目录

1 网格数值积分

1.1 三角形与四边形之间的映射

把参考矩形$\square = [-1,1]^2$的四个顶点$\widehat{P}_1(-1,-1), \widehat{P}_2(1,-1), \widehat{P}_3(1,1)$ 与$\widehat{P}_4(-1,1)$ 简记为$\{\widehat{P}_i(\xi_i,\eta_i)\}_{i=1}^4$, 同时把一般的凸四边形$\diamondsuit$的四个顶点记为$\{P_i(x_i,y_i)\}_{i=1}^4$，定义

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i\xi_i\eta_i, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i\xi_i, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i\eta_i, \quad \alpha_4 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i, \\ \beta_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 y_i\xi_i\eta_i, \quad \beta_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 y_i\xi_i, \quad \beta_3 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 y_i\eta_i, \quad \beta_4 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 y_i. \end{aligned} \tag{1.1}$$

给出常见参考矩形与一般四边形的变换$\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F}: x = \alpha_1\xi\eta + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4, \quad y = \beta_1\xi\eta + \beta_2\xi + \beta_3\eta + \beta_4, \quad \forall(\xi,\eta) \in \square. \tag{1.2}$$

它是一个从$\square$ 到$\diamondsuit$ 的一一映射，相应变换的雅可比为

$$J = |\mathbb{J}| = \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1\eta+\alpha_2 & \beta_1\eta+\beta_2 \\ \alpha_1\xi+\alpha_3 & \beta_1\xi+\beta_3 \end{vmatrix} = D_1\xi + D_2\eta + D_3. \tag{1.3}$$

这里

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

很显然雅可比矩阵$\mathbb{J}$ 的伴随矩阵$\mathbb{J}^*$为

$$\mathbb{J}^* = J\mathbb{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1\xi+\beta_3 & -\beta_1\eta-\beta_2 \\ -\alpha_1\xi-\alpha_3 & \alpha_1\eta+\alpha_2 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

1.2 求插值函数的L_2范数

考虑的问题是用数值积分计算

$$||f - \mathcal{I}^p f||_{L^2(K)} \tag{1.6}$$

其中，K为三角形(可以强行增加一个顶点让三角形变成四边形)或者凸四边形区域。设$[-1,1]$上的插值节点为$\{\xi_i\}_{i=1}^p$，$h_m(\xi)$为节点$\{\xi_i\}_{i=1}^p$上的拉格让日插值多项式基函数

（满足$h_m(\xi_n)=0, m\neq n; h_m(\xi_n)=1, m\neq n$），$\mathcal{I}^p$为$p$次插值算子满足

$$\mathcal{I}^p f(x,y)=\sum_{m,n=1}^{p} f_{mn}\widehat{\varphi}_{mn}\circ\mathscr{F}^{-1}(x,y),\quad \widehat{\varphi}_{mn}(\xi,\eta)=h_m(\xi)h_n(\eta),\ f_{mn}=f\circ\mathscr{F}(\xi_m,\xi_n). \tag{1.7}$$

这里的$\mathscr{F}$为$[-1,1]^2$到K上变换（默认采用参考矩形与四边形之间的双线性变换(1.2)），设对应雅可比为J，则有

$$\begin{aligned}||f-\mathcal{I}^p f||^2_{L^2(K)} &= \int_K (f-\mathcal{I}^p f)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\widehat{f}-\sum_{m,n=1}^{p} f_{mn}\widehat{\varphi}_{mn}\Big)^2 J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &= \sum_{i,j=1}^{N}\Big(f\circ\mathscr{F}(P_i,P_j)-\sum_{m,n=1}^{p} f_{mn}h_m(P_i)h_n(P_j)\Big)^2 J(P_i,P_j)W_iW_j\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中$\{P_i,W_i\}_{i=1}^N$为数值积分点和权。记

$$\mathbb{H}=[h_i(P_j)]_{p\times N}$$

$$\mathbb{F}=[f\circ\mathscr{F}(\xi_i,\xi_j)]_{p\times p}$$

$$\widehat{\mathbb{F}}=[f\circ\mathscr{F}(P_i,P_j)]_{N\times N}$$

$$\mathbb{W}=[W_iW_j]_{N\times N}$$

$$\mathbb{J}=[J(P_i,P_j)]_{N\times N}$$

于是离散积分式(1.8)可以写成矩阵的形式

$$||f-\mathcal{I}^p f||^2_{L^2(K)}=(\widehat{\mathbb{F}}-\mathbb{H}^{\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H})\star(\widehat{\mathbb{F}}-\mathbb{H}^{\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H})\star\mathbb{J}\star\mathbb{W} \tag{1.9}$$

这里的运算符号$\star$表示矩阵的分量积，即两个矩阵的所有的对应位置的元素的乘积之和，如果是多个矩阵运算，表示各个矩阵的所有的对应位置的元素的乘积之和，例如$\mathbb{A}\star\mathbb{B}\star\mathbb{C}=\sum A_{ij}B_{ij}C_{ij}$。

同样地有

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\widehat{\mathbb{F}}\star\mathbb{J}\star\mathbb{W}$$

对于一般有限元右端项求内积$(f,\varphi_{mn})_K$，我们有

$$(f,\varphi_{mn})_K=\int_{\Box}\widehat{f}\,\widehat{\varphi}_{mn}J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\sum_{i,j=1}^{N} f\circ\mathscr{F}(P_i,P_j)h_m(P_i)h_n(P_j)J(P_i,P_j)W_iW_j=\widehat{\mathbb{F}}\star\mathbb{J}\star\mathbb{W}\star\mathbb{H}_{mn}$$

其中$\mathbb{H}_{mn}$ 表示矩阵$\mathbb{H}$的第m行的行向量$\mathbf{H}_m$，与第n行的行向量$\mathbf{H}_n$的外积，即

$$\mathbb{H}_{mn} = \mathbf{H}_m^T \mathbf{H}_n.$$

1.3 多个单元问题

多个单元问题有两种来源，一是积分区域本身是一个比较大型的不规则的多边形网格$\mathcal{T}_h = \{K\}$，另一个是函数的光滑性比较差，为了获得数值积分更高的精度，因此需要把参考矩形$\square = [-1,1]^2$剖分成若干个全等的矩形子区域$\{\square_i\}_{i=1}^s$，且满足$\square = \bigcup_{i=1}^s \square_i$,同时各个子区域互不重叠。这两种情形看似一回事，但实现机制有所不同。我们希望能实现的目标是，给定如下已知条件：

1. 被积函数f。
2. 积分区域，可以是一个网格$\mathcal{T}_h$，也可以是一个四边形单元K的四个顶点的坐标。
3. 积分节点和积分权$\{P_i, W_i\}_{i=1}^N$。
4. 插值节点$\{\xi_i\}_{i=1}^p$，在不需要考虑插值的时候，这个参数可以不要选择。

程序能通过上述的已知条件，能够很方便求出如下积分式：

1. 函数f自身的积分，以及函数L^2范数。
2. 函数f的插值$\mathcal{I}^p f$的积分，以及插值的L^2范数。
3. 函数f的插值的L^2误差。

同时能满足要求：对于单个区域K上的积分都可以选择是否将该区域分成若干个子区域。

注 1.1 对于K是三角形的情形，程序会自动把K当成四边形处理，即在三角形的某条边上强行增加一个点。这里有两个控制参数，一个是边序号，一个是点的位置。

对于式(1.8)计算单元区域K上的插值误差，具体分解为：

$$\begin{aligned}
||f-\mathcal{I}^p f||_{L^2(K)}^2 &= \int_{\square}\left(f\circ\mathscr{F}(\xi,\eta)-\sum_{m,n=1}^{p} f_{mn}\widehat{\varphi}_{mn}\right)^2 J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&= \sum_{k=1}^{s}\int_{\square_k}\left(f\circ\mathscr{F}(\xi,\eta)-\sum_{m,n=1}^{p} f_{mn}\widehat{\varphi}_{mn}\right)^2 J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\int_{\square}\left(f\circ\mathscr{F}\mathscr{S}_k(\xi,\eta)-\sum_{m,n=1}^{p} f_{mn}h_m\circ\mathscr{S}_k^{\xi}(\xi)h_n\circ\mathscr{S}_k^{\eta}(\eta)\right)^2 J\circ\mathscr{S}_k(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}(\widehat{\mathbb{F}}_k-\mathbb{H}_k^{\eta\,\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H}_k^{\xi})\star(\widehat{\mathbb{F}}_k-\mathbb{H}_k^{\eta\,\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H}_k^{\xi})\star\mathbb{J}_k\star\mathbb{W} \\
&= \frac{1}{s}\mathbb{W}\star\left(\sum_{k=1}^{s}(\widehat{\mathbb{F}}_k-\mathbb{H}_k^{\eta\,\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H}_k^{\xi})\star(\widehat{\mathbb{F}}_k-\mathbb{H}_k^{\eta\,\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H}_k^{\xi})\star\mathbb{J}_k\right)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

这里的$\mathscr{S}_k$为$\square$到$\square_k$之间的线性变换，注意由于每个子区域是全等的，因此它们变换的雅可比恒为$\frac{1}{s}$，由于变换$\mathscr{S}_k$为两个矩形之间的线性变换，从而该变换对每个分量而言是独立的，于是可以设$\mathscr{S}_k(\xi,\eta)=\big(\mathscr{S}_k^{\xi}(\xi),\mathscr{S}_k^{\eta}(\eta)\big)$，其中$\mathscr{S}_k^{\xi}$与$\mathscr{S}_k^{\eta}$都是一维线性变换；积分式(1.10)中的矩阵分别为

$$\mathbb{H}_k^{\xi}=[h_i\circ\mathscr{S}_k^{\xi}(P_j)]_{p\times N}$$

$$\mathbb{H}_k^{\eta}=[h_i\circ\mathscr{S}_k^{\eta}(P_j)]_{p\times N}$$

$$\widehat{\mathbb{F}}_k=[f\circ\mathscr{F}\mathscr{S}_k(P_i,P_j)]_{N\times N}$$

$$\mathbb{J}_k=[J\circ\mathscr{S}_k(P_i,P_j)]_{N\times N}$$

类似地，对于网格$\mathcal{T}_h$上的插值误差可以利用如下矩阵公式

$$\begin{aligned}||f-\mathcal{I}^pf||_{L^2(\mathcal{T}_h)}^2&=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}||f-\mathcal{I}^pf||_{L^2(K)}^2\\&=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\widehat{\mathbb{F}}-\mathbb{H}^{\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H})\star(\widehat{\mathbb{F}}-\mathbb{H}^{\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H})\star\mathbb{J}\star\mathbb{W}\\&=\mathbb{W}\star\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\widehat{\mathbb{F}}-\mathbb{H}^{\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H})\star(\widehat{\mathbb{F}}-\mathbb{H}^{\mathrm{T}}\mathbb{F}\mathbb{H})\star\mathbb{J}\Big)\end{aligned}$$

注 1.2 从上述的一些公式可以看出矩阵$\mathbb{W}$与$\mathbb{H}$只需要计算一次，并且$\mathbb{W}$可以提出来。

1.4 数值积分算例

设$p>0$为正实在数，考虑函数$f(x,y)=(x+y)^p$在$[-1,1]^2$上的积分

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\int_{-1}^1(x+y)^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-1}^1\frac{1}{p+1}\Big((y+1)^{p+1}-(y-1)^{p+1}\Big)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{p+1}\frac{1}{p+2}\Big((y+1)^{p+2}-(y-1)^{p+2}\Big)\Big|_{-1}^1\\&=\frac{1}{p+1}\frac{1}{p+2}(2^{p+2}+(-2)^{p+2})\end{aligned}\tag{1.11}$$

很显然当p为奇数时，积分为0。

如果$p=\frac{2}{3}$时，有

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1(x+y)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{40}\big(2^{\frac{8}{3}}+(-2)^{\frac{8}{3}}\big)=\frac{9}{20}2^{\frac{8}{3}}=\frac{9}{5}4^{\frac{1}{3}}$$

如果$p=\frac{10}{3}$时，有

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1(x+y)^{\frac{10}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{208}\big(2^{\frac{16}{3}}+(-2)^{\frac{16}{3}}\big)=\frac{9}{104}2^{\frac{16}{3}}=\frac{36}{13}2^{\frac{1}{3}}$$

2 二维质量矩阵与对流矩阵

本节的所有相关符号沿用上节。

2.1 需要考虑的积分

在HDG的计算中，我们需要考虑质量矩阵$\mathbb{M}$和对流矩阵$\mathbb{C}_x$与$\mathbb{C}_y$如下所示

$$\mathbb{M} = \left[(M)_{ij}^{i'j'}\right]_{p^2p^2} = \left[\int_K \varphi_{ij}\varphi_{i'j'}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]_{p^2p^2} = \left[\int_{\Box} \widehat{\varphi}_{ij}\widehat{\varphi}_{i'j'}J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]_{p^2p^2}, \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{C}_x \\ \mathbb{C}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[(C_x)_{ij}^{i'j'}\right]_{p^2p^2} \\ \left[(C_y)_{ij}^{i'j'}\right]_{p^2p^2} \end{pmatrix} = \int_K \varphi_{ij}\nabla\varphi_{i'j'}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Box} \widehat{\varphi}_{ij}\mathbb{J}^*\widehat{\nabla}\widehat{\varphi}_{i'j'}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{2.2}$$

由于(2.1)与(2.2)中涉及的积分项中的$\widehat{\varphi}, J, \mathbb{J}^*, \widehat{\nabla}\widehat{\varphi}$都只是多项式，因此这三个矩阵都是确定的值，如果这个积分里面还有别的函数，例如β，我们可以将β的插值函数进行替换即可。

2.2 积分的具体细节

定义矩阵$\widetilde{\mathbb{M}} = (\widetilde{M}_{ij}), \widehat{\mathbb{M}} = (\widehat{M}_{ij}), \widetilde{\mathbb{C}} = (\widetilde{C}_{ij}), \widehat{\mathbb{C}} = (\widehat{C}_{ij})$满足

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{ij} &= \int_{-1}^{1} h_i(\xi)h_j(\xi)d\xi, \quad \widehat{M}_{ij} = \int_{-1}^{1} h_i(\xi)h_j(\xi)\xi d\xi, \\ \widetilde{C}_{ij} &= \int_{-1}^{1} h_i'(\xi)h_j(\xi)d\xi, \quad \widehat{C}_{ij} = \int_{-1}^{1} h_i'(\xi)h_j(\xi)\xi d\xi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

从而(2.1)有如下关系

$$\int_{\Box} \widehat{\varphi}_{ij}\widehat{\varphi}_{i'j'}J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = D_1\widehat{M}_{ii'}\widetilde{M}_{jj'} + D_2\widehat{M}_{jj'}\widetilde{M}_{ii'} + D_3\widetilde{M}_{ii'}\widetilde{M}_{jj'}$$

因此有

$$\mathbb{M} = D_1\widetilde{\mathbb{M}} \otimes \widehat{\mathbb{M}} + D_2\widehat{\mathbb{M}} \otimes \widetilde{\mathbb{M}} + D_3\widetilde{\mathbb{M}} \otimes \widetilde{\mathbb{M}}.$$

同样对于(2.2)有

$$\int_{\Box} \mathbb{J}^*\widehat{\nabla}\widehat{\varphi}_{ij}\widehat{\varphi}_{i'j'}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \begin{pmatrix} (\beta_1\widehat{C}_{ii'} + \beta_3\widetilde{C}_{ii'})\widetilde{M}_{jj'} - (\beta_1\widehat{C}_{jj'} + \beta_2\widetilde{C}_{jj'})\widetilde{M}_{ii'} \\ -(\alpha_1\widehat{C}_{ii'} + \alpha_3\widetilde{C}_{ii'})\widetilde{M}_{jj'} + (\alpha_1\widehat{C}_{jj'} + \alpha_2\widetilde{C}_{jj'})\widetilde{M}_{ii'} \end{pmatrix}$$

相对应的矩阵有如下关系式

$$\mathbb{C}_x = \beta_1 \widetilde{\mathbb{M}} \otimes \widehat{\mathbb{C}} + \beta_3 \widetilde{\mathbb{M}} \otimes \widetilde{\mathbb{C}} - \beta_1 \widehat{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\mathbb{M}} - \beta_2 \widetilde{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\mathbb{M}},$$

$$\mathbb{C}_y = -\alpha_1 \widetilde{\mathbb{M}} \otimes \widehat{\mathbb{C}} - \alpha_3 \widetilde{\mathbb{M}} \otimes \widetilde{\mathbb{C}} + \alpha_1 \widehat{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\mathbb{M}} + \alpha_2 \widetilde{\mathbb{C}} \otimes \widetilde{\mathbb{M}}.$$

因此只需要事先计算好(2.3)中的四个矩阵就能计算好质量矩阵和对流矩阵。