

Imię i nazwisko studenta: Marcin Połajdowicz  
Nr albumu: 184265  
Poziom kształcenia: studia drugiego stopnia  
Forma studiów: stacjonarne  
Kierunek studiów: Informatyka  
Specjalność: Algorytmy i technologie internetowe

Imię i nazwisko studenta: Maciej Sztramski  
Nr albumu: 184779  
Poziom kształcenia: studia drugiego stopnia  
Forma studiów: stacjonarne  
Kierunek studiów: Informatyka  
Specjalność: Aplikacje rozproszone i systemy internetowe

## **PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA**

Tytuł pracy w języku polskim: Modelowanie optymalnych sposobów zakupu licencji oprogramowania w sieciach społecznościowych za pomocą dominowania w grafach

Tytuł pracy w języku angielskim: Modeling optimal ways to purchase software licenses in social networks via graph domination

Opiekun pracy: dr inż. Joanna Raczek



## **Streszczenie**

Celem niniejszej pracy magisterskiej było opracowanie grafowego modelu optymalizacji zakupu licencji oprogramowania w sieciach społecznościowych z uwzględnieniem realnych schematów cenowych platform, takich jak Duolingo Super i Spotify Premium. Problem sformułowano jako rozszerzenie klasycznego dominowania w grafach, wprowadzając warianty dominowania rzymskiego z ograniczeniami pojemności grup licencyjnych oraz zróżnicowanymi strukturami kosztów licencji indywidualnych i grupowych.

Przeprowadzono rygorystyczną analizę złożoności obliczeniowej, wykazując NP-trudność problemu poprzez redukcję z klasycznego zagadnienia zbioru dominującego. Zaimplementowano i systematycznie porównano szerokie spektrum podejść algorytmicznych: metody dokładne (programowanie całkowitoliczbowe, ILP) oraz siedem algorytmów aproksymacyjnych, w tym heurystyki konstrukcyjne (zachłanny, losowy, oparty na zbiorze dominującym) i metaheurystyki (algorytm genetyczny, przeszukiwanie tabu, symulowane wyżarzanie, algorytm mrówkowy). Badania eksperymentalne wykonano na dziesięciu rzeczywistych sieciach ego Facebooka (53–1035 węzłów) oraz trzech rodzinach grafów syntetycznych (Barabási–Albert, Erdős–Rényi, Watts–Strogatz) o rozmiarach 50–450 węzłów.

Wyniki pokazują, że metaheurystyki osiągają jakość rozwiązań na poziomie ok. 88–90% optimum, przy redukcji czasu obliczeń o około jeden rząd wielkości na większych instancjach względem ILP. W testach statycznych algorytm mrówkowy uzyskał najlepsze wyniki wśród metaheurystyk (koszt 0.506 vs 0.445 dla ILP przy średnim czasie 4.98 s vs 73.83 s). W eksperymentach dynamicznych algorytm genetyczny stanowił najlepszy kompromis jakości i efektywności (koszt 0.409 vs 0.362 dla ILP przy czasie 0.615 s vs 1.525 s). Przeanalizowano także scenariusz dynamiczny symulujący ewolucję sieci w czasie, w którym algorytmy wykazały dobrą zdolność adaptacji do zmian topologii. Badania objęły ponadto osiem rozszerzeń modelu, uwzględniających zróżnicowane polityki cenowe i typy planów subskrypcyjnych inspirowane rzeczywistymi ofertami platform cyfrowych.

**Słowa kluczowe:** teoria grafów, optymalizacja kombinatoryczna, dominowanie rzymskie, sieci społecznościowe, heurystyki, metaheurystyki, programowanie całkowitoliczbowe.

## ***Abstract***

This thesis develops a graph-based optimization model for software license purchasing in social networks, incorporating realistic pricing schemes from platforms such as Duolingo Super and Spotify Premium. The problem is formulated as an extension of classical domination in graphs, introducing Roman domination variants with capacity constraints on license groups and differentiated cost structures for individual and group licenses.

We provide a rigorous computational complexity analysis, proving NP-hardness via a reduction from the classical Dominating Set problem. We implement and systematically compare a broad suite of algorithmic approaches: exact methods (integer linear programming, ILP) alongside seven approximation algorithms, including construction heuristics (greedy, random, dominating-set-based) and metaheuristics (genetic algorithm, tabu search, simulated annealing, ant colony optimization). The experimental evaluation is conducted on ten real-world Facebook ego networks (53–1035 nodes) and on three families of synthetic graphs (Barabási–Albert, Erdős–Rényi, Watts–Strogatz) ranging from 50–450 nodes.

Results show that metaheuristics reach about 88–90% of the optimum while reducing computation time by roughly one order of magnitude on larger instances compared to ILP. In static tests, ant colony optimization achieved the best results among metaheuristics (cost 0.506 vs 0.445 for ILP at an average time of 4.98 s vs 73.83 s). In dynamic experiments, the genetic algorithm offered the best quality-efficiency trade-off (cost 0.409 vs 0.362 for ILP at 0.615 s vs 1.525 s). We also analyze a dynamic scenario simulating network evolution over time, where algorithms exhibit good adaptability to topological changes. The study includes eight model extensions that incorporate diverse pricing policies and subscription types inspired by real digital platform offerings.

**Keywords:** graph theory, combinatorial optimization, Roman domination, social networks, heuristics, metaheuristics, integer linear programming.

# SPIS TREŚCI

<b>Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów</b>	<b>12</b>
<b>Podział pracy</b>	<b>13</b>
<b>1 Wprowadzenie</b>	<b>14</b>
1.1 Wstęp i motywacja . . . . .	14
1.2 Przegląd istniejących rozwiązań . . . . .	15
1.3 Cele i zakres pracy . . . . .	15
1.4 Struktura . . . . .	17
<b>2 Model grafowy problemu zakupu licencji</b>	<b>19</b>
2.1 Reprezentacja grafowa . . . . .	19
2.2 Definicja problemu . . . . .	20
2.3 Koszty i ograniczenia . . . . .	22
2.3.1 Ograniczenia techniczne i społeczne współdzielenia licencji . . . . .	22
2.3.2 Struktura kosztów i modele cenowe . . . . .	22
2.3.3 Zakup jednoczesny i sekwencyjny . . . . .	23
2.4 Podsumowanie . . . . .	24
<b>3 Związek z dominowaniem w grafach</b>	<b>25</b>
3.1 Dominowanie - podstawowe definicje . . . . .	25
3.2 Dominowanie rzymskie a licencje grupowe . . . . .	26
3.3 Złożoność obliczeniowa problemu . . . . .	29
3.4 Podsumowanie . . . . .	30
<b>4 Dane testowe</b>	<b>31</b>
4.1 Grafy syntetyczne . . . . .	31
4.1.1 Model Erdős–Rényi - klasyczne grafy losowe . . . . .	31
4.1.2 Model Barabási–Albert - sieci bezskalowe . . . . .	32
4.1.3 Model Watts–Strogatz - graf małego świata . . . . .	34
4.2 Grafy rzeczywiste . . . . .	35
4.2.1 Struktura danych . . . . .	36
4.2.2 Szczegółowy opis danych ze zbioru SNAP . . . . .	37
4.3 Podsumowanie . . . . .	38
<b>5 Metody algorytmiczne</b>	<b>39</b>
5.1 Metody dokładne . . . . .	39

5.1.1	Algorytm naiwny . . . . .	39
5.1.2	Programowanie całkowitoliczbowe (ILP) . . . . .	41
5.2	Heurystyki konstrukcyjne . . . . .	42
5.2.1	Algorytm zachłanny . . . . .	43
5.2.2	Heurystyka zbioru dominującego . . . . .	44
5.2.3	Algorytm losowy . . . . .	45
5.3	Metaheurystyki . . . . .	46
5.3.1	Algorytm genetyczny . . . . .	47
5.3.2	Przeszukiwanie tabu . . . . .	48
5.3.3	Algorytm mrówkowy . . . . .	49
5.3.4	Symulowane wyżarzanie . . . . .	51
5.4	Podsumowanie . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Eksperymenty dla schematu licencyjnego Duolingo Super</b>	<b>54</b>
6.1	Środowisko i metodologia . . . . .	54
6.2	Duolingo Super na grafach syntetycznych . . . . .	55
6.2.1	Statystyki zbiorcze . . . . .	55
6.2.2	Porównanie algorytmów na grafach syntetycznych . . . . .	56
6.3	Duolingo Super na grafach rzeczywistych . . . . .	58
6.3.1	Skalowanie i jakość . . . . .	59
6.4	Porównanie z dominowaniem rzymskim . . . . .	59
6.5	Wnioski . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Symulacja dynamiczna</b>	<b>63</b>
7.1	Założenia i konfiguracja . . . . .	63
7.2	Algorytm zachłanny . . . . .	64
7.2.1	Zestawienie dla wszystkich mutacji . . . . .	64
7.3	Analiza mutacji syntetycznych . . . . .	65
7.3.1	Metaheurystyki . . . . .	65
7.3.2	Profil kosztu i czasu w czasie . . . . .	65
7.4	Analiza mutacji realistycznych . . . . .	66
7.4.1	Wybrane algorytmy i metody mutacji . . . . .	66
7.4.2	Ewolucja kosztów w czasie . . . . .	67
7.5	Wnioski . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Rozszerzenia modelu licencjonowania</b>	<b>70</b>
8.1	Przegląd badanych wariantów . . . . .	70
8.1.1	Warianty rodziny Duolingo . . . . .	70
8.1.2	Warianty dominowania rzymskiego . . . . .	71
8.1.3	Spotify i Netflix . . . . .	73

8.1.4	Porównanie wszystkich rozszerzeń . . . . .	73
8.1.5	Analiza wpływu liczby użytkowników na koszty . . . . .	74
8.2	Rozszerzenia w środowisku dynamicznym . . . . .	75
8.2.1	Statystyki agregowane . . . . .	75
8.2.2	Porównanie szczegółowe konfiguracji . . . . .	75
8.2.3	Struktura wykorzystania licencji . . . . .	76
8.2.4	Porównanie z benchmarkiem statycznym . . . . .	77
8.3	Wnioski . . . . .	78
<b>9</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>79</b>
9.1	Wyniki . . . . .	79
9.1.1	Model i metody . . . . .	79
9.1.2	Eksperymenty statyczne . . . . .	79
9.1.3	Symulacje dynamiczne . . . . .	79
9.1.4	Rozszerzenia licencyjne . . . . .	80
9.2	Rekomendacje praktyczne . . . . .	80
9.3	Kierunki dalszych badań . . . . .	80
9.4	Zakończenie . . . . .	80
<b>A</b>	<b>Wybrane fragmenty implementacji</b>	<b>84</b>
A.1	Przykład uruchomienia aplikacji i interpretacja wyników . . . . .	84
A.2	Organizacja skryptów eksperymentalnych . . . . .	84
A.3	Algorytmy dokładne . . . . .	85
A.3.1	Program całkowitoliczbowy . . . . .	85
A.4	Algorytmy metaheurystyczne . . . . .	87
A.4.1	Algorytm genetyczny . . . . .	87
A.4.2	Optymalizacja mrówkowa . . . . .	88
A.4.3	Wyżarzanie symulowane . . . . .	90
A.5	Operatory mutacji i sąsiedztwa . . . . .	91
A.6	Funkcje pomocnicze . . . . .	93
A.6.1	Budowanie i walidacja rozwiązań . . . . .	93
A.6.2	Konfiguracje licencyjne . . . . .	95
A.7	Symulacja dynamiczna . . . . .	96
A.7.1	Symulator ewolucji sieci . . . . .	96

## SPIS RYSUNKÓW

2.1	Przykładowy graf relacji społecznych między użytkownikami. . . . .	19
3.1	Przykładowe zbiory dominujące . . . . .	26
3.2	Kolory: biały = 0, pomarańczowy = 1, czerwony = 2. <b>(a)</b> Przypisanie optymalne (koszt 2). <b>(b)</b> Wszyscy z $f = 1$ (koszt 5). <b>(c)</b> $A = 1$ , liście $f = 0$ (niespełniony warunek). . . . .	29
4.1	Przykładowa realizacja grafu Erdős–Rényi . . . . .	32
4.2	Przykładowa realizacja grafu Barabási–Albert z widocznymi hubami . . . . .	33
4.3	Przykładowa realizacja grafu Watts–Strogatz, w której widoczne są lokalne kliki oraz połączenia dalekiego zasięgu skracające średnie odległości . . . . .	34
5.1	Czas obliczeń algorytmu naiwnego w funkcji liczby wierzchołków $n$ dla trzech typów grafów . . . . .	40
6.1	Koszt licencji na węzeł w zależności od struktury grafu losowego. . . . .	56
6.2	Koszt licencji na węzeł w zależności od struktury grafu bezskalowego. . . . .	56
6.3	Koszt licencji na węzeł w zależności od struktury grafu małoświatowego. . . . .	56
6.4	Czas wykonania w zależności od struktury grafu losowego. . . . .	57
6.5	Czas wykonania w zależności od struktury grafu bezskalowego. . . . .	57
6.6	Czas wykonania w zależności od struktury grafu małoświatowego. . . . .	58
6.7	Koszt licencji na węzeł i czas wykonania algorytmów dla schematu licencyjnego Duolingo Super w zależności od liczby wierzchołków (grafy ego Facebook). . . . .	59
6.8	Koszt licencji na węzeł według typu grafu: porównanie konfiguracji licencyjnych Duolingo Super i dominowania rzymskiego. . . . .	60
6.9	Czas wykonania według typu grafu: porównanie konfiguracji licencyjnych Duolingo Super i dominowania rzymskiego. . . . .	61
6.10	Struktura wykorzystania licencji: porównanie konfiguracji licencyjnych Duolingo Super i dominowania rzymskiego. . . . .	61
7.1	Algorytm genetyczny – koszt na węzeł w kolejnych krokach symulacji (warianty low/med/high). . . . .	66
7.2	Algorytm genetyczny – czas wykonania w kolejnych krokach symulacji (warianty low/med/high). . . . .	66
7.3	Algorytm genetyczny – koszt na węzeł w wariantach realistycznych. . . . .	68
7.4	Algorytm genetyczny – czas wykonania w wariantach realistycznych. . . . .	68
8.1	Koszt na węzeł w zależności od planu Duolingo (mediany kluczowych algorytmów). . . . .	71



8.2	Koszt na węzeł dla wariantów dominowania rzymskiego. . . . .	72
8.3	Koszt na węzeł dla wszystkich rozszerzeń (mediany). . . . .	73
8.4	Udział licencji grupowych i indywidualnych w rozszerzeniach dynamicznych. . . .	77
A.1	Przykładowy przebieg uruchomienia potoku eksperymentalnego z Makefile. . . . .	84

## SPIS TABEL

2.1	Przykładowe schematy licencjonowania dla usług rzeczywistych i modelu teoretycznego . . . . .	23
6.1	Średnie wartości kosztu licencji na węzeł i czasu dla schematu licencyjnego Duolingo Super na grafach syntetycznych. . . . .	55
6.2	Średnie koszty i czasy na węzeł dla różnych typów grafów (schematy licencyjne Duolingo Super i dominowania rzymskiego). . . . .	58
6.3	Statystyki kosztu i czasu dla schematu licencyjnego Duolingo Super na grafach rzeczywistych. . . . .	58
6.4	Średni koszt licencji na węzeł i czas (przeszukiwanie tabu) względem liczby wierzchołków w sieciach ego Facebook. . . . .	59
6.5	Średnie czasu i kosztu licencji na węzeł według typu grafu (wspólne instancje). . .	60
7.1	Parametry intensywności mutacji w symulacji dynamicznej. . . . .	63
7.2	Algorytm zachłanny: średni koszt na węzeł oraz średni czas na krok dla wszystkich wariantów mutacji. . . . .	64
7.3	Wyniki dla różnych metod mutacji. . . . .	65
7.4	Wyniki dla różnych metod mutacji w scenariuszach realistycznych. . . . .	66
7.5	Wybrane pary algorytmów i metod mutacji. . . . .	67
8.1	Statystyki dla wariantów Duolingo (benchmark statyczny). . . . .	71
8.2	Statystyki dla wariantów dominowania rzymskiego (benchmark statyczny). . . . .	72
8.3	Mediany dla konfiguracji Spotify i Netflix. . . . .	73
8.4	Statystyki agregowane dla rozszerzeń (benchmark statyczny). . . . .	74
8.5	Udział licencji grupowych i indywidualnych (benchmark statyczny). . . . .	75
8.6	Statystyki zagregowane według rodzin konfiguracji (benchmark dynamiczny). . . . .	75
8.7	Szczegółowe statystyki dla rozszerzeń (benchmark dynamiczny). . . . .	76
8.8	Struktura wykorzystania licencji (benchmark dynamiczny). . . . .	76
8.9	Porównanie wyników statycznych i dynamicznych. . . . .	77

## LIST OF ALGORITHMS

1	Algorytm naiwny: pełny przegląd rozwiązań . . . . .	40
2	Algorytm zachłanny . . . . .	43
3	Zbiór dominujący z budowaniem grup . . . . .	45
4	Losowy dobór licencji i składu grupy . . . . .	46
5	Algorytm genetyczny . . . . .	48
6	Przeszukiwanie tabu . . . . .	49
7	Algorytm mrówkowy . . . . .	50
8	Symulowane wyżarzanie . . . . .	52

# WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

## Oznaczenia

$G = (V, E)$	– graf relacji społecznych.
$V, E$	– zbiory wierzchołków i krawędzi.
$N(v), N[v]$	– sąsiedztwo wierzchołka $v$ oraz sąsiedztwo domknięte.
$\deg(v)$	– stopień wierzchołka $v$ .
$n =  V , m =  E $	– liczba wierzchołków i krawędzi.
$\Delta$	– maksymalny stopień grafu.
$f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$	– etykietowanie ról (0-odbiorca, 1-indywidualna, 2-grupowa).
$\text{cost}(f)$	– koszt rozwiązania (def. w rozdz. 2.2).
$\mathcal{L}$	– rodzina typów licencji $\ell_t = (c_t, \ell_t^{\min}, \ell_t^{\max})$ , w skrócie $(c_t, l_t, u_t)$ .
$I, H, R$	– zbiory: licencji indywidualnych, grupowych i odbiorców.
$p$	– względny koszt licencji grupowej $p = c_g/c_1$ .

## Skróty

SaaS	– Software as a Service.
ILP/MIP	– (Mixed) Integer Linear Programming.
GA	– Genetic Algorithm.
SA	– Simulated Annealing.
TS	– Tabu Search.
ACO	– Ant Colony Optimization.
MDS	– Minimum Dominating Set.
RD	– Roman Domination.

## PODZIAŁ PRACY

Część implementacyjna obejmowała przygotowanie architektury projektu, modułów eksperymentów i analiz oraz zestawu algorytmów. W jej ramach Marcin Połajdowicz opracował ogólną strukturę systemu, moduły odpowiedzialne za wykonywanie eksperymentów i analiz, a także implementacje algorytmów dokładnych i konstrukcyjnych. Maciej Sztramski odpowiadał za logikę oraz implementację algorytmów metaheurystycznych.

Część teoretyczna, stanowiąca zasadniczą treść pracy magisterskiej, została podzielona według rozdziałów. Maciej Sztramski przygotował rozdziały 1–4, natomiast Marcin Połajdowicz odpowiadał za rozdziały 6–9. Rozdział 5 opracowano wspólnie, dzieląc obowiązki zgodnie z zakresem prac implementacyjnych nad poszczególnymi algorytmami.

Eksperymenty obliczeniowe przeprowadził Marcin Połajdowicz. Obejmowały one testy dla schematu licencyjnego *Duolingo Super*, porównania z wariantem dominowania rzymskiego, symulacje dynamiczne oraz analizę rozszerzeń modelu licencjonowania. Marcin Połajdowicz przygotował także wszystkie wykresy i tabele prezentowane w rozdziałach 6–9 (oraz odpowiadające im materiały w rozdziale 5). Rysunki ilustrujące definicje i przykłady w rozdziale 3 (m.in. dominowanie rzymskie, licencje grupowe, przykładowe zbiory dominujące) wykonał Maciej Sztramski.

Redakcję i korektę przeprowadzono krzyżowo: Marcin Połajdowicz zredagował rozdziały 1–5, a Maciej Sztramski rozdziały 6–9 wraz z Aneksem. Aneks (załączniki) przygotował w całości Marcin Połajdowicz.

# 1. WPROWADZENIE

## 1.1 Wstęp i motywacja

W ostatnich latach coraz większe znaczenie zyskują modele subskrypcyjne w sektorze oprogramowania i usług cyfrowych. Zgodnie z indeksem gospodarki subskrypcyjnej rynek ten zwiększył swoją wartość o ponad 400% od roku 2012 do roku 2021 [1], a w 2024 roku osiągnął przybliżoną wartość blisko 600 miliardów dolarów [2].

Model subskrypcyjny zastępuje zakupy jednorazowe. Zapewnia firmom powtarzalne przychody, a użytkownikom ciągły dostęp do usług. Wiele popularnych platform, w tym aplikacje edukacyjne, serwisy streamingowe czy oprogramowanie w modelu Software as a Service (SaaS), opiera się na modelu subskrypcyjnym. Serwisy streamingowe, takie jak Spotify i Netflix, oferują plany rodzinne, w których kilka osób współdzieli jedną subskrypcję grupową o niższym koszcie jednostkowym niż równoważna liczba subskrypcji indywidualnych. Analogicznie platforma Duolingo udostępnia plan rodzinny Super Duolingo (ang. Duolingo Super Family) [3], który umożliwia grupie użytkowników współdzielenie korzyści subskrypcji premium. Mechanizm ten sprzyja zakupom grupowym i obniża koszt przypadający na użytkownika. W pracy terminy "subskrypcja" i "licencja" traktowane są równoważnie jako czasowe prawa dostępu.

Kontekst społeczny jest kluczowy przy formowaniu grup. Efektywne korzystanie z subskrypcji grupowych wymaga, aby główny posiadacz subskrypcji identyfikował użytkowników zainteresowanych współdzieleniem usługi, np. z powodu podziału kosztów, zbieżnych zainteresowań lub bliskich relacji. Grupy tworzone są głównie wśród krewnych i znajomych, co ułatwia ustanowienie relacji zaufania przy współdzieleniu konta. Dodatkowym czynnikiem jest wygoda: jedna wspólna subskrypcja upraszcza rozliczenia i zapewnia wszystkim członkom grupy jednolity dostęp do usługi. Czynniki społeczne wpływają na strukturę współdzielenia w sieciach użytkowników. Media społecznościowe i komunikatory ułatwiają zawieranie porozumień wśród użytkowników powiązanych. W praktyce użytkownicy koordynują wspólny zakup abonamentu. Sieć powiązań społecznych determinuje, kto z kim może skutecznie współdzielić licencję.

Problem optymalizacyjny polega na wyznaczeniu planu zakupu licencji w grupie powiązanych użytkowników, który minimalizuje łączny koszt dostępu do usługi. Równoważnie, dla danej sieci znajomości i katalogu opcji licencyjnych należy wybrać podzbiór nabywców licencji oraz typy licencji tak, aby wszyscy użytkownicy uzyskali dostęp do usługi przy minimalnym koszcie. Formalnie odpowiada to problemowi pokrycia wierzchołków przez zbiór nabywców licencji tak, aby każdy wierzchołek był objęty licencją lub sąsiadował z wierzchołkiem posiadającym licencję.

Struktura problemu ma ściśle powiązania z zagadnieniami teorii grafów. Jest ona zbieżna z klasycznym problemem dominowania, ponieważ wybór nabywców licencji grupowych pełni funkcję zbioru dominującego. W obu przypadkach chodzi o to, aby wybrany zestaw wierzchołków pokrywał

całą sieć. W rozdziale 3 wykazano związek z wariantem *dominowania rzymskiego*. Odniesienia te wspierają cel pracy, którym jest optymalizacja kosztów licencji w społeczności użytkowników.

## **1.2 Przegląd istniejących rozwiązań**

Dotychczas w literaturze brak jest opracowań bezpośrednio analizujących problem optymalnego podziału licencji w sieciach społecznościowych. Zagadnienie minimalizacji kosztów zakupu planów grupowych w sieciach powiązanych użytkowników nie zostało dotąd opisane. Niniejsza praca formułuje i analizuje ten problem w ramach teorii grafów.

Najbliższą analogią jest klasyczne zagadnienie zbioru dominującego, które polega na znalezieniu minimalnego podzbioru wierzchołków, tak by każdy wierzchołek grafu należał do tego zbioru lub był jego sąsiadem. Problem ten jest NP-zupełny, co uzasadnia badania algorytmiczne i heurystyczne [4]. Szczególne znaczenie w kontekście analizowanego problemu ma dominowanie rzymskie, które zostało szczegółowo opisane w rozdziale 3. Koncepcja ta znalazła szerokie zastosowanie i liczne rozszerzenia, m.in. dominowanie włoskie i dominowanie zabezpieczone [5].

Model ten jest adekwatny do odwzorowania problemu podziału licencji. Standardowa wersja dominowania rzymskiego zakłada brak ograniczeń co do liczby sąsiadów, których może dominować wierzchołek z etykietą 2. W praktyce plany subskrypcyjne narzucają limity (np. maksymalnie 6 osób w planie rodzinnym). Prowadzi to do modelu dominowania z pojemnością, w którym każdy wierzchołek dominujący ma przypisaną wartość  $c(v)$  określającą liczbę sąsiadów objętych dominowaniem [6].

Problem podziału licencji stanowi wariant zagadnienia dominowania w grafach, wykorzystujący idee dominowania rzymskiego oraz jego modyfikacje z ograniczeniami pojemności. Brak specjalistycznych opracowań wskazuje na lukę badawczą. Jednocześnie bogata literatura dotycząca dominowania w grafach dostarcza ugruntowanych narzędzi teoretycznych i algorytmicznych, co pozwala formalnie wykazać NP-trudność badanego problemu oraz zastosować zarówno metody dokładne (np. programowanie całkowitoliczbowe), jak i przybliżone heurystyki, wzorując się na podejściach znanych z teorii dominowania [5, 6].

## **1.3 Cele i zakres pracy**

Celem niniejszej pracy jest formalizacja i analiza problemu optymalnego zakupu licencji w sieciach społecznościowych, zaproponowanie metod jego rozwiązania oraz weryfikacja przyjętych rozwiązań. W pierwszej kolejności opracowany został model grafowy opisujący powiązania między użytkownikami oraz różne strategie zakupowe wraz z odpowiadającymi im kosztami. Model ten umożliwia zdefiniowanie problemu minimalizacji kosztów jako zadania optymalizacyjnego na grafie. Następnie wykazano ścisły związek z problemem dominowania w grafach. W szczególności pokazano, że dla pewnej klasy modeli licencjonowania zadanie optymalnego doboru subskrypcji jest równoważne znalezieniu minimalnego zbioru dominującego lub rozwiązaniu pokrewnego problemu *dominowania rzymskiego*. Odwołanie do znanych wyników o dominowaniu obejmuje zarówno aspekty złożoności obliczeniowej, jak i badania nad algorytmami aproksymacyjnymi, co

pozwala lepiej zrozumieć trudności badanego problemu oraz zaprojektować efektywne metody jego rozwiązywania.

Zakres pracy obejmuje analizę teoretyczną badanego problemu oraz metody algorytmiczne jego rozwiązania, uzupełnione o eksperymenty obliczeniowe. Rozpatrzone zostały różne modele cenowe licencji, zarówno hipotetyczne, jak i rzeczywiste. Do pierwszej grupy należą warianty nawiązujące do dominowania rzymskiego, w których koszt licencji grupowej stanowi wielokrotność ceny licencji indywidualnej. W drugiej grupie znajdują się modele oparte na rzeczywistych ofertach usług, takich jak Spotify, Netflix i Duolingo, co pozwala weryfikować wyniki w kontekście praktycznych scenariuszy.

Osobno przeanalizowane zostały warianty, w których decyzje zakupowe podejmowane są globalnie (jednocześnie dla całej społeczności), oraz scenariusze dynamiczne. W wersji dynamicznej zakupy realizowane są w kolejnych krokach czasowych, a struktura sieci społecznościowej może się zmieniać (rozszerzanie lub zmniejszanie liczby użytkowników, powstawanie lub zanik relacji). Ze względu na wysoką złożoność obliczeniową problemu przedstawione zostały zarówno metody dokładne, jak i heurystyczne. Metody dokładne gwarantują znalezienie rozwiązania optymalnego, lecz ich czas działania szybko rośnie wraz z rozmiarem grafu. Metody heurystyczne nie gwarantują optymalności, lecz dostarczają rozwiązania dobrej jakości w czasie akceptowalnym obliczeniowo. Celem praktycznym jest wskazanie podejść skutecznych w optymalizacji kosztów subskrypcji w dużych sieciach społecznościowych oraz identyfikacja czynników najsilniej wpływających na wyniki, co zilustrowane jest wynikami eksperymentów.

Podsumowując, w ramach pracy zrealizowane zostały następujące zadania badawcze i implementacyjne:

- Sformalizowano model optymalizacji zakupu licencji w sieciach społecznościowych, obejmujący etykietowanie ról  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , warunki wykonalności (pokrycie, sąsiedztwo, pojemność) oraz funkcję kosztu.
- Wykazano powiązania z *dominowaniem rzymskim* i sformułowano twierdzenie o równoważności w szczególnym przypadku kosztów i pojemności; omówiono również konsekwencje złożonościowe i aproksymacyjne.
- Zaimplementowano i porównano różne metody: ILP (PuLP/CBC), algorytm zachłanny, metaheurystyki (algorytm genetyczny, symulowane wyżarzanie, przeszukiwanie tabu, algorytm mrówkowy).
- Opracowano środowisko eksperymentalne dla grafów syntetycznych i ego-sieci platformy Facebook, wraz z pomiarem czasu działania i kosztu.
- Przeanalizowano wariant dynamiczny (mutacje grafu) oraz porównano podejścia cold-start i warm-start dla metaheurystyk.
- Zbadano wpływ polityk cenowych i typów planów (Individual/Duo/Family) na strukturę rozwiązań i koszt całkowity.



## 1.4 Struktura

Struktura pracy obejmuje dziewięć rozdziałów. Obejmują one część wprowadzającą, w której przedstawiono tło i motywację podjętego zagadnienia, część analityczno-badawczą, zawierającą opis zaproponowanych modeli oraz przeprowadzonych eksperymentów, a także część podsumowującą, w której sformułowano wnioski oraz wskazano możliwe kierunki dalszych badań. Poniżej zaprezentowano opis treści wszystkich rozdziałów, stanowiących kolejne etapy realizacji pracy.

**Rozdział 1** – Wprowadzenie. Przedstawia tło problemu, motywację podjęcia tematu oraz znaczenie optymalizacji kosztów w kontekście współdzielenia licencji w sieciach społecznościowych. Określone są cele i zakres pracy oraz jej ogólna struktura.

**Rozdział 2** – Model grafowy i analiza problemu. Definiuje reprezentację sieci społecznościowej w postaci grafu oraz formalny opis problemu optymalizacji kosztów. Uwzględnione są przyjęte założenia, definicje pojęć oraz warianty wynikające z odmiennych modeli cenowych i ograniczeń pojemnościowych. Rozdział stanowi podstawę do dalszych rozważań algorytmicznych.

**Rozdział 3** – Związek z dominowaniem w grafach. Omawia pojęcie zbiorów dominujących i dominowania rzymskiego, pokazując, w jaki sposób badany problem można interpretować w tych kategoriach. Przedstawione są również aspekty złożoności obliczeniowej, w tym dowód NP-trudności, oraz wynikające z tego konsekwencje dla możliwości projektowania algorytmów.

**Rozdział 4** – Dane testowe. Opisuje rodzaje grafów wykorzystanych w eksperymentach: syntetyczne, generowane przy pomocy popularnych modeli (Barabási–Albert, Watts–Strogatz oraz Erdős–Rényi), oraz grafy rzeczywiste pochodzące z repozytoriów badawczych. Uwzględniono także sposób przygotowania instancji testowych oraz narzędzia użyte do wizualizacji sieci.

**Rozdział 5** – Metody algorytmiczne optymalizacji kosztów licencji. Rozdział skupia się na części obliczeniowej. Przedstawiona jest formalizacja problemu w postaci programu całkowitoliczbowego oraz opis metod dokładnych, które mogą znaleźć optymalne rozwiązania dla mniejszych instancji. Omówione są także podejścia przybliżone i heurystyczne.

**Rozdział 6** – Eksperymenty i analiza wyników. Przedstawia proces oceny algorytmów na przygotowanych danych testowych. Określone są kryteria porównawcze (m.in. czas działania, złożoność obliczeniowa, uzyskane koszty), a następnie zaprezentowane wyniki eksperymentów dla różnych typów grafów i ich skal. Analizowany jest wpływ parametrów algorytmów na efektywność i jakość uzyskiwanych rozwiązań.

**Rozdział 7** – Analiza dynamicznej wersji problemu. Rozważany jest scenariusz, w którym zakupy licencji odbywają się sekwencyjnie, a struktura sieci może ulegać zmianie w czasie. Opisane są możliwe adaptacje algorytmów do takiej sytuacji oraz przeprowadzone eksperymenty badające ich skuteczność. Poruszona jest także kwestia stabilności i elastyczności strategii

w środowisku dynamicznym.

**Rozdział 8** – Rozszerzenia modelu. Omawia dodatkowe aspekty, które mogą wpływać na decyzje optymalizacyjne, takie jak polityki cenowe oraz zróżnicowanie typów licencji. Analizowane są również potencjalne ograniczenia modelu i możliwości jego dalszego uogólnienia.

**Rozdział 9** – Podsumowanie i wnioski. Zawiera syntetyczne zestawienie wyników pracy. Wskazuje, w jakim stopniu zrealizowane zostały założone cele, oraz proponuje kierunki dalszych badań, w tym rozwój modeli, udoskonalenia algorytmów oraz badania nad skalowalnością i praktycznymi zastosowaniami. Rozdział ten zamyka całość pracy, odpowiadając na pytania badawcze i wskazując, jak uzyskane rezultaty mogą zostać wykorzystane w praktyce.

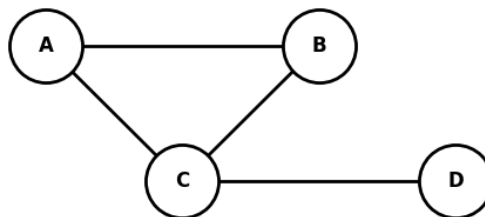
## 2. MODEL GRAFOWY PROBLEMU ZAKUPU LICENCJI

Niniejszy rozdział formalizuje analizowany problem, zaczynając od zdefiniowania reprezentacji sieci społecznej, a następnie opisując parametry i ograniczenia wynikające z praktyki licencjonowania. Stanowi to fundament dla późniejszych rozdziałów poświęconych teorii domowania oraz konstrukcji algorytmów.

### 2.1 Reprezentacja grafowa

Aby formalnie opisać zjawisko współdzielenia licencji, sieć relacji społecznych modeluje się jako graf nieskierowany  $G = (V, E)$ . Każdy wierzchołek  $v \in V$  reprezentuje pojedynczego użytkownika, natomiast krawędź  $\{u, v\} \in E$  oznacza, że użytkownicy  $u$  i  $v$  znajdują się w relacji umożliwiającej współdzielenie licencji grupowej. Graf jest nieskierowany, ponieważ relacja znajomości jest symetryczna.

Przyjmuje się również, że graf  $G$  nie zawiera pętli ani krawędzi wielokrotnych – każda para użytkowników może być powiązana co najwyżej jedną krawędzią. Przykład takiej struktury zilustrowano na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Przykładowy graf relacji społecznych między użytkownikami.

Opisana reprezentacja, w której wierzchołki odpowiadają jednostkom, a krawędzie bezpośrednim relacjom umożliwiającym interakcję, jest powszechnie stosowana w analizie sieci społecznościowych [7, 8]. Takie ujęcie pozwala formalnie modelować i badać zjawiska zachodzące w społecznościach użytkowników usług cyfrowych.

W przyjętym modelu zakłada się, że współdzielenie licencji może odbywać się wyłącznie między osobami połączonymi bezpośrednią krawędzią w grafie. Licencja grupowa oznacza w tym kontekście typ umożliwiający współdzielenie dostępu przez właściciela oraz jego bezpośrednich sąsiadów. Warunek sąsiedztwa odzwierciedla wymóg bezpośredniej relacji. Zagadnienia zaufania i uwierzytelniania nie są modelowane. Relacje pośrednie, w których użytkownicy są powiązani poprzez wspólnych znajomych (np.  $A \sim B$  oraz  $B \sim C$ , lecz brak bezpośredniego powiązania  $A \sim C$ ), nie są uwzględniane w analizie. Oznacza to, że dla danego grafu  $G = (V, E)$ , w którym  $V$  to zbiór użytkowników, a  $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$  to zbiór relacji znajomości, analizie podlegają

wyłącznie relacje bezpośrednie, czyli pary  $\{u, v\} \in E$ . W grafie z rysunku 2.1 użytkownicy  $A$  i  $D$  są połączeni ścieżką  $A \rightarrow C \rightarrow D$ , lecz brak krawędzi  $\{A, D\} \in E$  eliminuje możliwość współdzielenia licencji w modelu. Mimo że w praktyce relacje pośrednie mogą sprzyjać tworzeniu grup, w analizie pominięto je dla uproszczenia problemu.

Graf społecznościowy nie musi być pełny. Dopuszcza się dowolną strukturę odpowiadającą rzeczywistym relacjom społecznym. Istotny jest stopień wierzchołka, gdyż ogranicza liczbę sąsiadów, którym można udostępnić licencję. Dla wierzchołka  $v \in V$ , jego stopień oznaczamy przez  $\deg(v)$ , co odpowiada liczbie sąsiadów użytkownika  $v$  w grafie  $G = (V, E)$ .

Należy jednak zauważyć, że nawet w przypadku wysokiego stopnia  $\deg(v)$ , użytkownik niekoniecznie może współdzielić licencję ze wszystkimi swoimi sąsiadami. Ograniczenia techniczne, takie jak limity liczby współużytkowników narzucane przez dostawcę usługi, sprawiają, że liczba osób objętych jedną licencją grupową pozostaje ograniczona. W analizowanym modelu wprowadzamy zatem parametr  $k$ , oznaczający pojemność licencji grupowej, czyli maksymalną liczbę osób, wliczając w to właściciela, które mogą korzystać z jednej licencji.

## 2.2 Definicja problemu

Optymalizacja kosztu dostępu do usługi wymaga przypisania wszystkim wierzchołkom grafu  $G = (V, E)$  odpowiednich ról. Każdy użytkownik  $v \in V$  może uzyskać dostęp do usługi na trzy sposoby:

1. Poprzez wykupienie licencji indywidualnej.
2. Poprzez wykupienie licencji grupowej.
3. Jako odbiorca, korzystający z licencji grupowej należącej do innego użytkownika.

Licencja indywidualna zapewnia dostęp wyłącznie jej właścicielowi, natomiast licencja grupowa umożliwia współdzielenie dostępu z maksymalnie  $k - 1$  sąsiadami w grafie. Należy przy tym podkreślić, że pojedynczy użytkownik może posiadać najwyżej jedną licencję grupową, nawet jeśli liczba jego sąsiadów przekracza dopuszczalny limit. Ograniczenie to odzwierciedla typowe postanowienia regulaminowe usługodawców, takie jak powiązanie konta z jednym numerem telefonu oraz limit liczby współużytkowników. Dla uproszczenia przyjmuje się, że zasada ta obowiązuje wszystkie typy licencji, niezależnie od rzeczywistych warunków oferowanych przez poszczególnych dostawców usług.

Dla przejrzystego i precyzyjnego zdefiniowania modelu wprowadzamy trzy zbiory reprezentujące użytkowników, czyli węzły posiadające własną licencję bądź korzystające z licencji innego węzła:

- $I$  - posiadacze licencji indywidualnych;
- $H$  - posiadacze licencji grupowych;
- $R$  - odbiorcy, którzy sami nie kupują licencji, lecz korzystają z licencji innego użytkownika.

Aby formalnie opisać ten podział, wprowadzamy etykietowanie ról  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ . Wartość 0 oznacza węzeł będący odbiorcą, 1 odpowiada licencji indywidualnej, a 2 licencji grupowej. Takie przypisanie nawiązuje do klasycznego problemu dominowania rzymskiego, w którym wierz-

chołki również otrzymują etykiety z tego samego zbioru wartości. Odpowiadające zbiory definiujemy jako  $I = \{v : f(v) = 1\}$ ,  $H = \{v : f(v) = 2\}$  oraz  $R = V \setminus (I \cup H)$ . Przyjmujemy zbiór dostępnych typów licencji

$$L = \{l_t = (c_t, m_t, k_t) \mid t = 1, 2, \dots, T\}, \quad (2.1)$$

gdzie:

- $c_t$  - koszt licencji typu  $t$ ,
- $m_t$  - minimalna liczba użytkowników wliczając właściciela,
- $k_t$  - maksymalna liczba użytkowników wliczając właściciela,
- $T$  - całkowita liczba dostępnych typów licencji.

Dla potrzeb jednolitego formalnego opisu w pracy stosowane są wymiennie pojęcia konfiguracja licencyjna, wariant licencyjny oraz schemat licencjonowania, które odnoszą się do konkretnego zbioru typów licencji definiowanego przez  $L$ . Na przykład Duolingo Super stanowi schemat licencjonowania składający się z dwóch typów licencji: indywidualnej oraz rodzinnej. Analogicznie, dla celów teoretycznych, dominowanie rzymskie traktowane jest jako schemat licencjonowania zawierający licencję indywidualną i grupową. Takie podejście umożliwia sprowadzenie różnych modeli licencjonowania do jednej spójnej abstrakcji matematycznej i ułatwia porównanie wyników między wariantami rzeczywistymi a teoretycznymi.

W podstawowym wariantie rozważanym w tym rozdziale zakładamy, że zbiór  $L$  opisany we wzorze (2.1) obejmuje wyłącznie dwa typy licencji: indywidualną oraz jedną grupową, a zatem przyjęte jest  $T = 2$ . Model ten nie przewiduje sytuacji z wieloma rodzajami planów grupowych (np. Duo, Family), lecz ogranicza się do najprostszego przypadku odpowiadającego rozwiązaniom takim jak w Duolingo.

**Warunki wykonalności.** Spełnienie rozwiązania wymaga, aby dla etykietowania  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  zachodziły następujące warunki:

1. Pokrycie: Każdy użytkownik  $v \in V$  musi mieć dostęp do usługi, tj.  $f(v) \in \{1, 2\}$  lub istnieje sąsiad  $u \in N(v)$  taki, że  $f(u) = 2$  i  $v$  jest przypisany do grupy  $u$ .
2. Sąsiedztwo: Odbiorca  $v \in R$  może być przypisany tylko do właściciela  $u \in H$  z  $\{u, v\} \in E$ .
3. Pojemność: Liczba użytkowników przypisanych do właściciela  $u \in H$  (wraz z nim samym) musi spełniać  $m \leq 1 + |R_u| \leq k$ , gdzie  $R_u$  oznacza zbiór odbiorców korzystających z licencji  $u$ .
4. Jednoznaczność etykiety: każdy wierzchołek  $v \in V$  otrzymuje dokładnie jedną etykietę  $f(v) \in \{0, 1, 2\}$ .

**Funkcja kosztu.** W wariantie podstawowym, w którym  $T = 2$ , całkowity koszt rozwiązania wyraża się zależnością:

$$\text{cost}(f) = |I| \cdot c_i + |H| \cdot c_g, \quad (2.2)$$

gdzie:

- $I$  - zbiór użytkowników z licencją indywidualną,
- $H$  - zbiór użytkowników z licencją grupową,
- $c_i$  - koszt licencji indywidualnej,
- $c_g$  - koszt licencji grupowej.

**Cel optymalizacji.** Celem problemu jest minimalizacja funkcji kosztu (2.2) dla danego grafu  $G = (V, E)$ , przy spełnieniu wszystkich istotnych warunków wykonalności.

## 2.3 Koszty i ograniczenia

W tej części zestawiono parametry, które przekładają się na realną wykonalność i opłacalność grup licencyjnych. Najpierw omówiono ograniczenia pojemności wynikające z regulaminów usług, a następnie struktury cenowe wykorzystywane później w eksperymentach.

### 2.3.1 Ograniczenia techniczne i społeczne współdzielenia licencji

Kluczowymi parametrami modelu są najmniejsza oraz największa liczba osób, które mogą współdzielić jedną licencję grupową. Największy rozmiar grupy oznaczamy przez  $k$  i wliczamy do niego także użytkownika nabywającego licencję. Parametr  $k$  jest zwykle narzucany przez dostawcę usługi. Przykładowo, plan rodzinny Spotify Premium pozwala na korzystanie co najwyżej sześciu osobom (właściciel + pięć członków rodziny), co odpowiada wartości  $k = 6$ .

Analogicznie wprowadzamy parametr  $m$ , który określa najmniejszą liczbę osób niezbędnych do utworzenia grupy. Oznacza to, że licencja grupowa jest ważna tylko wtedy, gdy zostanie wykorzystana przez co najmniej  $m$  osób (łącznie z właścicielem). Przykładem jest plan "Duo", w którym licencję współdzielią dokładnie dwie osoby ( $m = 2, k = 2$ ). W innych przypadkach  $m$  może przyjmować wartości mniejsze niż  $k$ , np.  $m = 2, k = 6$  dla planów rodzinnych.

W analizie przyjmujemy  $m$  oraz  $k$  jako zmienne parametry. Nawet jeśli użytkownik posiada wielu znajomych (czyli ma wysoki stopień w grafie), ograniczenie  $k$  sprawia, że może objąć współdzieleniem tylko określoną najwyższą liczbę osób, natomiast ograniczenie  $m$  wymusza, by grupy nie były zbyt małe. Parametry te modelują zarówno ograniczenia techniczne narzucane przez dostawców usług, jak i czynniki społeczne, takie jak opłacalność czy gotowość do współdzielenia subskrypcji. W konsekwencji grupy współdzielenia odwzorowują typowe sytuacje, w których w praktyce licencje grupowe są wykorzystywane.

### 2.3.2 Struktura kosztów i modele cenowe

W analizowanym problemie istotnym elementem jest sposób odwzorowania polityki cenowej dostawców usług. Różne plany subskrypcyjne charakteryzują się nie tylko innym kosztem, ale również odmiennym zakresem liczby użytkowników  $m$  oraz  $k$ , którzy mogą korzystać z jednej licencji. Rodzinę typów licencji zdefiniowaną we wzorze (2.1) stosujemy tutaj do opisu struktury kosztów i ograniczeń dostępnych planów. W testach syntetycznych wartości parametrów licencji dobierane są eksperymentalnie, co pozwala badać zachowanie algorytmów w różnych wariantach cenowych i strukturalnych. W testach na danych rzeczywistych wykorzystywane są faktyczne

ceny subskrypcji. Dla wariantu teoretycznego odpowiadającego dominowaniu rzymskiemu koszty normalizowane są względem licencji indywidualnej, co umożliwia powiązanie modelu z klasycznymi zagadnieniami teorii grafów. Przykłady zestawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1: Przykładowe schematy licencjonowania dla usług rzeczywistych i modelu teoretycznego

Typ licencji	Koszt $c_t$	Min $m_t$	Max $k_t$
<i>Spotify (ceny w PLN)</i>			
Individual	23.99	1	1
Duo	30.99	2	2
Family	37.99	2	6
<i>Netflix (ceny w PLN)</i>			
Basic	33.00	1	1
Standard	49.00	1	2
Premium	67.00	1	4
<i>Duolingo Super (ceny w PLN)</i>			
Individual	13.99	1	1
Family	29.17	2	6
<i>Model teoretyczny (koszty znormalizowane)</i>			
Solo	1.0	1	1
Group	2.0	2	999999

Źródło: opracowanie własne modelu teoretycznego oraz [9], [10], [11].

W przypadku usług rzeczywistych koszty planów grupowych są znacznie niższe niż suma odpowiadających im licencji indywidualnych. Przykładowo plan Spotify Family dopuszcza współdzielenie przez co najwyżej sześć osób przy koszcie 37.99 PLN, co jest korzystniejsze kosztowo niż plan indywidualny (23.99 PLN). Podobna sytuacja występuje w przypadku Duolingo Super Family.

W modelu teoretycznym opartym na dominowaniu rzymskim koszty podano w jednostkach względnych: licencja indywidualna ma koszt 1.0, a grupowa 2.0. W dalszych rozdziałach będziemy odnosić się do tego wariantu jako do schematu licencjonowania dominowania rzymskiego (lub równoważnie konfiguracji licencyjnej lub wariant licencyjny), traktując go jako sformalizowany odpowiednik rzeczywistych planów subskrypcyjnych. Konstrukcja ta spełnia kryteria wykonalności zgodne z zasadami dominowania rzymskiego, a jedyną różnicą pozostaje brak istotnego ograniczenia pojemności – w klasycznym ujęciu wierzchołek z etykietą 2 może pokrywać dowolnie wielu sąsiadów, co odpowiada planowi grupowemu z praktycznie nieograniczoną liczbą użytkowników. Zgodnie jednak z tabelą 2.1, w implementacji przyjęto duży, ale skończony limit równy 999999. W ramach przeprowadzanych eksperymentów etykieta 2 będzie zmieniała swoją wartość jako wielokrotność kosztu ceny indywidualnej, co pozwala na analizę różnych wariantów tego zagadnienia. W eksperymentach rozważa się także warianty, w których koszt odpowiadający etykietce 2 stanowi wielokrotność kosztu licencji indywidualnej.

### 2.3.3 Zakup jednoczesny i sekwencyjny

W najprostszym wariantcie zakłada się, że wszystkie decyzje zakupowe zapadają w tym samym momencie. Umożliwia to globalną optymalizację i stanowi punkt odniesienia dla analiz teoretycznych. W praktyce jednak proces współdzielenia licencji jest bardziej dynamiczny. Użytkownicy dołączają do planów w różnych momentach; część początkowo wybiera licencje indywidualne,

a następnie przechodzi na licencje grupowe. Takie zmiany mogą wynikać z równoczesnej ewolucji struktury sieci społecznościowej. Relacje mogą zanikać, pojawiać się nowe połączenia, a liczba aktywnych użytkowników może się zmieniać.

Takie sytuacje można modelować jako proces sekwencyjny, w którym w kolejnych krokach przydzielane są nowe licencje przy uwzględnieniu bieżącej struktury grafu. W konsekwencji problem różni się od wariantu jednoczesnego. Rozwiązanie optymalne globalnie może okazać się nieosiągalne, ponieważ wcześniejsze decyzje oraz zmiany w strukturze sieci ograniczają przestrzeń dostępnych opcji w późniejszych etapach.

W pracy przeanalizowano konsekwencje takich zmian, w tym stabilność utworzonych grup, wpływ zmian w grafie na opłacalność wcześniejszych decyzji oraz mechanizmy koordynacji i adaptacji użytkowników. Mimo że główny nacisk położony jest na wariant jednoczesny, wariant sekwencyjny stanowi istotne rozszerzenie modelu i lepiej odzwierciedla rzeczywiste warunki funkcjonowania sieci społecznościowych.

## **2.4 Podsumowanie**

Rozwinięty model opisuje sieć społeczną jako graf, w którym decyzje licencyjne są ograniczone zarówno relacjami sąsiedztwa, jak i parametrami minimalnej oraz maksymalnej pojemności planów. Ujednolicone przedstawienie kosztów i wariantów zakupu pozwala w kolejnych rozdziałach analizować złożoność problemu, zależności z klasycznymi zadaniami dominowania oraz efektywność projektowanych algorytmów.



### 3. ZWIĄZEK Z DOMINOWANIEM W GRAFACH

W niniejszym rozdziale przedstawiono teoretyczne podstawy problemu licencjonowania oprogramowania poprzez przegląd teorii dominowania w grafach. Rozdział zawiera definicje podstawowych pojęć, wprowadza formalizację problemu licencjonowania jako wariantu dominowania rzymskiego oraz analizuje złożoność obliczeniową zagadnienia. Całość stanowi teoretyczne uzasadnienie dla metod algorytmicznych opisanych w dalszej części pracy.

#### 3.1 Dominowanie - podstawowe definicje

Problematyka dominowania w grafach jest dobrze zbadana i szeroko opisana w literaturze [12]. W szczególności znane są klasyczne definicje zbioru dominującego oraz liczby dominowania, które stanowią punkt odniesienia dla dalszych analiz. Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem nieskierowanym. Zbiorem dominującym jest podzbiór  $D \subseteq V$  taki, że każdy wierzchołek spoza  $D$  ma co najmniej jednego sąsiada w  $D$ :

$$\forall v \in V \setminus D \exists u \in D : \{u, v\} \in E, \quad (3.1)$$

gdzie:

- $V$  - zbiór wierzchołków grafu,
- $E$  - zbiór krawędzi grafu,
- $D \subseteq V$  - zbiór dominujący,
- $u, v \in V$  - wierzchołki grafu,
- $\{u, v\} \in E$  - krawędź łącząca wierzchołki  $u$  i  $v$ .

Najmniejszą moc zbioru dominującego oznaczamy symbolem  $\gamma(G)$  i nazywamy liczbą dominowania:

$$\gamma(G) = \min\{|D| : D \subseteq V\}, \quad (3.2)$$

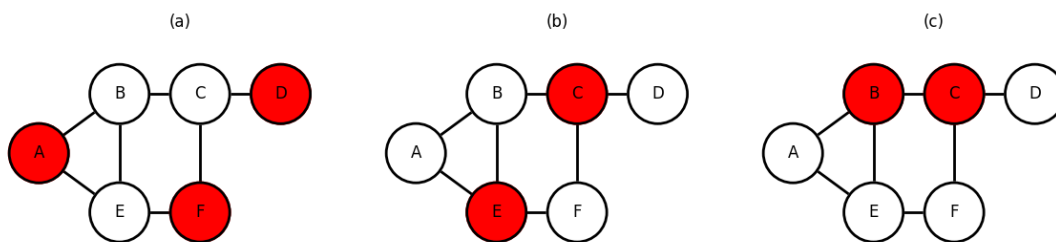
gdzie:

- $\gamma(G)$  - liczba dominowania grafu  $G$ ,
- $D$  - zbiór dominujący w grafie  $G$ ,
- $V$  - zbiór wierzchołków grafu,
- $|D|$  - moc zbioru  $D$ .

Z punktu widzenia rozważanego problemu zakupu licencji, podstawowe założenie jest następujące: jeśli potraktujemy osoby kupujące licencje jako zbiór  $D$ , a krawędzie grafu jako relacje umożliwiające udostępnianie licencji, wówczas warunek dominowania opisany równaniem (3.1) określa sytuację, w której każdy użytkownik spoza  $D$  ma znajomego w  $D$ , a zatem uzyskuje dostęp do usługi. Gdyby wszystkie licencje były identyczne i pozwalały obsłużyć dowolną liczbę sąsiadów, minimalizacja kosztu sprowadzałaby się do wyznaczenia liczby dominowania (3.2). W praktyce

jednak występują różne typy licencji oraz limity współużytkowników, co czyni problem znacznie bardziej złożonym.

Należy zauważyć, że najmniejszy zbiór dominujący nie musi być jednoznaczny. W niektórych przypadkach można w grafie znaleźć kilka różnych najmniejszych zbiorów dominujących. Wynika to bezpośrednio z definicji liczby dominowania (3.2), która określa jedynie minimalną moc zbioru dominującego, a nie jego unikalność. Często graf ma wiele zbiorów dominujących o rozmiarze równym  $\gamma(G)$ , jak na rysunku 3.1, gdzie trzy zbiory są minimalne względem inkluzji, ale tylko dwa są najmniejsze. Problem znajdowania  $\gamma(G)$  jest jednak dobrze określony i należy do klasy problemów NP-trudnych. Jego wersja decyzyjna sformułowana jest następująco: dla danego grafu  $G$  oraz liczby całkowitej  $k$  pytamy, czy istnieje zbiór dominujący o rozmiarze co najwyżej  $k$ . Jest to klasyczny problem NP-zupełny [13, 14, 15]. Oznacza to, że najprawdopodobniej (przy założeniu  $P \neq NP$ ) nie istnieje algorytm wielomianowy rozwiązujący ten problem w ogólności. W praktyce stosuje się zatem algorytmy przybliżone lub ogranicza analizę do specjalnych klas grafów, dla których problem staje się prostszy. Znane są między innymi efektywne algorytmy zachłanne, które zapewniają rozwiązanie przybliżone z gwarantowanym współczynnikiem. Przykładem jest prosty algorytm zachłanny wybierający kolejno wierzchołki do zbioru dominującego, osiągający przybliżenie rzędu  $O(\ln n)$ .



Rysunek 3.1: Przykładowe zbiory dominujące (wyróżnione na czerwono). **(a)** Minimalny zbiór dominujący o mocy 3. **(b)-(c)** Dwa różne minimalne i najmniejsze zbiory dominujące, gdzie  $\gamma(G) = 2$ . Każdy wierzchołek nieczerwony ma sąsiada czerwonego.

W ogólności nie można poprawić granicy aproksymacji rzędu logarytmicznego. Problem zbioru dominującego jest APX-trudny, a dokładniej log-APX-zupełny [14]. Co więcej, nawet na bardzo ograniczonych grafach, np. grafach o maksymalnym stopniu 3 (grafy kubiczne), problem pozostaje NP-trudny i APX-zupełny [16]. Berman i Fujito (1999) wykazali m.in. NP-trudność pewnych wariantów dominowania w grafach o ograniczonym stopniu [17], co potwierdza, że zasadnicza trudność problemu dominowania jest obecna już w stosunkowo prostych strukturach.

### 3.2 Dominowanie rzymskie a licencje grupowe

Dominowanie rzymskie to wariant problemu dominowania, w którym każdemu wierzchołkowi przypisuje się jedną z trzech wartości: 0, 1 lub 2. Wierzchołek o wartości 1 dominuje wyłącznie samego siebie, natomiast wierzchołek o wartości 2 dominuje zarówno siebie, jak i wszystkich swoich sąsiadów. Wymaga się przy tym, aby każdy wierzchołek o wartości 0 był sąsiadem co

najmniej jednego wierzchołka oznaczonego wartością 2. Formalnie, funkcja dominowania rzymskiego na grafie  $G = (V, E)$  to funkcja  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , spełniająca warunek, że dla każdego wierzchołka  $v$  z  $f(v) = 0$  istnieje sąsiad  $u \in V$  taki, że  $f(u) = 2$  [18]. Minimalizacja sumy wartości  $f(v)$  po wszystkich  $v \in V$  prowadzi do zdefiniowania tzw. liczby dominowania rzymskiego grafu, oznaczanej  $\gamma_R(G)$ .

Terminologia i metafora związana z dominowaniem rzymskim wywodzą się z legendy o obronie granic imperium rzymskiego. Zakładano w niej, że w każdej osadzie można umieścić pewną liczbę jednostek wojskowych. Osada z dwiema jednostkami była w stanie bronić się samodzielnie i jednocześnie wysłać wsparcie do sąsiedniej osady. Osada z jedną jednostką broniła wyłącznie siebie, a miejscowości pozbawione jednostek militarnych wymagały ochrony z zewnątrz. W tej metaforze graf reprezentuje system osad i połączeń między nimi, a etykiety 0, 1 i 2 odpowiadają decyzjom o rozmieszczeniu wojsk. Koncepcję dominowania rzymskiego wprowadzili do teorii grafów Cockayne i współpracownicy w 2004 roku [19].

W kontekście problemu optymalnego zakupu licencji w grafach reprezentujących sieci społecznościowe interpretacja jest bezpośrednia. Wartość  $f(v) = 2$  odpowiada użytkownikowi  $v$ , który nabywa licencję grupową i zapewnia dostęp zarówno sobie, jak i co najmniej jednemu ze swoich sąsiadów. Wartość  $f(v) = 1$  oznacza użytkownika posiadającego licencję indywidualną, pokrywającą wyłącznie jego samego. Natomiast  $f(v) = 0$  reprezentuje użytkownika bez własnej licencji, który musi polegać na pokryciu przez sąsiada z wartością 2. Warunek dominowania rzymskiego, zgodnie z którym każdy wierzchołek z etykietą 0 ma sąsiada z etykietą 2, gwarantuje dokładnie to, co w naszym modelu jest wymagane: każdy użytkownik bez licencji ma znajomego z licencją grupową, który może podzielić się z nim dostępem. W ten sposób każda funkcja  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  spełniająca warunki dominowania rzymskiego wyznacza dopuszczalną strategię licencyjną w rozważanej sieci.

Waga funkcji dominowania rzymskiego definiowana jest jako  $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ , czyli suma przypisanych wartości. Liczba dominowania rzymskiego  $\gamma_R(G)$  to najmniejsza możliwa waga funkcji dominowania rzymskiego dla grafu  $G$ . Jeśli przyjmiemy, że koszt licencji indywidualnej wynosi 1, a grupowej 2, to minimalizacja kosztu w naszym problemie pokrywa się z zagadnieniem znalezienia funkcji dominowania rzymskiego o najmniejszej wadze. Cel minimalizacji całkowitego kosztu  $C = |I| + 2|H|$  jest równoważny minimalizacji  $w(f)$ , gdy  $|I|$  utożsamimy z liczbą wierzchołków o etykiecie 1, a  $|H|$  z liczbą wierzchołków o etykiecie 2. Należy jednak podkreślić, że pełna równoważność z dominowaniem rzymskim zachodzi tylko wtedy, gdy liczba sąsiadów dowolnego wierzchołka nie przekracza maksymalnej liczby użytkowników dopuszczonych w planie grupowym. Jak wspomniano wcześniej przy omawianiu parametrów  $m$  i  $k$ , nasze ujęcie wprowadza dodatkowe ograniczenie pojemności - wierzchołek dla którego funkcja  $f$  przyjmuje wartość 2 może pokrywać jedynie ograniczoną liczbę sąsiadów. Problem optymalnego zakupu licencji jest więc uogólnieniem dominowania rzymskiego, dostosowanym do praktycznych limitów występujących w planach subskrypcyjnych.

W przypadku innych modeli cenowych, dominowanie rzymskie stanowi nadal użyteczną

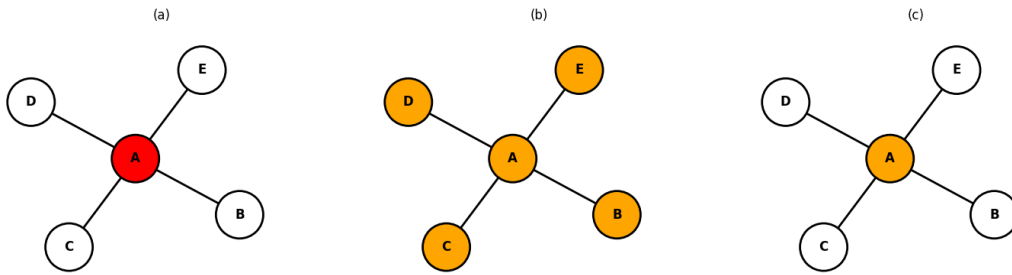
metaforę, choć nie oddaje w sposób wystarczający struktury kosztów. Gdy  $p \neq 2$ , możemy rozważyć ogólniejsze przypisanie wag, w których etykieta odpowiada rzeczywistemu kosztowi planu. Przykładowo, gdy  $p = 3$ , to licencja grupowa ma koszt równy trzem jednostkom, co nie mieści się w klasycznym schemacie  $\{0, 1, 2\}$ . W literaturze zaproponowano rozszerzenia pozwalające modelować takie sytuacje, m.in.  $k$ -dominowanie rzymskie, gdzie dopuszcza się wartości  $\{0, 1, \dots, k\}$  [20], czy też dominowanie rzymskie z wagami [21]. Warianty te pozwalają odwzorować przypadki, w których dostępne są plany o różnych kosztach i różnej pojemności, np. licencja droższa, ale umożliwiająca współdzielenie w większej grupie. W tym sensie uogólnienia dominowania rzymskiego są bliższe rzeczywistemu problemowi optymalizacji kosztów licencji niż klasyczna wersja ograniczona do wartości 0, 1 i 2.

Na potrzeby tej pracy nie jest jednak konieczne wchodzenie w szczegółowe odmiany dominowania rzymskiego. Wystarczy zauważyć, że w analizowanym modelu schemat pozostaje taki sam jak w klasycznej wersji, a jedyną różnicą jest koszt przypisywany wierzchołkom o etykiecie 2. W zależności od przyjętego modelu cenowego wartość ta może wynosić  $p = 2$ ,  $p = 1.5$  lub  $p = 3$ . Konstrukcja funkcji dominowania rzymskiego oraz sam podział na etykiety  $\{0, 1, 2\}$  nie ulega zmianie. Innymi słowy, dominowanie rzymskie dostarcza prostego i intuicyjnego opisu sytuacji.

Prosty przykład zastosowania dominowania rzymskiego można przedstawić na grafie typu gwiazda. Centralny wierzchołek  $A$  jest połączony z liśćmi  $B, C, D, E$ . Najlepszą strategią jest, aby  $A$  wykupił licencję grupową i udostępnił ją wszystkim swoim sąsiadom. W modelu oznacza to  $f(A) = 2$ , a dla każdego liścia  $f(B) = f(C) = f(D) = f(E) = 0$ . Warunek dominowania rzymskiego jest spełniony, ponieważ każdy liść, dla którego  $f = 0$ , ma sąsiada  $A$  z  $f = 2$ . Waga funkcji wynosi wówczas  $w(f) = 2$  - odpowiada to kosztowi jednej licencji grupowej obsługującej całą pięcioosobową grupę.

Dla porównania można rozważyć inne strategie. Gdyby każdy wierzchołek nabył licencję indywidualną, wówczas  $w(f) = 5$ , co odpowiada kosztowi pięciu licencji indywidualnych. Jeśli centralny wierzchołek nabyłby wyłącznie licencję indywidualną ( $f(A) = 1$ ), a liście pozostałyby bez dostępu ( $f(B) = f(C) = f(D) = f(E) = 0$ ), warunek nie byłby spełniony, ponieważ żaden liść nie miałby sąsiada przyjmującego dla funkcji  $f$  wartość 2.

Rysunek 3.2 ilustruje przykład i pokazuje, jak dominowanie rzymskie wskazuje optymalny wybór wierzchołka centralnego jako posiadacza licencji grupowej. W większych grafach liczba kandydatów do roli posiadacza licencji grupowych rośnie, a ich dobór prowadzi do problemu optymalizacji funkcji dominowania rzymskiego.



Rysunek 3.2: Kolory: biały = 0, pomarańczowy = 1, czerwony = 2. **(a)** Przypisanie optymalne (koszt 2). **(b)** Wszyscy z  $f = 1$  (koszt 5). **(c)**  $A = 1$ , liście  $f = 0$  (niespełniony warunek).

### 3.3 Złożoność obliczeniowa problemu

Dokładne dowody z zakresu złożoności obliczeniowej znajdują się w literaturze; wykazano NP-zupełność problemu dominowania rzymskiego m.in. przez redukcję z problemu pokrycia wierzchołków lub zbioru dominującego [22]. W kontekście naszego modelu oznacza to, że optymalne wyznaczenie użytkowników kupujących poszczególne licencje jest obliczeniowo trudne dla dużych sieci. Innymi słowy, nie istnieje znany algorytm wielomianowy, który gwarantowałby znalezienie rozwiązania minimalnego kosztu dla dowolnej struktury grafu znajomości - w najgorszym przypadku liczba kombinacji rośnie wykładniczo wraz z liczbą wierzchołków.

Konsekwencją NP-trudności jest także brak prostego schematu aproksymacyjnego dla problemu minimalizacji kosztów licencji. Ponieważ problem dominowania (minimalnego zbioru dominującego) jest APX-zupełny (dla konkretnych rodzajów grafów) [14], nie ma wielomianowego schematu aproksymacji (PTAS) gwarantującego dobre przybliżenie. Dla naszego problemu, który uogólnia dominowanie, obowiązują podobne ograniczenia; w najgorszym przypadku nie uzyska się w czasie wielomianowym przybliżenia lepszego niż rzędu  $O(\ln n)$ . Proste heurystyki zachłanne mogą jednak dawać przyzwoite wyniki. Przykładowo heurystyka wybierająca iteracyjnie wierzchołek pokrywający najwięcej niepokrytych sąsiadów (z przypisaniem licencji grupowej) realizuje algorytm zachłanny i osiąga współczynnik co najwyżej  $2 + \ln \Delta$ , gdzie  $\Delta$  to maksymalny stopień grafu [23]. W najgorszym przypadku jest to  $O(\ln n)$ , natomiast w praktyce wyniki bywają lepsze od tej granicy. Problem pozostaje trudny także dla grafów o niewielkich stopniach; dla grafów o stopniu co najwyżej cztery wyznaczenie najmniejszego zbioru dominującego jest APX-zupełne [16, 14]. Wynika stąd, że ograniczenie maksymalnej liczby sąsiadów nie upraszcza problemu do trywialnego. Nawet w sieciach o małym stopniu optymalny przydział do licencji grupowych może wymagać złożonych obliczeń.

W dalszej części pracy nacisk położono na podejścia algorytmiczne uwzględniające tę złożoność. Przyjęto podejście dwutorowe: (a) zastosowanie metod dokładnych dla umiarkowanych rozmiarów sieci oraz (b) projektowanie i analizę algorytmów heurystycznych dostarczających dobre rozwiązania dla większych sieci. W literaturze można już znaleźć próby wykorzystania technik optymalizacyjnych do problemu dominowania; przykładem jest praca Parra Inza i współautorów [24], w której zagadnienie sformułowano jako ILP i uzupełniono heurystykami naprawczymi. Tego

typu konstrukcję można zaadaptować do omawianego problemu, wprowadzając zmienne decyzyjne wskazujące wybór typu licencji dla każdego użytkownika oraz odpowiednie ograniczenia. Algorytmy zachłanne, metody lokalnego przeszukiwania oraz metaheurystyki, np. algorytmy genetyczne czy symulowane wyżarzanie, pozwalają szybko przeszukiwać przestrzeń możliwych konfiguracji licencji.

### **3.4 Podsumowanie**

W niniejszym rozdziale przedstawiono teoretyczne podstawy problemu licencjonowania oprogramowania w kontekście teorii dominowania w grafach. Kluczowym wnioskiem jest identyfikacja problemu jako wariantu dominowania rzymskiego, gdzie węzły mogą przyjmować różne typy licencji odpowiadające stanowi niezabezpieczonemu, zabezpieczonemu przez sąsiada lub będącemu właścicielem licencji grupowej.

Analiza złożoności obliczeniowej wykazała NP-trudność problemu, co wynika bezpośrednio z redukcji z klasycznego problemu zbioru dominującego. Konsekwencją tej właściwości jest brak wielomianowego algorytmu dokładnego oraz ograniczona jakość aproksymacji – w najgorszym przypadku nie można uzyskać w czasie wielomianowym przybliżenia lepszego niż  $O(\ln n)$ . Problem pozostaje trudny nawet dla grafów o ograniczonym stopniu, co oznacza, że ograniczenie maksymalnej liczby sąsiadów nie upraszcza zagadnienia do trywialnego.

Ustalenie związku z dominowaniem rzymskim dostarcza solidnych podstaw teoretycznych dla konstrukcji algorytmów dokładnych i heurystycznych. W szczególności umożliwia to adaptację znanych metod optymalizacyjnych, takich jak programowanie całkowitoliczbowe, oraz projektowanie heurystyk wykorzystujących właściwości strukturalne grafów. Przedstawione rezultaty stanowią fundament dla dalszych analiz algorytmicznych oraz eksperymentów empirycznych opisanych w kolejnych rozdziałach.

## 4. DANE TESTOWE

W celu kompleksowej oceny skuteczności przedstawionych algorytmów przeprowadzono eksperymenty na dwóch komplementarnych zbiorach danych. Posłużyły do tego syntetycznie generowane grafy losowe oraz rzeczywiste fragmenty sieci społecznościowej. Pierwsza grupa stanowi kontrolowany zbiór danych sztucznych, pozwalający na symulowanie różnych scenariuszy topologicznych i analizę wpływu struktury sieci na działanie algorytmów. Druga grupa to rzeczywiste ego-sieci z platformy Facebook, umożliwiające weryfikację metod na prawdziwych danych społecznościowych.

Niniejszy rozdział koncentruje się na charakterystyce wykorzystanych danych, natomiast ich praktyczne zastosowanie zostanie szczegółowo przedstawione w części poświęconej opisowi przeprowadzonych eksperymentów.

### 4.1 Grafy syntetyczne

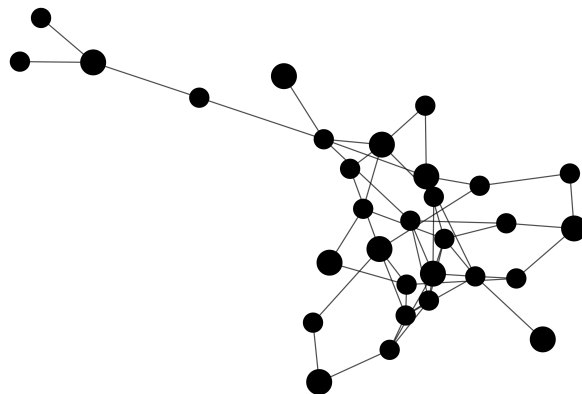
Do generowania danych syntetycznych wykorzystano trzy standardowe modele grafów: Erdős–Rényi (ER), Barabási–Albert (BA) oraz Watts–Strogatz (WS). W eksperymentach wykorzystywano kilka odrębnych konfiguracji rozmiaru w zależności od scenariusza eksperymentalnego:

- **Benchmark statyczny** obejmował grafy o  $n \in \{20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 300, 600, 1000\}$ , generowane po trzy próbki na rozmiar. Rozdział 6 zawiera szczegółowe omówienie testów przeprowadzonych na tych grafach.
- **Symulacje dynamiczne** korzystały z węższego zakresu rozmiarów: dla mutacji syntetycznych  $n \in \{20, 40, 80, 160, 320, 640\}$ , natomiast warianty realistyczne `pref_triadic` i `pref_pref` uruchamiano dla  $n \in \{40, 80, 160, 320\}$ , a `rand_rewire` dla  $n \in \{40, 80, 160, 320, 640\}$ . Szczegółowe definicje tych mutacji oraz uzyskane wyniki znajdują się w rozdziale 7.
- **Rozszerzenia modelu licencjonowania** w wariancie statycznym analizowano na rozmiarach  $n \in \{20, 50, 100, 200\}$ , natomiast część dynamiczna korzystała z  $n \in \{40, 80, 160\}$  przy krótszym horyzoncie czasowym. Szczegóły eksperymentów z rozszerzeniami modelu opisano w rozdziale 8.

#### 4.1.1 Model Erdős–Rényi - klasyczne grafy losowe

Pierwszym modelem jest klasyczny graf losowy Erdős–Rényi (ER), zaproponowany przez Erdősa i Rényiego w latach 1959–1960 [25]. W modelu tym rozpatruje się zbiór  $n$  wierzchołków, a każda z  $\binom{n}{2}$  potencjalnych krawędzi pojawia się niezależnie z prawdopodobieństwem  $p$ . Parametrami modelu są więc  $n$  oraz  $p$ . W używanej implementacji zaadaptowano właśnie ten wariant  $G(n, p)$ , który prezentuje się w sposób przedstawiony na rys. 4.1.

Model ER stanowi istotny punkt odniesienia jako najprostszy model sieci pozbawiony struktury społecznościowej. Motywacją uwzględnienia go w testach jest możliwość porównania



Rysunek 4.1: Przykładowa realizacja grafu Erdős–Rényi

działania algorytmów na zupełnie przypadkowych sieciach z ich działaniem na bardziej uporządkowanych grafach takich jak grafy skalowane, małego świata oraz rzeczywiste. Choć prawdziwe sieci społecznościowe odbiegają od założeń pełnej losowości, mają zwykle wyższy poziom klasteryzacji węzłów i nierównomierny rozkład stopni wierzchołków, to jednak model  $G(n, p)$  stanowi istotną podstawę porównawczą.

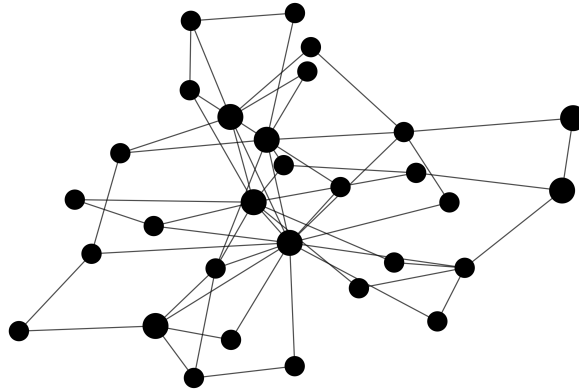
Z punktu widzenia właściwości, grafy ER cechują się stosunkowo niskim średnim współczynnikiem klasteryzacji. Współczynnik klasteryzacji mierzy, w jakim stopniu sąsiedzi danego wierzchołka są ze sobą połączeni. Dokładniej, oblicza się go jako stosunek liczby krawędzi faktycznie istniejących między sąsiadami wierzchołka do liczby wszystkich możliwych krawędzi między tymi sąsiadami. Średni współczynnik klasteryzacji dla całego grafu definiuje się jako średnią arytmetyczną wartości współczynników klasteryzacji po wszystkich wierzchołkach. Dla dużego  $n$  oczekiwany współczynnik klasteryzacji wynosi  $p$ ; dla  $p > \frac{1}{n}$  pojawia się składowa gigantyczna, a dla  $p > \frac{\ln n}{n}$  graf jest spójny z wysokim prawdopodobieństwem. Istnieje znana granica perkolacji, gdy  $p > \frac{\ln n}{n}$ , graf ER jest z dużym prawdopodobieństwem spójny - poniżej tego progu sieć rozpada się na wiele składowych [25]. Gęstość grafu, rozumiana jako odsetek istniejących krawędzi w stosunku do wszystkich możliwych, wynosi w tym modelu w przybliżeniu  $p$ . Przykładowo, dla  $p = 0.1$  graf będzie miał ok. 10% maksymalnej liczby krawędzi. Rozkład stopni w modelu ER ma charakter dwumianowy, przy czym zbiega do rozkładu Poissona przy  $n \rightarrow \infty$ . Oznacza to, że w grafach tych nie występują węzły o niezwykle wysokich stopniach (tzw. huby), które są charakterystyczne dla wielu rzeczywistych sieci społecznościowych. W konsekwencji model ER nie oddaje wielu kluczowych właściwości takich sieci - stanowi jednak użyteczny model kontrolny, pozbawiony zjawisk typu mały świat czy skalowość, dzięki czemu można wyraźnie uwypuklić wpływ tych cech w innych modelach.

#### 4.1.2 Model Barabási–Albert - sieci bezskalowe

Drugim generatorem jest model Barabási-Albert (BA), wprowadzony przez Barabásiego i Alberta w 1999 roku [26]. Model BA pozwala generować grafy o strukturze bezskalowej, w których rozkład stopni ma charakter potęgowy. Tego typu sieci charakteryzują się istnieniem niewielkiej



liczby wierzchołków o bardzo wysokim stopniu (tzw. hubów) oraz wielu wierzchołków o małym stopniu — jest to cecha obserwowana w wielu rzeczywistych sieciach, w tym społecznościowych. Dla ilustracji, na rys. 4.2 przedstawiono przykładową realizację grafu BA, w której wyraźnie widoczne są huby. W sieciach społecznościowych przekłada się to na obecność nielicznych węzłów o bardzo wysokim stopniu oraz wielu węzłów o niskim stopniu.



Rysunek 4.2: Przykładowa realizacja grafu Barabási–Albert z widocznymi hubami

Parametrami wejściowymi modelu Barabási–Albert są  $n$  — docelowa liczba wierzchołków — oraz  $m$  — liczba krawędzi dodawanych przez każdy nowy wierzchołek. Procedura generowania rozpoczyna się od małego grafu startowego (np. kliku złożonej z  $m$  wierzchołków, aby zapewnić początkową spójność). Następnie dodaje się kolejne wierzchołki; każdy nowy wierzchołek łączy się z  $m$  już istniejącymi, a prawdopodobieństwo wyboru danego sąsiada jest proporcjonalne do jego bieżącego stopnia (mechanizm preferencyjnego przyłączania). Skutkiem tego reguła generuje rozkład potęgowy stopni wierzchołków.

Motywacją użycia modelu BA było odzwierciedlenie w danych testowych właściwości często spotykanej w sieciach społecznościowych — silnego zróżnicowania stopni wierzchołków. Dzięki grafom BA można przetestować algorytmy pod kątem radzenia sobie z obecnością hubów oraz rozkładu stopni o ciężkim ogonie (ang. heavy-tailed distribution). "Ciężki ogon" oznacza powolny spadek prawdopodobieństwa występowania węzłów o bardzo dużym stopniu, co odróżnia sieci bezskalowe od grafów ER, w których pojawianie się węzłów o ekstremalnie wysokim stopniu jest bardzo mało prawdopodobne.

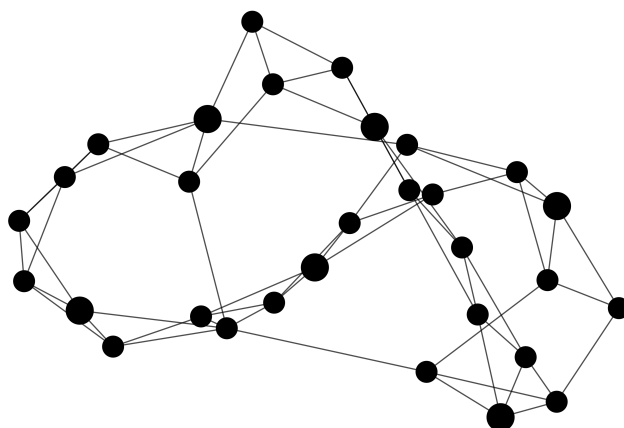
Grafy generowane modelem BA mają z reguły jedną składową spójności. Przy założeniu, że graf początkowy jest spójny i  $m \geq 1$ , każdy nowy wierzchołek dołącza do istniejącej struktury, więc sieć pozostaje spójna, a średni stopień w takim grafie wynosi około  $2m$ . Stąd gęstość grafu BA maleje wraz ze wzrostem  $n$ . Dla dużych grafów jest ona rzędu  $\frac{2m}{n}$ , co oznacza, że grafy te są rzadkie. W przeciwieństwie do modelu ER, współczynnik klasteryzacji grafów BA nie jest determinowany przez pojedynczy parametr w oczywisty sposób - klasyczny model BA generuje sieci o stosunkowo niskim średnim współczynniku klasteryzacji (niższym niż obserwowany w rzeczywistych sieciach społecznościowych), ponieważ nowe połączenia tworzone są głównie z

hubami, co sprzyja tworzeniu gwiazd zamiast trójkątów. Istnieją modyfikacje modelu BA dodające mechanizmy triadycznego dosłaczania, które zwiększają współczynnik klasteryzacji - jednak w czystej postaci model BA zazwyczaj skutkuje średnim współczynnikiem klasteryzacji malejącym wraz z rozmiarem grafu. Mimo niskiego współczynnika klasteryzacji grafy BA charakteryzują się małą średnią długością najkrótszej ścieżki. Powyższe cechy sprawiają, że grafy BA stanowią przydatny model testowy - oddają one istnienie hubów i krótkich odległości jak w wielu sieciach społecznościowych, choć nie odwzorowują silnego grupowania lokalnego.

#### 4.1.3 Model Watts–Strogatz - graf małego świata

Trzecim fundamentalnym modelem wykorzystanym w pracy jest model Watts–Strogatz (WS), opisany przez Watts i Strogatz w 1998 roku [27]. Umożliwia on generowanie grafów małego świata (small-world), które łączą w sobie dwie istotne cechy: wysoki współczynnik klasteryzacji (podobny do obserwowanego w sieciach regularnych) oraz niską średnią odległość (podobnie jak w grafach losowych). Model ten odzwierciedla fakt, że w sieciach społecznościowych często występują silnie żyte grupy znajomych, a jednocześnie dowolne dwie osoby są połączone relatywnie krótką ścieżką znajomości.

Generowanie w modelu WS wymaga trzech parametrów: liczby wierzchołków  $n$ , stopnia początkowego  $k$  oraz prawdopodobieństwa przepięcia krawędzi  $p$ . Procedura rozpoczyna się od utworzenia grafu regularnego, gdzie każdy wierzchołek jest połączony z  $k$  najbliższymi sąsiadami w cyklu (tj. tworzymy cykl z  $n$  węzłów, a następnie każdy węzeł łączymy z  $\frac{k}{2}$  następnymi i  $\frac{k}{2}$  poprzednimi na cyklu, zakładając dla uproszczenia, że  $k$  jest parzyste). Tak powstała sieć charakteryzuje się wysokim współczynnikiem klasteryzacji - węzły sąsiadujące na cyklu tworzą małe kliki. Jednocześnie początkowa średnia odległość jest stosunkowo duża, bo graf tuż przed modyfikacją krawędzi ma strukturę cyklu, więc dystans między węzłami oddalonymi na cyklu jest znaczny. Na rys. 4.3 zilustrowano przykładową realizację grafu Watts–Strogatz, w której widoczne są opisane wyżej właściwości.



Rysunek 4.3: Przykładowa realizacja grafu Watts–Strogatz, w której widoczne są lokalne kliki oraz połączenia dalekiego zasięgu skracające średnie odległości

Następnie wprowadza się losowe przepięcia: każdą krawędź do jednego z  $\frac{k}{2}$  najbliższych sąsiadów przepina się z prawdopodobieństwem  $p$  do losowo wybranego wierzchołka. Przepięcie polega na usunięciu oryginalnej krawędzi i dodaniu nowej krawędzi łączącej dany węzeł z innym losowym węzłem. W wyniku tych losowych przepięć, przy zachowaniu większości lokalnych połączeń cyklu, otrzymujemy graf, który dla małych  $p$  wciąż charakteryzuje się wysokim współczynnikiem klasteryzacji, ale jednocześnie kilka losowych połączeń długodystansowych znacząco skraca średnie odległości w sieci. Dla umiarkowanych wartości  $p$  średnia długość najkrótszej ścieżki znacząco maleje, przy wciąż wysokim współczynniku klasteryzacji.

W kontekście modelowania sieci społecznościowych, generator dla modelu WS dodano w celu odzwierciedlenia właściwości, których brakuje modelowi BA - mianowicie wysokiego lokalnego współczynnika klasteryzacji. Sieci społecznościowe cechują się tym, że znajomi często znają się nawzajem, tworząc kliki znajomych. Model WS pozwala symulować taką sytuację i sprawdzić, jak algorytmy radzą sobie np. z wykrywaniem społeczności czy zjawisk rozprzestrzeniania się informacji w warunkach silnego grupowania. Parametr  $k$  decyduje o początkowej gęstości połączeń lokalnych - większe  $k$  to więcej krawędzi lokalnych (każdy węzeł ma początkowo  $k$  sąsiadów), a zatem wyjściowo wyższy współczynnik klasteryzacji i gęstość. Parametr  $p$  kontroluje intensywność przepięć, a tym samym stopień "losowości" grafu. Dla  $p = 0$  otrzymujemy graf regularny, natomiast dla  $p = 1$  graf staje się w dużej mierze losowy. W praktycznych zastosowaniach szczególnie interesujący jest zakres wartości  $p$  pomiędzy 0 a 1, w którym sieć łączy wysoki współczynnik klasteryzacji z niewielką średnią odległością między wierzchołkami.

Parametry grafów WS dobrano tak, aby odwzorować cechy typowe dla niewielkich sieci społecznościowych. Uzyskane sieci miały niską gęstość przy jednocześnie wysokim współczynniku klasteryzacji, znacznie przewyższającym wartości obserwowane w losowych grafach ER o podobnej gęstości. Dzięki temu w grafach WS obecne są realistyczne zgrupowania lokalne, odpowiadające typowym kręgom znajomych w sieciach społecznościowych. Zwykle niemal wszystkie wierzchołki należą do jednej dużej składowej spójności, a ewentualne izolowane węzły pojawiają się jedynie sporadycznie przy skrajnych ustawieniach parametrów. Taka struktura sprawia, że model WS stanowi dobre środowisko testowe.

## 4.2 Grafy rzeczywiste

Drugim zestawem danych testowych są rzeczywiste grafy pochodzące z sieci społecznościowej Facebook, a dokładniej zbiór Facebook Ego Network udostępniony w projekcie Stanford Network Analysis Project (SNAP) [28]. Dane te zostały zebrane w 2012 roku przez J. McAuley i J. Leskovca z Uniwersytetu Stanforda w ramach badań nad automatycznym wykrywaniem kręgów społecznościowych [29]. Zbiór zawiera dziesięć tzw. ego-sieci, czyli sieci ego-centricznych poszczególnych użytkowników Facebooka, pozyskane za zgodą uczestników przy użyciu dedykowanej aplikacji badawczej działającej w ramach platformy Facebook. Ego-sieć to sieć z perspektywy pojedynczego użytkownika (ego) - węzłami są ego oraz wszystkie jego bezpośrednie znajome osoby, zaś krawędzie reprezentują relacje znajomości pomiędzy tymi znajomymi. Każda z dziesięć-

ciu sieci odpowiada innemu użytkownikowi i zawiera wyłącznie jego znajomych oraz powiązania między nimi. Węzeł ego nie występuje jawnie. Traktuje się go jako ukryty węzeł centralny łączący wszystkich znajomych. Plik `X.edges` zawiera wyłącznie relacje między znajomymi użytkownika `X`; sam `X` nie występuje jako węzeł.

#### 4.2.1 Struktura danych

Każda ego-sieć udostępniona przez SNAP zapisana jest w osobnych plikach tekstowych, których nazwa odpowiada identyfikatorowi ego (np. `0.edges`, `0.circles`, `0.feats`, `0.ego_feats` dla ego o ID=0). Struktura danych jest następująca:

**Plik `.edges`** - lista krawędzi w grafie znajomych danego ego. Każdy wiersz zawiera dwie liczby - identyfikatory dwóch różnych znajomych ego, między którymi istnieje relacja koleżeńska. Krawędzie te są nieskierowane. Ważną cechą jest to, że plik `.edges` nie zawiera połączeń od ego do jego znajomych - wierzchołek ego w ogóle nie występuje w tym pliku. Oznacza to, że rzeczywista sieć ego (gdyby uwzględnić w niej węzeł ego) miałaby dodatkowo krawędź łączącą ego z każdym z pojawiających się znajomych, jednak tych połączeń tutaj nie zapisano (przyjmuje się, że ego jest połączone ze wszystkimi swoimi znajomymi). Pominięcie węzła ego jest zabiegiem celowym, pozwalającym skupić się na relacjach wewnątrz kręgów znajomych. Konsekwencją tego jest często podział grafu znajomych na kilka składowych - jeśli ego ma różne grupy znajomych wzajemnie się nieznających, to w pliku `.edges` każda taka grupa stanowi osobną składową spójności. Przykładowo, w ego-sieci `0.edges` znajomi tworzą 5 odrębnych składowych spójności. Oznacza to, że użytkownik o ID 0 miał około pięciu niezależnych grup znajomych niepowiązanych ze sobą - dopiero poprzez jego osobę stawały się one pośrednio połączone.

**Plik `.circles`** - zestaw kręgów znajomych zdefiniowanych przez użytkownika. Każdy wiersz pliku reprezentuje jeden krąg towarzyski. Wiersz rozpoczyna się od nazwy kręgu - jednak w udostępnionych danych nazwy te zostały zanonimizowane lub pominięte, więc w praktyce każdy wiersz zaczyna się od identyfikatora kręgu albo pustej nazwy, po czym następuje lista ID użytkowników należących do tego kręgu. Kręgi mogą częściowo się pokrywać i nie muszą stanowić rozłącznych społeczności w sensie grafu - są to raczej dodatkowe metadane od ego, opisujące jak kategoryzuje on swoich znajomych. Dane te stanowią metadane wykorzystywane pomocniczo, np. w oryginalnej pracy McAuley'ego i Leskova posłużyły do oceny algorytmów automatycznie wykrywających społeczności [29].

**Plik `.feat`** - macierz cech atrybutów przypisanych do znajomych ego. Każdy wiersz odpowiada jednemu znajomemu i zawiera wektor wartości cech tej osoby. Cechy te mogą obejmować informacje z profilu Facebooka (np. miejsce pracy, szkoła, zainteresowania itp.). W udostępnionym zbiorze wartości atrybutów zostały zanonimizowane - nie znamy dokładnego znaczenia poszczególnych cech, jedynie ich binarne wartości (1 - użytkownik posiada daną cechę, 0 - nie posiada). Istnieje także plik `.featnames` zawierający oryginalne nazwy cech, ale w przypadku Facebooka nazwy te również zostały zanonimizowane (np. zamiast "szkoła: Uniwersytet Stanford" pojawia się anonimowa cecha 57). W niniejszej pracy danych atrybutów nie wykorzystano; analiza koncentruje

się na strukturze grafów.

**Plik .egofeat** - wektor cech centralnego użytkownika, w tym samym formacie co pojedynczy wiersz pliku .feat, odnoszący się jednak do ego. Pozwala to porównać cechy ego z cechami jego znajomych. W kontekście naszych badań plik ten również nie był bezpośrednio wykorzystywany, poza podstawową walidacją danych.

W eksperymentach wykorzystano wszystkie dziesięć ego-sieci dostępnych w zbiorze SNAP. Liczba węzłów (po pominięciu centralnego ego) wynosiła odpowiednio 53, 62, 151, 169, 225, 334, 535, 748, 787 oraz 1035. Zestaw ten umożliwił ocenę algorytmów zarówno na niewielkich, jak i ponadtysięcznych grafach, o wyraźnie zróżnicowanej gęstości i strukturze społeczności.

#### 4.2.2 Szczegółowy opis danych ze zbioru SNAP

W badanym zbiorze występują zarówno niewielkie sieci liczące poniżej setki węzłów (np. ID 3980: 53 wierzchołki, 252 krawędzie), jak i bardzo duże instancje przekraczające tysiąc węzłów (ID 0: 1035 wierzchołków, ponad 26 000 krawędzi). Ogólnie większa liczba znajomych wiąże się z większym zróżnicowaniem strukturalnym: część ego-sieci składa się z kilku gęstych społeczności, podczas gdy inne są rozproszone i tworzą liczne składowe. Sumarycznie wszystkie dziesięć ego-sieci obejmuje 4039 unikalnych wierzchołków oraz 88 234 krawędzie [29], co dobrze oddaje skalę i złożoność sieci osobistych kontaktów.

Jak wspomniano, z powodu braku węzła ego w grafie znajomych większość ego-sieci dzieli się na więcej niż jedną składową spójności. W praktyce zazwyczaj istnieje jedna dominująca składowa, zawierająca największą grupę wzajemnie powiązanych znajomych, oraz kilka mniejszych składowych (np. dwu- lub kiluosobowych grup) odpowiadających odizolowanym kręgom towarzyskim. Dla przykładu, sieć 107.edges jest spójna — wszyscy znajomi użytkownika 107 tworzyli jedną składową. Natomiast sieć 0.edges miała 5 składowych - co już sygnalizowano wcześniej. Wśród naszych analizowanych sieci: sieć 686.edges jest spójna, sieć 414.edges dzieli się na 2 składowe, sieć 698.edges na 3, a sieć 3980.edges na 4 składowe. Zwykle największa składowa obejmuje zdecydowaną większość wierzchołków. Taka struktura wskazuje na obecność jednego głównego kręgu znajomych, uzupełnionego kilkoma mniejszymi grupami znajomości niepowiązanych z resztą.

Ego-sieci Facebooka cechują się na ogół wysokim współczynnikiem klasteryzacji, co zgodne jest z intuicją - znajomi konkretnej osoby często znają się nawzajem. Literatura wskazuje, że globalny współczynnik klasteryzacji całego grafu Facebooka jest niski [30]. W obrębie pojedynczej ego-sieci, gdzie wszyscy rozważani ludzie są znajomymi jednego ego, współczynnik klasteryzacji jest znacznie wyższy. Dla połączonej sieci 10 ego (4039 węzłów) średni współczynnik klasteryzacji wynosił 0.6055, co oznacza, że prawdopodobieństwo istnienia krawędzi między dwoma losowo wybranymi sąsiadami przekraczało 0.60. W naszych mniejszych sieciach wartości te różnią się w zależności od sieci, ale zwykle mieszczą się w przedziale 0.5-0.6 dla największej składowej (mniejsze składowe, np. dwuosobowe, mają współczynnik klasteryzacji równy 0 lub nieokreślony). Wysoki średni współczynnik klasteryzacji potwierdza istnienie silnych lokalnych powiązań - w grafie

występuje wiele trójkątów (grup znajomych, z których każdy zna pozostałych). Przykładowo, jeśli ego posiada grupę bliskich przyjaciół ze szkoły, to prawdopodobne jest, że większość z nich zna się nawzajem, tworząc pełne podgrafy (kliki) o dużym współczynniku klasteryzacji.

Gęstość ego-sieci Facebooka jest niska, co odzwierciedla ogólną rzadkość połączeń charakterystyczną dla sieci społecznościowych. Typowe wartości w badanym zbiorze mieszczą się od kilku do kilkunastu procent. Największe sieci (powyżej 700 węzłów) osiągają gęstości około 5%, natomiast mniejsze instancje (53 i 62 węzły) przekraczają 15% dzięki bardziej lokalnym połączeniom. W porównaniu do grafów losowych o podobnej skali ego-sieci mają wyższy współczynnik klasteryzacji (krawędzie nie są rozłożone przypadkowo, lecz skoncentrowane wewnątrz podzbiorów wierzchołków). Rzadkość połączeń jest istotna z punktu widzenia testowanych algorytmów, gdyż wiele z nich ma złożoności silnie zależne od liczby krawędzi (np. operacje przeszukiwania grafu lub znajdowania struktur klikowych mogą być szybsze w grafach rzadszych).

### **4.3 Podsumowanie**

W rozdziale przedstawiono charakterystykę dwóch komplementarnych zbiorów danych testowych wykorzystanych w pracy. Grafy syntetyczne, wygenerowane zgodnie z modelami Erdős–Rényi, Barabási–Albert oraz Watts–Strogatz, zapewniają kontrolowane środowisko badawcze umożliwiające systematyczną analizę wpływu różnych właściwości topologicznych na wydajność algorytmów. Modele te reprezentują różne mechanizmy tworzenia sieci: losowe połączenia (ER), preferential attachment (BA) oraz zjawisko małego świata z wysoką klasteryzacją (WS).

Rzeczywiste ego-sieci z platformy Facebook dostarczają danych reprezentujących autentyczne struktury społecznościowe z charakterystycznymi właściwościami: wysokim współczynnikiem klasteryzacji (0.5-0.6), niską gęstością (5-15%) oraz obecnością wielu składowych spójności odpowiadających różnym kręgom znajomości. Zróżnicowanie rozmiaru sieci – od 53 do 1035 węzłów – pozwala na ocenę skalowalności algorytmów w szerokim spektrum zastosowań.

Połączenie grafów syntetycznych i rzeczywistych umożliwia kompleksową walidację metod algorytmicznych: syntetyczne dane pozwalają na izolowanie wpływu konkretnych właściwości strukturalnych, podczas gdy ego-sieci weryfikują praktyczną użyteczność algorytmów na autentycznych danych społecznościowych. Różnorodność topologiczna obu zbiorów stanowi solidną podstawę dla eksperymentów prezentowanych w kolejnych rozdziałach.

## 5. METODY ALGORYTMICZNE

W rozdziale przedstawiono algorytmy zastosowane w pracy. Każdy algorytm opisano, podając ideę, parametry oraz analizę złożoności obliczeniowej.

Algorytmy zastosowane w pracy dzielą się na trzy grupy:

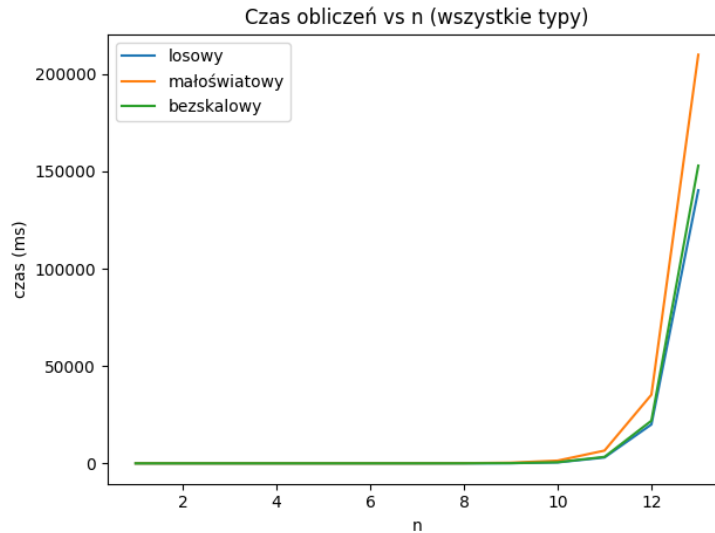
1. **Metody dokładne** – gwarantują znalezienie optymalnego rozwiązania: algorytm naiwny i programowanie całkowitoliczbowe (ILP).
2. **Heurystyki konstrukcyjne** – metody konstruujące rozwiązanie sekwencyjnie: algorytm zachłanny, heurystyka oparta na zbiorze dominującym, algorytm losowy.
3. **Metaheurystyki** – metody przeszukujące przestrzeń rozwiązań w sposób systematyczny: algorytm genetyczny, przeszukiwanie tabu, algorytm mrówkowy, symulowane wyżarzanie.

### 5.1 Metody dokładne

#### 5.1.1 Algorytm naiwny

Algorytm naiwny jest metodą dokładną. Przegląda wszystkie podziały zbioru wierzchołków na dopuszczalne grupy oraz wszystkie przypisania licencji. Wybierane jest rozwiązanie o najniższym koszcie. Liczba rozważanych konfiguracji rośnie wykładniczo, dlatego metoda ma znaczenie praktyczne tylko dla bardzo małych instancji.

Na rysunku 5.1 przedstawiono czasy obliczeń w funkcji liczby wierzchołków dla grafów losowych, małoświatowych i bezskalowych. Dla  $n \leq 12$  czas wykonania jest akceptowalny w eksperymentach. Ze względu na wykładniczy wzrost czasu działania metoda staje się niepraktyczna dla większych instancji, w szczególności wobec dostępności wydajniejszych metod, takich jak programowanie całkowitoliczbowe (ILP).



Rysunek 5.1: Czas obliczeń algorytmu naiwnego w funkcji liczby wierzchołków  $n$  dla trzech typów grafów

#### Opis metody

1. Wygenerować wszystkie partycje zbioru  $V$  na niepuste bloki (każdy blok odpowiada kandydatowi na grupę licencyjną).
2. Dla każdego bloku w danej partycji wyznaczyć wszystkie dopuszczalne pary (właściciel, licencja), czyli takie, które spełniają ograniczenia pojemności oraz sąsiedztwa.
3. Złożyć wybory z poszczególnych bloków w pełne przypisania i odrzucić konfiguracje, które nie pokrywają wierzchołków lub łamią ograniczenia.
4. Obliczyć koszt na podstawie funkcji kosztu  $\text{cost}(f)$  (2.2) i zaktualizować najlepsze rozwiązanie.

---

#### Algorithm 1 Algorytm naiwny: pełny przegląd rozwiązań

---

**Require:** graf  $G = (V, E)$ , zbiór typów licencji  $L$

---

```

1: if  $|V| > 12$  then
2:   return zakończenie działania z powodu ograniczenia eksperymentalnego
3: end if
4:  $best\_cost \leftarrow \infty$ ,  $best \leftarrow \emptyset$ 
5: for każda partycja  $P = \{P_1, \dots, P_k\}$  zbioru  $V$  do
6:   for każde przypisanie  $l \in L$  i właściciela w każdym  $P_i$  do
7:     if spełnione są ograniczenia pojemności, sąsiedztwa i pokrycia then
8:       oblicz koszt; zaktualizuj  $best$ , jeśli lepszy
9:     end if
10:   end for
11: end for
12: return  $best$ 

```

---



**Złożoność** Algorytm generuje wszystkie partycje zbioru  $V$  na niepuste bloki, czyli wszystkie rozbicia odpowiadające potencjalnym zestawom grup licencyjnych. Takich partycji jest  $B_{|V|}$ , gdzie  $B_m$  oznacza liczbę Bella dla  $m$  elementów [31]. W implementacji nie ograniczono z góry liczby bloków: niektóre typy licencji mogą pozostać nieużyte, dlatego dopuszczamy zarówno rozbicia na jedną grupę, jak i na  $|V|$  grup jednowierzchołkowych. Gdyby liczba bloków była stała i wynosiła  $k$ , odpowiadałyby jej liczby Stirlinga drugiego rodzaju  $\left\{ \begin{smallmatrix} |V| \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ ; tutaj sumujemy je po wszystkich  $k$ , stąd pojawiają się liczby Bella. Samo wygenerowanie partycji ma koszt  $\Theta(B_{|V|})$ .

Dla partycji o  $k$  blokach o rozmiarach  $s_1, s_2, \dots, s_k$  rozpatrujemy każdą kombinację wyboru właściciela (co najwyżej  $s_i$  opcji na blok  $i$ ) i dopuszczalnego typu licencji (co najwyżej  $T$  opcji, gdzie  $T = |L|$ ). Prowadzi to do górnego oszacowania

$$\prod_{i=1}^k (s_i \cdot T) = T^k \cdot \prod_{i=1}^k s_i$$

konfiguracji dla pojedynczej partycji. Całkowity koszt można oszacować przez  $O(B_{|V|} \cdot T^{|V|} \cdot 3^{|V|/3})$ , ponieważ  $\prod s_i \leq 3^{|V|/3}$ . Wzrost jest superwykładniczy, gdzie asymptotycznie  $\log B_n = n \log n - n \log \log n - n + O(n/\log n)$ . W praktyce ograniczenia licencyjne i warunek sąsiedztwa znacząco zmniejszają liczbę rozważanych konfiguracji, lecz nawet wtedy pełny przegląd jest użyteczny wyłącznie dla bardzo małych grafów (rzędu kilku do kilkunastu wierzchołków).

Liczby Bella można zapisać wzorami

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \quad \text{oraz} \quad B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!},$$

a zliczają one wszystkie rozbiory zbioru na dowolną liczbę niepustych bloków (bloki są nierozróżnialne). Dla porównania liczba wszystkich podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego wynosi jedynie  $2^n$ , więc nawet tak uproszczone oszacowanie rośnie wolniej niż pełna liczba partycji.

### 5.1.2 Programowanie całkowitoliczbowe (ILP)

Problem z rozdziału 2.2 formułujemy jako minimalizację kosztu przy ograniczeniach liniowych z binarnymi zmiennymi. Model jest dokładny. Algorytm zwraca rozwiązanie optymalne, jeśli solver zakończy działanie ze statusem `Optimal`. W przypadku statusu `Infeasible`, `Unbounded` lub `Not Solved` zwracane jest rozwiązanie zapasowe z licencjami indywidualnymi.

**Parametry i zmienne** Korzystamy z rodziny licencji z (2.1),  $L = \{l_t = (c_t, m_t, k_t) : t = 1, \dots, T\}$ . Oznaczamy  $N[i] = N(i) \cup \{i\}$ . Dla  $i \in V$ ,  $t \in \{1, \dots, T\}$  definiujemy:

- $a_{i,t} \in \{0, 1\}$ :  $a_{i,t} = 1$  gdy węzeł  $i$  staje się właścicielem grupy licencyjnej typu  $t$ . Właściciel kupuje licencję i dzieli jej korzyści z wybranymi sąsiadami zgodnie z ograniczeniami pojemności  $m_t \leq |grupa| \leq k_t$ . Właściciel zawsze należy do własnej grupy.
- $x_{i,j,t} \in \{0, 1\}$  dla  $j \in N[i]$ :  $x_{i,j,t} = 1$  gdy  $j$  należy do grupy właściciela  $i$  typu  $t$ .

Zmienna  $x_{i,j,t}$  odwzorowuje przypisanie odbiorcy do właściciela; zbiory ról są indukowane przez

wartości  $(a, x)$ .

## Model

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{t=1}^T c_t a_{i,t} \quad (5.1)$$

$$\text{pod warunkami: } \sum_{i \in N[j]} \sum_{t=1}^T x_{i,j,t} = 1 \quad \forall j \in V \quad (5.2)$$

$$m_t a_{i,t} \leq \sum_{j \in N[i]} x_{i,j,t} \leq k_t a_{i,t} \quad \forall i \in V, \forall t \quad (5.3)$$

$$x_{i,i,t} = a_{i,t} \quad \forall i \in V, \forall t \quad (5.4)$$

$$\sum_{t=1}^T a_{i,t} \leq 1 \quad \forall i \in V \quad (5.5)$$

Znaczenie ograniczeń: (5.2) wymusza jednokrotne pokrycie każdego węzła; (5.3) wymusza przedziały wielkości grup; (5.4) zapewnia udział właściciela; (5.5) ogranicza do jednej licencji na węzeł (dowolnego typu). Ograniczenia pokrywają warunki wykonalności z rozdziału 2.2.

**Złożoność** Liczba zmiennych:  $|V|T$  dla  $a_{i,t}$  oraz  $T \sum_i |N[i]|$  dla  $x_{i,j,t}$ , łącznie  $O(T(|E| + |V|))$ . Liczba ograniczeń:  $|V|$  dla (5.2),  $2|V|T$  dla (5.3),  $|V|T$  dla (5.4),  $|V|$  dla (5.5). Model służy jako punkt odniesienia dla instancji małych i średnich.

Problemem ILP jest wykładnicza złożoność czasowa w najgorszym przypadku. Alternatywnym podejściem jest *relaksacja liniowa*, gdzie zmienne binarne zastąpiono ciągłymi z przedziałem  $[0, 1]$ , co daje wielomianowy czas rozwiązania. Rozwiązanie relaksacji stanowi dolne oszacowanie optimum, ale wymaga zaokrąglenia i może naruszać ograniczenia. W niniejszej pracy zastosowano dokładne rozwiązanie binarne ILP.

**Implementacja** Implementacja w Pythonie (PuLP+CBC) odzwierciedla model. Stosuje się eliminację niemożliwych par  $(i, t)$ , gdy  $m_t > |N[i]|$  lub  $k_t < 1$ , oraz dla  $k_t = 1$  tworzą się wyłącznie zmienne  $x_{i,i,t}$ . Wszystkie zmienne decyzyjne są zdefiniowane jako binarne (`cat="Binary"`). W przypadku statusu innego niż `Optimal` zwracane jest rozwiązanie zapasowe, w którym wszystkim węzłom przypisano najtańsze dostępne licencje indywidualne.

## 5.2 Heurystyki konstrukcyjne

Heurystyki konstrukcyjne budują rozwiązanie sekwencyjnie, w każdym kroku podejmując decyzje na podstawie lokalnych kryteriów. Metody te charakteryzują się szybkim czasem działania, ale nie gwarantują znalezienia rozwiązania optymalnego. W tej grupie znajdują się algorytm zachłanny, heurystyka oparta na zbiorze dominującym oraz algorytm losowy wykorzystywany jako punkt odniesienia.

### 5.2.1 Algorytm zachłanny

Algorytm zachłanny to szybka heurystyka, która buduje rozwiązanie krok po kroku, w każdym kroku wybierając lokalnie najlepszą opcję. Algorytm nie gwarantuje znalezienia optymalnego rozwiązania, ale jest bardzo szybki i daje zazwyczaj w miarę dobre wyniki.

**Opis metody** Algorytm działa według następującej strategii:

1. Sortuje wierzchołki nierosnąco według liczby sąsiadów (stopnia wierzchołka).
2. Dla każdego wierzchołka sprawdza, czy może być właścicielem grupy.
3. Wybiera typ licencji i rozmiar grupy tak, aby zminimalizować stosunek kosztu do rozmiaru grupy.
4. Dodaje członków do grupy wybierając wierzchołki o największej liczbie sąsiadów.
5. Powtarza proces dla wszystkich niepokrytych wierzchołków.

Algorytm nie wymaga strojenia parametrów. Wszystkie decyzje są podejmowane deterministycznie na podstawie struktury grafu i kosztów licencji, choć w przypadku wierzchołków o tym samym stopniu kolejność wyboru może wpływać na wynik końcowy.

Sortowanie według stopnia wierzchołka (liczby sąsiadów) sprawdza się dobrze w praktyce, ponieważ wierzchołki o wysokim stopniu mogą tworzyć większe, bardziej efektywne grupy licencyjne.

---

#### Algorithm 2 Algorytm zachłanny

---

**Require:** graf  $G = (V, E)$ , zbiór typów licencji  $L$

- 1: posortuj wierzchołki nierosnąco według stopnia
  - 2:  $niepokryte \leftarrow V$
  - 3: **for** każdy wierzchołek  $v$  w posortowanej kolejności **do**
  - 4:   **if**  $v$  już pokryty **then continue**
  - 5:   **end if**
  - 6:   znajdź dostępnych sąsiadów  $v$  wśród niepokrytych
  - 7:   **for** każdy typ licencji  $l_t \in L$  **do**
  - 8:     oblicz efektywność:  $koszt_{l_t} / rozmiar\_grupy$
  - 9:   **end for**
  - 10:   wybierz licencję i członków grupy o najlepszej efektywności
  - 11:   utwórz grupę z  $v$  jako właścicielem
  - 12:   usuń członków grupy z  $niepokryte$
  - 13: **end for**
  - 14: **return** utworzone grupy
- 

**Złożoność i zastosowanie** Algorytm ma złożoność czasową  $O(|V|T + |E| \log |V|)$ , gdzie  $|V|$  to liczba wierzchołków,  $|E|$  to liczba krawędzi, a  $T$  to liczba typów licencji. Algorytm zachłanny jest bardzo szybki i daje stabilne wyniki. Z tego powodu często używany był jako:

- podstawowa metoda do porównywania z innymi algorytmami,
- źródło rozwiązania początkowego dla bardziej zaawansowanych metod,
- szybka metoda dla dużych grafów, gdzie inne algorytmy są zbyt wolne.

Wadą algorytmu jest ryzyko pominięcia rozwiązań globalnie lepszych wskutek lokalnych decyzji.

### 5.2.2 Heurystyka zbioru dominującego

Heurystyka korzysta z *minimalnych względem inkluzji* zbiorów dominujących. Zbiór dominujący jest minimalny, gdy usunięcie dowolnego jego wierzchołka powoduje utratę własności dominowania [12]. W kontekście licencjonowania dominatorem nazywa się wierzchołek wybrany do zbioru dominującego, który stanie się właścicielem grupy licencyjnej i pokryje siebie oraz swoich sąsiadów. Dla przejrzystości wprowadzamy zbiór  $F$  oznaczający wierzchołki, które nie zostały jeszcze przypisane ani do zbioru dominującego, ani do żadnej grupy licencyjnej.

Wskaźnik wyboru kandydata opiera się na  $\text{coverage}(v)$  oraz  $\text{min\_cpn}(v)$ .

- $U$  to zbiór wierzchołków jeszcze niepokrytych, który jest bezpośrednią kopią  $V$  na początku działania algorytmu. W miarę tworzenia grup wierzchołki są usuwane z  $U$ .
- $\text{coverage}(v) = |N[v] \cap U|$  to liczba jeszcze niepokrytych węzłów, które może pokryć  $v$ .
- $\text{min\_cpn}(v)$  to minimalny koszt na węzeł dla  $v$ , liczony po wszystkich licencjach i dopuszczalnych rozmiarach grupy:

$$\text{min\_cpn}(v) = \min_{l_t \in L} \min_{s \in [m_t, \min\{k_t, \text{coverage}(v)\}]} \frac{c_t}{s}.$$

Interpretacja: wybieramy dla  $v$  najkorzystniejszą licencję i rozmiar grupy, które dają najniższy koszt jednostkowy.

---

**Algorithm 3** Zbiór dominujący z budowaniem grup

---

**Require:** graf  $G = (V, E)$ , zbiór typów licencji  $L$

```
1:  $U \leftarrow V, D \leftarrow \emptyset, R \leftarrow V$ 
2: while  $U \neq \emptyset$  do
3:   dla każdego  $v \in V$  policz  $\text{coverage}(v) = |N[v] \cap U|$  oraz  $\text{min\_cpn}(v)$ 
4:   wybierz  $u$  maksymalizujące  $\text{coverage}(v) / \text{min\_cpn}(v)$ ; jeśli brak rozstrzygnięcia wybierz
     dowolne  $u \in U$ 
5:    $D \leftarrow D \cup \{u\}, U \leftarrow U \setminus N[u]$ 
6: end while
7: posortuj  $D$  nierosnąco według stopni wierzchołków
8: for każde  $u \in D$  do
9:    $S \leftarrow N[u] \cap F$ 
10:  wybierz najtańszą dopuszczalną licencję dla  $u$  i wyznacz grupę  $P \subseteq S$  o największym
     dopuszczalnym rozmiarze; w ostateczności przydziel licencję indywidualną
11:   $F \leftarrow F \setminus P$ 
12: end for
13: return utworzone grupy
```

---

**Złożoność i zastosowanie** Faza wyboru dominatorów w każdej rundzie przechodzi po wszystkich wierzchołkach, ich sąsiadach i typach licencji, co daje koszt rzędu  $O(|V||E|T)$ . Faza budowania grup dla każdego dominatora sortuje kandydatów i sprawdza warianty licencji. W gęstych grafach rośnie to do  $O(|V|^3 T \log |V|)$ , w rzadkich pozostaje bliżej  $O(|V||E|T)$ . Heurystyka w krótkim czasie wyznacza pełne pokrycie i dostarcza jakościowe rozwiązanie początkowe dla metod ulepszających.

### 5.2.3 Algorytm losowy

Algorytm losowy pełni rolę metody odniesienia do oceny jakości rozwiązań generowanych przez inne algorytmy. Weryfikuje poprawność implementacji i stanowi stochastyczny punkt odniesienia. Wierzchołki są przetwarzane w losowej kolejności, a wybór licencji i składu grupy jest losowy w granicach ograniczeń pojemności i sąsiedztwa.

#### Opis metody

1. Losowana jest kolejność przetwarzania wierzchołków.
2. Dla bieżącego wierzchołka wyznaczany jest zbiór kandydatów obejmujący jego oraz nieprzydzielonych sąsiadów.
3. Jeżeli istnieje dopuszczalna licencja, losowany jest typ licencji, rozmiar grupy oraz członkowie grupy z dostępnych kandydatów. Rozważano wariant deterministyczny oparty na minimalnym koszcie jednostkowym  $\min_{l,s} c_l/s$ , analogiczny do heurystyki zbioru dominującego. W pracy przyjęto jednak w pełni losowy wariant, aby uzyskać neutralny punkt odniesienia dla metaheurystyk.

4. W przeciwnym razie przydzielana jest najtańsza dostępna licencja indywidualna.
5. Kroki są powtarzane do pełnego pokrycia grafu.

**Uwagi o losowości** Celem było uzyskanie szerokiego spektrum wyników w losowych warunkach spełniających ograniczenia problemu. Nie stosowano wariantu wyboru licencji według najlepszego kosztu na węzeł, ponieważ prowadziłoby to do wyniku deterministycznego i zawężenia rozkładu rezultatów. Rozważano także uruchamianie algorytmu wielokrotnie i wybieranie najlepszego otrzymanego wyniku spośród dużej liczby uruchomień. Zaobserwowano, że średnia jakość z wielu uruchomień była zbliżona do jakości najlepszego pojedynczego przebiegu. W eksperymentach algorytm uruchamiano jednokrotnie z ustalonym ziarnem generatora liczb losowych, co umożliwia replikację wyników.

---

**Algorithm 4** Losowy dobór licencji i składu grupy

---

**Require:** graf  $G = (V, E)$ , zbiór typów licencji  $L$

```

1:  $U \leftarrow V$ ,  $\pi \leftarrow$  losowa permutacja  $V$ 
2: for node w kolejności  $\pi$  do
3:   if node  $\notin U$  then continue
4:   end if
5:    $S \leftarrow N[\text{node}] \cap U$ 
6:   if istnieje licencja  $l_t$  z  $m_t \leq |S|$  then
7:     losuj  $l_t$  oraz rozmiar  $s \in [m_t, \min\{|S|, k_t\}]$ , następnie losuj członków grupy z  $S$       ▷
       wariant kierowany: można zastąpić wyborem  $\arg \min_{l_t, s} c_t/s$ 
8:   else
9:     przydziel najtańszą licencję indywidualną
10:  end if
11:  dodaj grupę, usuń jej członków z  $U$ 
12: end for
13: while  $U \neq \emptyset$  do przydziel najtańszą licencję indywidualną i usuń węzeł z  $U$ 
14: end while

```

---

**Złożoność i zastosowanie** Każdy wierzchołek i jego sąsiedzi są przeglądani co najwyżej raz, a przy każdej próbie losowania licencji przeglądane są wszystkie typy licencji, co daje koszt rzędu  $O(T(|E| + |V|))$ . W gęstych grafach upraszcza się to do  $O(T|V|^2)$ . Algorytm służy jako benchmark stochastyczny oraz kontrola jakości innych metod. Wariant kierowany  $\min c_t/s$  nie zmienia rzędu złożoności i może być użyty pomocniczo do analizy wrażliwości.

### 5.3 Metaheurystyki

Metaheurystyki to algorytmy przeszukujące przestrzeń rozwiązań w sposób systematyczny. W przeciwieństwie do heurystyk konstrukcyjnych, metaheurystyki startują od rozwiązania początkowego i iteracyjnie je ulepszają.

**Dobór parametrów** Parametry metaheurystyk zostały dobrane eksperymentalnie na podstawie testów na grafach różnych rozmiarów.

**Operacje modyfikacji rozwiązania** Metaheurystyki ulepszają rozwiązanie, stosując następujące operacje:

- zmiana typu licencji używanej przez właściciela grupy
- przeniesienie członka z jednej grupy do drugiej
- zamiana miejscami dwóch członków z różnych grup
- scalanie dwóch grup w jedną lub rozdzielanie na dwie dopuszczalne.

#### 5.3.1 Algorytm genetyczny

Algorytm genetyczny utrzymuje populację pełnych przydziałów licencyjnych i z pokolenia na pokolenie ulepsza je, korzystając z losowych mutacji i krzyżowania par rodziców [32, 33]. Zaczyna od kilku rozwiązań zachłannych i losowych, a następnie w każdej generacji wybiera najlepsze osobniki (elita), losuje rodziców metodą turniejową i tworzy potomstwo przez krzyżowanie lub mutację. Rozwiązania o niższej jakości są zastępowane lepszymi, a algorytm rejestruje najlepszy dotąd koszt.

#### Parametry

- **Wielkość populacji**  $P_{GA} = 30$  - liczba rozwiązań utrzymywanych w każdej generacji.
- **Liczba pokoleń**  $N_{GA} = 40$  - maksymalna liczba iteracji ewolucji.
- **Udział elity**  $\alpha_{GA} = 20\%$  - część najlepszych osobników kopiowana bez zmian do kolejnego pokolenia.
- **Prawdopodobieństwo krzyżowania**  $p_{c,GA} = 60\%$  - przy tej szansie dziecko powstaje przez połączenie dwóch rodziców; w przeciwnym razie wykonywana jest mutacja.

---

**Algorithm 5** Algorytm genetyczny

---

**Require:** graf  $G = (V, E)$ , zbiór typów licencji  $L$

```
1: utwórz populację początkową (zachłanny + losowe rozwiązania)
2: for każde pokolenie do
3:   oceń wszystkie rozwiązania (funkcja kosztu)
4:   zachowaj elitę (najlepsze rozwiązania)
5:   while populacja niepełna do
6:     if losowanie krzyżowania then
7:       wybierz dwóch rodziców (selekcja turniejowa)
8:       wykonaj krzyżowanie rodziców (połącz komponenty rozwiązań)
9:     else
10:      wybierz rozwiązanie i wykonaj mutację (operacje sąsiedztwa)
11:    end if
12:    dodaj potomka do nowej populacji
13:  end while
14:  zaktualizuj najlepsze znalezione rozwiązanie
15: end for
16: return najlepsze rozwiązanie
```

---

**Złożoność i zastosowanie** Inicjalizacja populacji korzysta z jednego osobnika otrzymanego za pomocą algorytmu zachłannego i  $P - 1$  losowych rozwiązań, co kosztuje około  $O(P \cdot (|V|T + |E| \log |V|))$ . Każda generacja sortuje populację ( $O(P \log P)$ ), a następnie tworzy nowe pokolenie. Mutacje wywołują ograniczoną liczbę operatorów sąsiedztwa (zmiana typu licencji, przeniesienie członka, zamiana miejscami, scalanie lub podział grup), a krzyżowanie w razie potrzeby uruchamia heurystykę zachłanną na podgrafie, co w przybliżeniu daje koszt rzędu  $O(|V|T + |E| \log |V|)$  na potomka. Łącznie otrzymujemy  $O(G \cdot P \cdot (|V|T + |E| \log |V|))$  w najgorszym przypadku. Algorytm działa wolniej od prostych heurystyk, ale potrafi znacząco poprawić ich wyniki i służy jako główna metoda poszukiwania wysokiej jakości rozwiązań, gdy możemy poświęcić na optymalizację więcej czasu.

### 5.3.2 Przeszukiwanie tabu

Algorytm tabu rozpoczyna działanie od rozwiązania uzyskanego heurystyką zachłanną, a następnie iteracyjnie przeszukuje lokalne sąsiedztwo. Sąsiadem nazywa się rozwiązanie otrzymane przez pojedynczą operację mutacji, na przykład zmianę typu licencji właściciela, przeniesienie członka między grupami, zamianę członków lub scalenie i podział grup. Lista tabu przechowuje identyfikatory ostatnich rozwiązań lub ruchów i zakazuje wyboru kandydatów, którzy prowadzą do niedawno odwiedzonych stanów. Kryterium aspiracji pozwala pominąć zakaz, gdy kandydat poprawia najlepszy dotąd koszt. Mechanizm ten ogranicza krótkie cykle i równoważy lokalne doskonalenie z eksploracją nowych przydziałów licencji [34].



### Parametry

- **Maksymalna liczba iteracji**  $I_{tabu} = 1000$ .
- **Długość listy tabu**  $L_{tabu} = 20$  elementów.
- **Liczba sąsiadów na iterację**  $k_{tabu} = 10$ .

---

### Algorithm 6 Przeszukiwanie tabu

---

**Require:** graf  $G = (V, E)$ , zbiór typów licencji  $L$

```
1: aktualne  $\leftarrow$  rozwiązanie początkowe wyznaczone algorytmem zachłannym
2: najlepsze  $\leftarrow$  aktualne
3: lista_tabu  $\leftarrow$  pusta kolejka o stałej długości  $L$ ; wstaw podpis aktualne
4: for każdą iterację do
5:   wygeneruj sąsiedztwo aktualne przez operacje mutacji
6:   wybierz najlepszego kandydata, którego podpis nie znajduje się na lista_tabu lub który
     poprawia najlepsze (aspiracja)
7:   if wybrano kandydata then
8:     aktualne  $\leftarrow$  kandydat; zaktualizuj lista_tabu
9:     if aktualne lepsze niż najlepsze then
10:      najlepsze  $\leftarrow$  aktualne
11:    end if
12:  else
13:    przerwij
14:  end if
15: end for
16: return najlepsze
```

---

**Złożoność i zastosowanie** Inicjalizacja początkowego stanu grafu obejmuje jedno uruchomienie heurystyki zachłannej  $O(|V|T + |E| \log |V|)$ . W każdej z  $I$  iteracji generowanych jest do  $k$  sąsiadów. Ocena kandydata obejmuje sprawdzenie pojemności, pokrycia i zgodności z sąsiedztwem w grafie, co kosztuje około  $O(|V|T + |E|)$ . Łączna złożoność obliczeniowa wynosi w przybliżeniu  $O(I \cdot k \cdot (|V|T + |E|))$ . Przeszukiwanie tabu dobrze sprawdza się jako metoda ulepszająca: poprawia rozwiązania wyjściowe przy umiarkowanym czasie obliczeń i ogranicza powroty do niedawno odwiedzonych stanów dzięki liście tabu.

#### 5.3.3 Algorytm mrówkowy

Algorytm mrówkowy buduje wiele rozwiązań równolegle. Każda mrówka konstruuje przydział licencji, kierując się siłą śladów feromonowych (informacja o dotychczas dobrych wyborach) oraz heurystyką preferującą wierzchołki o dużym stopniu i licencje o dobrym stosunku pojemności do ceny [35]. Po każdej iteracji, czyli po zakończeniu budowy rozwiązań przez wszystkie mrówki w danym kroku, feromony parują, a najlepsze dotąd rozwiązanie wzmacnia ścieżki feromonowe, czyli w przypadku naszej implementacji prawdopodobieństwo wyboru konkretnych właścicieli i

typów licencji. Dzięki temu kolejne mrówki chętniej eksplorują obiecujące fragmenty przestrzeni rozwiązań (tj. wierzchołków i typów licencji).

### Parametry

- **Waga feromonu**  $\alpha = 1.0$  – określa, jak mocno mrówki ufają dotychczasowym śladom.
- **Waga heurystyki**  $\beta = 2.0$  – wzmacnia lokalnie korzystne decyzje, czyli takie, które przy danym wierzchołku pozwalają dobrać licencję z wysoką pojemnością i niskim kosztem jednostkowym. Koszt jednostkowy to cena licencji  $l_t$  podzielona przez liczbę użytkowników w grupie lub cenę licencji indywidualnej.
- **Tempo parowania**  $\rho = 0.5$  – część feromonu usuwana po każdej iteracji.
- **Prawdopodobieństwo wyboru zachłannego**  $q_0 = 0.9$  – z tą szansą mrówka wybiera najlepszą dostępną opcję, w przeciwnym razie losuje wierzchołek i licencję proporcjonalnie do wag wyliczonych w trakcie budowy rozwiązania.
- **Liczba mrówek**  $A = 20$  – ile rozwiązań konstruujemy równolegle w jednej iteracji.
- **Maksymalna liczba iteracji**  $N_{ACO} = 100$  – ile razy aktualizujemy feromony.
- **Losowe ziarno** (opcjonalne) – pozwala odtworzyć przebieg eksperymentu.

---

### Algorithm 7 Algorytm mrówkowy

---

**Require:** graf  $G = (V, E)$ , zbiór typów licencji  $L$

```
1: zainicjalizuj feromony  $\tau$  (dla par wierzchołek-licencja)
2: zainicjalizuj heurystyki  $\eta$  (na podstawie stopni wierzchołków i kosztów licencji)
3:  $najlepsze \leftarrow$  rozwiązanie początkowe (zachłanne)
4: for każdą iterację do
5:   for każdą mrówkę do
6:      $niepokryte \leftarrow V$ 
7:     while  $niepokryte \neq \emptyset$  do
8:       wybierz właściciela na podstawie  $\tau$  i  $\eta$  (reguła wyboru lub ruletka)
9:       wybierz typ licencji na podstawie  $\tau$  i  $\eta$ 
10:      utwórz grupę, usuń członków z  $niepokryte$ 
11:    end while
12:    if mrówka znalazła lepsze rozwiązanie then
13:       $najlepsze \leftarrow$  rozwiązanie mrówki
14:    end if
15:  end for
16:  wyparuj część feromonów:  $\tau \leftarrow \tau \cdot (1 - evaporation)$ 
17:  wzmocnij feromony na ścieżce  $najlepsze$ :  $\tau \leftarrow \tau + 1/koszt$ 
18: end for
19: return  $najlepsze$ 
```

---

**Złożoność i zastosowanie** Inicjalizację feromonów i heurystyk charakteryzuje złożoność obliczeniowa  $O(|V|T)$ . Pojedyncza konstrukcja rozwiązania wymaga odwiedzenia przez mrówkę każdego wierzchołka co najwyżej raz. W każdym kroku mrówka wybiera wierzchołek, który stanie się właścicielem nowej grupy licencyjnej; w tym celu ocenia wszystkie niepokryte wierzchołki jako potencjalnych właścicieli oraz wszystkie typy licencji dostępne w zbiorze  $L$ . Po wskazaniu właściciela trzeba posortować jego sąsiadów w grafie  $G$  według wag feromonowo-heurystycznych, aby zdecydować, którzy użytkownicy dołączą do grupy. Te operacje prowadzą do złożoności obliczeniowej rzędu  $O(|V|^2T + |E| \log |V|)$  na jedną mrówkę. Algorytm wykonujący  $I$  iteracji z  $A$  mrówkami ma więc złożoność  $O(I \cdot A \cdot (|V|^2T + |E| \log |V|))$ . Metoda jest bardziej złożona obliczeniowo niż tabu i algorytm zachłanny, ale pozwala eksplorować wiele alternatywnych konfiguracji i stopniowo wzmacniać najlepsze z nich.

#### 5.3.4 Symulowane wyżarzanie

Symulowane wyżarzanie rozpoczyna od dowolnego dopuszczalnego przydziału; w implementacji korzystamy z rozwiązania wygenerowanego heurystyką zachłanną. W każdej iteracji losowana jest jedna z operacji modyfikacji opisanych na początku sekcji metaheurystyk. Jeżeli wylosowana operacja prowadzi do stanu naruszającego ograniczenia, losujemy kolejną do chwili znalezienia dopuszczalnego kandydata (maksymalnie kilkanaście prób na iterację). Nowy stan jest akceptowany zawsze, gdy obniża koszt całkowity przydziału licencji, a także niekiedy dla kandydata o wyższym koszcie, z prawdopodobieństwem zależnym od bieżącej temperatury  $T$  i różnicy kosztów [36]. Temperatura maleje geometrycznie z czynnikiem chłodzenia, a po przekroczeniu limitu stagnacji  $S$  jest dodatkowo dzielona przez 2. Dzięki temu metoda potrafi opuszczać lokalne minima funkcji kosztu w sąsiedztwie zdefiniowanym przez powyższe operacje i stopniowo stabilizuje się w pobliżu dobrego rozwiązania.

#### Parametry

- **Temperatura początkowa**  $\tau_0 = 100.0$  - stosunkowo wysoka wartość dobrana eksperymentalnie; przy takich temperaturach różnice kosztów rzędu kilku jednostek są często akceptowane, co pozwala na szeroką eksplorację przestrzeni rozwiązań na początku działania algorytmu.
- **Współczynnik chłodzenia**  $\gamma = 0.995$  - temperatura maleje geometrycznie z czynnikiem  $\gamma$ .
- **Temperatura minimalna**  $\tau_{\min} = 0.001$  - po jej osiągnięciu algorytm kończy działanie.
- **Maksymalna liczba iteracji**  $N_{SA} = 20\,000$  - górne ograniczenie liczby kroków.
- **Limit stagnacji**  $S = 2\,000$  - liczba kolejnych iteracji bez poprawy najlepszej wartości; po jego przekroczeniu temperatura jest dodatkowo dzielona przez 2.

---

**Algorithm 8** Symulowane wyżarzanie

---

**Require:** graf  $G = (V, E)$ , zbiór typów licencji  $L$

```
1:  $aktualne \leftarrow$  rozwiązanie początkowe (np. zachłanne)
2:  $najlepsze \leftarrow aktualne$ 
3:  $temperatura \leftarrow T_0$  (początkowa temperatura)
4: for każdą iterację do
5:   if  $temperatura < T_{min}$  then przerwij
6:   end if
7:   wybierz losową operację sąsiedztwa
8:    $kandydat \leftarrow$  wynik operacji sąsiedztwa
9:    $\Delta \leftarrow koszt(kandydat) - koszt(aktualne)$ 
10:  if  $\Delta \leq 0$  LUB  $random() < \exp(-\Delta/temperatura)$  then
11:     $aktualne \leftarrow kandydat$ 
12:    if  $koszt(kandydat) < koszt(najlepsze)$  then
13:       $najlepsze \leftarrow kandydat$ 
14:    end if
15:  end if
16:   $temperatura \leftarrow temperatura \cdot \gamma$ 
17: end for
18: return  $najlepsze$ 
```

---

**Złożoność i zastosowanie** Inicjalizacja korzysta z rozwiązania uzyskanego heurystyką zachłaną, co kosztuje  $O(|V|T + |E| \log |V|)$ , gdzie  $T$  oznacza liczbę typów licencji; samo symulowane wyżarzanie może jednak wystartować z dowolnego dopuszczalnego stanu, a heurystyka zapewnia po prostu solidny punkt startowy. W każdej iteracji wykonujemy do kilkunastu prób wygenerowania dopuszczalnego sąsiada z katalogu operacji, a zaakceptowany kandydat przechodzi pełną walidację pokrycia i ograniczeń, co ma złożoność około  $O(|V|T + |E|)$ . W rezultacie całkowity koszt jednego przebiegu wynosi  $O(I \cdot (|V|T + |E|))$  z dodatkowym czynnikiem wynikającym z epizodycznego obniżania temperatury po przekroczeniu limitu stagnacji  $S$ . Symulowane wyżarzanie ma umiarkowane wymagania obliczeniowe, a możliwość wychodzenia z lokalnych minimów funkcji kosztu czyni je skuteczną metodą poprawy jakości rozwiązań przy rozsądnym czasie działania.

## 5.4 Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono kompletny zestaw algorytmów zastosowanych do rozwiązania problemu optymalizacji kosztów licencji grupowych. Metody podzielono na trzy kategorie: algorytmy dokładne gwarantujące optimum, szybkie heurystyki konstrukcyjne oraz metaheurystyki łączące jakość z efektywnością czasową.

Algorytmy dokładne – naiwne przeszukiwanie oraz programowanie całkowitoliczbowe – zapewniają najwyższą jakość rozwiązań, ale ich zastosowanie ogranicza się do mniejszych

instancji ze względu na złożoność wykładniczą. Algorytm ILP stanowi szczególnie wartościowy punkt odniesienia, umożliwiając walidację jakości metod przybliżonych na grafach do około 200 węzłów.

Heurystyki konstrukcyjne charakteryzują się bardzo krótkim czasem działania (rzędu milisekund) i mogą służyć jako metody bazowe lub punkty startowe dla bardziej zaawansowanych algorytmów. Algorytm zachłanny dostarcza rozsądnie dobrej jakości rozwiązań przy minimalnym koszcie obliczeniowym, natomiast heurystyka oparta na zbiorze dominującym wykorzystuje teorię grafów do identyfikacji kandydatów na właścicieli licencji.

Metaheurystyki stanowią kompromis między jakością a czasem wykonania. Algorytm genetyczny skutecznie eksploruje przestrzeń rozwiązań poprzez mechanizmy krzyżowania i mutacji, przeszukiwanie tabu wykorzystuje pamięć krótkoterminową do unikania cykli, algorytm mrówkowy buduje rozwiązania probabilistycznie na podstawie feromonów, a symulowane wyżarzanie umożliwia wychodzenie z lokalnych minimów dzięki kontrolowanej losowości.

Różnorodność przedstawionych metod pozwala na dobór odpowiedniego algorytmu w zależności od rozmiaru instancji, dostępnego budżetu czasowego oraz wymagań jakościowych. W eksperymentach empirycznych metody te zostaną porównane pod kątem efektywności na rzeczywistych i syntetycznych sieciach społecznych.

## 6. EKSPERYMENTY DLA SCHEMATU LICENCYJNEGO DUOLINGO SUPER

Rozdział prezentuje wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzonych dla schematu licencyjnego Duolingo Super. Analizę prowadzono na dwóch zbiorach danych: syntetycznych grafach losowych oraz rzeczywistych grafach ego z serwisu Facebook. W pierwszej części opisano środowisko badawcze i metodologię testów, następnie przedstawiono szczegółowe wyniki porównania algorytmów na obu typach grafów wraz z analizą statystyczną wydajności poszczególnych metod.

### 6.1 Środowisko i metodologia

Eksperymenty wykonano na komputerze z procesorem Intel Core i5-14600KF (12 rdzeni udostępnionych w WSL2, 3.49 GHz) oraz 16 GB pamięci RAM. System operacyjny: Ubuntu 24.04 LTS uruchomiony w środowisku WSL2. Algorytmy zaimplementowano w Pythonie 3.13 z wykorzystaniem bibliotek NumPy, NetworkX oraz PuLP jako interfejsu do algorytmu ILP. Każdy pomiar obejmował wyłącznie czas obliczeń; nie uwzględniano czasu generowania instancji ani operacji I/O.

Środowisko badawcze zrealizowano jako zestaw skryptów w języku Python. Oddzielne moduły obsługują benchmark statyczny, symulacje dynamiczne oraz scenariusze rozszerzeń; polecenia CLI umożliwiają uruchamianie pojedynczych algorytmów w trybie diagnostycznym. Przyjęty podział umożliwia równoległe prowadzenie serii eksperymentów oraz sprawną weryfikację jakości metod.

Analizą objęto dwa zbiory danych: (i) syntetyczne grafy losowe, bezskalowe i małoświatowe o 50-450 wierzchołkach, (ii) grafy ego z serwisu Facebook o 53-1035 wierzchołkach. Dla każdej instancji uruchamiano wszystkie algorytmy z limitem 60 s; przekroczenie limitu skutkowało wyłączeniem instancji z dalszych obliczeń. W grafach syntetycznych łącznie odnotowano 10 przekroczeń limitu czasu (algorytm mrówkowy oraz ILP). W grafach rzeczywistych: 8 (mrówkowy), 18 (ILP) i 6 (przeszukiwanie tabu). Pozostałe uruchomienia zakończyły się powodzeniem.

Dla każdego rozmiaru grafów syntetycznych wygenerowano trzy niezależne instancje i wykonano po dwa uruchomienia każdego algorytmu. Analiza grafów ego Facebooka obejmowała po jednym grafie na rozmiar oraz dwa powtórzenia dla każdej pary (graf, algorytm), co umożliwiło oszacowanie zmienności wyników przy zachowaniu budżetu obliczeniowego. W każdej próbie zapisano całkowity koszt licencji, czas wykonania oraz średni koszt licencji na węzeł. Wyniki agregowano jako średnie arytmetyczne. Istotność różnic oceniono testem Friedmana (statystyka  $\chi_F^2$ , poziom istotności  $p$ ) oraz porównaniami post-hoc metodą Nemenyi'ego. Na benchmarku syntetycznym:  $\chi_F^2 = 577.93$  dla czasu oraz  $\chi_F^2 = 518.01$  dla kosztu licencji na węzeł (w obu

przypadkach  $p < 10^{-100}$ ), co uzasadnia porównania post-hoc.

Aby ułatwić porównania, ceny licencji znormalizowano. Cenę licencji indywidualnej ustalono na 1, a ceny licencji grupowych przeskalowano zgodnie z pierwotnymi relacjami cenowymi. Dzięki temu możliwe było bardziej przejrzyste porównanie kosztów między różnymi strategiami licencjonowania, niezależnie od ich bezwzględnych wartości.

## 6.2 Duolingo Super na grafach syntetycznych

W tej sekcji przedstawiono wyniki eksperymentów na syntetycznych grafach losowych, bezskalowych i małego świata. Analiza obejmuje porównanie jakości rozwiązań oraz efektywności czasowej wszystkich zaimplementowanych algorytmów dla schematu licencyjnego Duolingo Super.

### 6.2.1 Statystyki zbiorcze

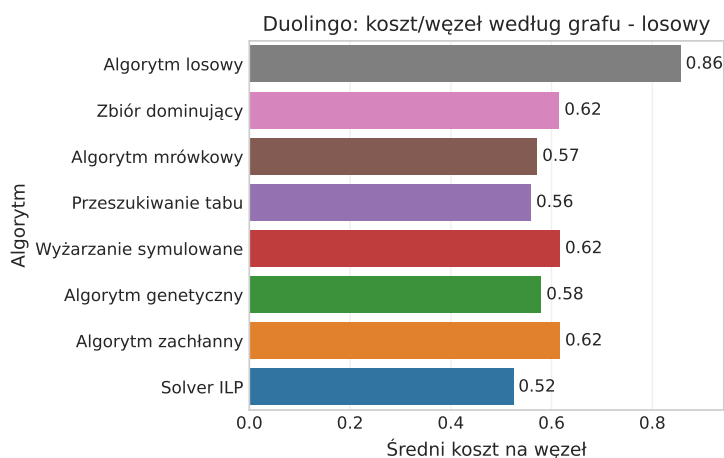
Tabela 6.1 zestawia średnie wartości kosztu licencji na wierzchołek oraz czasu dla schematu licencyjnego Duolingo Super. Aby zapewnić porównywalność wyników, analizy statystyczne i wizualizacje oparto na podzbiorze instancji, dla których wszystkie algorytmy zakończyły działanie przed upływem limitu czasu; w praktyce oznacza to przycięcie rozmiarów grafów do zakresu wspólnego dla algorytmu ILP i algorytmu mrówkowego, które najczęściej przekraczały limit. Algorytm ILP pozostaje najlepszym punktem odniesienia jakościowego (średni koszt licencji na węzeł 0.445), lecz ma zastosowanie jedynie dla mniejszych instancji. Liczba przekroczeń limitu czasu jest taka sama jak w algorytmie mrówkowym. Wśród metaheurystyk najniższy koszt licencji na węzeł osiąga właśnie algorytm mrówkowy (0.506), natomiast przeszukiwanie tabu zapewnia najlepszy kompromis kosztu licencji na węzeł i czasu w grupie metod przybliżonych. Algorytm zachłanny i algorytm losowy charakteryzują się czasem działania rzędu milisekund, ale tylko pierwszy z nich utrzymuje akceptowalny koszt licencji na węzeł (0.548), podczas gdy algorytm losowy generuje rozwiązania o istotnie wyższym koszcie na węzeł.

Tabela 6.1: Średnie wartości kosztu licencji na węzeł i czasu dla schematu licencyjnego Duolingo Super na grafach syntetycznych.

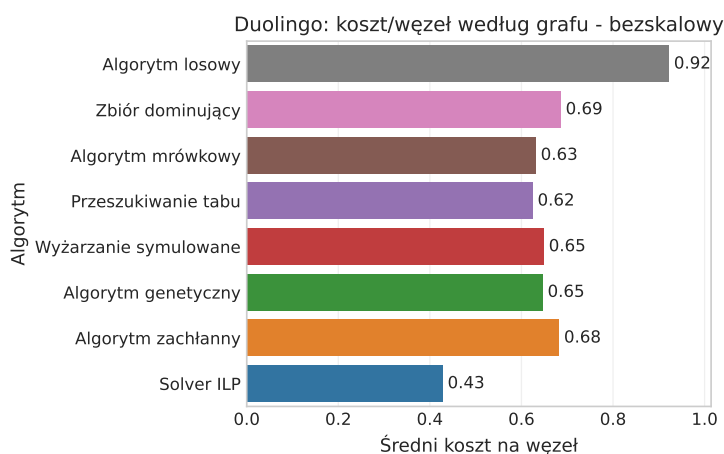
Algorytm	Średni koszt/węzeł	Średni koszt	Średni czas [s]
Algorytm ILP	0.445	73.83	2.492
Algorytm mrówkowy	0.506	83.58	5.124
Przeszukiwanie tabu	0.500	117.80	3.298
Algorytm genetyczny	0.515	118.36	1.222
Wyżarzanie symulowane	0.531	120.90	0.975
Zbiór dominujący	0.542	119.97	0.017
Algorytm zachłanny	0.548	121.94	0.001
Algorytm losowy	0.799	179.90	0.001

### 6.2.2 Porównanie algorytmów na grafach syntetycznych

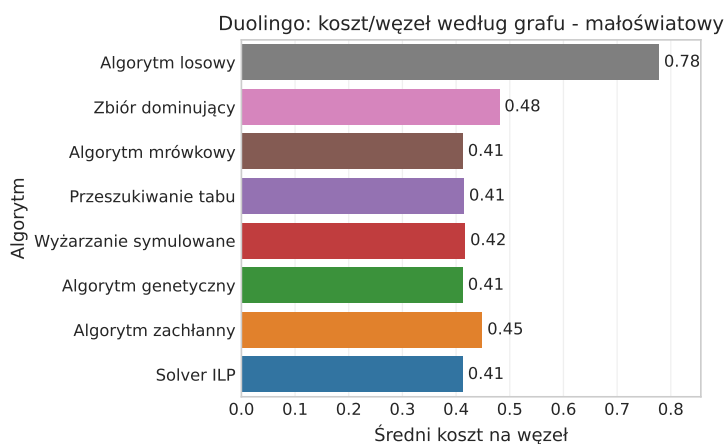
Rysunki 6.1–6.3 pokazują wyniki porównywalne z ILP dla grafów losowych i małoświatowych, natomiast dla grafów bezskalowych obserwuje się wyższe koszty.



Rysunek 6.1: Koszt licencji na węzeł w zależności od struktury grafu losowego.



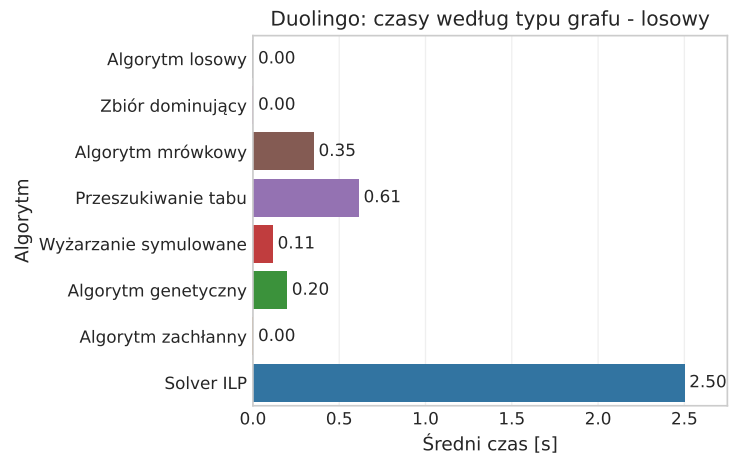
Rysunek 6.2: Koszt licencji na węzeł w zależności od struktury grafu bezskalowego.



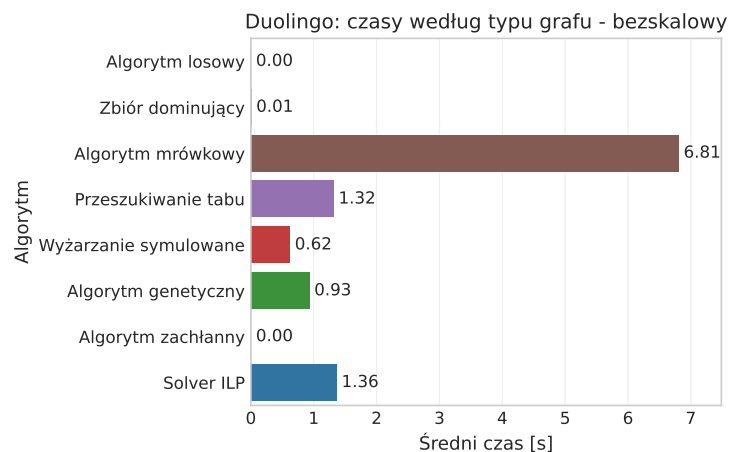
Rysunek 6.3: Koszt licencji na węzeł w zależności od struktury grafu małoświatowego.



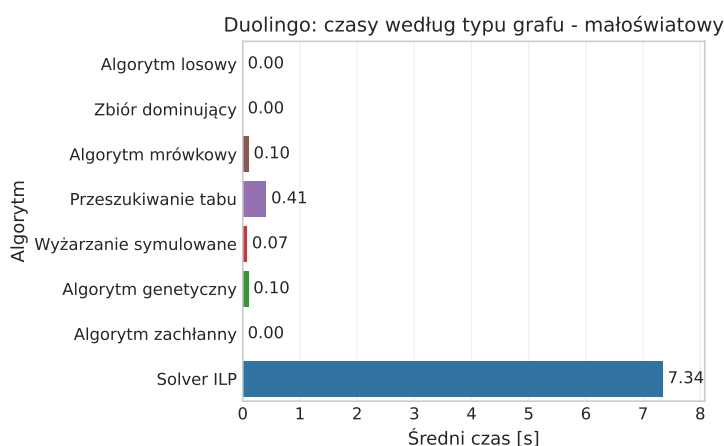
Podobne obserwacje dotyczą czasów wykonania, jak ilustrują rysunki 6.4–6.6. Czasy działania są zbliżone między typami grafów; wyjątkiem są: ILP (średnio krótszy czas na grafach bezskalowych) oraz przeszukiwanie tabu (dłuższy czas na grafach bezskalowych). Pozostałe algorytmy wykazują porównywalne czasy niezależnie od struktury grafu. Tabela 6.2 podsumowuje średnie czasów i kosztów licencji na węzeł dla różnych typów grafów.



Rysunek 6.4: Czas wykonania w zależności od struktury grafu losowego.



Rysunek 6.5: Czas wykonania w zależności od struktury grafu bezskalowego.



Rysunek 6.6: Czas wykonania w zależności od struktury grafu małoświatowego.

Tabela 6.2: Średnie koszty i czasy na węzeł dla różnych typów grafów (schematy licencyjne Duolingo Super i dominowania rzymskiego).

Licencja	Typ grafu	Śr. koszt/węzeł	Śr. czas [s]
Duolingo Super	Bezskalowy	0.661	1.655
Duolingo Super	Losowy	0.502	1.598
Duolingo Super	Małoświatowy	0.495	1.346
dominowanie rzymskie	Bezskalowy	0.490	0.913
dominowanie rzymskie	Losowy	0.344	0.815
dominowanie rzymskie	Małoświatowy	0.409	1.544

### 6.3 Duolingo Super na grafach rzeczywistych

W analizie grafów ego z serwisu Facebook pominięto obserwacje, w których algorytm ILP nie zakończył pracy przed limitem czasu (18 przypadków). Dodatkowo odnotowano 8 przekroczeń limitu czasu algorytmu mrówkowego i 6 przypadków w przeszukiwaniu tabu; pozostałe uruchomienia zakończyły się sukcesem.

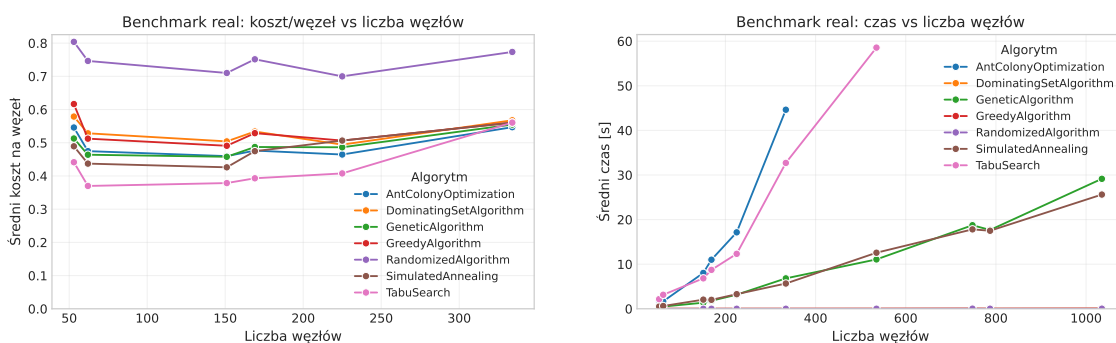
Tabela 6.3: Statystyki kosztu i czasu dla schematu licencyjnego Duolingo Super na grafach rzeczywistych.

Algorytm	Średni koszt	Śr. koszt/węzeł	Śr. czas [s]
Algorytm mrówkowy	83.58	0.506	5.124
Zbiór dominujący	119.97	0.542	0.017
Algorytm genetyczny	118.36	0.515	1.222
Algorytm zachłanny	121.94	0.548	0.001
Algorytm losowy	179.90	0.799	0.001
Wyżarzanie symulowane	120.90	0.531	0.975
Przeszukiwanie tabu	117.80	0.500	3.298

Tabela 6.3 wskazuje, że zarówno przeszukiwanie tabu, jak i algorytm mrówkowy zachowują przewagę kosztową nad heurystykami losowymi i zachłannymi, kosztem dłuższego czasu działania.

### 6.3.1 Skalowanie i jakość

Rysunek 6.7 ilustruje, że koszt licencji na węzeł pozostaje względnie stabilny niezależnie od liczby wierzchołków, z niewielkimi wahaniami spowodowanymi różnicami między poszczególnymi instancjami grafów. Przeszukiwanie tabu utrzymuje najniższe wartości, a algorytm mrówkowy osiąga wartości zbliżone. Czasy działania rosną łagodnie wraz z rozmiarem grafu i dla największych instancji nie przekraczają kilkudziesięciu sekund; algorytm zachłanny działa rzędu milisekund i jest efektywną procedurą inicjalizacji metaheurystyk. Dodatkowo tabela 6.4 agreguje średnie wartości (przeszukiwanie tabu) dla kolejnych rozmiarów sieci ego i pokazuje, że koszt licencji na węzeł oscyluje w przedziale 0.37–0.56 przy czasie rosnącym od około 2 s do około 33 s dla największych grafów.



Rysunek 6.7: Koszt licencji na węzeł i czas wykonania algorytmów dla schematu licencyjnego Duolingo Super w zależności od liczby wierzchołków (grafy ego Facebook).

Tabela 6.4: Średni koszt licencji na węzeł i czas (przeszukiwanie tabu) względem liczby wierzchołków w sieciach ego Facebook.

Liczba wierzchołków	Śr. koszt/węzeł	Śr. czas [s]
53	0.441	2.16
62	0.370	3.14
151	0.379	6.83
169	0.393	8.73
225	0.408	12.32
334	0.561	32.71

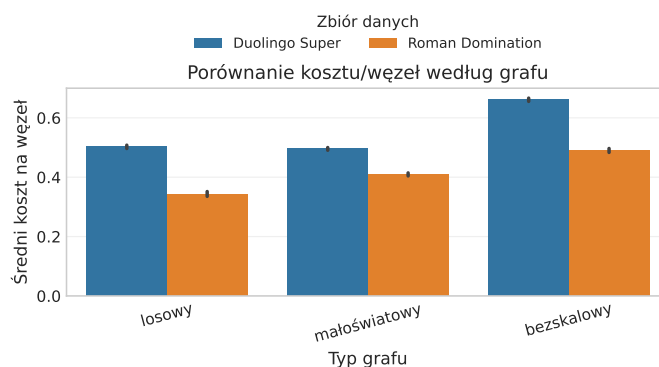
## 6.4 Porównanie z dominowaniem rzymskim

Porównania schematu licencyjnego Duolingo Super z konfiguracją imitującą dominowanie rzymskie ograniczono do wspólnych instancji grafów i algorytmów. Rysunki 6.8–6.10 zestawiają różnice w kosztach, czasach i strukturze licencji, a tabela 6.5 gromadzi średnie według typu grafu syntetycznego.

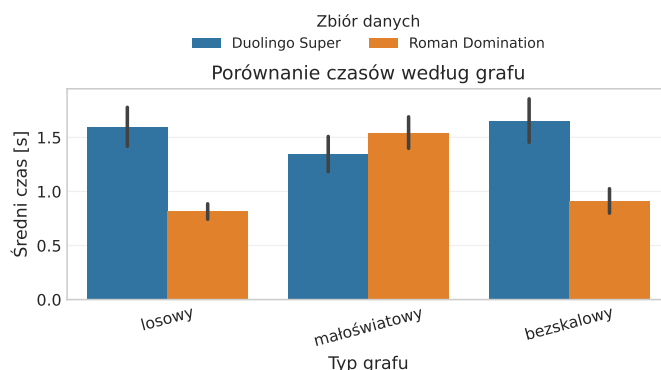
Tabela 6.5: Średnie czasu i kosztu licencji na węzeł według typu grafu (wspólne instancje).

Typ grafu	Duolingo Super		dominowanie rzymskie	
	Czas [s]	Koszt/węzeł	Czas [s]	Koszt/węzeł
Losowy	1.598	0.502	0.815	0.344
Bezskalowy	1.655	0.661	0.913	0.490
Małoświatowy	1.346	0.495	1.544	0.409

Schemat dominowania rzymskiego osiąga niższy koszt licencji na węzeł we wszystkich typach grafów syntetycznych. Największą przewagę odnotowano w grafach losowych ( $\approx 0.158$ ;  $\approx 32\%$ ), następnie w bezskalowych ( $\approx 0.171$ ), a najmniejszą w małoświatowych ( $\approx 0.086$ ). Czasy działania pozostają porównywalne pomiędzy schematami: w grafach małoświatowych algorytmy dla Duolingo Super działają nieco szybciej, natomiast w losowych i bezskalowych przewagę uzyskuje konfiguracja dominowania rzymskiego. Rysunek 6.8 ilustruje te obserwacje dla pełnego rozkładu kosztów, a rysunek 6.9 prezentuje analogiczne dane dotyczące czasów wykonania. Warto zauważyć, że wyższe koszty licencji na węzeł w przypadku Duolingo Super wynikają z ograniczeń w opłacalności licencji grupowych. Licencja grupowa jest  $\approx 2.1$ -krotnie droższa od indywidualnej, co uzasadnia jej tworzenie dopiero dla grup co najmniej trzech wierzchołków (posiadacz oraz dwaj sąsiedzi). W konsekwencji liczba licencji indywidualnych w schemacie Duolingo Super jest większa, co przekłada się na wyższy średni koszt licencji na węzeł w porównaniu z konfiguracją dominowania rzymskiego.



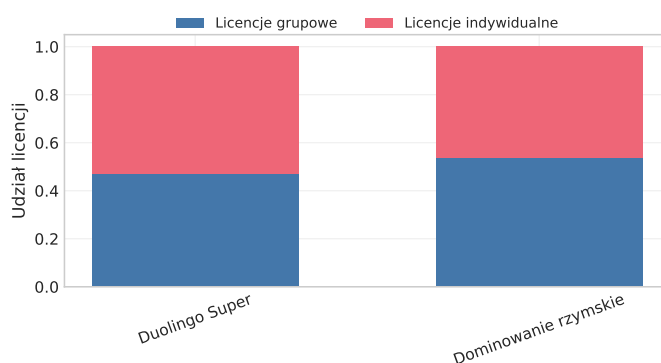
Rysunek 6.8: Koszt licencji na węzeł według typu grafu: porównanie konfiguracji licencyjnych Duolingo Super i dominowania rzymskiego.



Rysunek 6.9: Czas wykonania według typu grafu: porównanie konfiguracji licencyjnych Duolingo Super i dominowania rzymskiego.

Rysunek 6.10 pokazuje, że w rozwiązaniach optymalnych dla konfiguracji licencyjnej dominowania rzymskiego obserwuje się wyższy stosunek licencji grupowych do indywidualnych w porównaniu do rozwiązań dla konfiguracji licencyjnej Duolingo Super. W konfiguracji dominowania rzymskiego stosunek licencji grupowych do indywidualnych wynosi około 1.15:1, natomiast w schemacie Duolingo Super stosunek ten jest odwrócony i wynosi około 0.88:1 (więcej licencji indywidualnych niż grupowych).

Różnica w strukturze wykorzystania licencji wynika z faktu, że konfiguracja licencyjna dominowania rzymskiego nie posiada ograniczenia maksymalnej pojemności grupy licencyjnej. W schemacie Duolingo Super, gdy grupa osiąga maksymalną pojemność, dla dodatkowych wierzchołków konieczny jest zakup licencji indywidualnych. W pełnym zbiorze danych (trzy typy grafów syntetycznych) zarejestrowano 137 690 licencji w schemacie Duolingo Super, z czego 73 176 (53.15%) to licencje indywidualne. W konfiguracji dominowania rzymskiego, dzięki brakowi ograniczeń pojemności grup, liczba licencji indywidualnych jest proporcjonalnie niższa.



Rysunek 6.10: Struktura wykorzystania licencji: porównanie konfiguracji licencyjnych Duolingo Super i dominowania rzymskiego.

## 6.5 Wnioski

Przeprowadzone eksperymenty wskazują, że schemat licencjonowania Duolingo Super zapewnia stabilne i powtarzalne wyniki. Spośród badanych metod najlepsze wyniki uzyskały

algorytm mrówkowy oraz przeszukiwanie tabu. Algorytm mrówkowy osiąga najniższy koszt licencji na węzeł w grupie metaheurystyk, lecz wymaga dłuższego czasu działania. Przeszukiwanie tabu umożliwia uzyskanie porównywalnej jakości i jednocześnie zachowuje lepszy kompromis między kosztem a czasem obliczeń.

Algorytm ILP stanowi punkt odniesienia jakościowego, lecz jego zastosowanie ogranicza się do mniejszych instancji ze względu na częste przekroczenia limitu czasu. Proste heurystyki, takie jak algorytm zachłanny czy losowy, charakteryzują się bardzo krótkim czasem działania, ale rozwiązania mają istotnie wyższy koszt licencji na węzeł.

Wyniki potwierdzają również znaczenie struktury grafu. W przypadku grafów losowych i małoświatowych możliwe jest osiągnięcie rezultatów zbliżonych do algorytmu ILP, natomiast grafy bezskalowe okazały się trudniejsze i generowały wyższe koszty. Rysunek 6.7 pokazuje, że przeszukiwanie tabu utrzymuje niskie wartości kosztu licencji na węzeł nawet przy rosnącej liczbie wierzchołków, a czasy działania rosną umiarkowanie.

Porównanie ze schematem licencyjnym dominowania rzymskiego wskazuje, że schemat ten osiąga niższy koszt licencji na węzeł we wszystkich typach grafów. Wynika to z większego udziału licencji grupowych i niższego kosztu jednostkowego. W grafach małoświatowych schemat Duolingo Super charakteryzuje się krótszym czasem wykonania.

## 7. SYMULACJA DYNAMICZNA

W tym rozdziale przedstawiono wyniki symulacji dynamicznej, która analizuje zachowanie algorytmów optymalizacyjnych w środowisku zmieniającym się w czasie. Badania obejmują sześć różnych profili mutacji grafu oraz ocenę adaptacji algorytmów do ewoluujących struktur sieciowych. Rozdział zawiera analizę zarówno mutacji syntetycznych o różnej intensywności, jak i realistycznych mechanizmów zmian topologii sieci społecznych.

### 7.1 Założenia i konfiguracja

Eksperymenty dynamiczne wykonano w tym samym środowisku obliczeniowym co testy statyczne. Każda symulacja obejmuje 30 kroków czasowych; w każdym kroku: (1) stosuje się mutację struktury grafu zgodnie z wybranym profilem oraz (2) przeprowadza się ponowną optymalizację dystrybucji licencji z limitem czasu 45 s. Analizowano dwa schematy licencyjne: Duolingo Super oraz wariant odpowiadający dominowaniu rzymskiemu. Do testów wykorzystano grafy losowe, bezskalowe oraz małego świata.

Testy przeprowadzono dla sześciu profili mutacji, przy czym każdy profil definiuje stały zestaw parametrów obowiązujący w całej symulacji. Profile obejmują trzy syntetyczne o prostej logice modyfikacji (low, med, high) oraz trzy bardziej złożone, uwzględniające mechanizmy takie jak preferencyjne przyłączanie, domykanie triad czy losowe przekształcanie krawędzi (pref\_triadic, pref\_pref, rand\_rewire).

Warianty *low*, *med* oraz *high* różnią się prawdopodobieństwami mutacji w każdym kroku symulacji (tabela 7.1). W każdym kroku niezależnie decyduje się o wykonaniu danej operacji, po czym wyznacza się liczbę elementów do modyfikacji (1-3 węzłów, 1-5 krawędzi). Usunięcie węzła skutkuje usunięciem wszystkich krawędzi incydentnych z tym węzłem. Prawdopodobieństwa dobrano w celu uzyskania trzech odrębnych poziomów intensywności zmian: niskiego (modyfikacje w 1-6% kroków), średniego (4-18%) oraz wysokiego (8-30%).

Tabela 7.1: Parametry intensywności mutacji w symulacji dynamicznej.

Poziom	Dodawanie węzłów	Usuwanie węzłów	Dodawanie krawędzi	Usuwanie krawędzi
low	0.02	0.01	0.06	0.04
med	0.06	0.04	0.18	0.12
high	0.12	0.08	0.30	0.20

Dodatkowo zbadano trzy bardziej realistyczne profile ewolucji sieci. Wszystkie operują na tych samych limitach liczby dodawanych/usuwanych elementów co warianty syntetyczne, różnią się jednak mechanizmem wyboru sąsiedztwa.

Wariant *pref\_triadic* łączy dwa mechanizmy typowe dla sieci społecznych: preferencyjne

przyłączanie i domykanie triad. Nowe węzły dołączają do sieci, preferencyjnie łącząc się z istniejącymi węzłami o wysokim stopniu. Nowe krawędzie powstają poprzez domykanie trójkątów, tj. łączenie dwóch niepołączonych węzłów mających wspólnego sąsiada. Mechanizm ten wzmacnia lokalną strukturę klastrową sieci, co odzwierciedla tendencję do tworzenia zamkniętych grup w rzeczywistych sieciach [37, 38].

Wariant *pref\_pref* stosuje mechanizm preferencyjnego przyłączania zarówno przy dodawaniu nowych węzłów, jak i tworzeniu krawędzi między już istniejącymi. Oznacza to, że zarówno nowe węzły, jak i nowe krawędzie preferencyjnie łączą wierzchołki o wysokim stopniu. Takie podejście sprzyja tworzeniu centralnych węzłów o wysokim stopniu w sieci, co jest kluczową cechą topologii bezskalowych [37].

Wreszcie wariant *rand\_rewire* wprowadza do sieci element losowości, inspirowany modelem Watts'a i Strogatza. Nowe węzły dołączane są w sposób losowy, bez preferencji dla popularniejszych wierzchołków. Zamiast dodawać krawędzie, model modyfikuje strukturę poprzez przełączanie: losową krawędź usuwa się, po czym jeden z jej końców łączy się z innym losowo wybranym węzłem. Proces ten prowadzi do powstawania połączeń długozasięgowych i zmniejsza regularność struktury grafu [39].

## 7.2 Algorytm zachłanny

W tym wariantcie algorytm zachłanny w każdym kroku symulacji buduje rozwiązanie całkowicie od zera, ignorując poprzednie wyniki optymalizacji. Stanowi to dolne ograniczenie narzutu czasowego dla metod konstruktywnych oraz punkt odniesienia jakościowy, względem którego porównywane są bardziej zaawansowane metaheurystyki wykorzystujące rozwiązania z poprzednich kroków jako punkt startowy dla dalszej optymalizacji.

### 7.2.1 Zestawienie dla wszystkich mutacji

Tabela 7.2 zestawia średni koszt na węzeł i średni czas wykonania algorytmu na krok symulacji dla sześciu badanych profili mutacji: trzech syntetycznych oraz trzech realistycznych. Wszystkie czasy mieszczą się w przedziale od 0.5 ms do 1.8 ms na krok, a średni koszt na węzeł oscyluje wokół 0.46 do 0.48.

Tabela 7.2: Algorytm zachłanny: średni koszt na węzeł oraz średni czas na krok dla wszystkich wariantów mutacji.

Metoda mutacji	Koszt/węzeł (mean)	Średni czas [s]
high	0.48009	0.00159
low	0.47983	0.00165
med	0.47491	0.00181
pref_pref	0.46371	0.00083
pref_triadic	0.46787	0.00053
rand_rewire	0.47556	0.00083



Algorytm zachłanny charakteryzuje się krótkim czasem wykonania, co uzasadnia jego użycie jako czasowego punktu odniesienia w środowisku dynamicznym. Warianty realistyczne sprzyjają nieco niższemu kosztowi: `pref_pref` osiąga najniższy średni koszt (0.464), a `pref_triadic` jest jednocześnie najszybszy (0.000 53 s). Wariant `rand_rewire` jest trudniejszy (0.476), ale pozostaje bardzo szybki czasowo.

Różnice kosztu dla mutacji syntetycznych są niewielkie (0.475–0.480), natomiast czasy są wyższe niż w profilach realistycznych, szczególnie dla `med/high`. Wskazuje to, że lokalne, realistyczne przekształcenia są mniej kosztowne obliczeniowo do przetwarzania. Czasy dla `pref_pref` wynoszą średnio 0.000 83 s, a dla `pref_triadic` 0.000 53 s, co potwierdza ich przewagę czasową nad mutacjami syntetycznymi (0.001 59 s dla `high`).

### 7.3 Analiza mutacji syntetycznych

Ta sekcja prezentuje szczegółową analizę zachowania algorytmów przy trzech poziomach intensywności mutacji syntetycznych: `low`, `med` oraz `high`. Badania skupiają się na ocenie adaptacyjności metaheurystyk do zmian o różnej skali oraz analizie kompromisu między jakością rozwiązania a czasem wykonania.

#### 7.3.1 Metaheurystyki

Tabela 7.3 przedstawia zbiorcze wyniki dla różnych metod mutacji. Średni koszt na węzeł jest bardzo zbliżony dla wszystkich poziomów intensywności, z jedynie nieznacznym wzrostem dla wariantu `high`. Sugeruje to, że algorytmy są w stanie skutecznie adaptować się do zmian w topologii sieci.

Średni czas wykonania rośnie wraz z intensywnością mutacji. Wariant `low` jest najszybszy, podczas gdy `high` wymaga najwięcej czasu na ponowne zbilansowanie. Jest to naturalna konsekwencja faktu, że większa liczba modyfikacji grafu (dodawanie/usuwanie węzłów i krawędzi) stanowi większe wyzwanie obliczeniowe dla algorytmów optymalizacyjnych. Różnice czasów pozostają umiarkowane, co wskazuje na korzystną skalowalność zastosowanych metod.

Tabela 7.3: Wyniki dla różnych metod mutacji.

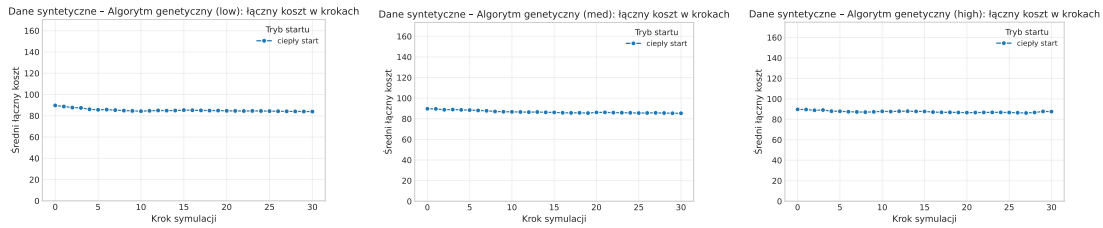
Metoda mutacji	Średni koszt	Średni czas [s]
high	0.4893	3.169
med	0.4850	3.075
low	0.4852	2.878

#### 7.3.2 Profil kosztu i czasu w czasie

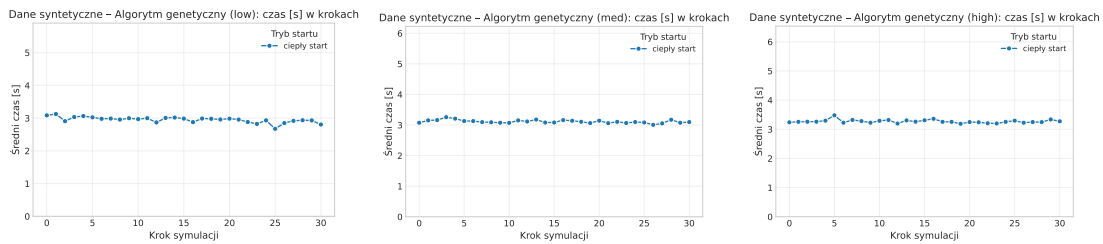
Jako przykład ewolucji kosztu i czasu w krokach symulacji wybrano algorytm genetyczny. Rysunki 7.1 i 7.2 przedstawiają odpowiednio przebieg kosztu na węzeł oraz czasu wykonania w zależności od kroku symulacji dla różnych poziomów intensywności mutacji.

Dla wariantu `high` można zaobserwować niewielkie, lecz zauważalne wahania średniego

kosztu na węzeł, które nie są tak widoczne w przypadku wariantów `low` i `med`. W zakresie czasów wykonania dla wszystkich trzech wariantów występują porównywalne wahania w trakcie symulacji.



Rysunek 7.1: Algorytm genetyczny – koszt na węzeł w kolejnych krokach symulacji (warianty low/med/high).



Rysunek 7.2: Algorytm genetyczny – czas wykonania w kolejnych krokach symulacji (warianty low/med/high).

## 7.4 Analiza mutacji realistycznych

Tabela 7.4 przedstawia zbiorcze wyniki dla scenariuszy realistycznych. Wariant `pref_triadic` wyróżnia się najkrótszym średnim czasem wykonania (poniżej 1 sekundy), przy zachowaniu kosztu na poziomie zbliżonym do wariantu `pref_pref`. Z kolei scenariusz `rand_rewire` okazał się najbardziej wymagający dla algorytmów – charakteryzuje się jednocześnie najwyższym średnim kosztem i najdłuższym czasem przetwarzania. Przyczyną jest losowe przełączanie krawędzi, które zaburza lokalną klastrowość, zwiększa entropię topologii i utrudnia użycie poprzedniego rozwiązania jako punktu startowego. W efekcie optymalizacja wymaga więcej iteracji, a uzyskana jakość jest gorsza.

Tabela 7.4: Wyniki dla różnych metod mutacji w scenariuszach realistycznych.

Metoda mutacji	Średni koszt całkowity	Koszt/węzeł (mean)	Średni czas [s]
<code>pref_pref</code>	113.34	0.4764	1.6774
<code>pref_triadic</code>	70.08	0.4764	0.8619
<code>rand_rewire</code>	116.83	0.4917	1.8421

### 7.4.1 Wybrane algorytmy i metody mutacji

W celu zilustrowania zachowania różnych algorytmów optymalizacyjnych w środowisku dynamicznym, wybrano reprezentatywne pary algorytmów i metod mutacji. Zestawienie obejmuje algorytmy o różnej złożoności obliczeniowej, od prostych heurystyk po metaheurystyki, testowane na wybranych profilach mutacji realistycznych i syntetycznych. Dobór przedstawia spektrum

możliwych rozwiązań, od szybkich metod przybliżonych po dokładne, ale czasochłonne podejścia optymalizacyjne.

Tabela 7.5: Wybrane pary algorytmów i metod mutacji.

Algorytm	Metoda	Liczba kroków	Koszt/węzeł	Śr. czas [s]
Algorytm ILP	pref_triadic	434	0.362	1.525
Algorytm ILP	rand_rewire	496	0.390	2.553
Algorytm genetyczny	pref_triadic	744	0.409	0.615
Algorytm genetyczny	pref_pref	930	0.414	1.134
Przeszukiwanie tabu	pref_triadic	744	0.413	1.470
Przeszukiwanie tabu	rand_rewire	930	0.445	2.581
Algorytm mrówkowy	pref_pref	899	0.417	6.906
Algorytm mrówkowy	pref_triadic	744	0.424	3.002
Wyżarzanie symulowane	pref_triadic	744	0.460	0.555
Algorytm zachłanny	pref_pref	930	0.464	0.001
Zbiór dominujący	pref_triadic	744	0.457	0.005
Algorytm losowy	pref_pref	930	0.754	0.001

Algorytm ILP osiąga najniższe koszty, lecz wymaga około 1.5-2.6 s na krok. Algorytm genetyczny dobrze sprawdza się przy zmianach klastrowych (pref\_triadic), oferując niski koszt i czas około 0.6 s. Przy wariacie pref\_pref jest wolniejszy (1.1 s), ale zachowuje dobrą jakość. Z kolei wyżarzanie symulowane jest szybkie (około 0.5 s) i stabilne, ale jakościowo ustępuje bardziej zaawansowanym metodom.

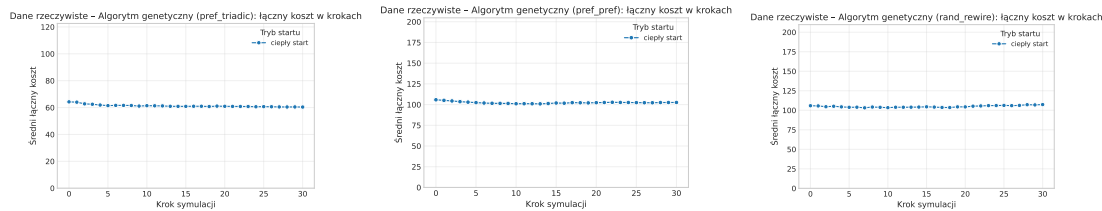
Przeszukiwanie tabu korzysta z lokalności zmian, osiągając sensowny koszt i czas około 1.5 s przy pref\_triadic. Jednak przy mutacjach losowych (rand\_rewire) czas wzrasta do około 2.6 s, a koszt również rośnie. Algorytm mrówkowy zapewnia bardzo dobrą jakość przy pref\_pref, ale działa najwolniej (prawie 7 s). Przejście na pref\_triadic ponad dwukrotnie przyspiesza jego działanie kosztem niewielkiego pogorszenia jakości.

Szybkie heurystyki, takie jak algorytm zachłanny ( $\approx 1$  ms) i zbiór dominujący ( $\approx 5$  ms), są efektywne czasowo. Zbiór dominujący zwykle osiąga niższy koszt niż zachłanny, co czyni go zasadnym wyborem przy ograniczeniach czasowych. Mutacje klastrowe (pref\_triadic, pref\_pref) pomagają wszystkim algorytmom utrzymać niski średni koszt licencji liczony na jeden węzeł i krótszy czas. Natomiast rand\_rewire zwiększa zarówno koszt, jak i czas.

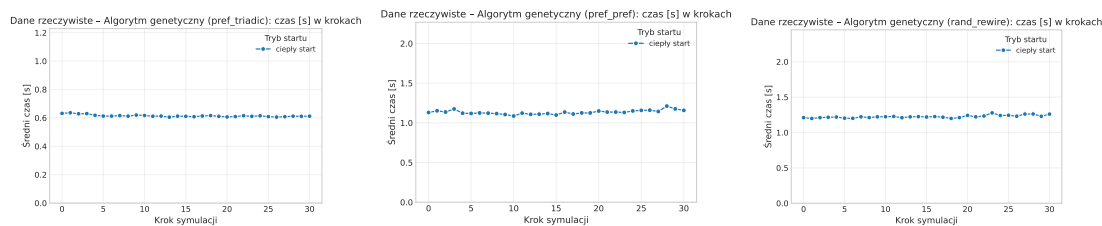
#### 7.4.2 Ewolucja kosztów w czasie

Pełne przebiegi dla algorytmu genetycznego pokazano na rys. 7.3–7.4. Łączenie preferencyjnego przyłączania z triadycznym domykaniem sprzyja utrzymaniu najniższych kosztów, natomiast wariant z losowym przełączaniem krawędzi prowadzi do wolniejszej stabilizacji. Analizując koszt na węzeł na rys. 7.3, można zauważyć, że dla każdego z typów mutacji przebiega on podobnie, oscylując wokół zbliżonego poziomu.

Z kolei, patrząc na czas wykonania na rys. 7.4, widać, że dla wariantu `rand_rewire` występują największe wahania, co sugeruje większą niestabilność procesu optymalizacji. Warianty `pref_triadic` i `pref_pref` charakteryzują się bardziej stabilnym czasem wykonania.



Rysunek 7.3: Algoritm genetyczny – koszt na węzeł w wariantach realistycznych.



Rysunek 7.4: Algoritm genetyczny – czas wykonania w wariantach realistycznych.

## 7.5 Wnioski

Przeprowadzona analiza dynamiczna wykazała, że dobór algorytmu optymalizacyjnego w środowisku dynamicznym powinien uwzględniać zarówno profil zmian topologii sieci, jak i dostępny budżet czasowy. Badania obejmujące sześć wariantów mutacji (trzy syntetyczne oraz trzy realistyczne) na różnych typach grafów pozwoliły na sformułowanie kluczowych wniosków dotyczących adaptacji algorytmów do ewoluujących struktur sieciowych.

Mutacje realistyczne, takie jak `pref_triadic` oraz `pref_pref`, były mniej wymagające obliczeniowo do obsłużenia w porównaniu z wariantami syntetycznymi o wysokiej intensywności. Mechanizmy preferencyjnego przyłączania oraz domykania trójkątów sprzyjają wzmacnianiu klastrowości i tworzeniu hubów, co zmniejsza efektywny rozmiar problemu pokrycia. W rezultacie algorytmy osiągały niższe koszty (0.470–0.475 w porównaniu do 0.485–0.489) oraz krótsze czasy wykonania (0.9–1.7 s w porównaniu do 2.9–3.2 s). Z kolei mutacje typu `rand_rewire` zwiększały entropię topologii poprzez zrywanie lokalnych połączeń, co prowadziło do najgorszych wyników zarówno pod względem kosztu (0.486), jak i czasu (1.9 s).

Algorytmy wykazywały różną odporność na poszczególne typy zmian w zależności od mechanizmu wykorzystania poprzedniego rozwiązania. Algorytm ILP zapewniał najwyższą jakość (koszt 0.362–0.390), lecz wymagał znacznego czasu na ponowne rozwiązanie zmodyfikowanych ograniczeń. Algorytm genetyczny dobrze radził sobie przy zmianach klastrowych, oferując korzystny kompromis między jakością a czasem (koszt 0.409 przy czasie 0.615 s dla `pref_triadic`), jednak jego efektywność spadała w przypadku mutacji destrukcyjnych. Przeszukiwanie tabu, jako metoda intensywnie lokalna, sprawdzało się przy zmianach o ograniczonym zasięgu, lecz przy mutacjach

o większej skali wymagało rozszerzenia promienia poszukiwań, co wydłużało czas działania do około 6.5 s.

Szybkie heurystyki, takie jak algorytm zachłanny oraz zbiór dominujący, zachowywały swoją użyteczność również w środowisku dynamicznym, oferując czasy wykonania poniżej 5 ms przy kosztach porównywalnych z bardziej złożonymi metodami. Algorytm zachłanny osiągał stabilny czas w zakresie od 0.5 ms do 1.8 ms przy koszcie 0.464–0.480, natomiast zbiór dominujący zapewniał nieco niższy koszt przy czasie około 5 ms.

Wyniki badań wskazują na konieczność adaptacyjnego doboru strategii optymalizacyjnej w zależności od obserwowanego profilu zmian. Przy zmianach o charakterze klastrowym zaleca się stosowanie metaheurystyk z mechanizmami naprawy poprzedniego rozwiązania. W przypadku zmian chaotycznych konieczne może być głębsze odświeżenie rozwiązania lub zaakceptowanie wyższego kosztu w zamian za stabilność czasową. Gdy czas jest krytycznym ograniczeniem, szybkie heurystyki są preferowane ze względu na przewidywalną wydajność niezależnie od typu mutacji.

Najlepszy kompromis oferują metaheurystyki łączące konstrukcję z wykorzystaniem poprzedniego rozwiązania i lokalne naprawy, adaptowane do intensywności zmian między krokami.

## 8. ROZSZERZENIA MODELU LICENCJONOWANIA

W niniejszym rozdziale przedstawiono analizę rozszerzeń podstawowego modelu licencjonowania, które uwzględniają różne konfiguracje cenowe oraz ograniczenia pojemności planów grupowych. Badania obejmują osiem wariantów licencyjnych inspirowanych rzeczywistymi ofertami platform takich jak Duolingo, Spotify czy Netflix. Rozdział zawiera szczegółową analizę wpływu poszczególnych parametrów na efektywność optymalizacji oraz porównanie kosztów i czasów wykonania algorytmów w różnych konfiguracjach.

### 8.1 Przegląd badanych wariantów

Oprócz bazowych konfiguracji rozważono osiem rozszerzeń licencyjnych, które różnią się wielokrotnością kosztu licencji grupowej względem indywidualnej. Warianty Duolingo Super obejmują plany, w których koszt licencji grupowej wynosi odpowiednio dwukrotność, czterokrotność i pięciokrotność ceny licencji indywidualnej, przy zachowaniu stałej pojemności grupy (6 osób). Podobnie, w przypadku dominowania rzymskiego analizowano konfiguracje, w których koszt licencji grupowej wynosi  $p$ -krotność ceny indywidualnej, dla  $p \in \{3, 4, 5\}$ . Dwa ostatnie warianty odnoszą się do rzeczywistych ofert: Spotify oferuje plan Duo (pojemność 2) jako wariant pośredni między licencją indywidualną a rodzinną, natomiast Netflix oferuje plany dla 1, 2 lub 4 osób.

Przedstawione w tabelach wartości stanowią statystyki zagregowane dla danej konfiguracji licencyjnej. Oznacza to, że średnie koszty na węzeł oraz średnie czasy obliczeń zostały obliczone na podstawie wyników wszystkich zastosowanych algorytmów oraz wszystkich typów grafów uwzględnionych w eksperymentach. Tabele nie odnoszą się zatem do pojedynczego algorytmu czy sieci, lecz prezentują uśrednione efekty całej grupy uruchomień dla danej konfiguracji licencji.

#### 8.1.1 Warianty rodziny Duolingo

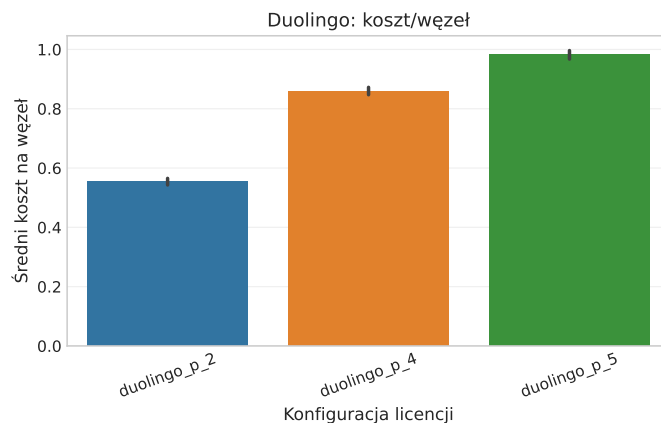
Na rys. 8.1 przedstawiono mediany kosztu na węzeł dla konfiguracji, w których koszt licencji grupowej wynosi odpowiednio dwukrotność (`duolingo_p_2`), czterokrotność (`duolingo_p_4`) oraz pięciokrotność (`duolingo_p_5`) ceny licencji indywidualnej. Wyniki wskazują, że wyższe mnożniki prowadzą do wzrostu kosztu na węzeł, co wynika z częstszej selekcji licencji indywidualnych przy wyższych kosztach planów grupowych. W przypadku konfiguracji `duolingo_p_4` oznacza to, że sens kupna licencji grupowej pojawia się dopiero dla grup liczących 4 lub więcej osób, ponieważ dopiero wtedy koszt licencji grupowej jest równy lub niższy niż koszt czterech licencji indywidualnych.

Szczegółowe statystyki dla wariantów Duolingo zebrano w tabeli 8.1. Wzrost mnożnika ceny grupowej z 2 do 5 powoduje wzrost średniego kosztu na węzeł o 77% (z 0.554 do 0.982) oraz wydłużenie średniego czasu obliczeń o 47% (z 0.637 s do 0.938 s).

Tabela 8.1: Statystyki dla wariantów Duolingo (benchmark statyczny).

Konfiguracja	Metryka	Średnia	Odch. std.	Min	Max
duolingo_p_2	Czas [s]	0.637	1.210	0.000	7.722
	Koszt całkowity	49.152	39.533	8.000	177.000
	Koszt/węzeł	0.554	0.152	0.340	1.000
duolingo_p_4	Czas [s]	0.677	1.483	0.000	11.075
	Koszt całkowity	76.815	59.581	14.000	259.000
	Koszt/węzeł	0.860	0.171	0.680	1.520
duolingo_p_5	Czas [s]	0.938	2.721	0.000	26.589
	Koszt całkowity	87.855	67.852	17.000	300.000
	Koszt/węzeł	0.982	0.198	0.840	1.820

Analiza rozrzutu wartości w tabeli 8.1 pokazuje stabilność wyników. Odchylenie standardowe dla kosztu na węzeł pozostaje na niskim poziomie (0.152–0.198), co wskazuje na konsekwentność rozwiązań algorytmów w różnych instancjach. Warto zauważyć, że w konfiguracji duolingo\_p\_5 odnotowano najwyższy maksymalny czas obliczeń (26.589 s), co może wynikać z większej złożoności problemu przy wyższych kosztach planów grupowych. Zwiększone odchylenie standardowe dla czasów wykonania w tej konfiguracji (2.721 s) sugeruje większą wrażliwość algorytmów na charakterystykę konkretnej instancji sieci.



Rysunek 8.1: Koszt na węzeł w zależności od planu Duolingo (mediany kluczowych algorytmów).

Zmiana struktury licencji wpływa również na udział planów grupowych. W konfiguracji duolingo\_p\_2 ponad połowa przydziałów wykorzystuje licencję grupową, podczas gdy w wariantcie duolingo\_p\_5 udział grup spada do 24%, co odzwierciedla rosnący koszt planu grupowego względem licencji indywidualnych.

### 8.1.2 Warianty dominowania rzymskiego

Na rys. 8.2 przedstawiono mediany kosztu na węzeł dla konfiguracji, w których koszt licencji grupowej wynosi odpowiednio trzykrotność (roman\_p\_3), czterokrotność (roman\_p\_4) oraz

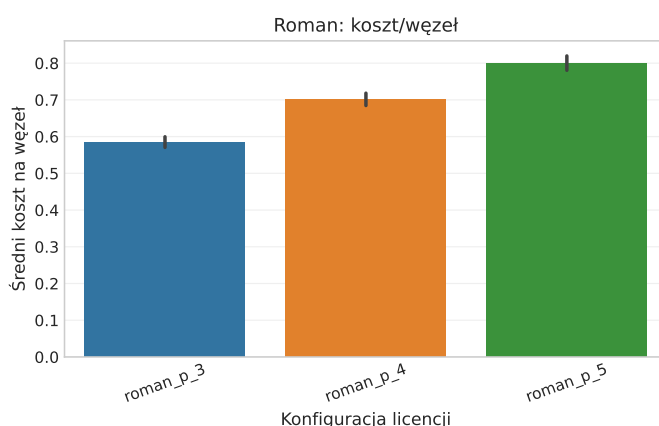
pięciokrotność (roman\_p\_5) ceny licencji indywidualnej. Podobnie jak w przypadku planów Duolingo, wyższe mnożniki prowadzą do wzrostu kosztu na węzeł, co wynika z preferencji algorytmów do korzystania z licencji indywidualnych przy wyższych kosztach planów grupowych. Wariant roman\_p\_5 charakteryzuje się najwyższym kosztem, co odzwierciedla ograniczoną opłacalność licencji grupowych w tej konfiguracji.

Szczegółowe statystyki dla wariantów dominowania rzymskiego zebrano w tabeli 8.2. Wzrost mnożnika ceny grupowej z 3 do 5 powoduje wzrost średniego kosztu na węzeł o 37% (z 0.585 do 0.800) oraz nieznaczne wydłużenie średniego czasu obliczeń (z 0.477 s do 0.493 s).

Tabela 8.2: Statystyki dla wariantów dominowania rzymskiego (benchmark statyczny).

Konfiguracja	Metryka	Średnia	Odch. std.	Min	Max
roman_p_3	Czas [s]	0.477	1.038	0.000	9.522
	Koszt całkowity	50.261	40.552	7.000	218.000
	Koszt/węzeł	0.585	0.199	0.260	1.170
roman_p_4	Czas [s]	0.475	1.125	0.000	9.189
	Koszt całkowity	60.441	48.750	9.000	259.000
	Koszt/węzeł	0.701	0.232	0.340	1.400
roman_p_5	Czas [s]	0.493	1.289	0.000	12.314
	Koszt całkowity	68.995	55.987	11.000	300.000
	Koszt/węzeł	0.800	0.269	0.395	1.660

Zmiana struktury licencji wpływa również na udział planów grupowych (tabela 8.5). W konfiguracji roman\_p\_3 udział grup wynosi 43%, podczas gdy w wariantcie roman\_p\_5 spada do 24%. Wyższe koszty planów grupowych prowadzą do preferencji algorytmów w kierunku licencji indywidualnych, co jest zgodne z obserwacjami dla innych rozszerzeń.



Rysunek 8.2: Koszt na węzeł dla wariantów dominowania rzymskiego.



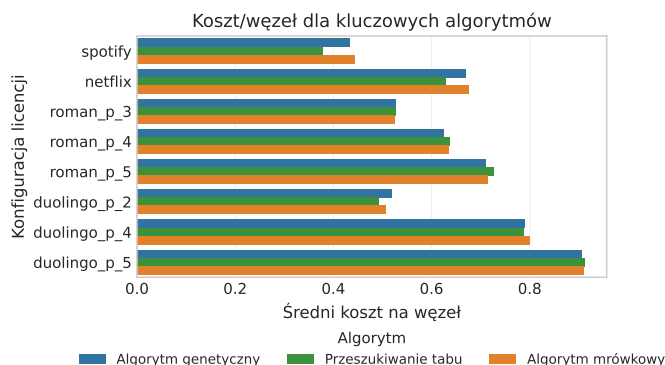
### 8.1.3 Spotify i Netflix

Spotify oferuje plan Duo, przeznaczony dla 2 osób. Umożliwia to efektywne dobieranie użytkowników w pary zamiast tworzenia dużych grup rodzinnych. Tabela 8.3 potwierdza, że przeszukiwanie tabu i algorytm genetyczny osiągają najniższe koszty (0.335 i 0.400 na węzeł), uzyskując wyniki niższe niż heurystyka zachłanna.

W przypadku Netflixu plan Standard (również dla 2 osób) stanowi wariant pośredni między licencją indywidualną a planem rodzinnym dla czterech kont, co pozwala metaheurystykom utrzymać koszt w zakresie od 0.60 do 0.65 przy czasie poniżej 1 s.

Tabela 8.3: Mediany dla konfiguracji Spotify i Netflix.

Konfiguracja	Algorytm	Med. koszt/węzeł	Med. czas [s]
spotify	Algorytm zachłanny	0.446	0.000
spotify	Algorytm genetyczny	0.400	0.229
spotify	Algorytm mrówkowy	0.391	1.040
spotify	Przeszukiwanie tabu	0.335	0.958
netflix	Algorytm zachłanny	0.682	0.000
netflix	Algorytm genetyczny	0.650	0.237
netflix	Algorytm mrówkowy	0.656	1.289
netflix	Przeszukiwanie tabu	0.604	0.999



Rysunek 8.3: Koszt na węzeł dla wszystkich rozszerzeń (mediany).

### 8.1.4 Porównanie wszystkich rozszerzeń

Podstawowe statystyki dla wszystkich konfiguracji zestawiono w tabeli 8.4. W każdym przypadku analizowano ten sam zestaw algorytmów, pomijając obserwacje z przekroczeniem limitu czasu.

Tabela 8.4: Statystyki agregowane dla rozszerzeń (benchmark statyczny).

Konfiguracja	Śr. koszt/węzeł	Śr. czas [s]
duolingo_p_2	0.554	0.637
duolingo_p_4	0.860	0.677
duolingo_p_5	0.982	0.938
spotify	0.479	0.547
netflix	0.729	0.623
roman_p_3	0.585	0.477
roman_p_4	0.701	0.475
roman_p_5	0.800	0.493

Analiza agregowanych statystyk w tabeli 8.4 ujawnia wyraźne różnice między rodzinami konfiguracji. W przypadku wariantów Duolingo obserwuje się silną korelację między mnożnikiem ceny grupowej a kosztem na węzeł – wzrost parametru z 2 do 5 prowadzi do zwiększenia kosztu o 77% (z 0.554 do 0.982). Jednocześnie czas obliczeń wydłuża się o 47%, co wskazuje na rosnącą złożoność problemu przy wyższych kosztach planów grupowych.

Warianty dominowania rzymskiego charakteryzują się większą stabilnością obliczeniową, z czasami wykonania w zakresie 0.477–0.493 s niezależnie od parametru  $p$ . Wzrost kosztu na węzeł jest bardziej umiarkowany (37% przy wzroście  $p$  z 3 do 5), co sugeruje odmienną strukturę przestrzeni rozwiązań w porównaniu z planami Duolingo.

Najkorzystniejszy stosunek kosztu do wydajności obliczeniowej wykazuje konfiguracja Spotify (0.479 kosztu na węzeł przy 0.547 s), co potwierdza skuteczność wprowadzenia planu pośredniego (Duo) między licencjami indywidualnymi a rodzinnymi. Netflix zajmuje pozycję pośrednią z kosztem 0.729 na węzeł, pozostając jednak konkurencyjny pod względem czasu obliczeń (0.623 s).

#### 8.1.5 Analiza wpływu liczby użytkowników na koszty

Struktura wykorzystania licencji zmienia się istotnie (tabela 8.5). W Spotify licencje grupowe odpowiadają za 64% przydziałów (plan Duo + rodzina), podczas gdy w wariantcie `duolingo_p_5` udział grup spada do 24%. W Netflixie większość przydziałów to plany Standard/Premium (udział 68%).

Tabela 8.5: Udział licencji grupowych i indywidualnych (benchmark statyczny).

Konfiguracja	Udział grup	Udział indywidualnych
duolingo_p_2	0.56	0.44
duolingo_p_4	0.34	0.66
duolingo_p_5	0.24	0.76
spotify	0.64	0.36
netflix	0.68	0.32
roman_p_3	0.43	0.57
roman_p_4	0.34	0.66
roman_p_5	0.24	0.76

## 8.2 Rozszerzenia w środowisku dynamicznym

W środowisku dynamicznym przeanalizowano te same osiem konfiguracji rozszerzeń, stosując identyczną metodologię jak w benchmarku statycznym. Każda konfiguracja została przetestowana na 272 instancjach dynamicznych, obejmujących różne rozmiary sieci i scenariusze zmian.

### 8.2.1 Statystyki agregowane

Tabela 8.6 przedstawia statystyki zagregowane według rodzin konfiguracji. Warianty Duolingo charakteryzują się najwyższymi kosztami średnimi (73.83 na instancję) oraz najdłuższymi czasami wykonania (0.97 s), co wynika z konieczności rozważania licencji o pojemności 6 osób. Problem dominowania rzymskiego wykazuje umiarkowane koszty (59.96) przy porównywalnym czasie obliczeń (0.85 s). Konfiguracje rzeczywistych serwisów – Spotify i Netflix – osiągają najkorzystniejsze wyniki, z najniższymi kosztami odpowiednio 43.32 i 66.58.

Tabela 8.6: Statystyki zagregowane według rodzin konfiguracji (benchmark dynamiczny).

Rodzina	Śr. czas [s]	Śr. koszt całk.	Śr. koszt/węzeł	Liczba obs.
Duolingo	0.969	73.83	0.792	3265
Roman	0.853	59.96	0.661	3408
Netflix	0.891	66.58	0.714	1074
Spotify	0.881	43.32	0.467	1088

### 8.2.2 Porównanie szczegółowe konfiguracji

Tabela 8.7 zawiera szczegółowe statystyki dla wszystkich wariantów rozszerzeń. W rodzinie Duolingo obserwuje się wyraźny wzrost kosztu na węzeł wraz ze wzrostem mnożnika ceny grupowej – od 0.539 w konfiguracji duolingo\_p\_2 do 0.980 w duolingo\_p\_5. Podobną tendencję wykazują warianty dominowania rzymskiego, gdzie koszt rośnie z 0.554 (roman\_p\_3) do 0.763 (roman\_p\_5).

Tabela 8.7: Szczegółowe statystyki dla rozszerzeń (benchmark dynamiczny).

Konfiguracja	Śr. czas [s]	Śr. koszt całkow.	Śr. koszt/węzeł	Liczba obs.
duolingo_p_2	0.939	50.22	0.539	1088
duolingo_p_4	0.987	80.17	0.855	1073
duolingo_p_5	0.980	90.94	0.980	1104
spotify	0.881	43.32	0.467	1088
netflix	0.891	66.58	0.714	1074
roman_p_3	0.798	50.30	0.554	1136
roman_p_4	0.930	60.41	0.666	1136
roman_p_5	0.829	69.18	0.763	1136

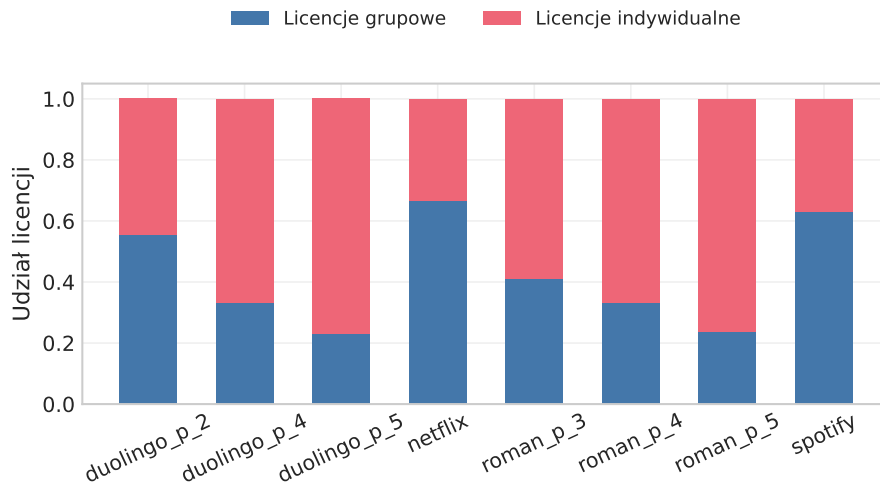
Konfiguracja Spotify potwierdza swoją przewagę osiągając najniższy koszt na węzeł (0.467), co stanowi wynik o 13% lepszy niż w najbliższej konfiguracji `roman_p_3`. Plan Duo umożliwia efektywne parowanie użytkowników, co przekłada się na oszczędności w całym spektrum rozmiarów sieci. Netflix zajmuje pozycję pośrednią z kosztem 0.714 na węzeł, pozostając konkurencyjny wobec wariantów o wysokich mnożnikach.

### 8.2.3 Struktura wykorzystania licencji

Analiza składu licencji (tabela 8.8) ujawnia znaczące różnice w strategiach przydzielania. Konfiguracje o niskich mnożnikach (`duolingo_p_2`, `spotify`) preferują licencje grupowe, osiągając udział odpowiednio 55% i 63%. W przeciwieństwie do tego, wysokie koszty planów grupowych w `duolingo_p_5` i `roman_p_5` prowadzą do dominacji licencji indywidualnych (76% i 76% udziału).

Tabela 8.8: Struktura wykorzystania licencji (benchmark dynamiczny).

Konfiguracja	Udział grup [%]	Udział indywidualnych [%]
duolingo_p_2	55.4	44.6
duolingo_p_4	33.3	66.7
duolingo_p_5	23.0	77.0
spotify	63.0	37.0
netflix	66.8	33.2
roman_p_3	41.1	58.9
roman_p_4	33.4	66.6
roman_p_5	23.8	76.2



Rysunek 8.4: Udział licencji grupowych i indywidualnych w rozszerzeniach dynamicznych.

Netflix wykazuje najwyższy udział planów grupowych (67%), co wynika z atrakcyjności planów Standard i Premium dla grup 2-4 osobowych. Ta konfiguracja stanowi wariant pośredni między licencjami indywidualnymi a planami o dużej pojemności, umożliwiając algorytmom elastyczne dopasowanie do struktury sieci.

#### 8.2.4 Porównanie z benchmarkiem statycznym

Zestawienie wyników dynamicznych ze statycznymi (tabela 8.9) pokazuje ogólną zgodność trendów. Koszty w środowisku dynamicznym pozostają na podobnym poziomie – różnice nie przekraczają 3% dla większości konfiguracji. Czasy wykonania wydłużają się o 30-60%, co odzwierciedla dodatkową złożoność związaną z dynamicznym rebalansowaniem.

Tabela 8.9: Porównanie wyników statycznych i dynamicznych.

Konfiguracja	Koszt stat.	Koszt dyn.	Czas stat.	Czas dyn.
duolingo_p_2	0.554	0.539	0.637	0.939
duolingo_p_4	0.860	0.855	0.677	0.987
duolingo_p_5	0.982	0.980	0.938	0.980
spotify	0.479	0.467	0.547	0.881
netflix	0.729	0.714	0.623	0.891
roman_p_3	0.585	0.554	0.477	0.798
roman_p_4	0.701	0.666	0.475	0.930
roman_p_5	0.800	0.763	0.493	0.829

Najstabilniejsze wyniki wykazuje konfiguracja `duolingo_p_5`, gdzie koszty różnią się jedynie o 0.002 między benchmarkami. Największą poprawę w środowisku dynamicznym odnotowano dla `roman_p_4` (redukcja kosztu o 5%) i `roman_p_5` (redukcja o 4.6%). Może to wynikać z lepszego wykorzystania możliwości rebalansowania w mniejszych grupach charakterystycznych dla tych konfiguracji.

### 8.3 Wnioski

Przeprowadzone badania nad rozszerzeniami modelu licencjonowania pozwoliły na kompleksową analizę wpływu struktury cenowej na optymalizację kosztów w sieciach społecznych. Kluczowe wnioski z analizy ośmiu wariantów licencyjnych można podzielić na trzy główne obszary.

Wpływ mnożnika ceny grupowej na efektywność algorytmów. Badania wykazały wyraźną zależność między stosunkiem ceny licencji grupowej do indywidualnej a skutecznością optymalizacji. W wariantach Duolingo wzrost mnożnika z 2 do 5 powoduje zwiększenie średniego kosztu na węzeł o 77% (z 0.554 do 0.982) oraz wydłużenie czasu obliczeń o 47%. Podobną, choć łagodniejszą tendencję obserwuje się w wariantach dominowania rzymskiego, gdzie wzrost parametru  $p$  z 3 do 5 prowadzi do 37% wzrostu kosztu przy stabilnym czasie wykonania. Te wyniki wskazują, że metaheurystyki są najbardziej efektywne przy niskich mnożnikach, gdzie licencje grupowe pozostają opłacalne.

Znaczenie planów pośrednich w strukturze licencji. Analiza konfiguracji rzeczywistych serwisów ujawniła istotną rolę licencji o pojemności pośredniej. Spotify z planem Duo (pojemność 2) osiąga najkorzystniejszy stosunek kosztu do wydajności (0.467 kosztu na węzeł przy 0.547s czasu), podczas gdy Netflix z planem Standard oferuje skuteczne wypełnienie luki między licencjami indywidualnymi a rodzinnymi. W obu przypadkach udział licencji grupowych przekracza 63%, co potwierdza efektywność elastycznego spektrum opcji licencyjnych.

Stabilność wyników w środowisku dynamicznym. Porównanie benchmarków statycznego i dynamicznego wykazało wysoką zgodność rezultatów – różnice w kosztach na węzeł nie przekraczają 3% dla większości konfiguracji. Jednocześnie zaobserwowano wzrost czasów wykonania o 30-60%, co odzwierciedla dodatkową złożoność związaną z dynamicznym rebalansowaniem. Najstabilniejsze wyniki uzyskano w konfiguracji `duolingo_p_5`, gdzie różnica między środowiskami wynosi jedynie 0.002. Te obserwacje potwierdzają, że proponowane rozszerzenia modelu zachowują skuteczność w realistycznych scenariuszach z czasowymi zmianami struktury sieci.

Otrzymane wyniki mają istotne implikacje praktyczne dla projektowania systemów licencjonowania. Po pierwsze, wprowadzenie planów o pojemności pośredniej może znacząco poprawić efektywność kosztową bez zwiększenia złożoności obliczeniowej. Po drugie, przy wysokich mnożnikach ceny grupowej (powyżej 4-5) korzyści z metaheurystyk maleją, co sugeruje ekonomiczne ograniczenia optymalizacji algorytmicznej. Po trzecie, stabilność wyników w środowisku dynamicznym wskazuje na praktyczną stosowalność proponowanych rozwiązań w rzeczywistych systemach z fluktuacją użytkowników.

## 9. PODSUMOWANIE

Praca pokazuje pełny cykl badawczy dotyczący optymalizacji kosztów licencji grupowych w sieciach społecznościowych. Najpierw sformalizowano model. Następnie porównano algorytmy deterministyczne i metaheurystyczne. Dalej przeprowadzono symulacje dynamiczne. Na końcu rozszerzono analizę o dodatkowe plany licencyjne. Uzyskano spójny obraz działania metod w wielu scenariuszach. Poniżej zebrano główne wyniki i wskazano możliwe kierunki dalszych badań.

### 9.1 Wyniki

#### 9.1.1 Model i metody

Rozdziały 1–4 definiują problem jako uogólnienie dominowania rzymskiego z ograniczeniami pojemności oraz różnymi typami licencji. Wykazano wysoką złożoność obliczeniową. Rozdział 5 prezentuje pełen zestaw metod: dokładny algorytm ILP, heurystyki konstrukcyjne (m.in. algorytm zachłanny, podejście przez zbiór dominujący), metaheurystyki (algorytm genetyczny, algorytm mrówkowy, przeszukiwanie tabu, wyżarzanie symulowane) oraz algorytm losowy. Wszystkie implementacje mają wspólny interfejs, co ułatwiło porównania.

#### 9.1.2 Eksperymenty statyczne

Rozdział 6 potwierdza hierarchię jakości:  $ILP > \text{algorytm mrówkowy} > \text{przeszukiwanie tabu/algorytm genetyczny} > \text{wyżarzanie symulowane} > \text{heurystyki konstrukcyjne} > \text{algorytm losowy}$ . Różnice są istotne statystycznie (test Friedmana oraz porównania Nemenyi'ego). Grafy bezskalowe okazały się łatwiejsze do pokrycia z powodu hubów. Czas działania metaheurystyk rósł szybko, a heurystyki konstrukcyjne utrzymywały czasy rzędu milisekund. W praktyce wyróżniono trzy zakresy: dla małych grafów warto stosować ILP jako punkt odniesienia; dla średnich grafów najlepsze są metaheurystyki; dla dużych grafów albo gdy liczy się szybkość, użyteczną aproksymację daje algorytm zachłanny.

#### 9.1.3 Symulacje dynamiczne

Rozdział 7 przedstawia wpływ zmian w sieci na koszt i czas. Ciepły start konsekwentnie obniżał koszt o 6–14% (syntetyczne) i 7–12% (realistyczne), przy czasie rebalansowania 1–3 s. Intensywniejsze mutacje zwiększały głównie czas, a mniej wpływały na koszt. Najdokładniejszy pozostawał algorytm mrówkowy, natomiast przeszukiwanie tabu i algorytm genetyczny dawały lepszy kompromis czasowy. W danych realistycznych najniższe koszty uzyskano w wariancie Spotify (mediana  $\approx 0.41$  na węzeł).

#### 9.1.4 Rozszerzenia licencyjne

Rozdział 8 analizuje osiem wariantów taryf. W planach Duolingo i Roman o opłacalności decydowały rozmiar grupy i koszt planu. Przy tańszej grupie (`duolingo_p_2`) metaheurystyki redukowały koszt o 10–20% względem heurystyk. Przy droższych planach (`duolingo_p_5`, `roman_p_5`) przewaga spadała do kilku procent. Dodanie planu Duo (Spotify) oraz planów Standard/Premium (Netflix) umożliwiło nowe parowania użytkowników i obniżyło koszt na węzeł (mediana 0.40 w Spotify wobec 0.50 w `duolingo_p_2`). W dynamice konfiguracji z planem pośrednim utrzymywały najkorzystniejszy koszt i stabilny czas, a metaheurystyki dawały 5–12% oszczędności względem algorytmu zachłannego.

### 9.2 Rekomendacje praktyczne

**Dobór algorytmu:** dla instancji do około 200 węzłów algorytm ILP jest najlepszym punktem odniesienia. Dla większych sieci zalecane są algorytm mrówkowy albo przeszukiwanie tabu; w środowisku dynamicznym krótsze czasy rebalansowania daje przeszukiwanie tabu.

**Strategia inicjalizacji:** ciepły start metaheurystyk, czyli start z poprzedniego rozwiązania, obniża koszt o 6–14% przy niewielkim koszcie czasowym. W systemach aktualizowanych częściowo powinien to być standard.

**Polityka licencyjna:** tańsze plany rodzinne, w szczególności warianty pośrednie (np. Duo), realnie zmniejszają koszt końcowy. Zbyt wysokie  $p$  w planach grupowych sprzyja licencjom indywidualnym i ogranicza zyski z optymalizacji.

### 9.3 Kierunki dalszych badań

**Gwarancje aproksymacji:** warto poszukać teoretycznych ograniczeń jakości rozwiązań dla wybranych klas grafów lub modeli losowych. **Modele stochastyczne:** ujęcie niepewności w dostępie użytkowników i ewolucji sieci może zwiększyć odporność rozwiązań (np. podejścia dwuetapowe lub bayesowskie). **Wielokryterialność i koszty operacyjne:** rozszerzenie funkcji celu o sprawiedliwość, ryzyko czy koszt migracji lepiej odzwierciedli praktykę. **Optymalizacja hiperparametrów:** automatyczne strojenie parametrów metaheurystyk (np. techniki z rodziny AutoML) może poprawić stosunek kosztu do czasu bez ręcznego dostrajania. **Integracja z praktyką:** biblioteka daje podstawy do wdrożeń w systemach rekomendacji planów rodzinnych; naturalnym krokiem jest eksperyment online na rzeczywistych danych.

### 9.4 Zakończenie

Przedstawiony model, zestaw algorytmów oraz eksperymenty statyczne i dynamiczne pokazują, że mimo wysokiej złożoności można uzyskać rozwiązania dobrej jakości w akceptowalnym czasie. Kluczowy jest dobór metody do wielkości i dynamiki sieci oraz rozsądna polityka licencyjna. Wyniki stanowią podstawę do dalszych prac oraz do zastosowań w usługach subskrypcyjnych, gdzie modele rodzinne stają się standardem.



## WYKAZ LITERATURY

1. *Subscription Economy Index* [Industry report]. 2024. Dostępne także z: <https://www.zuora.com/resource/subscription-economy-index/>.
2. *Subscription Price Trends 2024* [Industry report]. 2024. Dostępne także z: <https://recurly.com/press/recurly-releases-its-2024-state-of-subscriptions-report/>.
3. *Duolingo Family Plan* [Product page]. 2024. Dostępne także z: <https://support.duolingo.com/hc/pl/articles/6159959913243-Plan-rodzinny-Super-Duolingo>.
4. GAREY, Michael R.; JOHNSON, David S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
5. SHARMA, D.; ARAVIND, N. R.; CHOUDUM, S. A. Survey on Roman  $\{2\}$ -Domination. *Mathematics*. 2024, t. 12, nr. 17, s. 2771. Dostępne z DOI: 10.3390/math12172771.
6. LOKSHTANOV, Daniel; MARX, Dániel; SAURABH, Saket. Known Algorithms on Capacitated Domination. W: *Proceedings of IWPEC*. 2011, s. 351–362. Dostępne także z: <https://sites.cs.ucsb.edu/~daniello/papers/capdomset.pdf>.
7. BRANDES, Ulrik; ERLEBACH, Thomas (red.). *Network Analysis: Methodological Foundations*. Springer, 2005. Lecture Notes in Computer Science. Dostępne z DOI: 10.1007/978-3-540-31955-9.
8. NETTLETON, David F. Data mining of social networks represented as graphs. *Computer Science Review*. 2013, t. 7, nr. 1, s. 1–34. Dostępne z DOI: 10.1016/j.cosrev.2012.12.001.
9. SPOTIFY POLSKA. *Spotify Premium - Plany i ceny (Polska)*. 2025. Dostępne także z: <https://www.spotify.com/pl/premium/>. Stan na 09.2025: Individual - 23.99 PLN, Duo - 30.99 PLN, Family - 37.99 PLN miesięcznie.
10. SPOTIFY POLSKA. *Spotify Premium – Plany i ceny (Polska)*. 2025. Dostępne także z: <https://www.spotify.com/pl/premium/>. Stan na 09.2025: Basic – 33.00 PLN, Standard – 49.00 PLN, Premium – 67.00 PLN miesięcznie.
11. DUOLINGO. *Super Duolingo - ceny w aplikacji mobilnej (Polska)* [Aplikacja mobilna Duolingo, wersja na Android]. 2025. Stan na 09.2025: Individual - 13.99 PLN, Family - 29.17 PLN miesięcznie.
12. HAYNES, Teresa W.; HEDETNIEMI, Stephen T.; SLATER, Peter J. *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, 1998.
13. *Dominating set* [Wikipedia]. 2024. Dostępne także z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Dominating\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Dominating_set).
14. POUREIDI, Abolfazl; FATHALI, Jafar. Algorithmic results in Roman dominating functions on graphs. *Information Processing Letters*. 2023, t. 182, s. 106363. Dostępne z DOI: 10.1016/j.ipl.2023.106363.

15. PANDA, B. S.; RANA, Soumyashree; MISHRA, Sounaka. On the complexity of co-secure dominating set problem. *Information Processing Letters*. 2024, t. 185, s. 106463. Dostępne z DOI: 10.1016/j.ip1.2023.106463.
16. ALIMONTI, Paola; KANN, Viggo. Some APX-completeness results for cubic graphs. *Theoretical Computer Science*. 2000, t. 237, nr. 1–2, s. 123–134. Dostępne z DOI: 10.1016/S0304-3975(99)00426-0.
17. BERMAN, Piotr; FUJITO, Toshihiro. On the Approximation Properties of the Independent Set Problem in Degree 3 Graphs. W: *Algorithms and Data Structures*. Springer, 1995, t. 955, s. 449–460. Lecture Notes in Computer Science. ISBN 978-3-540-60165-6.
18. FAVARON, Odile; KARAMI, Hosein; KHOILAR, Reza; SHEIKHOESLAMI, Seyed Mahmoud. On the Roman domination number of a graph. *Discrete Mathematics*. 2009, t. 309, nr. 10, s. 3447–3451. Dostępne z DOI: 10.1016/j.disc.2008.09.043.
19. COCKAYNE, Ernie J.; DREYER Paul A., Jr.; HEDETNIEMI, Sandra M.; HEDETNIEMI, Stephen T. Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*. 2004, t. 278, nr. 1–3, s. 11–22. Dostępne z DOI: 10.1016/j.disc.2003.06.004.
20. CHAUDHARY, Juhi; PRADHAN, Dinabandhu. Roman 3-domination in graphs: Complexity and algorithms. *Discrete Applied Mathematics*. 2024, t. 354, s. 301–325. Dostępne z DOI: 10.1016/j.dam.2022.09.017.
21. GHAFFARI-HADIGHEH, Alireza. Roman domination problem with uncertain positioning and deployment costs. *Soft Computing*. 2019, t. 24, nr. 4, s. 2637–2645. Dostępne z DOI: 10.1007/s00500-019-03811-z.
22. CHAMBERS, Erin W.; KINNERSLEY, Bill; PRINCE, Noah; WEST, Douglas B. Extremal problems for Roman domination. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. 2009, t. 23, nr. 3, s. 1575–1596. Dostępne z DOI: 10.1137/070699688.
23. KUHN, Fabian. *Network Algorithms (Graduate Course) – Lecture Notes* [Course notes]. 2012. Dostępne także z: <https://algo.inf.uni-freiburg.de/teaching/ss12/network-algorithms/>. Graduate course at the University of Freiburg, Summer Term 2012.
24. PARRA INZA, Ernesto; VAKHANIA, Nodari; SIGARRETA ALMIRA, Jose Maria; HERNANDEZ-AGUILAR, Jose Alberto. Approximating a Minimum Dominating Set by Purification. *Algorithms*. 2024, t. 17, nr. 6, s. 258. Dostępne z DOI: 10.3390/a17060258.
25. ERDŐS, Paul; RÉNYI, Alfréd. On the evolution of random graphs. *Publicationes Mathematicae*. 1960, t. 5, s. 17–61.
26. BARABÁSI, Albert-László; ALBERT, Réka. Emergence of scaling in random networks. *Science*. 1999, t. 286, nr. 5439, s. 509–512. Dostępne z DOI: 10.1126/science.286.5439.509.
27. WATTS, Duncan J.; STROGATZ, Steven H. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*. 1998, t. 393, s. 440–442. Dostępne z DOI: 10.1038/30918.
28. PROJECT, Stanford Network Analysis. *SNAP Datasets* [<https://snap.stanford.edu/data/>]. 2024. Dostęp: 2025-09.

29. MCAULEY, Julian; LESKOVEC, Jure. Learning to Discover Social Circles in Ego Networks. W: *Advances in Neural Information Processing Systems 25*. 2012, s. 548–556. Dostępne także z: <https://papers.nips.cc/paper/4532-learning-to-discover-social-circles-in-ego-networks>. Proceedings of NeurIPS 2012.
30. UGANDER, Johan; KARRER, Brian; BACKSTROM, Lars; MARLOW, Cameron. *The Anatomy of the Facebook Social Graph* [arXiv preprint arXiv:1111.4503]. 2011. Dostępne także z: <https://arxiv.org/abs/1111.4503>.
31. STANLEY, Richard P. *Enumerative Combinatorics, Volume 1*. Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521789875.
32. HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
33. GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989.
34. GLOVER, F. Tabu Search–Part I. *ORSA Journal on Computing*. 1989, t. 1, nr. 3, s. 190–206. Dostępne z DOI: 10.1287/ijoc.1.3.190.
35. DORIGO, M.; GAMBARDELLA, L. M. Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 1997, t. 1, nr. 1, s. 53–66. Dostępne z DOI: 10.1109/4235.585892.
36. KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by Simulated Annealing. *Science*. 1983, t. 220, nr. 4598, s. 671–680. Dostępne z DOI: 10.1126/science.220.4598.671.
37. ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*. 2002, t. 74, nr. 1, s. 47–97.
38. KAMOLA, Mariusz. Dynamika triad w serwisie Instagram. W: *VII Krajowa Konferencja Sieci Telekomunikacyjne i Komputerowe, Gliwice*. 2016, s. 1–10. Dostępne także z: <https://www.ia.pw.edu.pl/~mkamola/Kamola16a.pdf>.
39. WATTS, D.J.; STROGATZ, S.H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*. 1998, t. 393, nr. 6684, s. 440–442.

## A. WYBRANE FRAGMENTY IMPLEMENTACJI

### A.1 Przykład uruchomienia aplikacji i interpretacja wyników

Aby uruchomić eksperymenty, należy skorzystać z polecenia `make pipeline`, które uruchamia główny potok eksperymentalny:

```
UV_CACHE_DIR=.cache/uv PYTHONPATH=src uv run python -m glopt.experiments.pipeline
```

Na rysunku A.1 przedstawiono przykładowy przebieg uruchomienia aplikacji z poziomu terminala.

```
glopt on y main [x?] via v3.12.3 make pipeline
UV_CACHE_DIR=.cache/uv PYTHONPATH=src uv run python -m glopt.experiments.pipeline
=> static synthetic
Starting glopt benchmark run 20250925_180806_static_synth_benchmark
Run directory: runs/20250925_180806_static_synth_benchmark
Results file: runs/20250925_180806_static_synth_benchmark/csv/20250925_180806_static_synth_benchmark.csv
Graphs: random, small_world, scale_free
Sizes: 10..1000 (24 sizes)
Samples per size: 2
Repeats per graph: 1
License configurations: duolingo_super, roman_domination
Algorithms: ILPSolver, RandomizedAlgorithm, GreedyAlgorithm, DominatingSetAlgorithm, AntColonyOptimization, SimulatedAnnealing, TabuSearch, GeneticAlgorithm
Timeout per run: 60s
Graph cache warm-up started
Graph cache ready: using existing data in data/graphs.cache
Graph cache warm-up finished
Processing license duolingo_super with algorithm ILPSolver
Step n=10 s=0 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=100.31 cpn=10.0310 time=33.73 ms
Step n=10 s=1 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=113.11 cpn=11.3110 time=10.65 ms
Step n=20 s=0 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=184.25 cpn=9.2125 time=31.14 ms
Step n=20 s=1 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=212.23 cpn=10.6115 time=20.84 ms
Step n=30 s=0 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=230.98 cpn=7.6993 time=277.81 ms
Step n=30 s=1 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=215.80 cpn=7.1933 time=470.33 ms
Step n=40 s=0 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=274.14 cpn=6.8535 time=686.09 ms
Step n=40 s=1 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=260.15 cpn=6.5038 time=840.77 ms
Step n=50 s=0 r=0 lic=duolingo_super algo=ILPSolver on random cost=290.51 cpn=5.8102 time=1568.42 ms
```

Rysunek A.1: Przykładowy przebieg uruchomienia potoku eksperymentalnego z Makefile.

Na początku wyświetlane są informacje o wybranych parametrach uruchomienia, takich jak typ potoku, konfiguracje licencji, lista algorytmów oraz limity czasowe. Następnie rozpoczyna się proces przygotowania grafów. Tworzona jest pamięć podręczna grafów (cache), która umożliwia wielokrotne wykorzystanie tych samych instancji grafów między różnymi algorytmami i konfiguracjami licencji. Eliminuje to konieczność ponownego generowania grafów dla każdej próby, co istotnie skraca czas obliczeń, zwłaszcza dla dużych instancji.

Po przygotowaniu grafów wyświetlane są szczegóły dotyczące liczby rozmiarów, próbek i powtórzeń dla każdej instancji. Następnie dla każdej kombinacji licencji i algorytmu prezentowane są postępy obliczeń. Każda iteracja prezentuje podstawowe statystyki, takie jak rozmiar grafu, koszt rozwiązania, koszt na węzeł oraz czas wykonania. Umożliwia to bieżące monitorowanie przebiegu eksperymentu i szybkie wykrywanie ewentualnych anomalii.

### A.2 Organizacja skryptów eksperymentalnych

Środowisko obliczeniowe zorganizowano jako spójny zestaw modułów Pythona: pakiety do benchmarków statycznych, osobne moduły do symulacji dynamicznych i rozszerzeń, a także proste komendy CLI do szybkiej diagnostyki pojedynczych algorytmów. Wspólny rdzeń dba o jednolite

budowanie i walidację rozwiązań, a skrypty analityczne tworzą raporty i wykresy użyte w częściach eksperymentalnych.

## A.3 Algorytmy dokładne

### A.3.1 Program całkowitoliczbowy

Pełna implementacja algorytmu ILP wykorzystującego bibliotekę PuLP z solverem CBC do wyznaczania rozwiązań wzorcowych.

```
class ILPSolver(Algorithm):
    def solve(self, graph: nx.Graph, license_types: Sequence[LicenseType], **kwargs) -> Solution:
        # G = (V,E), N[i] = neighbors(i) union {i}
        nodes: list[Any] = list(graph.nodes())
        Nhood: dict[Any, set[Any]] = {i: set(graph.neighbors(i)) | {i} for i in nodes}
        degp1: dict[Any, int] = {i: len(Nhood[i]) for i in nodes}

        model = pulp.LpProblem("graph_licensing_optimization", pulp.LpMinimize)

        # active[i,t] = 1 gdy wlasciciel i otwiera grupe typu t
        active: dict[tuple[Any, int], pulp.LpVariable] = {}
        for i in nodes:
            for t_idx, lt in enumerate(license_types):
                feasible_owner_type = (lt.min_capacity <= degp1[i]) and (lt.max_capacity >= 1)
                if feasible_owner_type:
                    active[i, t_idx] = pulp.LpVariable(f"a_{i}_{t_idx}", cat="Binary")
                else:
                    # eliminacja niemożliwych par i,t
                    active[i, t_idx] = pulp.LpVariable(f"a_{i}_{t_idx}", lowBound=0, upBound=0, cat="Binary")

        # assign[i,j,t] = 1 gdy j należy do grupy wlasciciela i typu t
        assign: dict[tuple[Any, Any, int], pulp.LpVariable] = {}
        for i in nodes:
            for t_idx, lt in enumerate(license_types):
                if active[i, t_idx].upBound == 0:
                    continue
                if lt.max_capacity == 1:
                    # typ indywidualny, tylko wlasciciel
                    assign[i, i, t_idx] = pulp.LpVariable(f"x_{i}_{i}_{t_idx}", cat="Binary")
                else:
                    for j in Nhood[i]:
                        assign[i, j, t_idx] = pulp.LpVariable(f"x_{i}_{j}_{t_idx}", cat="Binary")

        # cel: min sum c_t * active[i,t]
        model += pulp.lpSum(active[i, t_idx] * license_types[t_idx].cost for i in nodes
                             for t_idx in range(len(license_types)))

        # co najwyzej jedna licencja na wlasciciela
        for i in nodes:
            model += pulp.lpSum(active[i, t_idx] for t_idx in range(len(license_types))) <= 1
```

```

# pokrycie dokładnie raz
for j in nodes:
    model += pulp.lpSum(assign.get((i, j, t_idx), 0) for i in Nhood[j]
                           for t_idx in range(len(license_types))) == 1

# sprzezenie i pojemnosc
for i in nodes:
    for t_idx, lt in enumerate(license_types):
        if active[i, t_idx].upBound == 0:
            continue

        # wlasciciel nalezy do swojej grupy
        model += assign.get((i, i, t_idx), 0) == active[i, t_idx]

        # brak przypisan bez aktywacji
        for j in Nhood[i]:
            var = assign.get((i, j, t_idx))
            if var is not None:
                model += var <= active[i, t_idx]

        # min i max pojemnosci tylko gdy aktywna
        group_size = pulp.lpSum(assign.get((i, j, t_idx), 0) for j in Nhood[i])
        model += group_size <= active[i, t_idx] * lt.max_capacity
        model += group_size >= active[i, t_idx] * lt.min_capacity

# rozwiazanie ilp
solver = pulp.PULP_CBC_CMD(msg=False)
model.solve(solver)
status = pulp.LpStatus.get(model.status, "Unknown")

# fallback gdy brak rozwiazania dopuszczalnego
if status in ("Infeasible", "Undefined", "Unbounded", "Not Solved"):
    singles = [lt for lt in license_types if lt.min_capacity <= 1 <= lt.max_capacity]
    if not singles:
        raise RuntimeError(f"ILP {status}: no single license available")
    lt = min(singles, key=lambda x: x.cost)
    groups = [LicenseGroup(license_type=lt, owner=i, additional_members=frozenset()) for i in nodes]
    return Solution(groups=tuple(groups))

# ekstrakcja rozwiazania
groups = []
for i in nodes:
    for t_idx, lt in enumerate(license_types):
        a = active.get((i, t_idx))
        a_val = float(a.varValue) if a is not None and a.varValue is not None else 0.0
        if a_val == 1.0:
            members: set[Any] = set()
            for j in Nhood[i]:
                var = assign.get((i, j, t_idx))
                v_val = float(var.varValue) if var is not None and var.varValue is not None else 0.0
                if v_val == 1.0:

```

```

        members.add(j)
    if members:
        groups.append(
            LicenseGroup(
                license_type=lt,
                owner=i,
                additional_members=frozenset(members - {i}),
            )
        )

    return Solution(groups=tuple(groups))

```

## A.4 Algorytmy metaheurystyczne

### A.4.1 Algorytm genetyczny

Główne fragmenty implementacji algorytmu genetycznego z elityzmem, selekcją turniejową oraz operatorami krzyżowania i mutacji.

```

class GeneticAlgorithm(Algorithm):
    def __init__(self, population_size: int = 30, num_generations: int = 40,
                  elite_fraction: float = 0.2, crossover_rate: float = 0.6):
        self.population_size = max(2, population_size)
        self.num_generations = max(1, num_generations)
        self.elite_fraction = max(0.0, min(1.0, elite_fraction))
        self.crossover_rate = max(0.0, min(1.0, crossover_rate))
        self.validator = SolutionValidator()

    def solve(self, graph: nx.Graph, license_types: Sequence[LicenseType], **kwargs) -> Solution:
        population = self._init_population(graph, license_types, initial)
        best = min(population, key=lambda s: s.total_cost)

        for _ in range(num_generations):
            population.sort(key=lambda s: s.total_cost)
            elite_count = max(1, int(self.elite_fraction * self.population_size))
            new_pop: list[Solution] = population[:elite_count]

            while len(new_pop) < self.population_size:
                if random.random() < self.crossover_rate and len(population) >= 2:
                    p1 = self._tournament_selection(population)
                    p2 = self._tournament_selection(population)
                    child = self._crossover(p1, p2, graph, license_types)
                    if not self.validator.is_valid_solution(child, graph):
                        base = min([p1, p2], key=lambda s: s.total_cost)
                        child = self._mutate(base, graph, license_types)
                else:
                    parent = self._tournament_selection(population)
                    child = self._mutate(parent, graph, license_types)
                new_pop.append(child)

```

```

        population = new_pop
        current_best = min(population, key=lambda s: s.total_cost)
        if current_best.total_cost < best.total_cost:
            best = current_best
    return best

def _crossover(self, p1: Solution, p2: Solution, graph: nx.Graph,
               license_types: Sequence[LicenseType]) -> Solution:
    def eff(g):
        return (g.license_type.cost / max(1, g.size), -g.size)

    candidates = list(p1.groups) + list(p2.groups)
    candidates.sort(key=eff)
    used = set()
    chosen: list = []
    for g in candidates:
        if used.isdisjoint(g.all_members):
            chosen.append(g)
            used.update(g.all_members)

    # Domknięcie niepokrytych węzłów algorytmem zachłannym
    uncovered = set(graph.nodes()) - used
    if uncovered:
        H = graph.subgraph(uncovered)
        filler = GreedyAlgorithm().solve(H, list(license_types))
        for fg in filler.groups:
            if set(fg.all_members).issubset(uncovered):
                chosen.append(fg)

    child = SolutionBuilder.create_solution_from_groups(chosen)
    if not self.validator.is_valid_solution(child, graph):
        return GreedyAlgorithm().solve(graph, list(license_types))
    return child

def _mutate(self, solution: Solution, graph: nx.Graph,
           license_types: Sequence[LicenseType]) -> Solution:
    neighbors = MutationOperators.generate_neighbors(solution, graph, license_types, k=5)
    valid_neighbors = [s for s in neighbors if self.validator.is_valid_solution(s, graph)]
    if not valid_neighbors:
        return solution
    return min(valid_neighbors, key=lambda s: s.total_cost)

```

#### A.4.2 Optymalizacja mrówkowa

Kluczowe fragmenty algorytmu mrówkowego z konstrukcją rozwiązań oraz aktualizacją śladu feromonowego.

```

class AntColonyOptimization(Algorithm):
    def __init__(self, alpha: float = 1.0, beta: float = 2.0, evaporation: float = 0.5,
                 q0: float = 0.9, num_ants: int = 20):

```



```

self.alpha, self.beta, self.evap, self.q0, self.num_ants = alpha, beta, evaporation, q0, num_ants

def solve(self, graph: nx.Graph, license_types: Sequence[LicenseType], **kwargs) -> Solution:
    pher = self._init_pher(graph, license_types) # Inicjalizacja feromonu
    heur = self._init_heur(graph, license_types) # Informacja heurystyczna
    best = GreedyAlgorithm().solve(graph, license_types)
    self._deposit(pher, best)

    for _ in range(max_iter_aco):
        improved = False
        for _ in range(num_ants):
            cand = self._construct(graph, license_types, pher, heur)
            ok, _ = self.validator.validate(cand, graph)
            if ok and cand.total_cost < best.total_cost:
                best, improved = cand, True
            self._evaporate(pher)
            self._deposit(pher, best)
        return best

def _construct(self, graph: nx.Graph, lts: Sequence[LicenseType],
               pher: dict, heur: dict) -> Solution:
    uncovered: set[Any] = set(graph.nodes())
    groups: list[LicenseGroup] = []

    while uncovered:
        owner = self._select_owner(uncovered, lts, pher, heur)
        lt = self._select_license(owner, lts, pher, heur)

        pool = (set(graph.neighbors(owner)) | {owner}) & uncovered
        if len(pool) < lt.min_capacity:
            # Fallback do licencji indywidualnej
            singles = [x for x in lts if x.min_capacity <= 1 <= x.max_capacity]
            lt = min(singles, key=lambda x: x.cost) if singles else lt
            groups.append(LicenseGroup(lt, owner, frozenset()))
            uncovered.remove(owner)
            continue

        # Wybór członków grupy według stopnia
        k = max(0, lt.max_capacity - 1)
        add = sorted((pool - {owner}), key=lambda n: graph.degree[n], reverse=True)[:k]
        groups.append(LicenseGroup(lt, owner, frozenset(add)))
        uncovered -= {owner} | set(add)

    return Solution(groups=tuple(groups))

def _select_owner(self, uncovered: set, lts: Sequence[LicenseType],
                 pher: dict, heur: dict) -> Any:
    scores = {}
    for n in uncovered:

```

```

        acc = sum((pher.get((n, lt.name), 1.0) ** self.alpha) *
                    (heur.get((n, lt.name), 1.0) ** self.beta) for lt in lts)
        scores[n] = acc / max(1, len(lts))
    return self._roulette_or_best(list(uncovered), scores)

def _evaporate(self, pher: dict) -> None:
    for k in pher:
        pher[k] *= (1.0 - self.evap)

def _deposit(self, pher: dict, sol: Solution) -> None:
    if sol.total_cost > 0:
        q = 1.0 / sol.total_cost
        for g in sol.groups:
            for n in g.all_members:
                k = (n, g.license_type.name)
                if k in pher:
                    pher[k] += q

```

#### A.4.3 Wyżarzanie symulowane

Fragment implementacji wyżarzania z generowaniem sąsiadów i akceptacją według kryterium Metropolis'a.

```

class SimulatedAnnealing(Algorithm):
    def solve(self, graph: nx.Graph, license_types: Sequence[LicenseType], **kwargs) -> Solution:
        current = GreedyAlgorithm().solve(graph, license_types)
        best = current
        temp = self.temp_initial
        stall = 0

        for _ in range(self.max_iterations):
            if temp < self.temp_min:
                break

            cand = self._neighbor(current, graph, license_types)
            if cand is None:
                stall += 1
            else:
                delta = cand.total_cost - current.total_cost
                if delta < 0 or random.random() < math.exp(-delta / max(temp, 1e-10)):
                    current = cand
                    if current.total_cost < best.total_cost:
                        best, stall = current, 0
                    else:
                        stall += 1
                else:
                    stall += 1

            if stall >= self.max_stall:
                stall, temp = 0, max(self.temp_min, 0.5 * temp)

```

```

        temp *= self.cooling_rate

    return best

def _neighbor(self, solution: Solution, graph: nx.Graph, lts: Sequence[LicenseType]) -> Solution:
    moves = [self._mv_change_license, self._mv_move_member,
             self._mv_swap_members, self._mv_merge_groups, self._mv_split_group]

    for _ in range(12):
        mv = random.choice(moves)
        try:
            cand = mv(solution, graph, lts)
            if cand and self.validator.validate(cand, graph)[0]:
                return cand
        except Exception:
            continue
    return None

```

## A.5 Operatory mutacji i sąsiedztwa

Kluczowe operatory używane przez metaheurystyki do generowania sąsiadów i eksploracji przestrzeni rozwiązań.

```

class MutationOperators:
    @staticmethod
    def generate_neighbors(base: Solution, graph: nx.Graph,
                          license_types: Sequence[LicenseType], k: int = 10) -> list[Solution]:
        ops = (MutationOperators.change_license_type, MutationOperators.reassign_member,
               MutationOperators.merge_groups, MutationOperators.split_group)
        weights = (0.3, 0.3, 0.2, 0.2)
        out: list[Solution] = []
        attempts = 0

        while len(out) < k and attempts < k * 10:
            attempts += 1
            op = random.choices(ops, weights=weights, k=1)[0]
            try:
                cand = op(base, graph, list(license_types))
                if cand is not None:
                    out.append(cand)
            except Exception:
                continue
        return out

    @staticmethod
    def change_license_type(solution: Solution, graph: nx.Graph,
                           license_types: list[LicenseType]) -> Solution | None:
        if not solution.groups:
            return None
        group = random.choice(solution.groups)

```

```

compatible = SolutionBuilder.get_compatible_license_types(
    group.size, license_types, exclude=group.license_type
)
if not compatible:
    return None

new_lt = random.choice(compatible)
new_groups = []
for g in solution.groups:
    if g is group:
        new_groups.append(LicenseGroup(new_lt, g.owner, g.additional_members))
    else:
        new_groups.append(g)
return SolutionBuilder.create_solution_from_groups(new_groups)

@staticmethod
def reassign_member(solution: Solution, graph: nx.Graph,
                    license_types: list[LicenseType]) -> Solution | None:
    if len(solution.groups) < 2:
        return None

    donors = [g for g in solution.groups
               if g.size > g.license_type.min_capacity and g.additional_members]
    receivers = [g for g in solution.groups if g.size < g.license_type.max_capacity]

    if not donors or not receivers:
        return None

    from_group = random.choice(donors)
    pot_receivers = [g for g in receivers if g is not from_group]
    if not pot_receivers:
        return None

    to_group = random.choice(pot_receivers)
    member = random.choice(list(from_group.additional_members))
    allowed = SolutionBuilder.get_owner_neighbors_with_self(graph, to_group.owner)

    if member not in allowed:
        return None

    # Przeprowadzenie transferu
    new_groups = []
    for g in solution.groups:
        if g is from_group:
            new_groups.append(LicenseGroup(
                g.license_type, g.owner, g.additional_members - {member}
            ))
        elif g is to_group:
            new_groups.append(LicenseGroup(

```

```

        g.license_type, g.owner, g.additional_members | {member}
    ))
else:
    new_groups.append(g)

return SolutionBuilder.create_solution_from_groups(new_groups)

@staticmethod
def split_group(solution: Solution, graph: nx.Graph,
               license_types: list[LicenseType]) -> Solution | None:
    splittable = [g for g in solution.groups if g.size > 2]
    if not splittable:
        return None

    group = random.choice(splittable)
    members = list(group.all_members)

    for _ in range(4): # Próbuje kilka podziałów
        random.shuffle(members)
        cut = random.randint(1, len(members) - 1)
        part1, part2 = members[:cut], members[cut:]

        # Sprawdź kompatybilność typów licencji
        compat1 = SolutionBuilder.get_compatible_license_types(len(part1), license_types)
        compat2 = SolutionBuilder.get_compatible_license_types(len(part2), license_types)

        if not compat1 or not compat2:
            continue

        # Wybierz właścicieli i typy licencji
        owner1, owner2 = random.choice(part1), random.choice(part2)
        lt1, lt2 = min(compat1, key=lambda x: x.cost), min(compat2, key=lambda x: x.cost)

        # Sprawdź ograniczenia sąsiedztwa
        if (set(part1).issubset(SolutionBuilder.get_owner_neighbors_with_self(graph, owner1)) and
            set(part2).issubset(SolutionBuilder.get_owner_neighbors_with_self(graph, owner2))):

            new_groups = [g for g in solution.groups if g is not group]
            new_groups.append(LicenseGroup(lt1, owner1, frozenset(set(part1) - {owner1})))
            new_groups.append(LicenseGroup(lt2, owner2, frozenset(set(part2) - {owner2})))
            return SolutionBuilder.create_solution_from_groups(new_groups)

    return None

```

## A.6 Funkcje pomocnicze

### A.6.1 Budowanie i walidacja rozwiązań

Klasy pomocnicze odpowiedzialne za tworzenie i weryfikację poprawności rozwiązań.

```

class SolutionBuilder:
    @staticmethod
    def get_compatible_license_types(group_size: int, license_types: Sequence[LicenseType],
                                     exclude: LicenseType | None = None) -> list[LicenseType]:
        out: list[LicenseType] = []
        for lt in license_types:
            if exclude and lt == exclude:
                continue
            if lt.min_capacity <= group_size <= lt.max_capacity:
                out.append(lt)
        return out

    @staticmethod
    def get_owner_neighbors_with_self(graph: nx.Graph, owner: N) -> set[N]:
        return set(graph.neighbors(owner)) | {owner}

    @staticmethod
    def find_cheapest_single_license(license_types: Sequence[LicenseType]) -> LicenseType:
        singles = [lt for lt in license_types if lt.min_capacity <= 1]
        return min(singles or list(license_types), key=lambda lt: lt.cost)

class SolutionValidator:
    def validate(self, solution: Solution[N], graph: nx.Graph) -> tuple[bool, list[ValidationIssue]]:
        issues: list[ValidationIssue] = []
        nodes = set(graph.nodes())
        groups = tuple(solution.groups)

        # Sprawdzanie członków grup
        issues += self._check_group_members(groups, nodes)
        # Sprawdzanie pojemności licencji
        issues += self._check_group_capacity(groups)
        # Sprawdzanie ograniczeń sąsiedztwa
        issues += self._check_neighbors(groups, graph, nodes)
        # Sprawdzanie braku nakładania się grup
        issues += self._check_no_overlap(groups)
        # Sprawdzanie pokrycia wszystkich węzłów
        issues += self._check_coverage(groups, nodes)

        return (not issues, issues)

    def _check_neighbors(self, groups: tuple[LicenseGroup[N], ...], graph: nx.Graph,
                        nodes: set[N]) -> list[ValidationIssue]:
        issues: list[ValidationIssue] = []
        for idx, g in enumerate(groups):
            if g.owner not in nodes:
                continue
            allowed_any = set(graph.neighbors(g.owner)) | {g.owner}
            not_neighbors = set(g.all_members) - allowed_any
            if not_neighbors:

```

```

        issues.append(ValidationIssue(
            "DISCONNECTED_MEMBER",
            f"group#{idx} owner {g.owner!r} has non-neighbor members: {list(not_neighbors)!r}"
        ))
    return issues

def _check_coverage(self, groups: tuple[LicenseGroup[N], ...], nodes: set[N]) -> list[ValidationIssue]:
    issues: list[ValidationIssue] = []
    covered = set().union(*(set(g.all_members) for g in groups)) if groups else set()
    missing = nodes - covered
    if missing:
        issues.append(ValidationIssue("MISSING_COVERAGE", f"missing nodes: {list(missing)!r}"))
    return issues

```

### A.6.2 Konfiguracje licencyjne

Fabryka konfiguracji licencyjnych obsługująca różne rodziny licencji oraz dynamiczne warianty cenowe.

```

class LicenseConfigFactory:
    _CONFIGS: ClassVar[dict[str, Callable[[], list[LicenseType]]] = {
        "duolingo_super": lambda: [
            LicenseType("Individual", 13.99, 1, 1, LicenseConfigFactory.BLACK),
            LicenseType("Family", 29.17, 2, 6, LicenseConfigFactory.BLACK),
        ],
        "spotify": lambda: [
            LicenseType("Individual", 23.99, 1, 1, LicenseConfigFactory.RED),
            LicenseType("Duo", 30.99, 2, 2, LicenseConfigFactory.GREEN),
            LicenseType("Family", 37.99, 2, 6, LicenseConfigFactory.BLUE),
        ],
        "netflix": lambda: [
            LicenseType("Basic", 33, 1, 1, LicenseConfigFactory.RED),
            LicenseType("Standard", 49, 1, 2, LicenseConfigFactory.GREEN),
            LicenseType("Premium", 67, 1, 4, LicenseConfigFactory.BLUE),
        ],
        "roman_domination": lambda: [
            LicenseType("Solo", 1.0, 1, 1, LicenseConfigFactory.BLUE),
            LicenseType("Group", 2.0, 2, 999999, LicenseConfigFactory.RED),
        ],
    }

    @classmethod
    def get_config(cls, name: str) -> list[LicenseType]:
        # Obsługa dynamicznych wariantów roman_p_<price>
        if name.startswith("roman_p_"):
            p_str = name.split("_", 2)[2].replace("_", ".")
            try:
                p_val = float(p_str)
                return [
                    LicenseType("Solo", 1.0, 1, 1, cls.BLUE),

```

```

        LicenseType("Group", p_val, 2, 999999, cls.RED),
    ]
except Exception:
    raise ValueError(f"Invalid roman price format: {name}")

# Obsługa dynamicznych wariantów duolingo_p_<price>
if name.startswith("duolingo_p_"):
    p_str = name.split("_", 2)[2].replace("_", ".")
    try:
        p_val = float(p_str)
        return [
            LicenseType("Individual", 1.0, 1, 1, cls.RED),
            LicenseType("Family", p_val, 2, 6, cls.BLUE),
        ]
    except Exception:
        raise ValueError(f"Invalid duolingo price format: {name}")

# Konfiguracje statyczne
try:
    return cls._CONFIGS[name]()
except KeyError:
    available = ", ".join(cls._CONFIGS.keys())
    raise ValueError(f"Unsupported license config: {name}. Available: {available}")

```

## A.7 Symulacja dynamiczna

### A.7.1 Symulator ewolucji sieci

Główne komponenty symulatora odpowiedzialnego za mutacje struktury grafu w eksperymentach dynamicznych.

```

@dataclass
class MutationParams:
    add_nodes_prob: float = 0.1
    remove_nodes_prob: float = 0.05
    add_edges_prob: float = 0.15
    remove_edges_prob: float = 0.1
    max_nodes_add: int = 3
    max_nodes_remove: int = 2
    max_edges_add: int = 5
    max_edges_remove: int = 3
    mode_nodes: str = "random"      # "random" lub "preferential"
    mode_edges: str = "random"      # "random", "preferential", "triadic", "rewire_ws"
    add_node_attach_m: int = 2
    triadic_trials: int = 20

class DynamicNetworkSimulator:
    def __init__(self, mutation_params: MutationParams | None = None, seed: int | None = None):
        self.mutation_params = mutation_params or MutationParams()
        self.next_node_id = 0

```



```

        if seed is not None:
            random.seed(seed)

def _apply_mutations(self, graph: nx.Graph) -> tuple[nx.Graph, list[str]]:
    mutations = []

    # Dodawanie węzłów
    if random.random() < self.mutation_params.add_nodes_prob:
        num_add = random.randint(1, self.mutation_params.max_nodes_add)
        new_nodes = self._add_nodes(graph, num_add)
        mutations.append(f"Added nodes: {new_nodes}")

    # Usuwanie węzłów (z zachowaniem minimalnego rozmiaru)
    if (random.random() < self.mutation_params.remove_nodes_prob
        and graph.number_of_nodes() > 5):
        num_remove = random.randint(1, min(self.mutation_params.max_nodes_remove,
                                             graph.number_of_nodes() - 5))
        removed_nodes = self._remove_nodes(graph, num_remove)
        mutations.append(f"Removed nodes: {removed_nodes}")

    # Dodawanie krawędzi
    if random.random() < self.mutation_params.add_edges_prob:
        num_add = random.randint(1, self.mutation_params.max_edges_add)
        if self.mutation_params.mode_edges == "rewire_ws":
            added_c, removed_c = self._rewire_edges(graph, num_add)
            if added_c: mutations.append(f"Added {added_c} edges")
            if removed_c: mutations.append(f"Removed {removed_c} edges")
        else:
            added_edges = self._add_edges(graph, num_add)
            mutations.append(f"Added {len(added_edges)} edges")

    return (graph, mutations)

def _add_nodes(self, graph: nx.Graph, num_nodes: int) -> list[int]:
    new_nodes = []
    existing_nodes = list(graph.nodes())

    for _ in range(num_nodes):
        new_node = self.next_node_id
        self.next_node_id += 1
        graph.add_node(new_node)
        new_nodes.append(new_node)

    # Podłączanie do istniejących węzłów
    if existing_nodes:
        m = min(self.mutation_params.add_node_attach_m, len(existing_nodes))

        if self.mutation_params.mode_nodes == "preferential":
            # Attachment proporcjonalny do stopni węzłów

```

```

deg = graph.degree
weights = [deg[v] + 1 for v in existing_nodes]
total = sum(weights)
chosen = set()

for _ in range(m):
    if not existing_nodes: break
    r = random.uniform(0, total)
    acc, pick_idx = 0.0, 0
    for idx, w in enumerate(weights):
        acc += w
        if acc >= r:
            pick_idx = idx
            break
    v = existing_nodes[pick_idx]
    if v not in chosen:
        graph.add_edge(new_node, v)
        chosen.add(v)
    total -= weights[pick_idx]
    existing_nodes.pop(pick_idx)
    weights.pop(pick_idx)
else:
    # Losowe podłączanie
    neighbors = random.sample(existing_nodes, m)
    for neighbor in neighbors:
        graph.add_edge(new_node, neighbor)

existing_nodes = list(graph.nodes())

return new_nodes

def _add_edges(self, graph: nx.Graph, num_edges: int) -> list[tuple[int, int]]:
    nodes = list(graph.nodes())
    added_edges = []
    if len(nodes) < 2: return added_edges

    mode = self.mutation_params.mode_edges
    if mode == "triadic":
        # Zamykanie trójkątów
        attempts = 0
        while len(added_edges) < num_edges and attempts < num_edges * 20:
            w = random.choice(nodes)
            neigh = list(graph.neighbors(w))
            if len(neigh) >= 2:
                u, v = random.sample(neigh, 2)
                if not graph.has_edge(u, v):
                    graph.add_edge(u, v)
                    added_edges.append((u, v))
            attempts += 1

```

```

elif mode == "preferential":
    # Preferencyjne dodawanie proporcjonalne do iloczynów stopni
    attempts = 0
    while len(added_edges) < num_edges and attempts < num_edges * 20:
        u, v = random.sample(nodes, 2)
        if graph.has_edge(u, v):
            attempts += 1
            continue
        deg = graph.degree
        w = (deg[u] + 1) * (deg[v] + 1)
        max_deg = max((deg[x] for x in nodes), default=1)
        accept_p = min(1.0, w / float((max_deg + 1) ** 2))
        if random.random() < accept_p:
            graph.add_edge(u, v)
            added_edges.append((u, v))
            attempts += 1

    return added_edges

```