{1+x+y}=$ ________．

(5) 若 $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$，则 $f_x(1,2,0)=$ _____ ；$f_y(1,2,0)=$ _____ ；$f_z(1,2,0)=$ _____．

(6) 曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在 $(1,2,0)$ 点的处切平面方程为________．

(7) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在 $A(1,0,1)$ 点处沿 A 点指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数

为________．

(8) 设函数 $z=x^y$，则 z 对 y 的偏增量 $\Delta_y z=$________；$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=$________．

(9) 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$________．

(10) 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$________．

(11) 已知 $f(x,y,z)=xy^2z^3(1-x-2y-3z)$，则函数 $f(x,y,z)$ 在第一卦限内的驻点为________．

2．选择题

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处________

A. 连续且偏导数存在；　　B. 连续但偏导数不存在；

C. 不连续但偏导数存在；　　D. 不连续且偏导数不存在．

(2) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；　　② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数连续；

③ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处可微；　　④ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处两个偏导数存在．

若用“$P\Rightarrow Q$”表示由性质 P 推出性质 Q，则________

A. ②⇒③⇒①；　B. ③⇒②⇒①；　C. ③⇒④⇒①；　D. ③⇒①⇒④．

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$________

A. 3；　B. 6；　C. 不存在；　D. ∞．

(4) 函数 $f(x,y)=\sin(x^2+y)$ 在 $(0,0)$ 点处________

A. 无定义；　B. 无极限；　C. 有极限但不连续；　D. 连续．

(5) 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处间断，则________

A. 函数在该点处一定无定义；

B. 函数在该点处极限一定不存在；

C. 函数在该点处可能有极限，也可能有定义；

D. 函数在该点处一定有极限，也一定有定义，但极限值与函数值不相等．

(6) 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上 P 点处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则 P 点为______

A. $(1,-1,2)$；　B. $(1,1,2)$；　C. $(-1,1,2)$；　D. $(-1,-1,2)$．

3．求下列极限；

①$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$；②$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to +\infty}}\dfrac{xy-1}{y+1}$；③$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$；④$\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$

4．计算下列各题：

①$z=\sqrt{\ln(xy)}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

②$z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

③$u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中$\varphi,f$具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$．

④设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，令 $u=x-ay,v=x+ay$，变换方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$．

⑤设函数$u=f(x,y,z)$由方程$u^2+y^2+z^2-x=0$确定，其中$z=xy^2+y\ln y-y$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$．

⑥设$z=z(x,y)$有二阶连续偏导数，且$x=\mathrm{e}^u\cos v$，$y=\mathrm{e}^u\sin v$，试证：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

5．设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：$f(x,y)$在$(0,0)$点处连续且偏导数存在，但不可微．

6．设$u=xy^2z^3$，其中$z=z(x,y)$由方程$F(x-y,y-z,z-x)=0$确定，F有连续的偏导数，且$F_2\neq F_3$，求$\mathrm{d}u$．

7．设方程组$\begin{cases}x+y+z+z^2=0\\ x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$．

8．已知x,y,z为实数，且$\mathrm{e}^x+y^2+|z|=3$，求证：$\mathrm{e}^xy^2|z|\leq 1$．

9．一个槽形容器，长为H，截面是半径为R的半圆，横放在水平地面上，其表面积为定值S_0，求半径R与长H的值，使其容积最大．

10．设函数$f(x,y)$在$(0,0)$点及其邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=A<0$，讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点的邻域内是否有极值．如果有，是极大值还是极小值．

11．过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求切平面的方程．