第一章习题课课件后例子参考解答提示
极限

①

例1. (1)，(3)，(5) 正确

(2)，(4)，(6) 错误.

例2 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=-1$

例3 (1)

$$\lim_{x\to2}\frac{2+x-(3x-2)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{4x+1-(5x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{-2x+4}{-x+2}\cdot\frac{6}{4}$$

$=3$

(2) $$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}}+\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$=0+\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

补1 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{1-x}+3)(2^3+x)}$$

$$=\frac{-1}{6}(4+4+4)=-2$$

例4 (1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-3}{3} = -1$

补2 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}+1} = \frac{1}{2}$

例5 (1) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\frac{2}{x} \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t} = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\left(\tan 3x\,\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right) \xlongequal{\frac{\pi}{6}-x=t} \lim\limits_{t\to 0}\tan 3\left(\frac{\pi}{6}-t\right)\tan t = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t}{\tan 3t} = \frac{1}{3}$

例6 (1) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}\sin x = 0$　　(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\arctan x}{x} = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{|\cos\frac{1}{x}|} = 0$　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\sin x = 0$

例7 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\tan x-(1+\sin x)}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \frac{1}{4}$

(补) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

$= 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x\sin x}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}} = 2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}\quad (m\neq n)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{m+n}{2}x\,\sin\frac{m-n}{2}x}{x^2}$

$= -2\cdot\frac{1}{4}(m^2-n^2) = -\frac{1}{2}(m^2-n^2)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x^2)^2}}{\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2}$

(补) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}} = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$ $(\alpha\neq\beta)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}\left(e^{\alpha x-\beta x}-1\right)}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x-\beta x}{2\cancel{\cos x}\,\frac{\alpha-\beta}{2}x}=1$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(2\tan x-\sin x)}{(\cos x-e^{x^2})\sin x}$ （将分母中 $\sin^2x$ 改为 $\sin x$）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(2x-x)}{[\cos x-1-(e^{x^2}-1)]\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(-\frac{1}{2}x^2-x^2)\,x}=-\frac{2}{3}$$

(补)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\,(-x)}=-1$$

(7) $$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+\frac{x-a}{a})}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{a(x-a)}=\frac{1}{a}$$

(8) $$\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{a^b\left(a^{x-b}-1\right)}{x-b}=\lim_{x\to b}a^b\frac{(x-b)\ln a}{x-b}=a^b\ln a$$

(9) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos ax-1)}{\ln(1+\cos bx-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(ax)^2}{-\frac{1}{2}(bx)^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

(补) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1-(b^{x^2}-1)}{[a^x-1-(b^x-1)]^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln a-x^2\ln b}{(x\ln a-x\ln b)^2}=\frac{1}{\ln\frac{a}{b}}$$

(10) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x}{2^x}=0$$

(11) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln 3^x(1+3^{-x})}{\ln 2^x(1+2^{-x})}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}=\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

1318 (1) $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

$$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}}$$

$$=e^{\frac{1}{\sin a}\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}}=e^{\frac{1}{\sin a}\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}}$$

$$=e^{\frac{1}{\sin a}\cos a}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}\cdot\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1\right)n}$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}\cdot n}=e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}\quad(a>0,\ b>0)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\cdot n}$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\cdot n}$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1+b^{\frac{1}{n}}-1}{2}\cdot n}$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln a+\ln b)\cdot\frac{n}{2}}$$

$$=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$$

例9 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$ $(a_i>0)$

$A=\sqrt[n]{A^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}<\sqrt[n]{mA^n}=A\sqrt[n]{m}$

$A=\max\limits_i\{a_i\}$

又 $\sqrt[n]{m}\to 1$ $(n\to\infty)$

$\therefore$ 原式 $=A$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$

$x<0$ 时 $1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<x\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-x$

$x>0$ 时 $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$

可见 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

例10 $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ $a>0$.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$, 则 $A^2=a+A\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

① $x_1=\sqrt{a}$, $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a+0}=x_1$

假设 $x_n>x_{n-1}$

则有 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}>\sqrt{a+x_{n-1}}=x_n$

可见 $\{x_n\}$ 单增

② $x_1=\sqrt{a}<1+\sqrt{a}$

假设 $x_n<1+\sqrt{a}$

则有 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}<\sqrt{a+1+\sqrt{a}}<\sqrt{a+1+2\sqrt{a}}=1+\sqrt{a}$

可见 $\{x_n\}$ 有上界.

例11.

$x_n = a > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$ 有下界

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(\frac{a}{x_n} - x_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a - x_n^2}{x_n} < 0$ 单减

令 $x_n \to A > 0$ $(n \to \infty)$

则 $A = \frac{1}{2}(A + \frac{a}{A}) \Rightarrow A = \sqrt{a}$.

例12. $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$

① $0 < x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} < 1 + 1 = 2$ $(x_n > 0)$ 有上界.

② $x_1 = 1 < x_2 = 1 + \frac{1}{2}$

假设 $x_{n-1} < x_n$

则有 $x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} - 1 - \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$

$= \frac{x_n(1+x_{n-1}) - x_{n-1}(1+x_n)}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} > 0$

可见 $\{x_n\}$ 单增.

令 $x_n \to a \geq 0$. $(n \to \infty)$

则 $a = 1 + \frac{a}{1+a} \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例13 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求 a, b

解：$\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}\cdot(x^2-x-2) = 0$

$\therefore 4+2a+b=0$

又 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-4-2a}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2+a)}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{4+a}{3}=2$

$\therefore a=2$

$b=-8$

例14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-(ax^2+ax+bx+b)}{x+1}=0$

$\therefore a=1,\ -(a+b)=0 \Rightarrow a=1,\ b=-1.$

或 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$

$\therefore 1-a=0 \Rightarrow a=1.$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-x(x+1)}{x+1}=-1$

例15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$

$1-a=0 \Rightarrow a=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = -\dfrac{1}{2}$

例16.

$$f(x) = \begin{cases} x+a & x>0 \\ 3 & x=0 \\ \dfrac{x^2}{\cos x-1} & x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x+a) = a$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{\cos x-1} = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{-\frac{1}{2}x} = -2$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) \Rightarrow a=-2$$

例17.

(1) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad k=2$

(2) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{x+\sqrt{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}} = \sqrt{x+x^{\frac{1}{4}}(1+x^{\frac{1}{2}})}$

$= \sqrt{x^{\frac{1}{4}}(1+x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}})}$

$= x^{\frac{1}{8}}\sqrt{1+x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}} \sim x^{\frac{1}{8}}$

(3) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

$= \frac{1}{2}x-(-\frac{1}{2}x) = x \sim x^1$

或 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

$= \dfrac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \sim x$

(4) $e^{\tan x}-e^x = e^x(e^{\tan x-x}-1) \sim \tan x - x$ (暂时不好处理)

例18. $\lim_{x\to0} \dfrac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin 2x})}{3^x-1} = 5$. 求 $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x^2}$

解: $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)}{\sin 2x} \cdot \dfrac{1}{x\ln 3} = 5$

$\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)}{2x^2\ln 3} = 5 \Rightarrow \lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2} = 10\ln 3$

例19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x}=2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=6$$

例20

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$$

~~$|x|<1$ 时~~. $f(x)=\begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -x & |x|>1 \end{cases}$

连续性

例1 正确：(1) (3)

错误：(2) (4) (5) (6)

例2. (1) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$

间断点：$x-1 \neq 0$，$x \neq 0$，$x+1 \neq 0$

$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \neq 0$

$\Rightarrow$ $x = -1, 0, 1$ 为间断点

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x(x+1)} \cdot \dfrac{x(x-1)}{1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{x+1} = \infty$

无穷间断点

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x+1} = -1$ 可去间断点

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x+1} = 0$ 可去间断点

连续区间：$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad k \in Z$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ $x=0$ 可去

$\lim\limits_{\substack{x \to k\pi \\ k \neq 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to k\pi \\ k \neq 0}} \dfrac{x}{\sin x} = \infty$ $x = k\pi, k \neq 0$ 无穷

连续区间：$((k-1)\pi, k\pi) \quad k \in Z$

(3) $f(x) = \dfrac{(x-1)\sin x}{(x^2-1)|x|}$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1,$

$|x|=0 \Rightarrow x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{-x} = -1 \end{cases}$ 跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x}{(x+1)x} = \frac{1}{2}\sin 1$ 可去间断点

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{\sin x}{-x} = \infty$ 无穷间断点

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$\ln x \neq 0 \Rightarrow x=1$

$x>0 \Rightarrow x=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln x} = \infty$ 无穷间断点

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ 可去间断点

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$

$\dfrac{x}{x-1} = 0 \Rightarrow x=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = 1 \end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x & |x|\le 1 \\ |x-1| & |x|>1 \end{cases}$

解:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & x<-1 \\ \cos\frac{\pi}{2}x & -1\le x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(1-x) = 2$$

$x=-1$ 跳跃间断点,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi}{2}x = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi}{2}x = 0$$

$x=1$ ~~可去间断点~~ 连续

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$$

$$f(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

(7) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x}{\sin\pi x} & x<0 \\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1} & x\ge 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-x}{\sin\pi x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x^2-1)}{\pi x} = -\frac{1}{\pi}$$

$x=0$ 跳跃

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\ln(1+x) + \lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x^2-1} = -\sin 1$$

补1　1) $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$

间断点: $x=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$　　跳跃

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$

2) $f(x)=\frac{\tan2x}{x}$

间断点 $x=0$ 、 $x=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{x}=2$　　可去

3) $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

间断点 $x=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$

4) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1$

$f(0)=1$

例3.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}} & x<0\\ -1 & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{1+bx} & x>0\end{cases}$$ 在 $x=0$ 连续.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax}{\sqrt{\frac{1}{2}}(-x)}=-\sqrt{2}a$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln(1+bx)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-bx}{x}=-b$$

$$f(0)=-1.$$

$$\therefore\ -\sqrt{2}a=-b=-1\ \Rightarrow\ a=\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=1$$

补2

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} & -1\le x<0\\ a & x=0\\ x^2+b & 0<x\le1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{2x}\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)=2$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+b)=b$$

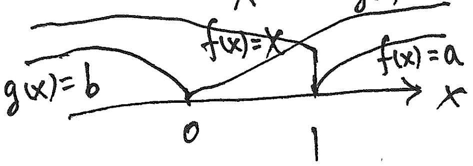
$$f(0)=a$$

$$\therefore\ 2=b=a$$

例4. $f(x) = \begin{cases} x & x<1 \\ a & x\geq 1 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} b & x<0 \\ x+2 & x\geq 0 \end{cases}$

$f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

解:



$$h(x)=f(x)+g(x) = \begin{cases} x+b & x<0 \\ 2x+2 & 0\leq x<1 \\ x+2+a & x\geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} h(x) &= \lim_{x\to 0^-}(x+b) = b \\ \lim_{x\to 0^+} h(x) &= \lim_{x\to 0^+}(2x+2) = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b=2=h(0)$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} h(x) &= \lim_{x\to 1^-}(2x+2) = 4 \\ \lim_{x\to 1^+} h(x) &= \lim_{x\to 1^+}(x+2+a) = 3+a \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4=3+a=h(1)$$

例5 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$, $\quad g(x) = 1+x^2$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$f[g(x)] = 1 \qquad x\in(-\infty,+\infty)$

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

例6

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^{n}+x^{-n}}$$

$$=\begin{cases}-1 & |x|<1\\ x^2 & |x|>1\\ 0 & x=1\\ 0 & x=-1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2 & x<-1\\ -1 & -1<x<1\\ x^2 & x>1\\ 0 & x=\pm1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}x^2=1$$ $f(-1)=0$ $x=-1$ 跳跃

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(-1)=-1$$ $f(1)=0$, $x=0$ 跳跃.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}x^2=1$$

例7.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$ $(-\infty,+\infty)$ 连续.

解: $$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & |x|<1\\ x & |x|>1\\ \frac{1}{2}(1+a+b) & x=1\\ \frac{1}{2}(-1+a-b) & x=-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)\Rightarrow -1=a-b=\frac{1}{2}(-1+a-b)$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b)$$

$$\Rightarrow a=0\quad b=1$$

补3 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$

$$=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \dfrac{1}{x} & |x|>1\\ 1 & x=1\\ 2 & x=-1\\ 0 & \end{cases}$$

例8. $f(x)=\dfrac{1}{|a|+ae^{bx}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

解: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|a|+ae^{bx}}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}e^{bx}=\infty \Rightarrow b<0$

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故 $|a|+ae^{bx}\neq 0 \Rightarrow a>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|a|+ae^{bx}}=\dfrac{1}{|a|}=\dfrac{1}{a}$

例9. $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$，可去间断点 $x=1$.

解: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{e^x-a}=0 \Rightarrow \dfrac{0}{1-a}=0$ 且 $1-a\neq0$.

（若 $\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=1-a=0\Rightarrow a=1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$ 矛盾）

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(e^x-a)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}\cdot x(x-1)=0$

$\therefore\ e-a=0 \Rightarrow a=e$

补4 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 无穷间断点 $x=0$，可去间断点 $x=1$.

解: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=0 \Rightarrow \dfrac{a}{1-b}=0 \Rightarrow a=0$ 且 $b\neq1$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}=A$（存在）$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(e^x-b)=0 \Rightarrow b=e$

例10　$f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处连续，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

证：$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} e^{x+\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0} e^{\Delta x}=e^x\cdot e^0=e^x=f(x)$$

例11　$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ 证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

证：$\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x)f(\Delta x)=f(x)\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=f(x)f(0)=f(x+0)=f(x)$$

补6　$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

证　$\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]=f(x)+\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)$$
$$=f(x)+f(0)$$
$$=f(x+0)=f(x)$$

例12.　$f\in C(a,b)$，$\lim_{x\to a^+} f(x)=A$，$\lim_{x\to b^-} f(x)=B$. 证明：$f(x)\in B(a,b)$.

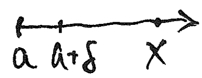
证：

$$令\ g(x)=\begin{cases} A & x=a \\ f(x) & a<x<b \\ B & x=b \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，而 $g(x)$ 与 $f(x)$ 只在 $x=a$，$x=b$ 处相差有限值，故 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

补7.　$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内连续，$\lim_{x\to a^+} f(x)=A$，$\lim_{x\to+\infty} f(x)=B$，证明 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有界.

证：由 $\lim_{x\to a^+} f(x)=A$，知 $\exists\delta>0$，使 $\forall x\in(a,a+\delta)$，得 $|f(x)|\le M_1$.



由 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=B$，知 $\exists X>0$，使 $\forall x\in(X,+\infty)$，有 $|f(x)|\le M_2$.

又 f 在 $[a+\delta,X]$ 上连续，有使 $\forall x\in[a+\delta,X]$，有 $|f(x)|\le M_3$.

取 $M=\max\{M_1,M_2,M_3\}$，对 $\forall x\in(a,+\infty)$ 有 $|f(x)|\le M$.

即 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有界.

例13. $\sin x + x + 1 = 0$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

证: $f(x) = \sin x + x + 1$ $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续，且 $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$，$f(\frac{\pi}{2}) = 2 + \frac{\pi}{2} > 0$.

故由零点定理，存在 $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，使 $f(\xi) = 0$. 即 $\sin x + x + 1 = 0$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根.

例14. $P(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n+1}$ $(a_0 \neq 0)$

证: 不妨设 $a_0 > 0$.

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{2n+1} \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$$

可见 $\exists x_1 < 0$，使 $P(x_1) < 0$，$\exists x_2 > 0$，使 $P(x_2) > 0$.

$P(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，且 $P(x_1)P(x_2) < 0$. 故由零点定理. 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (-\infty, +\infty)$ 使 $P(\xi) = 0$. 即奇次多项式 $P(x)$ 至少有一实根.

例15. $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$ $(a_1, a_2, a_3 > 0, \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$

在 (λ_1, λ_2)，(λ_2, λ_3) 内各有一个实根.

证: 令 $f(x) = a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) + a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3) + a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

则 $f(x)$ 在 $[\lambda_1, \lambda_2]$，$[\lambda_2, \lambda_3]$ 上连续.

且 $f(\lambda_1) = a_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3) > 0$

$f(\lambda_2) = a_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3) < 0$

$f(\lambda_3) = a_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) > 0$

由零点定理可得结论.

例16. $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 连续，$f(0)=f(2a)$，证明 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一实根.

证: $g(x)=f(x)-f(x+a) \qquad 0\le x\le a$.

$$g(0)=f(0)-f(a)$$

$$g(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

$$g(0)g(a)=-[f(0)-f(a)]^2\le 0.$$

当 $g(0)g(a)=0$，即 $g(0)=g(a)=0$ 时，存在 $x=0, a$ 使 $g(x)=0$.

当 $g(0)g(a)<0$ 时，由零点定理，存在 $\xi\in(0,a)$，使 $g(\xi)=0$.

综上，存在 $\xi\in[0,a]$，使 $g(\xi)=0$，即 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一实根.

例17. $f(x)\in C[a,b]$. $\lambda_i>0$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$. $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$

证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 (M) 和最小值 (m).

即 $\qquad m\le f(x_i)\le M \qquad i=1,2,\cdots,n$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)m \le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_i)$$

$$\le(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)M$$

故 $\qquad m\le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\le M$

由介值定理. $\exists\,\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.