

密 级\_\_\_\_\_



桂林电子科技大学  
GUILIN UNIVERSITY OF ELECTRONIC TECHNOLOGY

# 硕士 学位 论 文

题目 几类非线性多智能体网络系统在间歇控制下的一致性

(英文) Consensus of Classes of Nonlinear Multi-Agent

Network Systems via Intermittent Control

研究 生 学 号: 1707201042

研 究 生 姓 名: 张志铖

指导教师姓名、职称: 马忠军 教授

申 请 学 位 门 类: 理学硕士

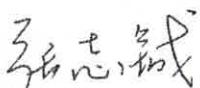
学 科、专 业: 数 学

论 文 答 辩 日 期: 2020 年 5 月 24 日

## 独创性（或创新性）声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得桂林电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

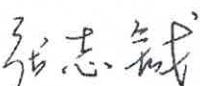
申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

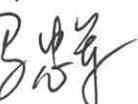
本人签名： 日期：2020.05.26

## 关于论文使用授权的说明

本人完全了解桂林电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属桂林电子科技大学。本人保证毕业离校后，发表论文或使用论文工作成果时署名单位仍然为桂林电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。（保密的论文在解密后遵守此规定）

本学位论文属于保密在\_\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

本人签名： 日期：2020.05.26

导师签名： 日期：2020.05.26

## 摘要

在过去的几十年里，多智能体系统的一致性引起了数学、物理科学和网络控制等各个领域研究人员的高度关注。这主要是它不仅可以阐明观察到的许多自然现象，而且在不同领域具有广泛的应用，包括群集、蜂拥、汇合、编队和一致等等。一致性是多智能体协调控制中重要且活跃的研究主题之一，它是指随着时间的演化，智能体之间通过信息交流和相互协作，最终达到一个理想的目标轨迹。

本文对复杂动态多智能体网络中的群集现象以及协调控制方法进行了深入分析，探究了一些更广泛的群体动力学行为：部分分量一致及滞后一致。此外，考虑到智能体之间信息交流的不连续性，设计了间歇控制协议，在通信信号是非周期间歇的假设下，引入牵制控制策略，即只需要控制多智能体中的一小部分智能体，并推导出相关的一致性判据。本文主要研究内容如下：

1. 领导-跟随网络在间歇控制下的部分分量一致性。部分分量一致性是指当时间趋于无穷时，多智能体系统中所有状态变量的某些分量趋于恒同，而剩余的分量不要求实现一致。这是一种比恒同一致弱的动力学行为。本文的第三章首次探究了基于间歇牵制控制下的领导-跟随多智能体系统的部分分量一致性，并假设间歇信号是非周期的。借助于置换矩阵方法，将最初的状态偏差转化一个新的偏差状态向量。然后，将多智能体系统部分分量一致性转换为关于新的偏差系统的部分变量稳定性。根据矩阵理论、图论和部分变元稳定性理论，推导出了网络系统按指数趋势实现部分量一致的一些充分条件。最后，数值模拟表明了理论结果的正确性。

2. 非周期间歇通信下的二阶多智能体系统滞后一致性。滞后一致是指一群跟随者的运动状态滞后趋同于领导者的轨迹状态。本文的第四章分析了多智能体系统在非周期间歇牵制控制下的二阶滞后一致性，所提出的一致性策略具有三个优点：(1) 通过非周期且间歇的信号传输依然实现有效的通信。(2) 只需要牵制一小部分智能体。(3) 基于间歇通信和时变状态设计了自适应间歇牵制控制。通过 Lyapunov 理论，给出了在指数稳定性下的滞后一致性判据。此外，还考虑了网络系统存在随机噪声扰动的情形。最后通过蔡氏电路的数值实验验证了所获得结果的有效性。

3. 有向网络下具有常时滞动力学的非线性耦合系统的二阶滞后一致性。本文第五章研究的网络系统不要求智能体之间的网络通信保持强连通或包含有向生成树。此外，与单一控制方法不同，该章采用了非周期间歇自适应牵制控制（结合间歇控制、自适应控制及牵制控制），该混合式控制方法不仅可以解决不连续网络通信信号，而且在大规模网络系统中只需要牵制少量节点。另外，还处理了具有时滞动力学的非线性耦合网络系统，并利用矩阵理论和 Lyapunov 函数推导出一些一致性判据。数值

## 摘要

---

模拟表明，非周期性间歇自适应牵制对非线性耦合系统的有效性.

**关键词：**多智能体系统；部分分量一致；滞后一致；非周期间歇；牵制控制；自适应控制；非线性耦合；

## Abstract

Consensus problem of multi-agent systems has attracted great attention of many researchers in various disciplines such as mathematics, physical science, control and network science during the past decades. This is mainly due to the fact that not only it can elucidate many natural phenomena observed, but also has extensive applications in many different fields, including swarming, flocking, rendezvous, formation, consensus to name a few. Consensus is one of the significant and active topics of research in multi-agent cooperative control, which can drive the group of agents to agree upon a desired trajectory by sharing local information with its neighbors as time goes on.

This paper analyses the collective phenomenon and coordination control methods for complex multi-agent networks to explore some more general dynamic behaviors, such as partial component consensus and lag consensus. In addition, since the intermittent information flows exist among the agents, then we design several intermittent actuators to satisfy the discontinuous communication property. Moreover, this paper uses a pinning policy in which only a few agents need to pin under the aperiodically intermittent signal assumption. Some sufficient conditions are derived to ensure that the network system will reach consensus. This paper main focus on several nonlinear multi-agent network systems via intermittent control.

1. Partial component consensus of leader-following multi-agent systems via intermittent pinning control. Partial component consensus means that some components of all state variables in a multi-agent system tend to be convergence as time tends to be infinite. It is a dynamics behavior that is weaker than identical consensus. In chapter 3, partial component consensus of leader-following multi-agent systems via intermittent pinning control is investigated for the first time, and the intermittent signal can be aperiodic. With the help of permutation matrix method, the corresponding error system is reduced to a new error system. Then, partial component consensus in the multi-agent system is converted into the stability of the new error system with respect to partial variables. Based on matrix theory, graph theory and stability theory of partial variables, some sufficient conditions to guarantee exponential partial component consensus are derived. Finally, numerical simulations are given to clarify correctness of the proposed control methods.

2. Second-order lag consensus tracking of multi-agent systems via aperiodically intermittent control. Lag consensus is a coordination behavior to make the followers' states track to that of the leader with a time delay. In chapter 4, we investigate the second-order lag consensus for nonlinear multi-agent systems with aperiodically intermittent pinning control. The proposed consensus scheme possesses three merits: 1) efficient communications can be achieved by aperiodic and intermittent signal transmission. 2) a simple external pinning policy needs to pin just a few agents. 3) distinctive adaptive control is based only on local intermittent communications and time-varying state. We give several sufficient criteria for the exponential convergence to lag consensus via Lyapunov theory. Moreover, we consider the network systems in the presence of random noise perturbation. Chua's circuit simulations are shown to clarify the effectiveness of the obtained results.

3. Aperiodically intermittent pinning control for lag consensus of multi-agent systems with delays has been investigated in chapter 5. This chapter studies the leader-following exponential lag consensus of nonlinear coupled second-order multi-agent systems under the directed network topology, where it is not necessary that the network structure is strongly connected or contains a directed spanning tree. Unlike the single control method, we exploit an aperiodically intermittent pinning control (combined intermittent control, adaptive control, pinning control), in which not only can solve the aperiodic and discontinuous signal transmissions of network communication, but also just need to pin a small fraction of agents in large-scaler network. We also address the nonlinear coupled networked system with delayed dynamics, and derive some novel criteria by virtue of matrix theory and Lyapunov function method. Numerical simulations clarify that the effectiveness of the aperiodically intermittent adaptive pinning policy for nonlinear coupled systems.

**Keywords:** multi-agent systems; partial component consensus; lag consensus; aperiodically intermittent; pinning control; adaptive control; nonlinear coupled

## 目录

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 摘要 .....                              | I   |
| Abstract.....                         | III |
| 目录 .....                              | V   |
| 符号缩写对照表 .....                         | VII |
| 第一章 绪论 .....                          | 1   |
| § 1.1 课题的研究背景与意义 .....                | 1   |
| § 1.2 多智能体系统一致性研究现状 .....             | 2   |
| § 1.2.1 一致性研究进展 .....                 | 2   |
| § 1.2.2 一致性的环境因素 .....                | 4   |
| § 1.2.3 一致性协同控制 .....                 | 6   |
| § 1.3 本文的主要工作 .....                   | 7   |
| 第二章 预备知识 .....                        | 9   |
| § 2.1 代数图论 .....                      | 9   |
| § 2.2 矩阵理论 .....                      | 10  |
| § 2.3 微分方程稳定性理论 .....                 | 11  |
| § 2.4 重要假设与引理 .....                   | 13  |
| 第三章 在间歇控制下领导-跟随部分分量一致性 .....          | 15  |
| § 3.1 引言 .....                        | 15  |
| § 3.2 模型介绍 .....                      | 16  |
| § 3.3 主要结果 .....                      | 17  |
| § 3.3.1 非周期间歇牵制控制下的部分分量一致性 .....      | 17  |
| § 3.3.2 周期间歇牵制控制下的部分分量一致性 .....       | 22  |
| § 3.4 数值模拟 .....                      | 24  |
| § 3.5 结语 .....                        | 29  |
| 第四章 非周期间歇牵制控制下二阶滞后一致性 .....           | 30  |
| § 4.1 引言 .....                        | 30  |
| § 4.2 模型介绍 .....                      | 30  |
| § 4.3 主要结果 .....                      | 32  |
| § 4.3.1 非周期间歇牵制控制下的二阶滞后一致性 .....      | 32  |
| § 4.3.2 自适应牵制非周期间歇控制下的二阶滞后一致性 .....   | 37  |
| § 4.3.3 非周期间歇牵制控制在随机噪声下的二阶滞后一致性 ..... | 41  |

## 目录

---

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| § 4.4 数值模拟 .....                 | 45 |
| § 4.5 结语 .....                   | 50 |
| 第五章 非周期控制下含有时滞的非线性耦合二阶滞后一致 ..... | 51 |
| § 5.1 引言 .....                   | 51 |
| § 5.2 模型介绍 .....                 | 51 |
| § 5.3 主要结果 .....                 | 53 |
| § 5.4 数值模拟 .....                 | 58 |
| § 5.4.1 牵制节点选择 .....             | 59 |
| § 5.4.2 非线性耦合函数 .....            | 60 |
| § 5.4.3 细节分析 .....               | 61 |
| § 5.5 结语 .....                   | 64 |
| 第六章 总结与展望 .....                  | 65 |
| 参考文献 .....                       | 66 |
| 致谢 .....                         | 70 |
| 作者在攻读硕士期间的主要研究成果 .....           | 71 |

## 符号缩写对照表

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $\mathbb{N}$                   | 自然数集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$                   |
| $\mathcal{I}_N$                | 集合 $\{1, 2, \dots, N\}$                      |
| $\mathbb{R}^+$                 | 正实数域   |
| $\mathbb{R}^n$                 | 实数域上 $n$ 维欧几里得 (Euclidean) 空间                |
| $\mathbb{R}^{n \times m}$      | $n \times m$ 阶实矩阵的集合                         |
| $\mathbb{E}$                   | 数学期望   |
| $\mathbf{1}_N$                 | 元素全为 1 的 $N$ 维列向量                            |
| $\mathbf{0}_N$                 | 元素全为 0 的 $N$ 维列向量                            |
| $I_N$                          | $N \times N$ 维单位矩阵                           |
| $0_N$                          | $N \times N$ 维零矩阵                            |
| $A = (a_{ij})_{N \times N}$    | 由元素 $a_{ij}$ 构成的 $N \times N$ 维实矩阵           |
| $A^T$                          | 矩阵 $A$ 的转置                                   |
| $A^{-1}$                       | 矩阵 $A$ 的逆                                    |
| $A^s$                          | 矩阵 $A$ 的对称部分, 满足 $A^s = \frac{(A + A^T)}{2}$ |
| $A < 0 (\leq 0)$               | $A$ 为负定 (半负定) 矩阵                             |
| $\text{tr}[A]$                 | $N \times N$ 维矩阵 $A$ 的迹                      |
| $\text{diag}(b_1, \dots, b_N)$ | 对角元素为 $b_1, \dots, b_N$ 的对角矩阵                |
| $\ u\ $                        | 向量 $u$ 的欧几里得 (Euclidean) 范数                  |
| $\otimes$                      | Kronecker 积                                  |
| $\lambda_i(\cdot)$             | 矩阵的第 $i$ 个特征值                                |
| $\lambda_{\min}(\cdot)$        | 矩阵的最小特征值                                     |
| $\lambda_{\max}(\cdot)$        | 矩阵的最大特征值                                     |
| $\lambda_{\max}^{-1}(\cdot)$   | 矩阵的最大特征值的倒数                                  |
| $\mathcal{N}_i$                | 智能体 $i$ 的邻居构成的集合                             |

# 第一章 绪论

## § 1.1 课题的研究背景与意义

许多具有网络特性的自然、社会和科技系统涌现出大量的集体动力学行为，例如同步 (synchronization)、一致性 (consensus)、跟踪 (tracking)、蜂拥 (swarming) 和编队 (formation) 等等<sup>[1-10]</sup>. 自然生物网络系统也表现出许多群集现象，如鸟类结群排成固定的队形迁徙、蚁群觅食筑巢和秋蝉同步鸣叫等等. 多智能体系统的群集动力学通常称为一致性，即一组自治智能体与其邻居智能体存在着连接、耦合，通过这种链路连接，智能体之间共享局部信息，并及时调节自身的状态，使得智能体网络的校正状态趋于恒同<sup>[7]</sup>. 概括而言，多智能体网络系统间的连接与相互耦合作用可以用图的概念来描述：每个节点代表一个智能体，边用来描述节点间的相互连接（信息流传输），权重（信息流的大小）表示耦合强度，节点之间通过信息交互及节点的自身动力学状态来使网络系统达到稳定和平衡. 在网络协调控制的主题中，一致性是基础与核心的研究问题，已在网络科学、电子工程和智能控制领域取得了巨大的进步<sup>[8]</sup>.

多智能体网络系统是由大规模的智能体和交互式通信拓扑结构所张成的一个网络系统. 所以，多智能体系统类似于复杂网络，包含复杂性、自组织、自相似和小世界等相关特性<sup>[9]</sup>. 智能体通常含有复杂的动力学，如非线性耦合、时空混沌、混杂性和异构性等. 网络通信可以描述为无向无权网络、有向加权网络、正负权重符号网络、逻辑布尔网络以及多层网络等等<sup>[7]</sup>. 此外，网络系统动力学可以由数学模型来建立，通常包括两部分，一部分用以描述智能体本身具有的自身动力学 (self-dynamics); 另一部分是阐述智能体与其周围邻居智能体之间的耦合作用的动力学. 通常由系统方程来描述，如时间离散化的差分系统、连续系统的常微分方程、多元变量的偏微分方程、含有随机扰动的随机微分方程、具有时滞因素的时滞泛函微分方程以及具有分数阶导数的分数阶微分方程等<sup>[10]</sup>. 通信网络也可以进一步拓展为静态固定拓扑、时变切换拓扑、随机拓扑和马尔科夫链拓扑等.

多智能体网络系统的一致性协调控制不仅在人工智能，而且在控制工程也是备受关注. 这是因为网络科学的发展以及控制论和系统性能指标理论的逐渐完善，使得群集协同控制在卫星姿态簇、车辆传感网络、电力网络以及传播动态网络等实际应用背景中起到了至关重要的决定性作用<sup>[7-10]</sup>. 在信息物理系统中，为了确保系统高效稳定的运行，需要外部控制输入对系统状态进行调控. 对于多智能体网络系统一致性控制，为使所有智能体中状态的全部分量或部分分量实现一致或趋同，制动器普遍采用的控制方法通常包括 PID (比例-积分-微分) 控制、集中式控制、分布式控制、反

馈控制、自适应控制、T-S 模糊控制和  $H^\infty$  控制等等<sup>[76,77]</sup>. 注意到这些经典传统的控制策略，是先从无反馈的开环系统到闭环系统，再由单一的线性系统推广到高维的非线性系统的应用中，且都为基于时间触发下的连续控制.

随着人工智能的自动化和智能化技术水平的提高，具有非线性、高维性和复杂性等特性的多智能体系统更符合真实的系统模型. 然而，这些网络系统会伴随大规模、高能耗和低能控等特点，不利于平衡控制成本与系统性能之间的能耗关系. 为了降低些许难度，一些学者逐渐引入不连续控制来探究网络系统，例如事件触发控制<sup>[11]</sup>、脉冲控制<sup>[11]</sup>、采样控制<sup>[13]</sup>、稀疏控制<sup>[14]</sup>、最大不干涉控制<sup>[15]</sup>和间歇控制<sup>[16]</sup>等等. 不连续控制作为某种意义上（基于时间或事件）的分段式控制，其控制原理是制动控制器生效于某个时间点或某个时间间隔甚至是某个事件. 许多网络控制的研究结果表明不连续控制策略不仅可以降低控制成本，减少能源消耗，而且控制效果显著. 在一定参数条件下，依旧保持较强的鲁棒性，可以确保网络系统稳定、协调和高速运行，并满足复杂任务中苛刻的性能标准<sup>[77]</sup>. 此外，加上通信信号通道的不稳定性、智能体之间感知距离的限制以及障碍物的干扰等因素，网络中的智能体不能时刻保持与其邻居进行信息交互，因而造成了智能体之间信息传输的不连续性. 注意到，间歇控制满足系统中间歇通信以及干扰因素的存在条件，同时是一种介于脉冲控制和连续控制之间的折中控制<sup>[16]</sup>，基于时间参数约束能切换成连续控制或者不连续控制. 正是由于这些特殊性，使得它广泛应用于网络同步与一致性问题中.

## § 1.2 多智能体系统一致性研究现状

### § 1.2.1 一致性研究进展

多智能体网络系统是目前数学、网络科学与工程学的热点研究前沿之一. 一致性属于网络协调控制的基础研究范畴，主要探究网络中各个智能体间的相互作用如何导致整体化的行为. 在多智能体系统中，一群协作的智能体为实现共同的目标任务需要促使整体的状态趋同于某个感兴趣的量，即通常所说的一致性.

一致性的概念起源于 DeGroot 对管理科学和统计学中传感器信息融合的阐述<sup>[17]</sup>. 随后，Reynolds 通过观察鸟类飞翔会涌现出群集行为，建立了著名的 Boid 模型，归纳出模型中个体之间要满足三条准则，即避免碰撞（Separation）、运动匹配（Alignment）和聚集（Cohesion）原则<sup>[18]</sup>. 1995 年，Vicsek 等<sup>[5]</sup>学者基于 Boid 模型，对粒子群平面运动进行观察与分析，建立了的离散化 Vicsek 模型，验证了粒子自身与其邻居粒子相互影响，所有粒子最终运动方向一致. 在文献[2]中，作者引入图论刻画了 Vicsek 模型，

首次给出了严格意义上的理论分析, 得到了智能体系统趋于恒同的条件是网络系统的通信拓扑为无向联合联通的. 随后, Olfati-Saber 等学者<sup>[6]</sup>为了探究通信切换和通信时滞在连续系统中一致性, 构建了多智能体系统一致性的理论框架. 特别地, 针对网络拓扑是平衡图的情形时, 阐明了一致性协议生效的充要条件是网络结构保持强连通或含有生成树. 在此基础上, Ren 和 Beard<sup>[19,20]</sup>将研究内容推广到有向通信网络, 总结出一阶多智能体系统实现一致当且仅当网络拓扑包含有向生成树.

随后, Lin<sup>[3]</sup>探究了连续非线性自主系统

$$\dot{x}_i(t) = f_{\sigma(t)}^i(x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

其中非线性函数  $f_{\sigma(t)}^i(x_1(t), \dots, x_n(t))$  要求符合严格次正切条件, 并在非光滑分析的理论基础上解决了该类非线性一致性问题. 根据上述处理非线性化的技术, 一些学者进一步分析了当非线性动力学满足 QUAD 条件或者 Lipschitz 条件时, 非线性系统能约化为连续系统<sup>[9]</sup>. 此外, Couiz 等受到鱼群领队巡游的启示, 提出了领导-跟随 (Leader-Following) 一致性模型<sup>[21]</sup>, 要求每个跟随者与领导者之间的状态满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0,$$

其中  $x_0(t)$  表示领导者的状态,  $x_i(t)$  是跟随者状态. 领导-跟随一致性问题, 也称为主从系统 (Master-Slaver System) 同步或驱动相应系统 (Drive-Response System) 同步, 该系列问题可以视为一类系统追踪 (tracking) 问题<sup>[7]</sup>.

注意到, 上述的一致性研究内容大多数只关注一阶多智能体系统 (只含位置状态) 的情形. 然而在实际系统中, 有时不仅要测量智能体的位置状态, 而且要有智能体的速度状态信息. 所以由位置和速度控制的二阶积分系统, 因其更精准复杂的动力学及较强的鲁棒性, 被广泛应用于人工智能系统中<sup>[22-27]</sup>. 该类系统模型一般形如<sup>[7,22]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = f(x_i(t), v_i(t)) + u_i(t), \end{cases}$$

其中  $x_i(t)$ ,  $v_i(t)$  和  $u_i(t)$  分别是系统的位置和速度状态以及和控制输入, 非线性动力学  $f(x_i(t), v_i(t))$  是一个连续可微映射, 与位置与速度相关. 同理  $f(\cdot)$  可以用 Lorenz 系统, Rossler 振子, Hopfield 神经网络等系统方程来刻画, 并且当系统满足一定的参数条件时, 非线性系统会出现奇异吸引子, 形成一条混沌轨道<sup>[7]</sup>.

另外, Yu 等<sup>[22]</sup>学者给出了二阶多智能体系统达到一致性的充要准则, 揭示了 Laplace 矩阵特征值的实部和虚部在网络系统中起关键性作用. Huang 等<sup>[27]</sup>学者探究了通信网络不要求强连通或包含生成树的情形, 获得了二阶积分系统实现一致的判据. 这种对网络结构的弱化, 极大地降低了系统对网络拓扑结构的要求.

除了恒同一致和领导-跟随一致, 还有许多一致性研究拓展工作, 诸如聚类一致<sup>[28]</sup>、实用一致<sup>[29]</sup>、二分一致<sup>[30]</sup>、有限<sup>[31]</sup>或固定时间一致<sup>[32]</sup>等. 然而这些一致性都是

讨论关于智能体所有状态的全部分量. 事实上, 还存在着依赖于局部变元稳定性<sup>[33]</sup>的网络系统, 如生物网络、化学反应和食物链等等. 简而言之, 不要求系统状态中所有分量均实现稳定, 只要全部状态变量中的一部分分量达到稳定<sup>[34]</sup>. Wu 等学者依赖于部分变元稳定性理论, 在领导-跟随网络系统的模型上, 提出了部分分量一致性 (partial component consensus) 的概念<sup>[35]</sup>. 与传统的一致性相比较, 部分分量一致性是一种更弱的群集动力学行为, 具有更广泛的普适性. 此外, 如果含有非线性动力学的网络系统要求达到部分变元稳定, 则非线性函数的约束条件也相对减弱<sup>[35-38]</sup>. Chen 等学者在部分分量一致的基础上, 提出两种聚类-分量 (cluster component) 一致性的概念<sup>[38]</sup>. 第一种是在每一个不同的聚类智能体中, 同一聚类中智能体的所有状态变量只有部分状态变量达到稳定; 第二种是在所有的分类智能体中, 只有一部分分类中的所有智能体的全部状态变量实现趋同, 而对于其余的分类中的所有智能体状态不要求实现一致. 这些新型的群集动力学行为, 促进了多智能体系统的一致性发展, 使网络协调控制成为网络科学及控制论中重要的研究课题.

### § 1.2.2 一致性的环境因素

#### (a) 时滞因素

众所周知, 在信号传输的过程中, 由于有限的通信速度和通信带宽, 容易导致时滞出现在网络系统中. 换而言之, 每个智能体与其邻居或领导智能体在信号传输时会产生时延现象. 一般而言, 网络系统中常常涉及三种类型的时滞<sup>1</sup>. 一种是由于智能体与其邻居之间的信息交互而出现的通信延迟, 称为通信时滞<sup>[39]</sup>(communication delay), 体现在系统的耦合状态中, 描述如下

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(x_i(t) - x_j(t-\tau)).$$

特别地, 在状态输入的过程中, 系统自身状态由于未知的数据丢包或者不确定性扰动, 会产生时延, 即所谓的输入时滞<sup>[7]</sup> (input delay),

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t-\tau) - x_j(t)).$$

注意到上述的时延情形, 均假定时滞为常值 (或固定) 时滞, 即

$$\tau = \text{const} > 0.$$

不失一般性, 时变 (time-varying) 时滞  $\tau(t)$  更容易阐述时滞与系统之间的变化关系, 即时滞随系统状态的演变而改变. 在文献[19]中, 针对网络同时含有通信时滞与

---

<sup>1</sup> 此处所列举的时滞, 均假设是一阶系统情形下, 即只与位置状态相关; 对于二阶系统, 还包括与速度状态相关的时滞, 类似可得.

状态输入时滞，设计了含有两个不同的时变时滞一致性协议，简述为

$$\sum_{j=1}^N a_j(x_i(t-\tau_1(t))-x_j(t-\tau_2(t))).$$

此外，在未耦合的动态智能体内部也会产生时滞，通常称为内部时滞<sup>[10]</sup> (internal delay)，绝大多数情况下表现在智能体的非线性(自身) 动力学上，即

$$f(x(t), x(t-\tau)),$$

这里内部时滞  $\tau$  可用时变时滞  $\tau(t)$  来替代。针对非线性动力学中带有时滞的情形，Wang 等<sup>[40]</sup>揭示了若  $f(x(t), x(t-\tau))$  满足 Lipschitz 假设或 QUAD 条件，且满足相关的参数与时滞  $\tau(t)$  时，时滞蔡氏电路或时滞神经网络展现出时滞非线性动力学的混沌或奇异吸引子特性。

Niculescu 等<sup>[41]</sup>学者观察到当控制器对系统进行状态调节时，控制端输出的信息流在反馈到系统状态的过程中会产生时滞，即控制输入时滞 (control input delay)，一般可以阐述为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau),$$

这里  $A, B$  均为常数矩阵， $u(t-\tau)$  为包含输入反馈时滞  $\tau$  的控制输入。同理，控制输入时滞能变更为时变时滞。

注意到，上述情形中的时滞均表现在系统内部状态或控制反馈中。Xie 等<sup>[42]</sup>学者通过观察自然界大雁迁徙现象，发现跟随大雁与领头大雁到达同一位置的时刻相差一个滞后时间  $\tau$ 。根据领导-跟随一致的定义，提出了领导-跟随滞后一致性概念，这里领导者与每一个跟随者满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_0(t-\tau)\| = 0.$$

这种滞后一致的研究拓展了一致性的研究范畴<sup>[43-45]</sup>。随后，Li 等<sup>[46]</sup>学者给出了接连滞后一致性协议，描述如下

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t-\tau) - x_{i+1}(t)\| = 0,$$

该结果证明，在多耦合动力学系统中，接连滞后将有效地规避智能体之间的相互碰撞并减少拥塞。

### (b) 随机噪声扰动因素

在系统中，噪声是一个不可忽略的重要因素。噪声系统通常用随机微分方程 (Itô 随机微分方程或倒向随机微分方程) 来刻画，分别对应 Itô 公式和 Feynman-Kac 公式，且假设噪声扰动是一个 Wiener 过程或布朗运动并满足高斯分布<sup>[48]</sup> (正态分布)。网络系统通常建模为 Itô 随机微分方程，随机扰动下的多智能体网络系统叙述如下<sup>[48]</sup>

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t, u_t) W_t,$$

这里  $b$  是不受扰动的状态刻画,  $\sigma$  是受到随机扰动的状态与控制输入的描述, 白噪声在系统中由  $W_t$  来刻画且是一个广义的随机过程.

Sun 等<sup>[49]</sup>学者导出了二阶多智能体系统在随机噪声扰动下的二阶均方一致充分条件. Mu 与 Wu<sup>[50]</sup>同时考虑了噪声扰动与间歇通信对网络系统的影响, 揭示了系统中间歇间隔、噪声强度及均方一致之间的关系. Wang 等<sup>[43]</sup>学者解决了二阶网络系统中控制输入受噪声扰动的一致性问题.

### (c) 非线性耦合因素

在网络系统模型中, 通常假定智能体的 (位置) 状态  $x_i(t)$  是线性耦合的. 然而在大规模系统中, 这种线性耦合状态无法精准和有效地描述真实动态系统的特性, 且不利于直观地观测状态信息. 换言之, 系统只能监测到  $\phi(x_j(t))$  产生的数据, 其中  $\phi(\cdot)$  表示高维复杂的非线性函数, 即设定状态输入是非线耦合的<sup>[9]</sup>. 为了克服非线性耦合状态的困难, 少许研究人员尝试探究了一些非线性耦合网络系统的同步或一致性的内容<sup>[52-58]</sup>. 文献[52]虽然解决了非线性耦合动态网络的同步问题, 但分析的网络结构为无向拓扑图; 而在文献[54]中, 非线性耦合网络的通信建立在有向网络交互图上, 且获得了实现一致的充分条件. 特别地, 在非线耦合函数满足严格递增的假设下, Li 等学者验证网络系统能在反馈控制下实现一致<sup>[57]</sup>. 同样相似于上述的假设, Liu 和 Chen<sup>[58]</sup>导出了非线性耦合复杂网络在非周期间歇控制下实现同步的判据.

### § 1.2.3 一致性协同控制

多智能体系统的协调控制在网络实现一致性中起着重要作用. 尽管多智能体网络系统在足够大的耦合强度或在单阶积分系统中包含生成树或强连通等特定条件下, 网络系统会自主地实现一致. 然而, 倘若智能体的自身动力学是高维非线性、非稳定和具有混沌等奇异吸引子或系统对初值具有敏感依赖性时, 网络系统的目标状态集将是不确定的. 事实上, 网络系统的稳定性不仅与智能体自身及其耦合动力学相关, 还依赖于系统的初始值. 不同的初始值产生不同的目标轨道集, 多智能体的状态难以到达预定的目标状态集合<sup>[9]</sup> (或称同步流形). 因此有必要对网络系统并入一个外源输入控制, 以确保系统可以快速和高效地达到稳定状态, 进而实现一致或同步.

随着现代控制理论的发展, 多智能体网络系统协调控制研究已经日趋成熟. 例如网络系统中的牵制控制<sup>[8]</sup>, 当网络包含海量节点时, 只要牵制控制一小部分节点, 网络系统就能稳定到预定目标轨道上, 以实现一致性或同步<sup>[23,47,58,59]</sup>. 牵制控制实质上是轨道稳定性, 可以简单的理解为: 一致性 (同步) 加上牵制控制便实现了轨道稳定性. 通常这一小部分节点是网络中生成树或者连通分支的根节点、孤立节或度差较大的节点. 此外, 信号在网络系统传输中存在不连续性, 如采用不间断或持续的连续控

制方案, 网络系统会造成资源浪费<sup>[51]</sup>. 事实上, 在智能体信息交互的过程中, 有些信息对于某些状态量或智能体而言是无关紧要的. 因此, 相比较于连续控制, 不连续控制更符合多智能体网络系统的环境且更具能效性.

随后, 一些学者逐渐采用“周期”间歇控制来代替连续控制<sup>[47]</sup>, 即控制的时间是周期性的. 在任意的时间间隔中, 时间由“控制时间”和“未控制时间”组成, 或称为“工作时间”和“休息时间”(见第二章 图 2.1). 在文献[24]中, 多智能体系统的信号传输被假设为周期间歇的且自身动力学含有常时滞. Wu<sup>[51]</sup>探究了二阶积分器下位置和速度状态同时含有间歇通信的情况, 验证了间歇控制对二阶多智能体系统的有效性. Li等<sup>[60]</sup>学者从Lyapunov稳定性角度分析了周期间歇控制策略, 并导出了指数稳定性判据. 随后, 一些学者将一些经典的控制策略与间歇控制相结合, 构造出许多高效且低成本的绿色控制策略, 如间歇牵制<sup>[26,47,64]</sup>、间歇自适应<sup>[61]</sup>和间歇采样<sup>[67]</sup>等等. 在文献[47], 作者将间歇控制与牵制控制方案相结合, 组合成一种新颖的周期间歇牵制控制, 并有效地解决了网络同步问题. 这种混合控制是一种分段控制策略<sup>[62]</sup>, 既能满足网络系统的间歇通信, 又只需一部分智能体周期间歇地从邻居或领导者获取信息. 这不仅能简化控制协议, 还能有效地控制成本和节约能源. Li等<sup>[61]</sup>学者又结合间歇控制与自适应控制, 运用自适应周期间歇控制来弥补反馈控制的缺陷. 这是因为自适应控制能时刻调节网络状态以适应系统的变化, 以防止控制增益过大.

虽然周期间歇控制可以减少控制能耗且符合网络通信特性, 但要求“控制间隔”和“休息间隔”被固定化或周期化却过于严格, 且在真实系统中也不合理. 鉴于此, Liu 和 Chen 将提出非周期间歇, 并结合牵制控制探究了一系列网络同步问题<sup>[58,63,64]</sup>. 特别地, 文献[63]中详细阐述了非周期间歇控制方案, 即对任何时间段 $[t_k, t_{k+1})$ 而言,  $[t_k, s_k]$ 是控制时间 (或工作时间), 且  $s_k - t_k$  被称作第  $k$  个工作宽度; 相似地,  $(s_k, t_{k+1})$  是未控制时间 (或休息时间), 且  $t_{k+1} - s_k$  被称作第  $k$  个休息宽度 (见第二章 图 2.1). 这种不确定的工作或休息间隔更灵活地调控了系统的控制输入, 推广了非周期间歇控制的应用范围<sup>[37,65-67]</sup>. Zhou 和 Cai<sup>[66]</sup>在此基础上进一步放宽了对控制时间的约束条件, 重铸了非周期间歇控制的时间间隔, 使控制制动器在休息时间的停留间隔更长 (即  $u_i(t)$  取零值的时间更久, 控制更稀疏化).

### § 1.3 本文的主要工作

随着人工智能技术及机器学习研究热潮的兴起, 多智能体系统亦成为了热点前沿课题之一. 智能体根据现有的状态信息通过训练选择出最优及最佳性能的学习函数去预测判断下一步的路径规划与协调合作, 智能体之间的自主通信以及大规模的智能体的协调控制等仍然值得进一步探究. 本文在文献[35,42,44,51,52,63,67]的基础上, 研究了几类非线多智能体网络系统在间歇控制下的一致性, 研究内容主要如下:

第一章是绪论部分，主要分析了一致性的研究进展，一致性的环境因素以及一致性的协调控制，概括了近些年与一致性相关的热点课题，并简述了全文的主要内容。

第二章介绍论文的预备知识，包括图论、系统稳定性理论、一些基础定义和重要的引理。

第三章研究一阶领导-跟随多智能体系统的部分分量一致性，分别讨论了在非周期间歇与周期间歇控制两种情形下，有向网络系统实现部分分量一致的判据，并通过数值实验对获得的理论结果进行了验证。

第四章对二阶滞后一致进行了分析，分别探究了在非周期间歇牵制控制、含有时变增益的自适应间歇牵制控制以及具有随机噪声扰动下的二阶多智能体网络系统的滞后一致性，得到了一些关于二阶滞后一致的充分条件，并利用Matlab验证了所提出的控制方案对实现二阶滞后一致性的可行性。

第五章在第四章的延展工作，进一步探究了非线性耦合系统中的二阶滞后一致性，且系统通信网络不要求含有生成树或强连通。此外，还考虑了网络中的间歇信号传输，并将智能体自身动力学内部时滞考虑在内，通过数值仿真检验了含有时滞动力学的非线性耦合系统在自适应间歇控制下依然可以实现二阶滞后一致。

第六章是对本文的总结与概括，并对多智能体网络系统一致性协调控制进行了展望与讨论。

## 第二章 预备知识

本章主要介绍一些与多智能体系统相关的预备知识，涉及数学及控制理论的范畴，包含图论、矩阵分析和 Lyapunov 稳定性理论等。代数图论与矩阵理论通常用来建立系统中多智能体之间的网络通信连接与权重联系。稳定性分析作为网络系统控制的核心之一，用于分析系统的收敛性与稳定性，是保证系统平稳运行的首要问题。最后介绍一些重要的假设条件与引理，这是探究多智能体系统的关键技术。

### § 2.1 代数图论

多智能体网络系统可以用图论来描述其特性，将每个智能体视为图论中的一个节点，智能体之间的信息流就是图中的一条边（连接），信息流的大小由图论中邻接矩阵的权重元素来体现，且权重可正可负。通过与图论的转换，多智能体网络系统可以简述为图论中的无向图、有向图或多层次图的结构。在本文的研究中，所考虑的多智能体系统均为加权有向图的情形，故而给出的也是基于有向图的理论知识<sup>[74]</sup>。

令  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  是一个加权有向图，其中  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  代表网络中含有  $N$  个节点（智能体）的集合，一组节点对构成一条边  $e_{ij} = (v_i, v_j)$ ，则  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  表示节点对构成的边的集合，加权邻接矩阵  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  由元素  $a_{ij}$  组成。若  $e_{ji} \in \mathcal{E}$ ，则  $a_{ij} > 0$ ，这表示第  $v_i$  个节点能够接收到来自第  $v_j$  个节点发出的信息，即  $e_{ji} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{ij} > 0$ ；否则，有  $e_{ji} \notin \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{ij} = 0$ 。此外，如果边  $e_{ij} \in \mathcal{E}$ ，则智能体  $v_i$  到  $v_j$  有一条有向边，其中节点  $v_i$  为父节点（节点  $v_j$  的入邻居）， $v_j$  为子节点（节点  $v_i$  的出邻居）。节点  $v_i$  的邻居集用  $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} : (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$  来表示。如果有向图  $\mathcal{G}$  中存在一个节点  $v_k$ ，使得任何其他节点  $v_i \in \mathcal{V}$ ，都存在一条从  $v_k$  到  $v_i$  的有向路径，则称该有向图  $\mathcal{G}$  包含有向生成树。如果存在图  $\mathcal{G}$  的一个与  $\mathcal{G}$  具有相同节点集的子图是生成树，那么该节点称为根节点。另外，如果图  $\mathcal{G}$  中的每一个节点与其他任意节点都有一条有向路径，则称图  $\mathcal{G}$  是强连通的。这等价于图中的每一个节点都根节点。

有向加权图的 Laplace 矩阵  $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  根据权重矩阵  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，有<sup>[74]</sup>：

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j, \\ l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}, & j = i. \end{cases}$$

显然，有  $\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0$ ，所以 Laplace 矩阵  $L$  至少有一个零特征值。一般而言，有向图对应

的 Laplace 矩阵是不对称的. 图  $\mathcal{G}$  的度矩阵往往为对角阵  $D$ , 该对角线上的元素对应为节点的入度, 第  $i$  个节点的入度:

$$D = \text{diag}\{d_1^{in}, d_2^{in}, \dots, d_N^{in}\}$$

这里  $d_i^{in} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ . 相应地, 第  $i$  个节点的出度为  $d_i^{out} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ . 通过邻接矩阵  $A$ , Laplace 矩阵  $L$ , 以及度矩阵  $D$  的定义, 有  $L = D - A$ .

## § 2.2 矩阵理论

**引理 2.1** [73] 设矩阵  $A, B, C, D$  是任意维数的, 其 Kronecker 积运算满足下列性质:

- (i)  $(\kappa A) \otimes B = A \otimes (\kappa B)$ ,
- (ii)  $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ ,
- (iii)  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ ,
- (iv)  $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ ,

其中  $\kappa$  是常数.

**引理 2.2** [35] 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 则存在  $nN$  阶置換矩阵 (即每一行和每一列都只有一个元素为 1 而其余元素均为 0 的方阵)  $P = P_s \cdots P_1$ , 其中  $P_i$  是第一类初等行变换矩阵 (即将单位矩阵的某两行进行对换后的矩阵), 使得下列等式成立,

$$P(A \otimes B)P^{-1} = B \otimes A,$$

其中,  $i = 1, \dots, s$ ,  $s$  为正整数,  $\otimes$  为 Kronecker 积.

**引理 2.3** [72] (Schur 补) 给定对称矩阵  $S_{11} = S_{11}^T, S_{12} = S_{21}^T, S_{22} = S_{22}^T$ , 则矩阵不等式

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} > 0,$$

等价于下列任一个条件

- (i)  $S_{11} > 0, S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} > 0$ ,
- (ii)  $S_{22} > 0, S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} > 0$ .

**引理 2.4** [72] 假设  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为正定矩阵且  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  对称矩阵, 对任意向量  $x \in \mathbb{R}^n$ , 以下不等式成立

$$\lambda_{\min}(M^{-1}N)x^T Mx \leq x^T Nx \leq \lambda_{\max}(M^{-1}N)x^T Mx.$$

**引理 2.5** [72] 对于任意向量  $x, y \in \mathbb{R}^n$  及正定矩阵  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 满足以下不等式

$$2x^T y \leq x^T Mx + y^T M^{-1}y.$$

**引理 2.6** [9] 假设  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_l\}, \mathcal{V} \setminus \mathcal{B} = \{v_{l+1}, \dots, v_N\}$ . Laplace 矩阵  $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$  以及两

个对角矩阵  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$  可以表示为

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} I_l & \\ & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_l & \\ & 0_{N-l} \end{pmatrix},$$

其中  $L_{11} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  与  $L_{22} \in \mathbb{R}^{(N-l) \times (N-l)}$  分别与子集  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{V} \setminus \mathcal{B}$  相关,  $B_l = \text{diag}\{b_1, \dots, b_l\}$ . 如果存在两个标量  $c, \alpha > 0$  与一个正定对角矩阵  $\Lambda_2 = \text{diag}\{\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_N\}$  使得

$$[\Lambda_2(cL_{22} - \alpha I_{N-l})]^s > 0.$$

换而言之,  $cL_{22} - \alpha I_{N-l}$  是一个 Metzler 矩阵. 同时可以得到  $[\Lambda_1(c(L+B) - \alpha I_N)]^s > 0$ , 或者称  $c(L+B) - \alpha I_N$  是一个 Metzler 矩阵. 特别地, 若令  $\Lambda_1 = I_N$ , 则  $c(L+B)^s - \alpha I_N > 0$ .

**引理 2.7<sup>[9]</sup>** 如果引理 2.6 成立. 假设网络拓扑图  $\mathcal{G}$  包含生成树,  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_l\}$  是生成树的根节点集合. 若存在一个足够大的  $c$  和  $\alpha > 0$ , 使得  $cL(\mathcal{V} \setminus \mathcal{B}) - \alpha I_{N-l}$  是一个 Metzler 矩阵, 则  $c(L(\mathcal{V}) + B) - \alpha I_N$  也是一个 Metzler 矩阵.

**注 2.1** 显然, 网络含有生成树是牵制控制策略的关键核心之一. 在某些参数条件下, 只需控制生成树的根节点, 网络中的所有节点都将收敛到预定的目标轨道集. 进一步, 如若网络拓扑是强连通的 (即所有节点都是根节点), 则需要控制的节点更少, 甚至只需控制一个节点, 网络便能达到稳定.

**注 2.2** 注意到, 如果网络不包含生成树或强连通, 则连通分支的根节点和孤立节点也应作为牵制的节点, 以确保  $(L+B)^s > 0$ .

### § 2.3 微分方程稳定性理论

考虑下列  $n$  维非自治微分方程组<sup>[33]</sup>

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad (2.1)$$

其中  $f(t, x) \in C[\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ,  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , 令变量  $x = (y, z)^T \in \mathbb{R}^n$ , 且  $y = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $z = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^p$ ,  $m + p = n$ . 定义范数如下:

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|y\| = \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|z\| = \left( \sum_{i=m+1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

**定义 2.1<sup>[33]</sup>** 非自治系统 (2.1) 的零解关于部分变量  $y$  是指数稳定的, 如果对于每个  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+$ , 都存在  $\lambda > 0$ ,  $\exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ , 使得  $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ , 则关于系统 (2.1) 的解  $\|x(t, t_0, x_0)\|$  的部分解  $\|y(t, t_0, x_0)\|$  满足

$$\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad (t \geq t_0). \quad (2.2)$$

**定义 2.2<sup>[33]</sup>** 非自治系统 (2.1) 的零解关于部分变量  $y$  是指数稳定的, 如果对于每个  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+$ , 都存在  $\lambda > 0$ ,  $\exists M(\delta) > 0$ , 使得  $\|x_0\| < \delta$ , 则关于系统 (2.1) 的部分解  $\|y(t, t_0, x_0)\|$  满足

$$\|y(t, t_0, x_0)\| < M(\delta) \|x_0\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad (t \geq t_0). \quad (2.3)$$

**定义 2.3<sup>[33,75]</sup>** 设  $I = [t_0, +\infty]$ ,  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  中包含闭球  $B_r(x) = \{x \mid \|x\| \leq r\}$  的一个邻域,  $V(t, x)$  是定义在  $I \times U$  上的连续可微函数,  $W(x)$  是定义在  $U$  上的连续可微函数. 若  $I \times U$  上有正定 (负定) 函数  $W(x)$ , 使得

$$V(t, x) \geq W(x) \quad (V(t, x) \leq -W(x))$$

成立且  $V(t, 0) = 0$ , 则称  $V(t, x)$  是  $I \times U$  上的正定 (负定) 函数. 若有

$$V(t, x) \geq 0 \quad (V(t, x) \leq 0)$$

则称  $V(t, x)$  为半正定 (半负定) 函数.

**定义 2.4<sup>[75]</sup>** 若有正定函数  $W_1(x)$ , 使得  $|V(t, x)| \leq W_1(x)$ , 则称  $V(t, x)$  具有无穷小上界; 若有无穷大正定函数  $W_2(x)$ , 使得  $V(t, x) \geq W_2(x)$ , 则称  $V(t, x)$  具有无穷大下界.

设  $V(t, x)$  是定义在  $I \times U$  上的连续可微函数,  $x(t, t_0, x_0)$  是系统 (2.1) 的解.  $V(t, x)$  沿着系统 (2.1) 解的全导数为

$$\frac{dV(t, x)}{dt} \Big|_{(2.1)} = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_k} f_k(t, x) \triangleq \dot{V}(t, x).$$

**定义 2.5<sup>[75]</sup>** 若有正定函数  $V(t, x)$ , 使得  $\dot{V}(t, x) \leq 0$ , 则系统 (2.1) 的零解稳定; 若  $V(t, x)$  正定且有无穷小上界, 使得  $\dot{V}(t, x) \leq 0$ , 则系统 (2.1) 的零解一致稳定; 若  $V(t, x)$  正定且有无穷小上界, 使得  $\dot{V}(t, x) < 0$ , 则系统 (2.1) 的零解一致渐近稳定.

**定义 2.6<sup>[48]</sup>** 若随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  满足

- (1)  $X(t)$  是关于  $t$  的连续函数且  $X(0) = 0$ ;
- (2)  $\{X(t), t \geq 0\}$  是平稳独立增量过程;
- (3)  $\forall 0 \leq s < t, s.t. X(t) - X(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$ , 即  $\mathbb{E}[X(t) - X(s)]^2 = \sigma^2(t-s)$  (服从正态分布), 且  $\mathbb{E}[X(t) - X(s)] = 0$ ,

则称随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  为布朗运动 (或维纳过程).

当  $\sigma=1$  时, 称随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  为标准布朗运动.

**引理 2.8<sup>[48]</sup>** 考虑一个  $n$  维的随机时滞微分方程

$$dz(t) = f(z(t), z(t-\tau))dt + g(z(t), z(t-\tau))dW, \quad (2.4)$$

以及有一个非负函数  $V(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ , 且关于  $z$  是连续二次可微的. 定义  $V_z(t) = V(z(t))$ , 其中  $z(t), t \in [-\tau, \infty]$  是方程 (2.4) 的解. 因此,  $V_z$  也是随机过程, 根据 Itô 公式, 该随机时滞微分方程为

$$dV_z = LVdt + \frac{\partial V}{\partial z} gdW, \quad (2.5)$$

其中沿着轨迹 (4.6) 的算子  $\mathcal{L}$  被定义为

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial z} f + \frac{1}{2} \mathbf{tr} \left[ g^T \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} g \right].$$

## § 2.4 重要假设与引理

定义时间间隔  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $[t_k, s_k)$  和  $(s_k, t_{k+1})$  分别为控制周期, 控制宽度和休息宽度, 其中时间点  $t_k$  为牵制时刻,  $s_k$  称为切换时刻, 对所有  $k \in \mathbb{N}$ . 相关的控制图例如图 2.1 所示.

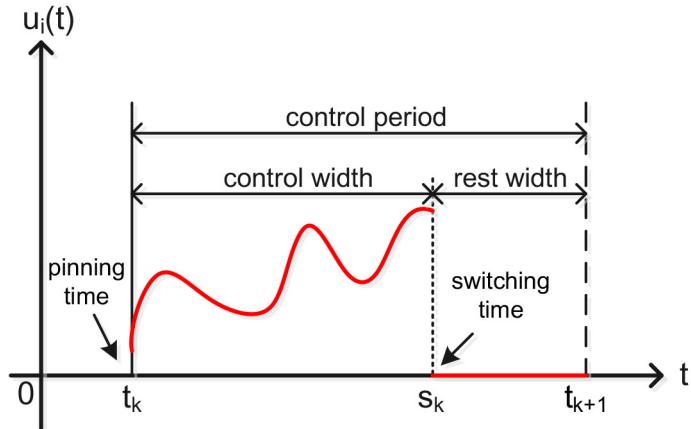


图 2.1 非周期间歇牵制控制图例

**假设 2.1<sup>[63]</sup>** 对于非周期间歇控制策略, 假设存在两个标量  $\alpha$  和  $\beta$  满足如下等式

$$\begin{cases} \min \{s_k - t_k, k \in \mathbb{N}\} = \theta > 0, \\ \max \{t_{k+1} - s_k, k \in \mathbb{N}\} = \beta < +\infty, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中  $\theta > 0, 0 < \beta < +\infty, k \in \mathbb{N}$ .

**注 2.1** 显然, 在此假设下每个控制宽度都不同, 而且每个控制间隔  $[t_k, s_k)$  均应大于或等于  $\theta$ . 同样地, 每个休息间隔  $(s_k, t_{k+1})$  均应小于或等于  $\beta$ , 控制宽度  $\theta$  应小于  $[t_k, t_{k+1})$ .

**假设 2.2<sup>[63]</sup>** 对于非周期间歇控制策略, 存在两个标量  $\theta$  和  $\delta$  满足以下等式

$$\begin{cases} \inf_k (s_k - t_k) = \theta, \\ \sup_k (t_{k+1} - t_k) = \delta, \end{cases} \quad (2.5)$$

其中  $0 < \theta < \delta < +\infty, k \in \mathbb{N}$ . 这意味着每个休息宽度的时间间隔应小于或等于  $\delta - \theta$ , 因此, 所有控制间隔和休息间隔都是有界的.

**定义 2.7<sup>[63]</sup>** 对于非周期间歇控制, 定义

$$\psi = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{t_{k+1} - s_k}{t_{k+1} - t_k}.$$

其中常值  $\psi$  是休息间隔  $t_{k+1} - s_k$  在控制间隔  $t_{k+1} - t_k$  中的最大比率. 显然,  $0 < \psi < 1$ . 特别地, 若  $\psi=0$ , 则控制输入为连续控制情形; 故而, 通常假设  $\psi \in (0, 1)$ .

接下来将给一些关键的引理, 这些引理将在以下各章节中使用.

**引理 2.9<sup>[63]</sup>** 如果假设 2.2 成立, 则有  $\psi \leq 1 - \frac{\theta}{\delta}$ .

**引理 2.10<sup>[64]</sup>** 假设对于非负函数  $y(t), t \in [-\bar{\tau}, +\infty)$ , 下述不等式成立

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \leq -a_1 y(t), & \leq t \leq s_k, \\ \dot{y}(t) \leq a_2 y(t), & s_k < t < t_{k+1}, \end{cases} \quad (2.6)$$

其中  $a_1, a_2$  和  $\bar{\tau}$  均为正数, 那么对于间歇控制, 有

$$y(t) \leq y(0) \exp\{-\varrho t\}, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

其中  $\varrho = a_1(1-\psi) - a_2\psi > 0$  和  $\psi \in (0,1)$ .

## 第三章 在间歇控制下领导-跟随部分分量一致性

### § 3.1 引言

近年来，领导-跟随网络系统的一致性获得了广泛的实际应用。在网络科学中许多关于一致性的研究结果也相继发表在国际顶级期刊中。但大多数的一致性内容都是致力于网络系统中智能体状态变量的全部分量的一致性，而忽略了关于部分状态变量的群集研究。事实上，在实际中广泛存在依赖于局部变元稳定性的部分分量群集行为。例如，海面上的舰队巡航，舰船按某个固定队形行驶。对于三维矢量的位移，在舰船向前的位移分量将实现一致，但在其他方向的分量则是发散的<sup>[35]</sup>。通过观察发现，所有船舰个体状态的分量中只有部分分量达到一致。因此，一些学者开始思考部分分量一致性问题<sup>[34-37]</sup>。

Wu 和 Ma<sup>[35]</sup>率先提出了领导-跟随多智能体系统部分分量一致性的概念。随后，Li 等<sup>[36]</sup>学者将部分分量的概念延展到混沌网络中，给出了分量同步的定义。鉴于此，Chen<sup>[38]</sup>研究了在脉冲控制协议下的聚类-分量一致性。这种不连续跳跃式的脉冲控制极大地减少了网络系统运行负荷。众所周知，间歇控制是介于连续与脉冲控制之间的一种折中式控制，相比脉冲控制具有更好的鲁棒性且能满足通信传输的间断性。因此，许多学者利用间歇控制来调控多智能体网络系统，这样不仅有效地降低控制能耗损失<sup>[51]</sup>，还可以适应网络的通信环境。此外，在利用间歇控制的同时，结合高效的牵制控制对网络中少量的关键节点进行控制，使网络在低能耗的控制下达到稳定<sup>[63]</sup>。

本章主要研究间歇牵制协议下的领导-跟随部分分量一致性控制，设计了两种不同的间歇牵制控制协议，分别是非周期和周期间歇以适应通信传输的间断性和降低控制能耗。本章的研究成果已发表<sup>[37]</sup>，其研究贡献主要有如下三方面：

首先，研究了间歇牵制控制策略下的部分分量一致性，并基于部分变元稳定性理论导出了一些充分性判据。

其次，不同于文献[35,36,38]中所探讨的渐近稳定性，本章将原有的偏差系统通过置换矩阵转化为一个新的偏差系统，进而分析新的偏差系统关于部分分量的指数稳定性，且采用了不连续的间歇控制来代替上述研究中的连续控制，研究结果表明间歇控制方案更节能且效果显著。

最后，基于有向通信网络，通过牵制网络拓扑中的连通分支（生成树）的根节点，网络中跟随智能体的全部状态分量的部分分量能够关于领导智能体的部分分量实现趋同。

## § 3.2 模型介绍

假设多智能体系统中有  $N+1$  节点, 其中领导智能体  $x_0$  是一个孤立的智能体, 其动力学可以描述为

$$\dot{x}_0(t) = f(x_0(t)) \quad (3.1)$$

其中  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})^T \in \mathbb{R}^n$  表示领导智能体的状态向量,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个连续映射,  $f(x_0) = (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0))^T \in \mathbb{R}^n$  代表领导智能体的自身动力学.

每个跟随智能体的方程为

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j \in N_i} a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)) + u_i(t), \quad (3.2)$$

这里  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$  是第  $i$  个跟随智能体的状态向量,  $i \in \mathcal{I}_N$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个连续映射,  $f(x_i) = (f_1(x_i), \dots, f_n(x_i))^T \in \mathbb{R}^n$  代表第  $i$  个智能体的内部自身动力学,  $c$  是耦合强度. 网络间的通信权重由连接矩阵  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  来描述, 如果第  $i$  个智能体与第  $j$  个智能体之间存在通信流, 则  $a_{ij} > 0$ ; 否则,  $a_{ij} = 0$ .  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) > 0$  表示系统内联矩阵 (内部耦合矩阵),  $u_i(t)$  是第  $i$  个智能体的外部控制.

为进一步探究系统 (3.2), 考虑如下两种不同的间歇牵制控制策略.

1. 非周期间歇牵制控制可以被描述为

$$u_i(t) = \begin{cases} -cb_i \Gamma(x_i(t) - x_0(t)), & t \in [t_k, s_k], \\ 0, & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (3.3)$$

其中  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c$  是控制增益,  $b_i$  为牵制控制, 且如果第  $i$  个智能体与领导者有通信交互, 则  $b_i > 0$ ; 否则,  $b_i = 0$ .

**注 3.1** 如果将时间考虑到控制协议之中, 那么对于任何时间间隔  $[t_k, t_{k+1})$  而言,  $[t_k, s_k]$  是控制时间 (工作时间),  $s_k - t_k$  称为第  $k$  个工作宽度 (控制时间);  $(s_k, t_{k+1})$  是休息时间,  $t_{k+1} - s_k$  是第  $k$  个休息宽度 (见图 2.1).

2. 周期间歇牵制控制协议设计如下

$$u_i(t) = \begin{cases} -cb_i \Gamma(x_i(t) - x_0(t)), & t \in [k\omega, k\omega + \theta], \\ 0, & t \in (k\omega + \theta, (k+1)\omega), \end{cases} \quad (3.4)$$

同控制器 (3.3) 中的参数含义一致,  $\omega$  为周期控制宽度,  $\theta$  为控制策略生效的周期控制间隔, 且  $\omega$  和  $\theta$  是某一固定的控制阈值.

**注 3.2** 周期间歇牵制控制意味着控制时间和休息时间都是周期性的. 在任何时间段内, 时间都是由恒定的“工作时间”和固定的“休息时间”组成的.

**注 3.3** 如果控制协议 (3.3) 满足  $s_k - t_k \equiv \theta$  和  $t_{k+1} - t_k \equiv \omega$ , 则非周期间歇牵制控制 (3.3) 等同于周期间歇牵制控制 (3.4). 显然, 周期间歇是非周期性间歇控制的一种特例.

**假设 3.1<sup>[35]</sup>** 如果存在一个常数  $\varepsilon_1 > 0$ , 使得非线性函数  $f(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  满足

$$(x-y)^T \Lambda(f(x)-f(y)) \leq \varepsilon_1 (x-y)^T \Lambda(x-y), \quad (3.5)$$

其中  $\Lambda = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^l, 0, \dots, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ .

**假设 3.2** 如果存在一个常数  $\varepsilon_2 > 0$ , 使得非线性函数满足  $f(\cdot): \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$  满足

$$(x-y)^T \Xi(f(x)-f(y)) \leq \varepsilon_2 (x-y)^T \Xi(x-y),$$

其中  $\Xi = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{nN}, 0, \dots, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{nN}$ .

**注 3.4** 与 Lipschitz 或者 QUAD 条件相比较, 假设 3.1 与 3.2 只满足局部 Lipschitz 条件, 这是一种弱化的条件.

### § 3.3 主要结果

#### § 3.3.1 非周期间歇牵制控制下的部分分量一致性

在本小节中, 第  $i$  个跟随者系统 (3.2) 并入外部非周期间歇牵制控制输入 (3.3) 后可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j \in N_i} a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)) - cb_i \Gamma(x_i(t) - x_0(t)), & t \in [t_k, s_k], \\ \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j \in N_i} a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (3.6)$$

这里  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$  表示每个跟随智能体的状态.

**注 3.5** 显然, 系统 (3.6) 被分为两部分. 在控制间隔  $[t_k, m_k]$  内, 牵制控制被激活; 在休息间隔  $(s_k, t_{k+1})$  期间, 牵制控制协议将不生效.

定义状态偏差  $e_i(t) = x_i(t) - x_0(t)$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ , 则偏差系统如下所述

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = f(x_i(t)) - f(x_0(t)) - c \sum_{j \in N_i} l_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_0(t)) + cb_i \Gamma(x_0(t) - x_i(t)), \\ \quad t \in [t_k, s_k], \quad k \in \mathbb{N}, \\ \dot{e}_i(t) = f(x_i(t)) - f(x_0(t)) - c \sum_{j \in N_i} l_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_0(t)), \\ \quad t \in (s_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.7)$$

相应地, 偏差系统 (3.7) 可写为向量形式

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = F(e(t)) - (c\tilde{L} \otimes \Gamma)e(t), & t \in [t_k, s_k], \\ \dot{e}(t) = F(e(t)) - (cL \otimes \Gamma)e(t), & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (3.8)$$

且  $e(t) = (e_1(t)^T, \dots, e_N(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{Nn}$ ,  $e_i(t) = (e_{i1}(t), \dots, e_{in}(t))^T = (x_{i1} - x_{01}, \dots, x_{in} - x_{0n})^T \in \mathbb{R}^n$ ,

分量  $x_{ij}$  表示第  $i$  个智能体的第  $j$  个分量,  $\tilde{L} = L + \text{diag}(b_1, \dots, b_N)$  为内部耦合矩阵与牵制控制矩阵之和,  $F(\tilde{e}(t)) = (f(x_1(t) - f(x_0(t))^T, \dots, f(x_N(t) - f(x_0(t))^T)^T$ .

根据引理 2.2 和 3.1, 通过置换矩阵重新排列分量, 使偏差系统 (3.7) 中需要待研究的分量置前. 因此, 原有的  $Nn$  维偏差系统的转变为  $nN$  维的新的偏差系统. 分析部分分量一致性的关键核心是以下新的偏差系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - [c\Gamma \otimes \tilde{L}]\tilde{e}(t), & t \in [t_k, s_k] \\ \dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - [c\Gamma \otimes L]\tilde{e}(t), & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (3.9)$$

其中对于所有的  $q = 1, 2, \dots, n$ , 有  $\tilde{e}_q(t) = (\tilde{e}_{1q}(t), \dots, \tilde{e}_{Nq}(t))^T = (x_{1q} - x_{0q}, \dots, x_{Nq} - x_{0q})^T \in \mathbb{R}^N$ , 故  $\tilde{e}(t) = (\tilde{e}_1(t)^T, \dots, \tilde{e}_n(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $\tilde{f}_q^T = (f_q(x_1(t)), f_q(x_2(t)), \dots, f_q(x_N(t)))^T - f_q(x_0(t))\mathbf{1}_N$ , 且  $\tilde{F}(\tilde{e}(t)) = (\tilde{f}_1^T, \tilde{f}_2^T, \dots, \tilde{f}_n^T)^T$ .

**注 3.6** 注意到, 大多数一致性问题都是直接分析由系统状态偏差所定义的偏差系统的稳定性, 而部分分量一致性问题则需通过置换矩阵方法得到一个新偏差系统, 再分析偏差系统的稳定性.

**定义 3.1** 多智能体系统 (3.1) 和 (3.2) 关于前  $l$  分量实现部分分量一致, 如果存在  $1 \leq l \leq n$ , 对于任何初始条件, 使得系统 (3.1) 和 (3.2) 的解满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{q=1}^l \|\tilde{e}_q(t)\| = 0, \quad q = 1, 2, \dots, n, \quad (3.10)$$

其中  $\tilde{e}_q(t) = (\tilde{e}_{1q}, \dots, \tilde{e}_{Nq})^T = (x_{1q} - x_{0q}, \dots, x_{Nq} - x_{0q})^T \in \mathbb{R}^N$ .

**注 3.7** 根据部分分量的定义, 如果  $l = n$ , 则部分分量一致被称为领导-跟随一致. 这意味着部分分量一致是一种比恒同一致更弱的群集动力学行为.

**定理 3.1** 令

$$\Phi = \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) > 0, \quad (\Phi \tilde{L})^s = \frac{(\Phi \tilde{L})^T + \Phi \tilde{L}}{2}, \quad (\Phi L)^s = \frac{(\Phi L)^T + \Phi L}{2}.$$

若假设 2.1 和 3.1 都成立, 那么系统 (3.1) 和 (3.2) 在非周期间歇牵制控制 (3.3) 下实现部分分量一致需满足如下条件:

$$(i) \quad c > \frac{\lambda_{\max}(\Phi)\varepsilon_1}{\min_{1 \leq q \leq l} \gamma_q \lambda_{\min}((\Phi \tilde{L})^s)}, \quad (3.11)$$

$$(ii) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \mu_1 \sum_{k=0}^p (s_k - t_k) + \mu_2 \sum_{k=0}^p (t_{k+1} - s_k) \right\} = -\infty, \quad (3.12)$$

其中  $\mu_1 = 2 \left( \varepsilon_1 - c \min_{1 \leq q \leq l} \gamma_q \lambda_{\min}((\Phi \tilde{L})^s) \lambda_{\max^{-1}}(\Phi) \right)$ ,  $\mu_2 = 2 \left( \varepsilon_1 - c \max_{1 \leq q \leq l} \gamma_q \lambda_{\min}((\Phi L)^s) \lambda_{\max^{-1}}(\Phi) \right)$ .

**证明** 定义  $\Lambda = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^l, 0, \dots, 0)$  及  $\Phi = \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) > 0$ .

选取如下 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n \tilde{e}_q(t) (\Lambda_q \otimes \Phi) \tilde{e}_q(t) = \frac{1}{2} \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{e}(t). \quad (3.13)$$

只需证明 Lyapunov 函数  $V(t)$  关于前  $l$  个分量是正定的, 由式 (3.13) 可得

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{e}(t) \\ &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\Phi) \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes I_N) \tilde{e}(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中  $\lambda_{\min}(\Phi) > 0$ .

根据对角矩阵  $\Lambda$  和  $\Phi$  的定义, 易得  $V(t) \geq 0$  且  $V_q(t) > 0, q = 1, \dots, l$ .

相似地, 有

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{e}(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\Phi) \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes I_N) \tilde{e}(t), \end{aligned} \quad (3.15)$$

这里  $\lambda_{\max}(\Phi) > 0$ .

当  $t \in [t_k, s_k], k \in \mathbb{N}$  时, 基于时间的间歇控制器 (3.3) 被触发. 根据假设 3.1, 沿着偏差系统 (3.8) 对  $V(t)$  计算时间导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \dot{\tilde{e}}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - c \tilde{e}^T(t) (\Lambda \otimes \Phi) (\Gamma \otimes \tilde{L}) \tilde{e}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - c \tilde{e}(t)^T (\Lambda \Gamma \otimes (\Phi \tilde{L})) \tilde{e}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T \begin{pmatrix} \Phi & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \Phi & & \\ & & & 0_N & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_l \\ \tilde{f}_{l+1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_n \end{pmatrix} - c \tilde{e}(t)^T \begin{pmatrix} \gamma_1 \Phi \tilde{L} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_l \Phi \tilde{L} & & & \\ & & & 0_N & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0_N \end{pmatrix} \tilde{e}(t) \\ &= \sum_{q=1}^l \tilde{e}_q(t)^T \Lambda_q \Phi \tilde{f}_q - c \sum_{q=1}^l \tilde{e}_q(t)^T \gamma_q \Lambda_q \Phi \tilde{L} \tilde{e}_q(t) \\ &\leq \sum_{q=1}^l \tilde{e}_q(t)^T [\varepsilon_1 \Phi - c \gamma_q \Lambda_q \Phi \tilde{L}] \tilde{e}_q(t) \\ &= \sum_{q=1}^l \tilde{e}_q(t)^T [\varepsilon_1 \Phi - c \gamma_q \Lambda_q (\Phi \tilde{L})^s] \tilde{e}_q(t) \\ &= \varepsilon_1 \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{e}(t) - c \tilde{e}(t)^T (\Lambda \Gamma \otimes (\Phi \tilde{L})^s) \tilde{e}(t) \\ &\leq \varepsilon_1 \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{e}(t) - c \lambda_{\min}((\Phi \tilde{L})^s) \tilde{e}(t)^T (\Lambda \Gamma \otimes I_N) \tilde{e}(t) \\ &\leq 2\varepsilon_1 V(t) - c \min_{1 \leq q \leq l} \gamma_q \lambda_{\min}((\Phi \tilde{L})^s) \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes I_N) \tilde{e}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \left( \varepsilon_1 - c \min_{1 \leq q \leq l} \gamma_q \lambda_{\min}((\Phi \tilde{L})^s) \lambda_{\max^{-1}}(\Phi) \right) V(t) \\ &\triangleq \mu_1 V(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

当  $t \in (s_k, t_{k+1})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  时, 间歇控制器 (3.3) 处于休息状态. 对  $V(t)$  求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \dot{\tilde{e}}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - c \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) (\Gamma \otimes L) \tilde{e}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - c \tilde{e}(t)^T (\Lambda \Gamma \otimes (\Phi L)) \tilde{e}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - c \tilde{e}(t)^T (\Lambda \Gamma \otimes (\Phi L)^s) \tilde{e}(t) \\ &\leq \varepsilon_1 \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes \Phi) \tilde{e}(t) - c \max_{1 \leq q \leq l} \gamma_q \lambda_{\min}((\Phi L)^s) \tilde{e}(t)^T (\Lambda \otimes I_N) \tilde{e}(t) \\ &\leq 2 \left( \varepsilon_1 - c \max_{1 \leq q \leq l} \gamma_q \lambda_{\min}((\Phi L)^s) \lambda_{\max^{-1}}(\Phi) \right) V(t) \\ &\triangleq \mu_2 V(t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

结合不等式 (3.16) 和式 (3.17) 可得

$$\begin{cases} \dot{V}(t) \leq \mu_1 V(t), & t \in [t_k, s_k], k \in \mathbb{N}, \\ \dot{V}(t) \leq \mu_2 V(t), & t \in (s_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.18)$$

接下来, 将严格讨论两种情形. 以下证明方法与参考文献[63,65]中的相类似.

**情形 1**  $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ .

首先, 令  $\varsigma = \max\{\mu_1, \mu_2\} < 0$ . 根据不等式 (3.18), 易得

$$\dot{V}(t) < \varsigma V(t). \quad (3.19)$$

显然,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ . 换言之,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_2(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_l(t) = 0$ . 这意味着多智能体网络系统关于前实现部分分量一致.

**情形 2**  $\mu_1 < 0, \mu_2 \geq 0$ .

在这种情况下, 主要考虑时间  $t$  在不同时间间隔  $[t_k, s_k]$  和  $(s_k, t_{k+1})$  中的两个子情形.

假设  $[t_i, s_i] \subset [t_k, s_k]$  和  $(s_i, t_{i+1}) \subset (s_k, t_{k+1})$ , 其中  $i, k \in \mathbb{N}$ .

**子情形 1** 对于  $t \in [t_k, s_k]$ ,  $t \rightarrow +\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$  时, 易得

$$V(t) \leq V(0) \exp \left\{ \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{t_i}^{s_i} \mu_1 dt + \int_{t_k}^t \mu_1 dt + \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{s_i}^{t_{i+1}} \mu_2 dt \right\}, \quad (3.20)$$

如果  $t - t_k \rightarrow +\infty$ , 由于  $\mu_1 < 0$  及式 (3.20), 可知

$$\sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{t_i}^{s_i} \mu_1 dt + \int_{t_k}^t \mu_1 dt + \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{s_i}^{t_{i+1}} \mu_2 dt \rightarrow -\infty.$$

这表明  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ , 或者说  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_2(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_l(t) = 0$ .

如果  $t - t_k \rightarrow +\infty$ , 那么  $t \rightarrow +\infty$ , 这意味着  $k \rightarrow +\infty$ . 根据式 (3.18), 可得

$$V(t) \leq V(0) \exp \left\{ \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{t_i}^{s_i} \mu_1 dt + \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{s_i}^{t_{i+1}} \mu_2 dt \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= V(0) \exp \left\{ \sum_{i=0}^{i=k-1} \mu_1(s_i - t_i) + \sum_{i=0}^{i=k-1} \mu_2(t_{i+1} - s_i) \right\} \\
 &\leq V(0) \exp \left\{ \sum_{k=0}^p \mu_1(s_k - t_k) + \sum_{k=0}^p \mu_2(t_{k+1} - s_k) \right\}. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

由条件 (3.12), 易知

$$\left\{ \sum_{k=0}^p \mu_1(s_k - t_k) + \sum_{k=0}^p \mu_2(t_{k+1} - s_k) \right\} \rightarrow -\infty.$$

因此, 当  $p \rightarrow +\infty$ ,  $t \rightarrow +\infty$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ . 即,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_2(t) = \cdots = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{e}_l(t) = 0$ .

**子情形 2** 对于  $t \in (s_k, t_{k+1})$ ,  $t \rightarrow +\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$  时, 可得

$$\begin{aligned}
 V(t) &\leq V(0) \exp \left\{ \sum_{i=0}^{i=k} \int_{t_i}^{s_i} \mu_1 dt + \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{s_i}^{t_{i+1}} \mu_2 dt + \int_{s_k}^t \mu_1 dt \right\} \\
 &\leq V(0) \exp \left\{ \sum_{i=0}^{i=k} \int_{t_i}^{s_i} \mu_1 dt + \sum_{i=0}^{i=k-1} \int_{s_i}^{t_{i+1}} \mu_2 dt \right\} \\
 &= V(0) \exp \left\{ \sum_{i=0}^{i=k} \mu_1(s_i - t_i) + \sum_{i=0}^{i=k} \mu_2(t_{i+1} - s_i) \right\} \\
 &\leq V(0) \exp \left\{ \sum_{k=0}^p \mu_1(s_k - t_k) + \sum_{k=0}^p \mu_2(t_{k+1} - s_k) \right\}. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

进一步, 结合式 (3.19), 式(3.21) 和式 (3.22) 考虑, 可得

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \mu_1 \sum_{k=0}^p (s_k - t_k) + \mu_2 \sum_{k=0}^p (t_{k+1} - s_k) \right\} = -\infty.$$

因此,  $t \rightarrow +\infty$  意味着  $p \rightarrow +\infty$ . 显然, 可得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ . 所以当  $t \rightarrow +\infty$ , 有  $\tilde{e}_q(t) \rightarrow 0$ ,

$q = 1, \dots, l$ . 这说明偏差系统 (3.8) 关于前  $l$  个分量收敛到零值. 故而, 多智能体系统 (3.1) 与 (3.2) 在非周期间歇牵制控制 (3.3) 下实现部分分量一致.

定理 1 证毕. ■

**注 3.8** 与文献[35,36]中利用连续控制策略达到部分分量一致的结果相比, 本小节采用一种非周期间歇牵制控制算法. 这在实际应用中更加合理且能减少控制成本. 注意到, 若对于任何  $k \in \mathbb{N}$ , 始终有  $t_k - s_k \equiv 0$ , 则非周期间歇牵制控制变更为牵制控制, 所以本节的研究内容可导出文献[35]的结论. 此外, 本节采用牵制控制来代替文献[36]中的反馈控制, 只要控制少量关键节点, 系统就实现部分分量一致.

**注 3.9** 当  $l = n$  时, 本节的结果类似于文献[63]中的定理 1. 此外, 文献[8]证明了一阶多智能体系统实现一致的充要条件是网络包含生成树或强连通. 在文献[35]中讨论了有向加权网络, 若智能体接收邻居智能体的信息能力较弱, 则应对该智能体进行控制. 此外, 诸如网络连通分支或生成树的根节点、度差较大的节点以及孤立节点也应作为牵制备选节点, 以便能高效地使网络系统达到稳定.

如果存在一组相互独立、一致有界的时间序列  $[t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$ , 使得每个控制时间间隔  $[t_k, t_{k+1})$  对应的控制间隔均满足  $\theta = \min \{s_k - t_k, k \in \mathbb{N}\}$ , 休息间隔符合  $\beta = \max \{t_{k+1} - s_k, k \in \mathbb{N}\}$ , 则易得定理 3.1 的推论.

**推论 3.1** 如果假设 2.1 和 3.1 都成立. 若定理 3.1 中的条件 (i) 也满足, 且存在

两个标量  $\theta$  和  $\beta$ , 使得

$$\mu_1\theta + \mu_2\beta < 0, \quad (3.23)$$

那么, 对于任何初值条件, 多智能体系统 (3.1) 与 (3.6) 达成部分分量一致. 这里相关的参数与定理 3.1 相同.

**注 3.10** 在文献[63-65,67]中, 所给的间歇间隔限定均类似于假设 2.1, 然而这种间歇间隔假设相对保守. 为了进一步提高间歇控制效果, Zhou 和 Cai [66]重新假定: 若对  $k \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$ ,  $T_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $s_k = t_k + \theta_k$ ,  $\sup_{k \in \mathbb{N}^+} \{t_{k+1} - t_k\} = T_{\sup}$  和  $\inf_{k \in \mathbb{N}^+} \{t_{k+1} - t_k\} = T_{\inf}$ .

并定义  $T_0 = \hat{T}_0 = t_1$ ,  $\hat{T}_k = \sum_{j=0}^k T_j$ ,  $\delta_k = \theta_k / T_k$ , 这里  $\delta_k$  是第  $k$  个控制宽度  $\theta_k$  与第  $k$  个时间宽度  $T_k$  的比率. 令  $t_k = \hat{T}_{k-1}$ ,  $\theta_k = \delta_k T_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ . 因此, 可得到如下推论.

**推论 3.2** 假设  $\inf_{k \in \mathbb{N}^+} \delta_k = \inf_{k \in \mathbb{N}^+} \left\{ \frac{\theta_k}{T_k} \right\} = \delta_{\inf} > 0$ . 在假设 3.1 与非周期间歇控制协议 (3.4) 下, 若定理 3.1 中的条件 (i) 也成立, 且有

$$(\mu_1 - \mu_2)\delta_{\inf} + \mu_2 < 0, \quad (3.24)$$

对于任何初值条件, 领导-跟随多智能体系统 (3.1) 和 (3.6) 能实现部分分量一致. 这里的参数  $\mu_1, \mu_2$  与定理 3.1 中相同.

根据推论 3.2 及假设 3.3, 易知  $\beta_k < \beta$ ,  $(t_{k+1} - t_k) - \theta_k < T_{\sup} - \theta_{\inf}$ . 显然, 不等式 (3.23) 可改写为  $\mu_1\theta_{\inf} + \mu_2(T_{\sup} - \theta_{\inf}) < 0$ . 由于  $T_{\sup} > 0$ , 对不等式两边同除  $T_{\sup}$ , 于是有

$$(\mu_1 - \mu_2)\frac{\theta_{\inf}}{T_{\sup}} + \mu_2 < 0. \quad (3.25)$$

注意到, 对于所有  $k \in \mathbb{N}^+$ , 都有  $\theta_k > \inf_{k \in \mathbb{N}^+} \theta_k = \theta_{\inf}$ ,  $T_k < T_{\sup}$ , 因此

$$\delta_{\inf} = \inf_{k \in \mathbb{N}^+} \left\{ \frac{\theta_k}{T_k} \right\} \geq \frac{\theta_{\inf}}{T_{\sup}}.$$

与不等式 (3.25) 中所使用的约束条件  $\theta_{\inf} / T_{\sup}$  相比, 不等式 (3.24) 中所导出的间歇间隔限制条件  $\delta_{\inf}$  更容易满足且更松弛.

### § 3.3.2 周期间歇牵制控制下的部分分量一致性

类似于上一小节的分析, 本小节将探讨周期间歇牵制控制 (3.4) 下的多智能体系统的部分分量一致性, 并证明控制方案对领导-跟随网络系统的可行性.

考虑含有周期间歇牵制控制 (3.4) 的第  $i$  个跟随智能体的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j \in N_i} a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)) + cb_i \Gamma(x_0(t) - x_i(t)), & t \in [k\omega, k\omega + \theta], \\ \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j \in N_i} a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), & t \in (k\omega + \theta, (k+1)\omega) \end{cases} \quad (3.26)$$

这里  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n, i \in \mathcal{I}_N$ . 对于任意时间段  $\omega > 0$ , 其中时间间隔  $\theta$  和  $\omega - \theta$  分别代表“控制时间”和“休息时间”.

沿用上一小节的符号定义, 根据状态偏差  $e_i(t) = x_i(t) - x_0(t), i \in \mathcal{I}_N$  和置换矩阵方法可得周期间歇控制 (3.4) 下的新偏差系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - [c\Gamma \otimes \tilde{L}]\tilde{e}(t), & t \in [k\omega, k\omega + \theta], \\ \dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - [c\Gamma \otimes L]\tilde{e}(t), & t \in (k\omega + \theta, (k+1)\omega). \end{cases} \quad (3.27)$$

**定理 3.2** 假设含有常数  $\varepsilon_2$  的非线性函数  $f(\cdot)$  满足的假设 3.2. 领导-跟随多智能体系统 (3.1) 和 (3.2) 在周期性间歇牵制控制 (3.4) 下可以达到部分分量一致, 如果存在两个正常数  $\bar{\mu}_1$  和  $\bar{\mu}_2$ , 且满足以下条件

$$(i) (\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\bar{\mu}_1)\Xi - \Xi(c\Gamma \otimes \tilde{L}^s) \leq 0, \quad (3.28)$$

$$(ii) (\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\bar{\mu}_2)\Xi - \Xi(c\Gamma \otimes L^s) \leq 0, \quad (3.29)$$

$$(iii) -\bar{\mu}_1\theta + \bar{\mu}_2(\omega - \theta) < 0. \quad (3.30)$$

证明 首先, 定义  $\Xi = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{IN}, 0, \dots, 0)$ . 选取如下 Lyapunov 函数

$$W(t) = \frac{1}{2}\tilde{e}(t)^T \Xi \tilde{e}(t). \quad (3.31)$$

显而易见,  $W(t)$  是有效的 Lyapunov 函数, 适用于分析由系统 (3.27) 所描述的新偏差系统的稳定性.

当  $t \in [k\omega, k\omega + \theta], k \in \mathbb{N}$  时,  $W(t)$  沿偏差系统 (3.27) 轨迹求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \tilde{e}(t)^T \Xi \tilde{e}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T \Xi (\tilde{F}(\tilde{e}(t)) - (c\Gamma \otimes \tilde{L})\tilde{e}(t)) \\ &= \tilde{e}(t)^T \Xi \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - c\tilde{e}(t)^T \Xi (\Gamma \otimes \tilde{L})\tilde{e}(t) \\ &\leq \varepsilon_2 \tilde{e}(t)^T \Xi \tilde{e}(t) - c\tilde{e}(t)^T \Xi (\Gamma \otimes \tilde{L}^s)\tilde{e}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T [\varepsilon_2 \Xi - \Xi(c\Gamma \otimes \tilde{L}^s) + \frac{1}{2}\bar{\mu}_1 \Xi] \tilde{e}(t) - \frac{1}{2}\bar{\mu}_1 \tilde{e}(t)^T \Xi \tilde{e}(t) \\ &\leq -\bar{\mu}_1 W(t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

从而, 不等式  $\frac{dW(t)}{dt} \leq -\bar{\mu}_1 W(t)$  成立. 通过对两端积分, 有

$$\int_{k\omega}^{k\omega+\theta} \frac{dW(t)}{W(t)} \leq \int_{k\omega}^{k\omega+\theta} -\bar{\mu}_1 dt,$$

于是

$$W(t) \leq W(k\omega) e^{-\bar{\mu}_1(t-k\omega)}. \quad (3.33)$$

相似地, 当  $t \in (k\omega + \theta, (k+1)\omega), k \in \mathbb{N}$  时, 有

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \tilde{e}(t)^T \Xi \dot{\tilde{e}}(t) \\ &= \tilde{e}(t)^T \Xi (\tilde{F}(\tilde{e}(t)) - (c\Gamma \otimes L)\tilde{e}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{e}(t)^T \Xi \tilde{F}(\tilde{e}(t)) - c\tilde{e}(t)^T \Xi (\Gamma \otimes L^s) \tilde{e}(t) \\
 &\leq \varepsilon_2 \tilde{e}(t)^T \Xi \tilde{e}(t) - c\tilde{e}(t)^T \Xi (\Gamma \otimes L^s) \tilde{e}(t) \\
 &= \tilde{e}(t)^T [\varepsilon_2 \Xi - \Xi (c\Gamma \otimes L^s) - \frac{1}{2} \bar{\mu}_2 \Xi] \tilde{e}(t) + \frac{1}{2} \bar{\mu}_2 \tilde{e}(t)^T \Xi \tilde{e}(t) \\
 &\leq \bar{\mu}_2 W(t).
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

因此,  $\frac{dW(t)}{dt} \leq \bar{\mu}_2 W(t)$ . 故而, 可得

$$W(t) \leq W(k\omega + \theta) e^{\bar{\mu}_2(t-k\omega-\theta)}. \tag{3.35}$$

结合不等式 (3.33) 和 (3.35), 并根据文献[63]中的证明方法, 则

$$\begin{cases} W(t) \leq W(k\omega) e^{-\bar{\mu}_1(t-k\omega)}, \\ W(t) \leq W(k\omega + \theta) e^{\bar{\mu}_2(t-k\omega-\theta)}. \end{cases} \tag{3.36}$$

从而, 推导出

$$\begin{aligned}
 W((k+1)\omega) &\leq W(k\omega + \theta) e^{\bar{\mu}_2(\omega-\theta)} \\
 &\leq W(k\omega) \exp\{-\bar{\mu}_1\theta + \bar{\mu}_2(\omega-\theta)\} \\
 &\leq \cdots \leq W(0) \exp\{(-\bar{\mu}_1\theta + \bar{\mu}_2(\omega-\theta))(k+1)\}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

因此,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = 0$ . 简而言之, 当  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\tilde{e}_q(t) \rightarrow 0, q = 1, \dots, l$ . 即, 偏差系统 (3.27)

关于前  $l$  个分量达到指数稳定. 所以, 在周期间歇牵制控制 (3.4) 下多智能体网络系统 (3.1) 与 (3.2) 实现部分分量一致.

定理 3.2 证毕. ■

**注 3.11** 本小节采用周期间歇牵制控制来探究部分分量一致性问题. 此外, 若文献[47]中不含时滞且  $l = n$ , 则由定理 3.2 可以导出相关结果. 这意味着恒同一致是部分分量一致的一种特殊情况.

**注 3.12** 与前一小节中使用两个固定值来限制周期间歇控制律相比, 本小节采取了两个可变可选值来分析周期间歇约束条件, 这使得在实际应用中更灵活和更可控.

**注 3.13** 注意到, 定理 3.2 不能直接从定理 3.1 导出, 因为定理 3.1 中的常数  $\mu_1$  和  $\mu_2$  是显式的, 而定理 3.2 中的  $\bar{\mu}_1$  和  $\bar{\mu}_2$  是隐式值. 简而言之, 定理 3.1 中的  $\mu_1$  和  $\mu_2$  是固定值, 而定理 3.2 中的  $\bar{\mu}_1$  和  $\bar{\mu}_2$  是任意可选值. 此外, 若仅考虑间歇控制的约束条件且相关参数相同, 则定理 3.2 中的条件 (iii) 可作为定理 3.1 中条件 (ii) 的特例, 且由推论 3.1 可直接获得定理 3.2 中的条件 (iii).

### § 3.4 数值模拟

本节是对本章的理论结果的数值验证.

在不失一般性的前提下, 考虑由系统 (3.1) 和 (3.2) 组成的领导-跟随多智能体

系统. 该系统由一个领导智能体和四个跟随智能体构成, 网络通信拓扑结构如图 3.1 所示, 非线性函数  $f(\cdot)$  由蔡氏电路所描述<sup>[35]</sup>

$$f(x_i(t)) = \begin{pmatrix} ax_{i2} - bx_{i1} + \zeta(x_{i1}) \\ -x_{i1} + x_{i2} - x_{i2}x_{i3}^2 \\ -\epsilon x_{i2} \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

其中  $\zeta(x_{i1}) = \varpi(|x_{i1} + 1| - |x_{i1} - 1|)$ ,  $a = 1, b = 3, \varpi = 2, \epsilon = 2$ . 根据假设 3.1 及 3.2, 可计算出  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1$ .

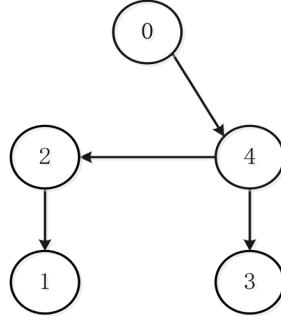


图 3.1 a

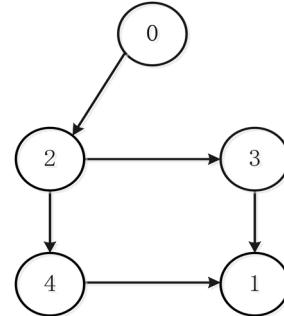


图 3.1 b

图 3.1 网络通信图拓扑

为了叙述简单起见, 本次数值模拟中选择  $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 0)$ ,  $\Phi = I_3$ , 并令  $N=4, n=3$ . 考虑领导-跟随多智能体系统 (3.1) 和 (3.2) 分别在间歇牵制控制 (3.3) 与 (3.4) 下关于前两个分量 (即  $l=2$ ) 实现一致. 从图 3.1 的网络通信拓扑图中可知, 网络含有基于根节点的有向生成树, 且拉普拉斯矩阵  $L_a$  和  $L_b$  可以描述如下

$$L_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**例 1** 首先, 讨论具有非周期间歇牵制协议 (3.3) 的多智能体系统 (3.1) 和 (3.2). 根据文献[9,23], 通常将网络连通分支或生成树的根节点, 弱权重节点, 度差较大的节点作为网络中备选的牵制节点. 从图 3.1(a) 的网络拓扑图和 Laplace 矩阵  $L_a$  可以看出, 第四个节点是根节点. 由此可以选取  $B = \text{diag}(0, 0, 0, 1)$ , 并计算相关的特征值为  $\lambda_{\max}(\Phi) = 1, \lambda_{\min}((\Phi \tilde{L})^s) = 0.1910$  和  $\lambda_{\min}((\Phi L)^s) = -0.3873$ . 设置系统的初始时刻为 0 sec, 终端时刻为 3sec, 即时间间隔为 [0, 3]. 为保证状态偏差在选定的时间间隔内收敛, 令间歇控制存在于以下非周期控制的间隔中

$$[0, 0.3] \cup [0.5, 0.7] \cup [0.8, 1.2] \cup [1.5, 2] \cup [2.1, 2.2] \cup [2.6, 2.85] \cup \dots$$

根据控制时间间隔,选取耦合(控制)强度  $c=6$ . 不难验证  $c=6 > 5.236$ ,  $\mu_1 = -0.2920$  以及  $\mu_2 = 6.6476$ , 这意味着定理 3.1 中的条件 (i) 和 (ii) 成立. 给出系统的初始值为  $x_1(0) = [-1.5, 3.6, -3.5]^T$ ,  $x_2(0) = [-3.7, -3.6, -1]^T$ ,  $x_3(0) = [-0.08, 2, -0.3]^T$ ,  $x_4(0) = [4, 0.1, 1.5]^T$ . 通过数值模拟, 图 3.2 显示了在非周期间歇牵制控制器 (3.3) 下, 四个智能体的三个分量所对应的状态偏差  $e_i(t)$  的轨迹. 图 3.2(a) 表示四个智能体中第一个分量偏差轨迹. 图 3.2(b) 代表四个智能体中第二个分量偏差轨道, 图 3.2(c) 是四个智能体的第三个分量的偏差状态. 从图 3.2(a) 和图 3.2(b) 可知, 多智能体系统 (3.1) 和 (3.2) 中所有智能的状态变量关于前两个分量可以实现恒同一致. 需要解释的是, 所有智能体的第三个分量的偏差状态是发散的. 特别地, 无论牵制多少个智能体或假设每个跟随智能体都接收到来自领导者发出的信息(即取  $B = \text{diag}(b_1, b_2, b_3, b_4) > 0$ ), 或让耦合强度  $c$  足够大, 所有智能体的第三个分量依然无法收敛到零值. 因此, 该系统的状态只有部分变元达到稳定, 被称为部分分量一致性.

**例 2** 在本次仿真实验中, 考虑多智能体统 (3.1) 和 (3.2) 在周期间歇牵制控制协议 (3.4) 下的部分分量一致性. 由图 3.1(b) 可知第二个智能体是根节点. 于是, 取牵制矩阵  $B = \text{diag}(0, 2, 0, 0)$ , 并计算出特征值  $\lambda_{\min}(\tilde{L}^s) = 0.2929$  和  $\lambda_{\max}(L^s) = -0.3660$ . 根据定理 3.2 中的条件 (i), 选取  $c = 7$ ,  $\bar{\mu}_1 = 2.1006 > 0$  及  $\bar{\mu}_2 = 7.1240 > 0$  以符合定理 3.2 中的条件 (i) 和 (ii). 为了固定间歇控制间隔, 取  $\theta = 0.4$ ,  $\omega = 0.5$ , 并设定时间间隔为  $[0, 3]$ . 在下列周期间隔中实施牵制控制

$$[0, 0.4] \cup [0.5, 0.9] \cup [1, 1.4] \cup [1.5, 1.9] \cup [2, 2.4] \cup [2.5, 2.9] \cup \dots$$

显然,  $-2.1006\theta + 7.1240(\omega - \theta) < 0$ , 这说明定理 3.2 中的条件 (iii) 也成立. 图 3.3 证明了定理 3.2 的有效性. 它显示出牵制第二个智能体后, 四个智能体的所有状态分量的偏差轨迹. 显然, 图 3.2(a) 和 3.2(b) 描述了四个智能体关于前两个分量实现一致, 而四个智能体的第三个分量是发散的. 不同于恒同一致中要求所有智能体的全部分量随着时间演化将全部收敛到一个预定的目标轨道, 部分分量一致只要求所有智能体的前  $l$  个分量实现一致, 其剩余的  $n-l$  个分量不必达成一致. 通过两种不同的控制策略以及两次不同的数值模拟实验可知, 与恒同一致相比, 部分分量一致是一种更弱的群体动力学行为, 更加具有普适性.

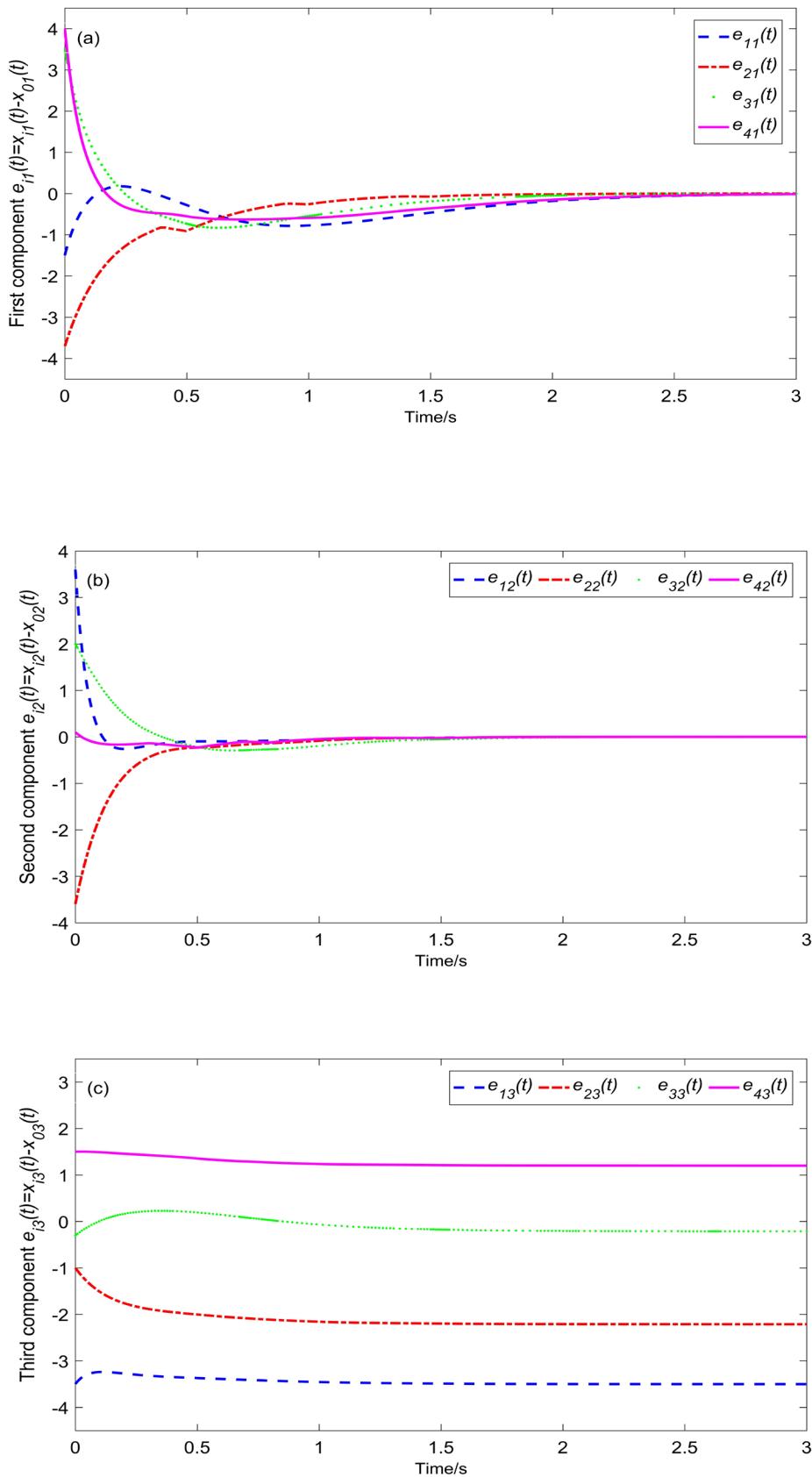


图 3.2 四个智能体在非周期间歇牵制 (3.3) 下的三个分量的偏差轨迹

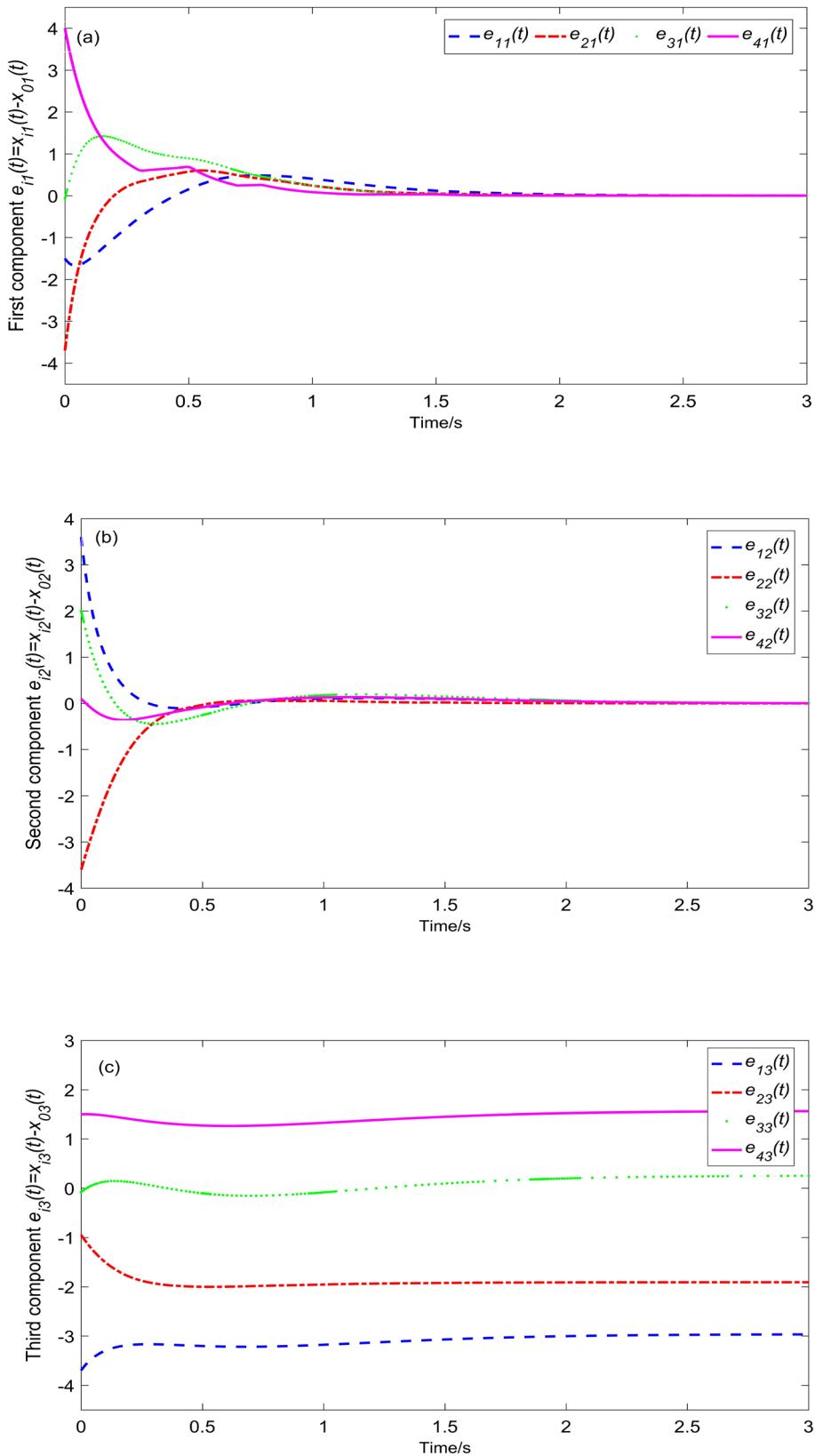


图 3.3 四个智能体在周期间歇牵制 (3.4) 下的三个分量的偏差轨迹

### § 3.5 结语

本章研究了具有非线性动力学的一阶领导-跟随网络系统在间歇牵制控制下的部分分量一致性问题，并获得了一些充分条件。对两种不同的间歇情况进行了详细地分析。对于具有非周期间歇牵制控制的多智能体系统，其控制是非周期性输入控制，并基于牵制控制协议，在每个控制宽度只牵制一小部分智能体，就确保了系统达到部分分量一致。此外，本章将原有的偏差系统转换为新的偏差系统，以分析多智能体的部分变元指数稳定性。最后，给出了相关理论的数值实验。在未来的工作中，将把系统状态时滞考虑到部分分量一致性问题中。本章获得的结果可以广泛地应用于各个领域，进而推广部分分量一致性的发展。

## 第四章 非周期间歇牵制控制下二阶滞后一致性

### § 4.1 引言

近年来,由智能体的位置和速度状态所掌控的二阶积分器因其精准的动力学和较强的鲁棒性被广泛地运用在智能交通系统、智能电网和人工智能系统等现实网络化模型中。Wang 和 Ma 提出了领导-跟随二阶滞后一致的概念<sup>[43]</sup>,即跟随智能体的状态轨迹在一定的时间延迟后趋同领导者的状态轨迹。相比恒同一致而言,滞后一致是一种新型的协调群集行为,能有效地规避智能体之间的相互碰撞并减少拥挤。随后,Wang 等学者采用牵制控制来实现多智能体网络系统的滞后一致<sup>[44]</sup>,并且在文献[45]中进一步分析了切换网络拓扑下智能体网络的聚类-滞后一致性。事实上,由于通信传输的不稳定性、障碍物的干扰、智能体感知范围的限制以及其他因素,智能体不能时刻都与邻居或领导者交互信息<sup>[51,67]</sup>。为了适应相关的间歇信号并降低控制成本,间歇控制策略应运而生并被普及到同步和一致性研究中<sup>[62-67]</sup>。

受到文献[44,51,63]的启发,本章将通过非周期间歇牵制控制来研究二阶多智能体系统的领导-跟随滞后一致性。由于领导及其跟随智能体之间的通信信号并不总是持续的,因此将控制协议按时间间隔分为两部分(见 图 2.1)。基于智能体位置和速度的局部状态信息,并利用牵制控制技术<sup>[9,23,44]</sup>,只要将局部控制器应用于一部分智能体上。同时还考虑了随机噪声环境下多智能体网络系统的抗扰动能力。在有向通信网络下,智能体的信息交互为非周期间歇通信,得到了二阶滞后指数一致的一些准则。

本章的研究结果可应用于当今的智能交通技术。例如,在先进的无人驾驶车队系统中,不仅有必要避免碰撞与减少车辆之间的拥堵(即追踪滞后),而且还必须确保当雷达探测器无法测量信息时,车辆依然可以自动驾驶(即非周期间歇信号)。本章的贡献主要有以下三方面:

- (1) 首次研究了非周期间歇牵制协议对二阶非线性多智能体系统的追踪滞后一致性,并利用指数稳定性理论导出了一些充分的判据。
- (2) 结合非周期间歇信号和牵制控制策略及自适应律,构造了两种不同的控制策略,分别为非周期间歇牵制和自适应牵制间歇算法。
- (3) 考虑随机噪声或信号干扰来探究二阶均方滞后一致。

### § 4.2 模型介绍

考虑二阶领导智能体  $x_0, v_0$  是一个孤立的智能体,其动力学可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = v_0(t), \\ \dot{v}_0(t) = f(x_0(t), v_0(t)), \end{cases} \quad (4.1)$$

这里  $x_0(t), v_0(t) \in \mathbb{R}^n$  分别是领导智能体的位置与速度状态. 领导者状态可以是孤立节点的平衡点、周期轨道甚至是混沌轨道.

假设每个二阶跟随智能体动力学为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = f(x_i(t), v_i(t)) + c_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) \\ \quad + c_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(v_j(t) - v_i(t)) + u_i(t), \end{cases} \quad (4.2)$$

其中  $x_i(t), v_i(t), u_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ , 分别表示第  $i$  个跟随智能体在瞬时时刻  $t$  处的位置状态, 速度状态以及控制项. 非线性函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个连续映射, 代表第  $i$  个跟随智能体的自身动力学,  $c_1, c_2$  分别是与位置和速度相关的耦合强度. 邻接矩阵  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  代表网络拓扑结构, 且 Laplace 矩阵  $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  与邻接矩阵之间存在如下的关系

$$l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j, \quad l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}. \quad (4.3)$$

**定义 4.1** 如果对于  $i \in \mathcal{I}_N$  和任何初值条件, 系统 (4.1) 和 (4.2) 的解满足

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_0(t - \tau)\| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|v_i(t) - v_0(t - \tau)\| &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

则称多智能体网络系统达到二阶领导-跟随滞后一致. 这里, 滞后  $\tau > 0$ .

**注 4.1** 如果定义 4.1 中的  $\tau = 0$ , 则跟随智能体与领导智能体之间没有追踪滞后. 在这种情况下, 滞后一致称为领导-跟随一致.

根据定义 4.1, 记  $e_i(t) = (\tilde{x}_i^T(t), \tilde{v}_i^T(t))^T$  为系统滞后偏差, 其中  $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - x_0(t - \tau)$ ,  $\tilde{v}_i(t) = v_i(t) - v_0(t - \tau)$ , 对于所有  $i \in \mathcal{I}_N$ .

**定义 4.2** 如果存在两个标量  $\sigma > 0$  和  $M > 0$ , 使得

$$\|e(t)\| \leq M \|e|_{[-\tau, 0]}\|_\infty \exp\{-\sigma t\},$$

则称多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 以全局指数稳定形式实现滞后一致.

**定义 4.3** 给定有界追踪时滞  $0 < \tau < \delta$ . 二阶多智能体网络系统 (4.1) 和 (4.2) 在具有随机噪声下达到均方滞后一致, 若对于任意的初值条件, 均满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \|x_i(t) - x_0(t - \tau)\|^2 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \|v_i(t) - v_0(t - \tau)\|^2 = 0.$$

**假设 4.1** 如果存在非负常数  $\rho_i$ , 使得非线性函数  $f$  满足

$$\|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)\| \leq \sum_{i=1}^2 \rho_i \|x_i - y_i\|, \quad (4.5)$$

对于所有  $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n, i \in 1, 2$ .

### § 4.3 主要结果

#### § 4.3.1 非周期间歇牵制控制下的二阶滞后一致性

在本小节, 考虑如下的非周期间歇牵制追踪控制输入

$$u_i(t) = \begin{cases} -c_1 b_i (x_i(t) - x_0(t-\tau)) - c_2 b_i (v_i(t) - v_0(t-\tau)), & t \in [t_k, s_k], \\ 0, & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (4.6)$$

牵制制动器满足

$$b_i \triangleq \begin{cases} b_i, & t \in [t_k, s_k], \quad 1 \leq i < l, \\ 0, & t \in [t_k, s_k], \quad l+1 \leq i \leq N, \\ 0, & t \in (s_k, t_{k+1}), \quad 1 \leq i \leq N, \end{cases} \quad (4.7)$$

其中  $b_i > 0$  是牵制控制增益, 表示在  $t+\tau$  时刻前  $l$  个跟随智能体能收到来自领导智能体的信息, 否则,  $b_i=0$ . 为了方便起见, 假设与位置和速度有关的控制增益分别等于耦合强度  $c_1$  和  $c_2$ . 在时间间隔  $t \in (s_k, t_{k+1})$  时,  $u_i(t)=0$ , 这能使制动器有一段休息间隔来减少控制能耗. 这种控制策略相似于最大不干涉控制, 即最大限度地放宽控制器取零值的长度, 是一种稀疏控制方案或称  $L^0$  最优控制.

二阶多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 在非周期间歇牵制控制 (4.6) 下被描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \begin{cases} f(x_i(t), v_i(t)) - c_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} x_j(t) - c_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} v_j(t) \\ -c_1 b_i (x_i(t) - x_0(t-\tau)) - c_2 b_i (v_i(t) - v_0(t-\tau)), & t \in [t_k, s_k], \\ f(x_i(t), v_i(t)) - c_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} x_j(t) - c_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} v_j(t), & t \in (s_k, t_{k+1}). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

借助于定义 4.1 给出的滞后偏差, 易得  $e(t) = (\tilde{x}^T(t), \tilde{v}^T(t))^T$ ,  $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1^T(t), \dots, \tilde{x}_N^T(t))^T$  以及  $\tilde{v}(t) = (\tilde{v}_1^T(t), \dots, \tilde{v}_N^T(t))^T$ . 故而, 偏差系统 (4.8) 可约化为

$$\dot{e}(t) = \begin{cases} \tilde{F}(e(t)) + (H_1 \otimes I_n) e(t), & t \in [t_k, s_k], \\ \tilde{F}(e(t)) + (H_2 \otimes I_n) e(t), & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (4.9)$$

其中  $F(x(t), v(t)) = (f^T(x_1(t), v_1(t)), \dots, f^T(x_N(t), v_N(t)))^T$ ,  $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_l, 0, \dots, 0\}$ ,  $\tilde{L} = L + B$ ,

$$\tilde{F}(e(t)) = \begin{pmatrix} 0_N \\ F(x(t), v(t)) - 1_N \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau)) \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -c_1 \tilde{L} & -c_2 \tilde{L} \end{pmatrix} \text{ 和 } H_2 = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -c_1 L & -c_2 L \end{pmatrix}.$$

接下来, 给出二阶滞后一致在非周期间歇牵制控制下的充分条件.

**定理 4.1** 如果假设 2.1 和 4.1 成立. 对于任何初值条件, 多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 在非周期间歇牵制控制 (4.6) 下可以实现二阶滞后一致, 如果满足以下条件

- (i)  $\lambda_{\min}(\tilde{L}^s) > \frac{c_1}{2c_2^2}$ ,
- (ii)  $R_1 = \begin{pmatrix} c_1^2 \tilde{L}^s - \Delta_1 I_N & 0_N \\ 0_N & c_2^2 \tilde{L}^s - (c_1 + \Delta_2) I_N \end{pmatrix} > 0$ ,
- (iii)  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ -\mu_1 \sum_{k=0}^r (s_k - t_k) + \mu_2 \sum_{k=0}^r (t_{k+1} - s_k) \right\} = -\infty$ ,

其中  $\mu_1 = 2\lambda_{\min}(R_1)\lambda_{\max}^{-1}(P_2)$ ,  $\mu_2 = 2\lambda_{\max}(P^{-1}R_2)$ ,  $\Delta_1 = c_1\rho_1 + \Delta_3$ ,  $\Delta_2 = c_2\rho_2 + \Delta_3$ ,  $\Delta_3 = (c_1\rho_2 + c_2\rho_1)/2$ ,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2c_1 c_2 \lambda_{\max}(\tilde{L}^s) I_N & c_1 I_N \\ c_1 I_N & c_2 I_N \end{pmatrix} \text{ 和 } R_2 = \begin{pmatrix} c_1 \rho_1 I_N - c_1^2 L^s & 2c_1 c_2 B^s + \Delta_3 I_N \\ 2c_1 c_2 B^s + \Delta_3 I_N & (c_1 + c_2 \rho_2) I_N - c_2^2 L^s \end{pmatrix}.$$

**证明** 考虑下述 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t)(P \otimes I_n)e(t), \quad (4.10)$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 2c_1 c_2 \tilde{L}^s & c_1 I_N \\ c_1 I_N & c_2 I_N \end{pmatrix}.$$

首先, 证明当  $e(t) \neq 0$ ,  $V(t) > 0$ . 根据式 (4.10), 可得

$$\begin{aligned} V(t) &= c_1 c_2 \tilde{x}^T(t)(\tilde{L}^s \otimes I_n)\tilde{x}(t) + c_1 \tilde{x}^T(t)(I_N \otimes I_n)\tilde{v}(t) + \frac{c_2}{2} \tilde{v}^T(t)(I_N \otimes I_n)\tilde{v}(t) \\ &\geq \frac{1}{2} e^T(t)(P_1 \otimes I_n)e(t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

这里

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2c_1 c_2 \lambda_{\min}(\tilde{L}^s) I_N & c_1 I_N \\ c_1 I_N & c_2 I_N \end{pmatrix}.$$

显然  $P_1$  是一个对称矩阵, 由引理 2.3 可知,  $P_1 > 0$  等价于  $c_2 > 0$  且有  $\lambda_{\min}(\tilde{L}^s) > c_1 / 2c_2^2$ . 根据定理 4.1 中的条件 (i), 易知  $P_1 > 0$ . 于是,  $V(t) \geq 0$  且  $V(t) = 0$  当且仅当  $e(t) = 0$ .

当  $t \in [t_k, s_k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$  时, 对  $V(t)$  沿偏差系统 (4.9) 求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T(t)(P \otimes I_n)[\tilde{F}(e(t)) + (H_1 \otimes I_n)e(t)] \\ &= (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t))[F(x(t), v(t)) - 1_N \\ &\quad \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] + e^T(t)(P H_1 \otimes I_n)e(t) \\ &= (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t))[F(x(t), v(t)) - 1_N \\ &\quad \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] + e^T(t)((P H_1)^s \otimes I_n)e(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t)) [F(x(t), v(t)) - 1_N \\
 &\quad \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] - e^T(t)(Q \otimes I_n)e(t),
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

这里

$$Q = -\frac{1}{2}(PH_1 + H_1^T P) = \begin{pmatrix} c_1^2 \tilde{L}^s & 0_N \\ 0_N & c_2^2 \tilde{L}^s - c_1 I_N \end{pmatrix}.$$

结合假设 4.1, 从而有

$$\begin{aligned}
 &c_1 \tilde{x}^T(t) [F(x(t), v(t)) - 1_N \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] \\
 &\leq c_1 \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\| (\rho_1 \|\tilde{x}_i(t)\| + \rho_2 \|\tilde{v}_i(t)\|) \\
 &\leq c_1 \left( (\rho_1 + \frac{\rho_2}{2}) \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + \frac{\rho_2}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 \right),
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

以及

$$\begin{aligned}
 &c_1 \tilde{x}^T(t) [F(x(t), v(t)) - 1_N \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] \\
 &\leq c_2 \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\| (\rho_1 \|\tilde{x}_i(t)\| + \rho_2 \|\tilde{v}_i(t)\|) \\
 &\leq c_1 \left( \frac{\rho_1}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + (\frac{\rho_1}{2} + \rho_2) \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 \right),
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

将式 (4.13) 和式 (4.14) 并代入式 (4.12) 得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq (c_1 \rho_1 + \Delta_3) \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + (\Delta_3 + c_2 \rho_2) \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 - e^T(t)(Q \otimes I_n)e(t) \\
 &= \Delta_1 \|\tilde{x}(t)\|^2 + \Delta_2 \|\tilde{v}(t)\|^2 - e^T(t)(Q \otimes I_n)e(t) \\
 &= -e^T(t)(R_1 \otimes I_n)e(t),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

其中

$$R_1 = \begin{pmatrix} c_1^2 \tilde{L}^s - \Delta_1 I_N & 0_N \\ 0_N & c_2^2 \tilde{L}^s - (c_1 + \Delta_2) I_N \end{pmatrix}.$$

由引理 2.5 和定理 4.1 中的条件 (ii) 可知,  $R_1$  是一个正定对称矩阵. 由式 (4.15), 有

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda_{\min}(R_1)e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t). \tag{4.16}$$

另一方面, 可知

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \frac{1}{2} e^T(t)(P \otimes I_n)e(t) \\
 &\leq \frac{1}{2} e^T(t)(P_2 \otimes I_n)e(t) \\
 &\leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(P_2)e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t),
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2c_1 c_2 \lambda_{\max}(\tilde{L}^s) I_N & c_1 I_N \\ c_1 I_N & c_2 I_N \end{pmatrix}.$$

结合式 (4.16), 可得

$$\dot{V}(t) \leq -\mu_1 V(t), \quad (4.18)$$

其中  $\mu_1 = 2\lambda_{\min}(R_1)\lambda_{\max}^{-1}(P_2)$ . 由于  $\lambda_{\min}(R_1) > 0$  与  $\lambda_{\max}(P_2) > 0$ , 所以  $\mu_1 > 0$ .

当  $t \in (s_k, t_{k+1})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  时, 用上述相似的分析方法以及引理 2.4, 可得

$$\begin{aligned} V(t) &= e^T(t)(P \otimes I_n)[\tilde{F}(e(t)) + (H_2 \otimes I_n)e(t)] \\ &= (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t))[F(x(t), v(t)) - 1_N \\ &\quad \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] + e^T(t)(P H_2 \otimes I_n)e(t) \\ &= (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t))[F(x(t), v(t)) - 1_N \\ &\quad \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] + e^T(t)((P H_2)^s \otimes I_n)e(t) \\ &\leq e^T(t)(M \otimes I_n)e(t) + e^T(t)((P H_2)^s \otimes I_n)e(t) \\ &= e^T(t)(R_2 \otimes I_n)e(t) \\ &\leq \lambda_{\max}(P^{-1}R_2)e^T(t)(P \otimes I_n)e(t) \\ &\triangleq \mu_2 V(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

其中  $\mu_2 = 2\lambda_{\max}(P^{-1}R_2)$ ,  $(P H_2)^s = (P H_2 + H_2^T P)/2$ ,  $R_2 = M + (P H_2)^s$  及

$$M = \begin{pmatrix} c_1 \rho_1 I_N & \Delta_3 I_N \\ \Delta_3 I_N & c_2 \rho_2 I_N \end{pmatrix}.$$

结合式 (4.18) 和式 (4.19), 可导出

$$\begin{cases} \dot{V}(t) \leq -\mu_1 V(t), & t \in [t_k, s_k], k \in \mathbb{N}, \\ \dot{V}(t) \leq \mu_2 V(t), & t \in (s_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.20)$$

基于上述的分析, 下面将验证  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ . 如若满足定理 4.1 中的条件 (iii), 则存在一个正整数  $k \in \mathbb{N}$ , 使得在时间间隔  $t \in [t_k, s_k]$  或  $t \in (s_k, t_{k+1})$  上, 对于任何  $t \in [0, +\infty)$  都有效. 因此, 将在不同的时间间隔内处理这两种情况. 事实上, 该分析类似于上章第一小节中的步骤, 故而不再重复叙述. 因此, 易得

$$V(t) \leq V(0) \exp \left\{ -\mu_1 \sum_{k=0}^r (s_k - t_k) + \mu_2 \sum_{k=0}^r (t_{k+1} - s_k) \right\} \rightarrow 0,$$

当  $k \rightarrow \infty$ , 对于  $\forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$ .

于是, 由式 (4.20) 与条件 (iii) 可得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ . 故对于任何  $j \in \mathcal{I}_N$ , 当时间

$t \rightarrow +\infty$  时, 有  $e_j(t) \rightarrow 0$ . 简而言之, 多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 在非周期间歇牵制控制 (4.6) 下可以实现二阶滞后一致.

定理 4.8 证明完毕. ■

**注 4.2** 由于间歇控制是一种分段连续 (或切换) 控制, 因此导致受控系统 (4.1)

(右端不连续系统) 的解是 Filippov 解. 基于文献[68-70]中的微分包含理论以及 Clarke 非光滑分析, 一般的 Lyapunov 稳定性理论可以推广到一类切换系统.

**注 4.3** 注意到, 对于追踪滞后  $\tau$  不能太小或太大. 如若时滞  $\tau$  太小, 则跟随者与领导者可能会产生碰撞或拥挤. 一种极端情况是  $\tau=0$ , 即等价为领导-跟随一致性. 相反地, 若时滞  $\tau$  太大, 即使网络系统实现滞后一致, 其滞后效果并不显著, 这是由于时滞过大的系统的鲁棒性较差. 因此, 在滞后一致性问题中对追踪时滞的约束是必要的. 此外, 考虑到引理 2.2 中对间歇间隔的限制约束, 本章假定  $0 < \tau \leq \delta$ .

**注 4.4** 与文献[42-45]中采用连续控制器来探究滞后一致性相比, 本节通过非周期间歇牵制控制来分析二阶滞后一致. 此外, 与文献[47,49]中所得的周期性结果不同, 这里的间歇间隔是非周期的. 特别地, 当追踪时滞  $\tau=0$  时, 本节的结果可以延拓到领导-跟随一致性. 因此, 滞后一致是一种更广义的群集动力学行为.

**注 4.5** 引理 2.6 和 2.7 表明网络中的生成树或连通的分支的根节点及孤立节点应与领导者进行信息交互, 或称这些节点为牵制备选节点. 简而言之, 只要确保少数的跟随智能体 (被控制的节点) 能接收到领导者的状态信息, 则一群跟随智能体将在  $t+\tau$  时刻后逐渐趋同于领导者的轨迹.

**注 4.6** 注意到, 对于所有  $k \in \mathbb{N}$ , 若设定控制宽度  $s_k - t_k \equiv \theta$  及  $t_{k+1} - s_k \equiv \delta - \theta$ , 则非周期间歇控制 (4.6) 将弱化为周期间歇控制.

从而, 可得定理 4.1 的推论.

**推论 4.1** 若假设 2.1 和 4.1 成立且满足定理 4.1 中的条件 (i) 与 (ii) 与下列条件

$$-\mu_1\theta + \mu_2(\delta - \theta) < 0, \quad (4.21)$$

那么对于任何初值条件, 二阶多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 在周期间歇牵制控制 (4.6) 下可以实现二阶滞后一致, 这里  $\mu_1$  和  $\mu_2$  与定理 4.1 中的相同.

另外, 对于周期间歇牵制控制 (4.6), 如若存在一个正整数  $l > 0$ , 使得对于任何  $r \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\sum_{k=rl}^{(r+1)l-1} (s_k - t_k) \equiv \bar{\theta}, \quad \sum_{k=rl}^{(r+1)l-1} (t_{k+1} - s_k) \equiv \bar{\delta} - \bar{\theta}, \quad (4.22)$$

那么, 周期间歇控制 (4.6) 弱化为半周期性间歇控制<sup>[62]</sup>, 其中  $\bar{\theta}$  和  $\bar{\delta}$  为正数.

**注 4.7** 为了详细地阐述半周期间歇控制策略的细节. 首先, 定义一个时间间隔,  $[t_k, t_{k+1}) \triangleq \bar{\delta}$ , 且任意  $l$  个相邻的子周期构成一个主周期, 并使各个子周期相互保持完全独立. 简而言之, 定义  $\bar{\delta} = \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 + \dots + \bar{\delta}_l$ . 此外, 对于任何  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{\sum_{k=rl}^{(r+1)l-1} (s_k - t_k)}{\sum_{k=rl}^{(r+1)l-1} (t_{k+1} - t_k)} \in [0, 1], \quad (4.23)$$

是一个给定的标量.

因此, 进一步可得如下推论 4.2.

**推论 4.2** 如果假设 2.1 和 4.1 成立, 且满足定理 4.1 中的条件 (i) 与 (ii) 以及如下间隔限制条件

$$-\mu_1 \bar{\theta} + \mu_2 (\bar{\delta} - \bar{\theta}) < 0, \quad (4.24)$$

对于任何初值条件, 二阶多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 在半周期间歇牵制控制 (4.6) 下可以实现二阶滞后一致, 这里  $\mu_1$  和  $\mu_2$  已在定理 4.1 中给出.

### § 4.3.2 自适应牵制非周期间歇控制下的二阶滞后一致性

沿用上一节的符号定义, 在本小节将考虑具有自适应非周期间歇牵制控制的多智能体网络的二阶滞后一致性.

通常在探究一致性问题时, 固定的控制增益都往往大于实际需要的增益. 然而自适应控制策略弥补了这一缺陷, 它可以随着网络系统的变化灵活地自主调节控制强度. 因而, 受自适应控制和牵制算法的启发<sup>[54,63,64,66]</sup>, 本节引入了一种新颖的自适应牵制间歇控制. 控制器的信息反馈是基于跟随智能体网络中的根节点的位置和速度与领导智能体之间的信息流, 相对应的自适应控制率也是依赖于状态偏差的信息反馈. 下面给出控制输入协议

$$u_i(t) = \begin{cases} -c_1 \xi(t) b_i(x_i(t) - x_0(t - \tau)) - c_2 \xi(t) b_i(v_i(t) - v_0(t - \tau)), & t \in [t_k, s_k], \\ 0, & t \in (s_k, t_{k+1}). \end{cases} \quad (4.25)$$

其相关的自适应更新率为

$$\dot{\xi}(t) = \begin{cases} \frac{c_1 d_0}{2} e^{\tilde{\mu}_1 t} e^T(t) (\Theta \otimes I_n) e(t), & t \in [t_k, s_k], \\ 0, & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (4.26)$$

这里  $d_0$  与  $\tilde{\mu}_1$  为正数, 且有

$$\Theta = \begin{pmatrix} c_1(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & c_2(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \\ c_2(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & \frac{c_2^2}{c_1}(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \end{pmatrix}.$$

**注 4.8** 由式 (4.25) 可知控制  $u_i(t)$  由间歇、牵制和自适应控制所组成,  $b_i$  定义在式 (4.7) 中, 且只有一小部分跟随者在控制时间段  $[t_k, s_k]$  可以获得领导者的位姿和速度状态信息, 即  $b_i > 0, 1 \leq i \leq l$ ; 否则, 对于  $u_i(t), i \in \mathcal{I}_N$ ,  $b_i = 0$ . 这意味着在休息间隔  $(s_k, s_{k+1})$  上, 领导者和跟随者之间不存在信号传输.

考虑具有自适应非周期间歇牵制控制的多智能体系统的动力学

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t),$$

$$\dot{v}_i(t) = \begin{cases} f(x_i(t), v_i(t)) - c_1 \xi(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} x_j(t) - c_2 \xi(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} v_j(t) \\ -c_1 \xi(t) b_i(x_i(t) - x_0(t-\tau)) - c_2 \xi(t) b_i(v_i(t) - v_0(t-\tau)) & t \in [t_k, s_k], \\ f(x_i(t), v_i(t)) - c_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} x_j(t) - c_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} v_j(t), & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (4.27)$$

对于所有的  $k \in \mathbb{N}$ , 其中  $\xi(t)$  是自适应增益.

**注 4.9** 自适应牵制控制在每个保持  $s_k > t_k$  的控制时间段被激活, 在每个保持  $t_{k+1} > s_k$  的休息时间段中失效. 同时, 假设控制增益  $c_1$  和  $c_2$  在时间间隔  $[t_k, s_k]$  中分别转换为  $c_1 \rightarrow c_1 \xi(t)$  和  $c_2 \rightarrow c_2 \xi(t)$ .

根据矩阵理论和定义 4.1, 多智能体网络系统 (4.1) 和 (4.2) 在控制协议 (4.26) 下的偏差系统可以简写为

$$\dot{e}(t) = \begin{cases} \tilde{F}(e(t)) + (H_3 \otimes I_n)e(t), & t \in [t_k, s_k], \\ \tilde{F}(e(t)) + (H_2 \otimes I_n)e(t), & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (4.28)$$

其中

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -c_1 \xi(t) \tilde{L} & -c_2 \xi(t) \tilde{L} \end{pmatrix}.$$

下面, 给出网络系统在自适应牵制间歇控制下实现二阶滞后一致性的充分条件.

**定理 4.2** 如果假设 2.1 和 4.1 同时满足, 且存在常数  $\psi \in (0, 1)$ ,  $\tilde{\mu}_1$ ,  $\tilde{\mu}_2$ ,  $\xi^*$  使得下列条件成立

$$(i) \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} \Delta_1 I_N - \Delta_4 \tilde{L}^s & \Delta_5 \tilde{L}^s + \frac{1}{2} c_1 \tilde{\mu}_1 I_N \\ \Delta_5 \tilde{L}^s + \frac{1}{2} c_1 \tilde{\mu}_1 I_N & (\frac{c_1 - c_2 \tilde{\mu}_1}{2} + \Delta_2) I_N - c_2^2 \xi^* \tilde{L}^s \end{pmatrix} \leq 0, \quad (4.29)$$

$$(ii) \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} \Delta_1 I_N - \frac{1}{2} c_1 c_2 \tilde{\mu}_2 \tilde{L}^s - c_1^2 L^s & 2 c_1 c_2 B^s - \frac{1}{2} c_1 \tilde{\mu}_2 I_N \\ 2 c_1 c_2 B^s - \frac{1}{2} c_1 \tilde{\mu}_2 I_N & (\Delta_2 + c_1 - \frac{1}{2} c_2 \tilde{\mu}_2) I_N - c_2^2 L^s \end{pmatrix} \leq 0, \quad (4.30)$$

其中  $\Delta_4 = c_1^2 \xi^* - c_1 c_2 \tilde{\mu}_1$ ,  $\Delta_5 = c_1 c_2 - c_1 c_2 \xi^*$ ,  $\tilde{\mu}_1 > 0$  以及  $\varrho = \tilde{\mu}_1(1-\psi) - \tilde{\mu}_2 \psi > 0$ , 那么对于任何初值条件, 多智能体网络系统 (4.1) 和 (4.2) 在自适应牵制非周期间歇控制 (4.25) 下可以实现二阶滞后一致.

证明 选择如下 Lyapunov-Krasovkii 函数

$$\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t), \quad (4.31)$$

这里  $\xi^*$  是一个未确定的足够大的正数, 以及有

$$\Psi_1(t) \triangleq \frac{1}{2} e^T(t)(P \otimes I_n)e(t), \quad \Psi_2(t) \triangleq \frac{1}{2} e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0}, \quad (4.32)$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 2c_1 c_2 \tilde{L}^s & c_1 I_N \\ c_1 I_N & c_2 I_N \end{pmatrix}.$$

对任意的  $t \in [t_k, s_k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$  时, 对  $\Psi_1(t)$  沿着偏差系统 (4.28) 的轨迹求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1(t) &= e^T(t)(P \otimes I_n)\dot{e}(t) \\ &= e^T(t)(P \otimes I_n)[\tilde{F}(e(t)) + (H_3 \otimes I_n)e(t)] \\ &= e^T(t)(P \otimes I_n)\tilde{F}(e(t)) + e^T(t)(PH_3 \otimes I_n)e(t) \\ &= (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t))[F(x(t), v(t)) - 1_N \otimes \\ &\quad f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] + e^T(t)((PH_3)^s \otimes I_n)e(t) \\ &= (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t))[F(x(t), v(t)) - 1_N \otimes \\ &\quad f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] + \frac{1}{2} e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t), \end{aligned} \quad (4.33)$$

其中

$$\Xi = \begin{pmatrix} -c_1^2 \xi(t)(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & 2c_1 c_2 \tilde{L}^s - c_1 c_2 \xi(t)(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \\ 2c_1 c_2 \tilde{L}^s - c_1 c_2 \xi(t)(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & c_1 I_N - c_2^2 \xi(t)(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \end{pmatrix}.$$

根据假设 4.1, 结合上一节的公式 (4.13), 式(4.14) 及式 (4.33), 有

$$\dot{\Psi}_1(t) \leq (c_1 \rho_1 + \Delta_3) \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + (\Delta_3 + c_2 \rho_2) \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 + \frac{1}{2} e^T(t)(\Xi \otimes I_n)e(t). \quad (4.34)$$

同理, 考虑  $\Psi_2(t)$  沿着偏差系统 (4.28) 的轨迹求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_2(t) &= e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)}{d_0} \dot{\xi}(t) - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)}{d_0} \left\{ \frac{c_1 d_0}{2} e^{\tilde{\mu}_1 t} e^T(t)(\Theta \otimes I_n)e^T(t) \right\} - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0} \\ &= -\frac{1}{2} e^T(t) \left\{ \begin{pmatrix} c_1^2 \xi^*(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & c_1 c_2 \xi^*(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \\ c_1 c_2 \xi^*(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & c_2^2 \xi^*(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \end{pmatrix} \otimes I_n \right\} e(t) - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^T(t) \left\{ \begin{pmatrix} c_1^2 \xi(t)(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & c_1 c_2 \xi(t)(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \\ c_1 c_2 \xi(t)(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & c_2^2 \xi(t)(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \end{pmatrix} \otimes I_n \right\} e(t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

因此, 根据式 (4.34) 和式 (4.35), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t) &\leq (c_1 \rho_1 + \Delta_3) \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + (\Delta_3 + c_2 \rho_2) \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 + \frac{1}{2} e^T(t) \left\{ \begin{pmatrix} 0_N & 2c_1 c_2 \tilde{L}^s \\ 2c_1 c_2 \tilde{L}^s & c_1 I_N \end{pmatrix} \otimes I_n \right\} e(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} e^T(t) \left\{ \begin{pmatrix} c_1^2 \xi^*(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & c_1 c_2 \xi^*(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \\ c_1 c_2 \xi^*(\tilde{L} + \tilde{L}^T) & c_2^2 \xi^*(\tilde{L} + \tilde{L}^T) \end{pmatrix} \otimes I_n \right\} e(t) - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq e^T(t) \left\{ \begin{pmatrix} \Delta_1 I_N - c_1^2 \xi^* \tilde{L} & c_1 c_2 \tilde{L}^s - c_1 c_2 \xi^* \tilde{L}^s \\ c_1 c_2 \tilde{L}^s - c_1 c_2 \xi^* \tilde{L}^s & (\frac{c_1}{2} + \Delta_2) I_N - c_2^2 \xi^* \tilde{L}^s \end{pmatrix} \otimes I_n \right\} e(t) - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0} \\
 & + \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^T(t) (P \otimes I_n) e(t) - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^T(t) (P \otimes I_n) e(t) \\
 & = e^T(t) (\Omega_1 \otimes I_n) e(t) - \tilde{\mu}_1 \Psi(t) \\
 & \leq -\tilde{\mu}_1 \Psi(t).
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

对于任意的  $t \in (s_k, t_{k+1})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  时, 与上述相似的分析方法, 沿着偏差系统 (4.28) 的轨迹对  $\Psi_1(t)$  求导, 有

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}(t) &= e^T(t) (P \otimes I_n) \dot{e}(t) + e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)}{d_0} \dot{\xi}(t) - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0} \\
 &= e^T(t) (P \otimes I_n) \tilde{F}(e(t)) + e^T(t) (P H_2 \otimes I_n) e(t) - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 e^{-\tilde{\mu}_1 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0} \\
 &\leq \Delta_1 \tilde{x}^T(t) \tilde{x}(t) + \Delta_2 \tilde{v}^T(t) \tilde{v}(t) - \frac{1}{2} \tilde{\mu}_2 e^T(t) (P \otimes I_n) + \frac{1}{2} \tilde{\mu}_2 e^{-\tilde{\mu}_2 t} \frac{(\xi(t) - \xi^*)^2}{d_0} \\
 &\quad + e^T(t) ((P H_2)^s \otimes I_n) e(t) + \frac{1}{2} \tilde{\mu}_2 e^T(t) (P \otimes I_n) e(t) \\
 &\leq e^T(t) (\Omega_2 \otimes I_n) e(t) + \tilde{\mu}_2 \Psi(t) \\
 &\leq \tilde{\mu}_2 \Psi(t).
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

结合式 (4.36) 与式 (4.37), 可得

$$\begin{cases} \dot{\Psi}(t) \leq -\tilde{\mu}_1 \Psi(t), & t \in [t_k, s_k], k \in \mathbb{N}, \\ \dot{\Psi}(t) \leq \tilde{\mu}_2 \Psi(t), & t \in (s_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.38}$$

借助于引理 2.10, 对于  $t > 0$ , 有

$$\Psi(t) \leq \|\Psi|_{[-\tau, 0]}\|_\infty e^{-\varrho t} \tag{4.39}$$

利用不等式 (4.11) 与 (4.39), 可得

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(P_1) \|e(t)\|^2 \leq \Psi(t) \leq \|\Psi|_{[-\tau, 0]}\|_\infty \exp\{-\varrho t\}.$$

令  $M_0 = \|\Psi|_{[-\tau, 0]}\|_\infty$ , 故而

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{2M_0}{\lambda_{\min}(P_1)}} \exp\{-\frac{1}{2} \varrho t\}. \tag{4.40}$$

根据不等式 (4.40), 偏差状态  $e(t) = (\tilde{x}^T(t), \tilde{v}^T(t))^T$  将以指数趋势收敛到零值. 简而言之, 跟随者的位置状态  $x(t)$  与速度状态  $v(t)$  分别以全局、指数形式趋同于领导者的位罝状态  $x_0(t-\tau)$  与的速度状态  $v_0(t-\tau)$ . 即,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ . 故多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 在自适应牵制非周期间歇控制 (4.25) 下可以实现二阶滞后一致.

定理 4.2 证明完毕. ■

**注 4.10** 与文献[42,43]中的结果相比, 本小节提出了一种基于间歇信号和网络根节点的分段自适应牵制控制策略, 这将有效地避免选取比实际需求更大的控制增益. 此外, 在自适应控制下的二阶滞后一致研究中, 其时变自适应增益  $\xi(t)$  在间歇信号下依然迅速地收敛到某一个稳定值.

为了更精准地阐述非周期间歇自适牵制控制, 给出以下二阶滞后一致算法

#### 算法 4.1 自适应牵制非周期间歇控制

**步骤 1** 给出 Laplace 矩阵  $L$ , 并通过牵制控制 (4.7) 选取控制对角矩阵  $B$ .

**步骤 2** 由假设 4.1, 计算出非线性函数  $f(\cdot)$  的参数  $\rho_1$  和  $\rho_2$ . 此外, 选取耦合强度或控制增益  $c_1$  与  $c_2$ .

**步骤 3** 利用 Schur 补判定定理 4.2 中的条件 (ii),  $\Omega_2 < 0$  且任取常数  $\tilde{\mu}_2$ .

**步骤 4** 根据实际需求, 确定间歇控制间隔并估算定义 2.7 中的  $\psi$ .

**步骤 5** 由不等式  $\tilde{\mu}_1(1-\psi)-\tilde{\mu}_2\psi > 0$  及  $\Omega_2 < 0$ , 并推算出自适应控制率 (4.26) 中的相关参数  $\tilde{\mu}_1, d_0$ .

基于定理 4.2 及注 4.6 中的周期间歇限制条件, 有如下推论 4.3.

**推论 4.3** 如果假设 2.1 和 4.1 成立. 若满足定理 4.2 中的条件 (i) 与 (ii), 并存在一个固定常数  $\psi = 1 - \theta / \delta$  以及两个标量  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ , 使得

$$\tilde{\mu}_1 > 0, \varrho = \tilde{\mu}_1(1-\psi) - \tilde{\mu}_2\psi > 0, \quad (4.41)$$

则对任何初值条件, 多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 在自适应牵制非周期性间歇控制 (4.25) 下可以达到二阶滞后一致.

### § 4.3.3 非周期间歇牵制控制在随机噪声下的二阶滞后一致性

沿用上两节的符号定义, 本小节将探讨含有随机噪声扰动的非周期间歇牵制控制下的二阶滞后一致性. 由于随机扰动在自然运动系统和人工系统中无处不在, 多智能体网络系统中不可避免地也会受到外界噪声的扰动<sup>[44,49-51]</sup>.

在噪声环境中, 自然而然地假设耦合权重  $c_1 a_{ij}$  与  $c_2 a_{ij}$  通过随机扰动分别转化为  $c_1 a_{ij} + \sigma_1 \sigma_{ij} W(t)$  和  $c_2 a_{ij} + \sigma_2 \sigma_{ij} W(t)$ , 这里  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  是噪声强度,  $W(t)$  是一维标准布朗运动 (或称维纳过程). 为了凸显噪声干扰项的存在, 假设  $\sigma_{ij} > 0$  当且仅当  $a_{ij} > 0$ ; 否则,  $\sigma_{ij} = 0$  如果  $a_{ij} = 0$ .

令具有随机噪声扰动的非周期间歇牵制控制为

$$u_i(t) = \begin{cases} -\sigma_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) w(t) - \sigma_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sigma_{ij} (v_i(t) - v_j(t)) w(t) \\ -c_1 b_i (x_i(t) - x_0(t - \tau)) - c_2 b_i (v_i(t) - v_0(t - \tau)), & t \in [t_k, s_k], \\ 0, & t \in (s_k, t_{k+1}) \end{cases} \quad (4.42)$$

其中  $c_1 > 0, c_2 > 0, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, b_i > 0$  且  $w(t)$  是一个白噪声并满足

$$\int_0^t w(s) ds = W(t), \quad t \geq 0. \quad (4.43)$$

根据定义 4.1, 具有控制算法 (4.42) 的多智能体网络系统的偏差系统可改写为向量形式

$$de(t) = \begin{cases} \tilde{F}(e(t))dt + (H_1 \otimes I_n)e(t)dt - (U \otimes I_n)e(t)dW(t), & t \in [t_k, s_k], \\ \tilde{F}(e(t))dt + (H_2 \otimes I_n)e(t)dt, & t \in (s_k, t_{k+1}), \end{cases} \quad (4.44)$$

这里  $e(t)$  是偏差状态,  $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  代表噪声矩阵且满足有如下性质

$$d_{ij} = -\sigma_{ij} (i \neq j), \quad d_{ii} = \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \quad \text{和} \quad U = \begin{pmatrix} 0_N & 0_N \\ \sigma_1 D & \sigma_2 D \end{pmatrix}.$$

**定义 4.4** 如果对于任何初始状态条件  $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ , 都有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}(\|e(t)\|) < 0,$$

则随机微分方程 (4.44) 的解是均方指数稳定的.

接下来, 给出均方滞后一致的定理.

**定理 4.3** 如果假设 2.1 和 4.1 都成立. 对于任何初值条件, 多智能体系统 (4.1) 和 (4.2) 在具有随机噪声扰动的非周期间歇牵制控制 (4.42) 下可以实现二阶均方滞后一致, 若满足以下条件

$$(i) \quad 2\lambda_{\min}(R_1) > \|U^T P U\|,$$

$$(ii) \quad \bar{\mu}_1 \theta - \bar{\mu}_2 (\delta - \theta) > 0,$$

这里矩阵  $P, P_1, P_2, R_1$  与  $R_2$  与定理 4.1 中所定义的一致, 且非周期间歇控制参数满足  $\bar{\mu}_1 = (2\lambda_{\min}(R_1) - \|U^T P U\|) \lambda_{\max}^{-1}(P_2)$ ,  $\bar{\mu}_2 = 2\lambda_{\max}(R_2) \lambda_{\min}^{-1}(P_1)$ .

证明 考虑如下 Lyapunov 函数

$$V(z) = \frac{1}{2} z^T (P \otimes I_n) z, \quad (4.45)$$

其中  $V(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ , 且令

$$P = \begin{pmatrix} 2c_1 c_2 \tilde{L}^s & c_1 I_N \\ c_1 I_N & c_2 I_N \end{pmatrix}.$$

重新定义  $V_e(t) = V(e(t)) : [-\tau, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , 故而

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} e^T(t) (P \otimes I_n) e(t). \quad (4.46)$$

对于任意的  $t \in [t_k, s_k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , 根据引理 2.8 以及 Itô 公式, 有

$$dV_e = \mathcal{L}V dt + e^T(t)(PU \otimes I_n)e(t)dW, \quad (4.47)$$

沿着系统 (4.44) 的轨迹计算  $\mathcal{L}V$ , 于是有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &= e^T(t)(P \otimes I_n)[\tilde{F}(e(t)) + (H_1 \otimes I_n)e(t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr}[e^T(t)(U^T P U \otimes I_n)e(t)] \\ &\leq (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t))[F(x(t), v(t)) - 1_N \\ &\quad \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] - e^T(t)(Q \otimes I_n)e(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \|U^T P U\| e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t). \end{aligned} \quad (4.48)$$

根据假设 4.1, 将不等式 (4.13) 和 (4.14) 代入式 (4.48) 可得,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &\leq (c_1 \rho_1 + \Delta_3) \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + (\Delta_3 + c_2 \rho_2) \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 \\ &\quad - e^T(t)(Q \otimes I_n)e(t) + \frac{1}{2} \|U^T P U\| e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t) \\ &= -e^T(t)(R_1 \otimes I_n)e(t) + \frac{1}{2} \|U^T P U\| e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t) \\ &= \frac{1}{2} (2\lambda_{\min}(R_1) - \|U^T P U\|) e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

由于不等式 (4.17) 和期望的单调性, 对不等式 (4.49) 两边同算数学期望,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathcal{L}V &\leq -\frac{1}{2} (2\lambda_{\min}(R_1) - \|U^T P U\|) \mathbb{E}e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t) \\ &\leq -\frac{2\lambda_{\min}(R_1) - \|U^T P U\|}{\lambda_{\max}(P_2)} \mathbb{E}V_e(t), \end{aligned} \quad (4.50)$$

又由于  $\mathbb{E}[e^T(t)(PU \otimes I_n)e(t)] = 0$ , 故而

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}V_e(t)}{dt} &\leq -\frac{2\lambda_{\min}(R_1) - \|U^T P U\|}{\lambda_{\max}(P_2)} \mathbb{E}V_e(t) \\ &\triangleq -\bar{\mu}_1 \mathbb{E}V_e(t). \end{aligned} \quad (4.51)$$

接下来, 详细分析控制周期  $[t_k, s_k] = I_1 \cup I_2$ , 这里  $I_1 = \{t \in [t_k, s_k] : \mathbb{E}V_e(t) = 0\}$  以及  $I_2 = \{t \in [t_k, s_k] : \mathbb{E}V_e(t) > 0\}$ . 如果  $t \in I_1$ ,  $\mathbb{E}V_e(t) = 0$ . 因此,

$$0 = \mathbb{E}V_e(t) \leq \mathbb{E}V_e(t_k) e^{-\bar{\mu}_1(t-t_k)}. \quad (4.52)$$

否则, 如果  $t \in I_2$ , 对不等式 (4.50) 两边进行积分运算, 可得

$$\int_{t_k}^{s_k} \frac{d\mathbb{E}V_e(t)}{\mathbb{E}V_e(t)} \leq \int_{t_k}^{s_k} -\bar{\mu}_1 dt,$$

于是, 可得

$$\mathbb{E}V_e(t) \leq \mathbb{E}V_e(t_k)e^{-\bar{\mu}_1(t-t_k)}. \quad (4.53)$$

对于  $t \in (s_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$  时, 通过不等式 (4.11), 按相似地分析可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &= e^T(t)(P \otimes I_n)[\tilde{F}(e(t)) + (H_2 \otimes I_n)e(t)] \\ &= (c_1 \tilde{x}^T(t) + c_2 \tilde{v}^T(t))[F(x(t), v(t)) - 1_N \\ &\quad \otimes f(x_0(t-\tau), v_0(t-\tau))] + e^T(t)((PH_2)^s \otimes I_n)e(t) \\ &\leq e^T(t)(M \otimes I_n)e(t) + e^T(t)((PH_2)^s \otimes I_n)e(t) \\ &= e^T(t)(R_2 \otimes I_n)e(t) \\ &\leq \lambda_{\max}(R_2)e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t) \\ &\leq \frac{2\lambda_{\max}(R_2)}{\lambda_{\min}(P_1)}V_e(t). \end{aligned} \quad (4.54)$$

对不等式 (4.54) 两边同取数学期望, 有

$$\frac{d\mathbb{E}V_e}{dt} \leq \frac{2\lambda_{\max}(R_2)}{\lambda_{\min}(P_1)}\mathbb{E}V_e(t) = 2\lambda_{\max}(R_2)\lambda_{\min}^{-1}(P_1) \triangleq \bar{\mu}_2\mathbb{E}V_e(t). \quad (4.55)$$

因此,

$$\mathbb{E}V_e(t) \leq \mathbb{E}V_e(s_k)e^{-\bar{\mu}_2(t-s_k)}. \quad (4.56)$$

根据式 (4.53) 和式 (4.56), 对于  $t \in (s_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$ , 可知,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V_e(t) &\leq \max\left\{\mathbb{E}V_e(t_k)e^{-\bar{\mu}_1(t-t_k)}, \mathbb{E}V_e(s_k)e^{-\bar{\mu}_2(t-s_k)}\right\} \\ &\leq M_k e^{-\bar{\lambda}t}, \end{aligned}$$

其中  $M_k = \max\left\{\mathbb{E}V_e(t_k)e^{\bar{\mu}_1 t_k}, \mathbb{E}V_e(s_k)e^{\bar{\mu}_2 s_k}\right\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  以及  $\bar{\lambda} = \min\{\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}$ .

接下来, 定义  $\bar{M} = \sup_k M_k$ , 并证明  $\bar{M} < \infty$ .

事实上, 综合考虑式 (4.53) 和式 (4.56), 经过推导可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V_e(t_{l+1}) &\leq \mathbb{E}V_e(s_l)e^{\bar{\mu}_2(t_{l+1}-s_l)} \leq \mathbb{E}V_e(t_l)e^{-\bar{\mu}_1(s_l-t_l)+\bar{\mu}_2(t_{l+1}-s_l)} \\ &\leq \mathbb{E}V_e(t_{l-1})\exp\{[-\bar{\mu}_1(s_{l-1}-t_{l-1})+\bar{\mu}_2(t_l-s_{l-1})]+[-\bar{\mu}_1(s_l-t_l)+\bar{\mu}_2(t_{l+1}-s_l)]\} \\ &\leq \dots \leq \mathbb{E}V_e(0)\exp\left\{-\bar{\mu}_1\sum_{k=0}^l(s_k-t_k)+\bar{\mu}_2\sum_{k=0}^l(t_{k+1}-s_k)\right\} \\ &\leq \mathbb{E}V_e(0)\exp\{-(l+1)(\bar{\mu}_1\theta-\bar{\mu}_2(\delta-\theta))\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

因此, 可得

$$\mathbb{E}V_e(t) \leq \bar{M}e^{-\bar{\lambda}t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.58)$$

另一方面, 根据式 (4.11) 和式 (4.46), 可知

$$\mathbb{E}V_e(t) \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(P_1)\mathbb{E}\|e(t)\|^2,$$

故而可得

$$\mathbb{E}\|e(t)\|^2 \leq \frac{2\bar{M}}{\lambda_{\min}(P_1)} e^{-\bar{\lambda}t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.59)$$

这阐明了偏差系统 (4.44) 是指数稳定的. 因为当  $t \rightarrow \infty$  时, 有

$$\frac{1}{t} \log(\mathbb{E}\|e(t)\|^2) \leq \frac{1}{t} \left( \log \frac{2\bar{M}}{\lambda_{\min}(P_1)} - \bar{\lambda}t \right) \rightarrow -\bar{\lambda} < 0. \quad (4.60)$$

由式 (4.60) 可知, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $x(t)$  和  $v(t)$  分别以均方指数形式收敛于  $x_0(t-\tau)$  和  $v_0(t-\tau)$ . 因此, 二阶多智能体系统实现均方滞后一致.

定理 4.3 证明完毕. ■

**注 4.11** 外部随机扰动和间歇信号会造成多智能体网络系统不稳定, 定理 4.3 中的条件 (i) 和 (ii) 分别给出了噪声矩阵范数的上限和间歇控制间隔的约束限制, 即多智能体系统的抗扰动能力  $\|U^T P U\|$  和间歇条件, 确保网络系统在噪声干扰和间歇通信的环境因素下依然实现二阶均方滞后一致.

## § 4.4 数值模拟

在本小节, 将通过数值仿真来检验所提出的控制方案对二阶滞后一致的有效性.

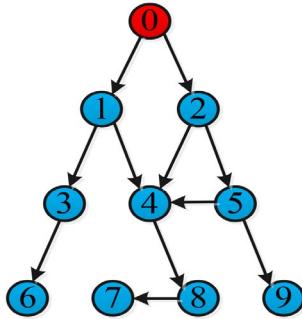


图 4.1 网络通信拓扑图

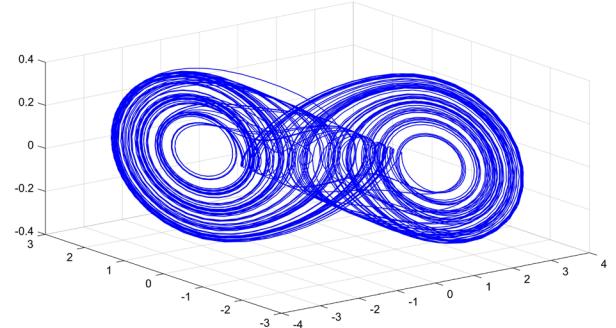


图 4.2 双涡卷混沌吸引子

假设网络系统由一个领导者和九个跟随者构成 (图 4.1), 这里 0 代表领导智能体. 假设非线性函数  $f$  由蔡氏电路描述<sup>[71]</sup>

$$f(x_i(t), v_i(t)) = \begin{pmatrix} \zeta(v_{i2}(t) - h(v_{il}(t))) \\ v_{il}(t) - v_{i2}(t) + v_{i3}(t) \\ -\epsilon v_{i2}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

其中  $h(v) = \frac{2}{7}v - \frac{3}{14}(|v+1| - |v-1|)$ ,  $\zeta = 9$ ,  $\epsilon = \frac{100}{7}$  以及  $x_i(t), v_i(t) \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, 9$  分别是

跟随智能体的位置与速度状态. 在上述给出的参数情形下, 该电路系统具有一个双涡卷混沌吸引子 (图 4.2). 注意到, 该非线性函数  $f$  满足假设 4.1, 且选取相关参数为  $\rho_1 = 0$  和  $\rho_2 = 16.9754$ .

根据网络拓扑 (图 4.1), 给出相关的 Laplace 矩阵

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

由图 4.1 的网络通信图可知, 第一个与第二个跟随多智能体是网络连通分支的根节点. 若这两个跟随智能体能接收到领导智能体的信息, 则该网络含有一棵有向生成树. 因此, 可取牵制矩阵为  $B = \text{diag}\{5, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$  且位置与速度的耦合强度 (或控制强度) 分别为  $c_1 = 16, c_2 = 39.5$ . 借助于定理 4.1, 可计算出相关的矩阵特征值  $\lambda_{\max}(\tilde{L}^s) = 7.3800, \lambda_{\min}(\tilde{L}^s) = 0.5333 > c_1 / 2c_2^2 = 0.0051, \lambda_{\min}(R_i) = 0.7150 > 0$ . 故而可判定矩阵  $R_i > 0$ . 由定理 4.1 中的条件 (iii), 在时间间隔  $[0, 15]$  中, 选取非周期间歇间隔为

$$[0, 2.8] \cup [4, 7] \cup [8.4, 9.4] \cup [9.8, 11.6] \cup [12.3, 14.7] \cup \dots,$$

则对于任意的  $k \in \mathbb{N}$ , 都有  $s_k - t_k \geq 1$  和  $t_{k+1} - t_k \leq 4.4$ . 给出追踪时滞为  $\tau = 1.5$ . 显然, 该时滞符合注 3 中所假设的时滞限制条件.

经过计算, 有  $\mu_1 = 145.1280, \mu_2 = 144.5132$ . 即, 满足定理 4.1 中的条件, 网络系统 (4.1) 和 (4.2) 以指数形式收敛, 二阶多智能体系统达到滞后一致. 在控制协议 (4.6) 下, 图 4.3 和 4.4 分别揭示了九个跟随者能体在延迟 1.5 sec 后位置和速度状态均趋同于领导者. 从图 4.5 和 4.6 中可以看出当  $t \rightarrow +\infty$  时, 位置与速度的偏差状态收敛到零. 换而言之, 多智能体系统在非周期性间歇牵制控制 (4.6) 下可以实现二阶滞后一致.

接下来, 考虑二阶多智能体系统在分段自适应律 (4.26) 下的二阶滞后一致性. 在时间范围  $[0, 15]$  内, 自适应牵制控制在如下非周期间歇上执行

$$\begin{aligned} & [0, 1.5] \cup [2, 3.5] \cup [4.1, 5.3] \cup [6, 8] \cup [8.75, 10] \cup [10.62, 11.8] \\ & \cup [12.3, 13.6] \cup [14, 14.7] \cup \dots. \end{aligned}$$

显然, 这组间歇控制对于任意的  $k \in \mathbb{N}$ , 都有  $s_k - t_k \geq 0.7$  以及  $t_{k+1} - t_k \leq 2.75$ . 由定义 2.7 可得, 最大限度的休息律为  $\psi = 0.75$ . 通过数值计算, 定理 4.2 中的相关参数为  $\Delta_1 = 135.8032, \tilde{\mu}_1 = 23.54, \tilde{\mu}_2 = 21.13$  以及  $\varrho = 12.3725 > 0$ . 根据引理 2.3 及定理 4.2 中

给出的条件, 可得  $\xi^* > \frac{\Delta_1}{\lambda_{\min}(\tilde{L}^s)} + \frac{c_2 \tilde{\mu}_1 \lambda_{\min}(\tilde{L}^s)}{c_1} = 285.6389$ . 这意味着定理 4.2 中的条件均成立. 图 4.7 和 4.8 分别揭示了九个跟随者能体在延迟 1.5 sec 后位置和速度状态均趋同于领导者. 从图 4.9 和 4.10 中易知智能体位置与速度的偏差状态随着时间演化趋于零值. 图 4.11 反映了在相同的初值条件下, 不同的牵制控制增益  $b_i$  的自适应强度  $\xi(t)$  的轨迹, 该轨迹表明  $\xi(t)$  最终收敛到某个稳定值.

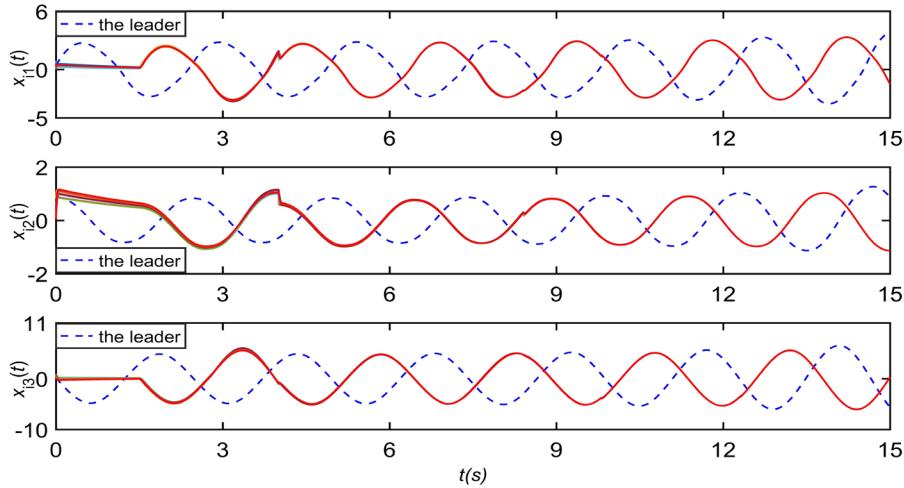


图 4.3 领导与跟随智能体在非周期间歇牵制控制器 (4.1) 下的位置状态轨迹

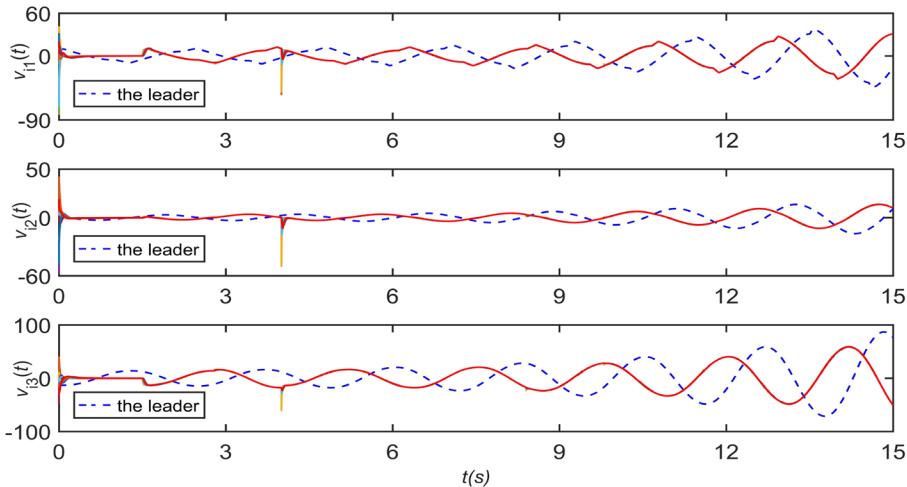


图 4.4 领导与跟随智能体在非周期间歇牵制控制器 (4.1) 下的速度状态轨迹

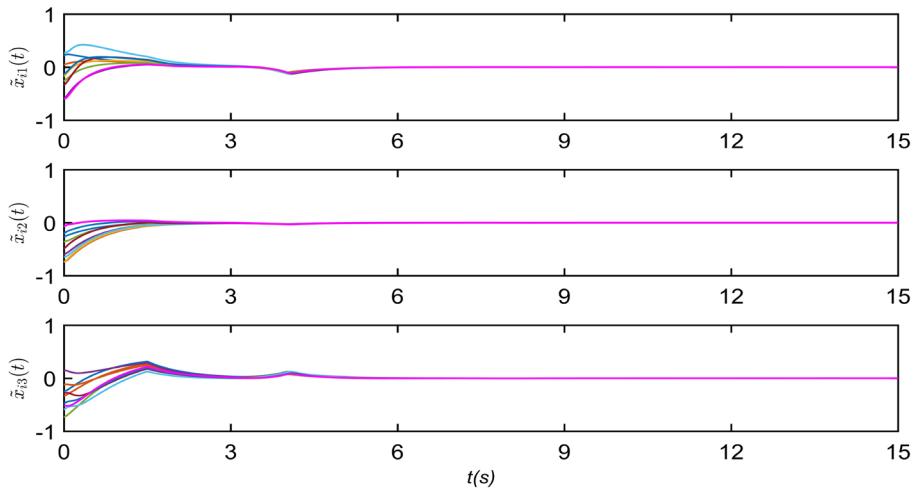


图 4.5 领导与跟随智能体在非周期间歇牵制控制器 (4.1) 下的位置偏差轨迹

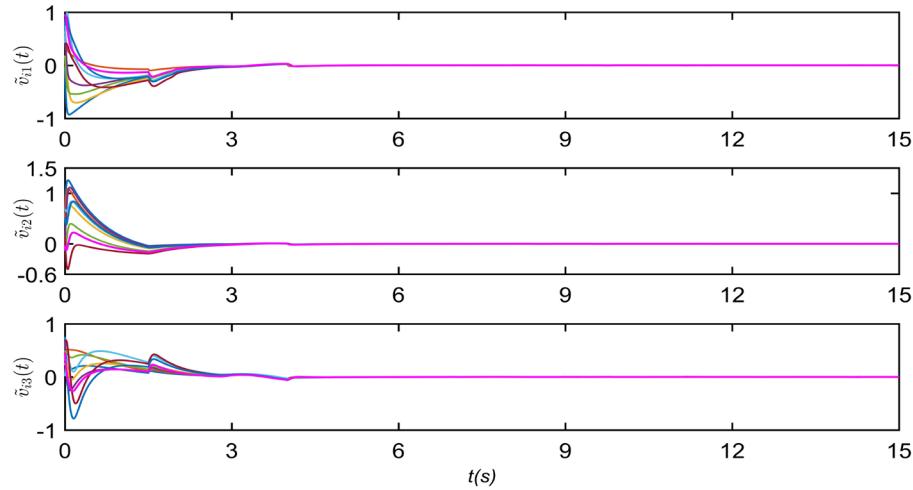


图 4.6 领导与跟随智能体在非周期间歇牵制控制器 (4.1) 下的速度偏差轨迹

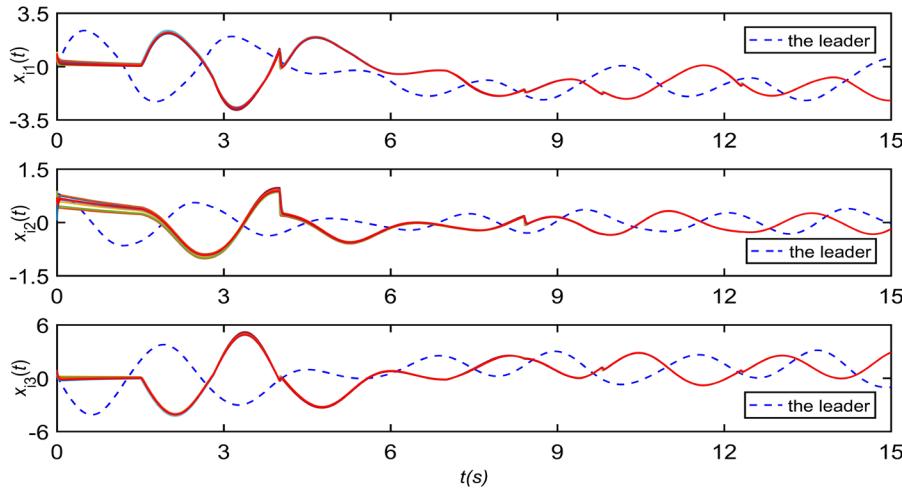


图 4.7 领导与跟随智能体在自适牵制非周期间歇控制器 (4.25) 下的位置状态轨迹

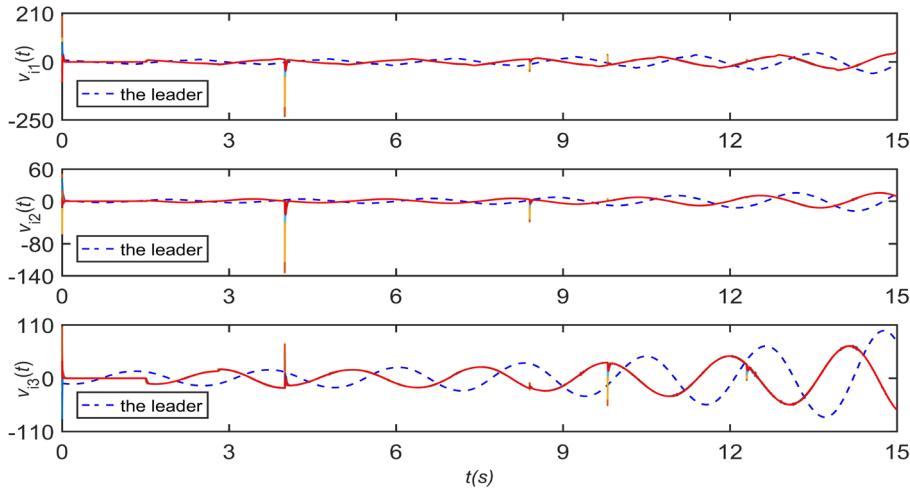


图 4.8 领导与跟随智能体在自适牵制非周期间歇控制器 (4.25) 下的速度状态轨迹

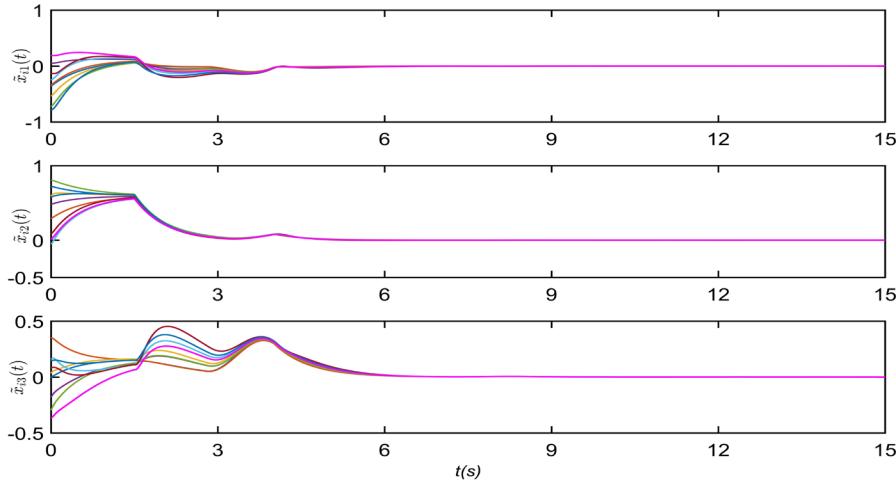


图 4.9 领导与跟随智能体在自适牵制非周期间歇控制器 (4.25) 下的位置偏差轨迹

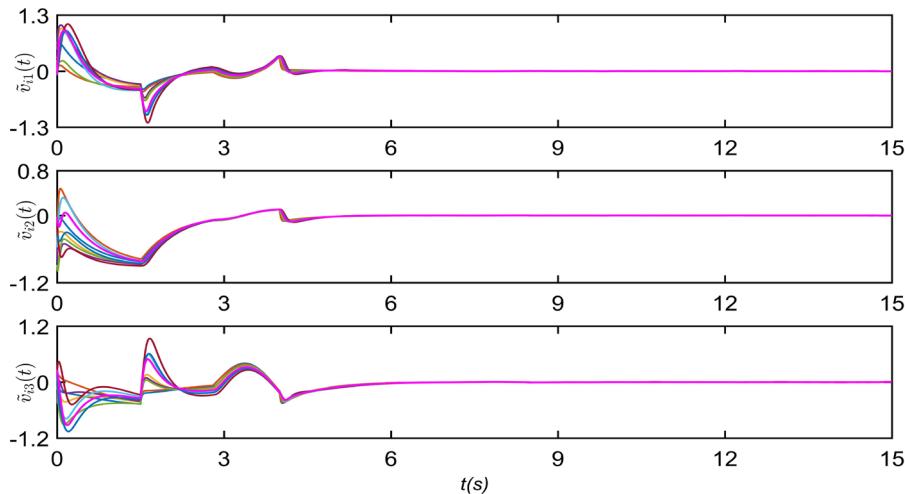


图 4.10 领导与跟随智能体在自适牵制非周期间歇控制器 (4.25) 下的速度偏差轨迹

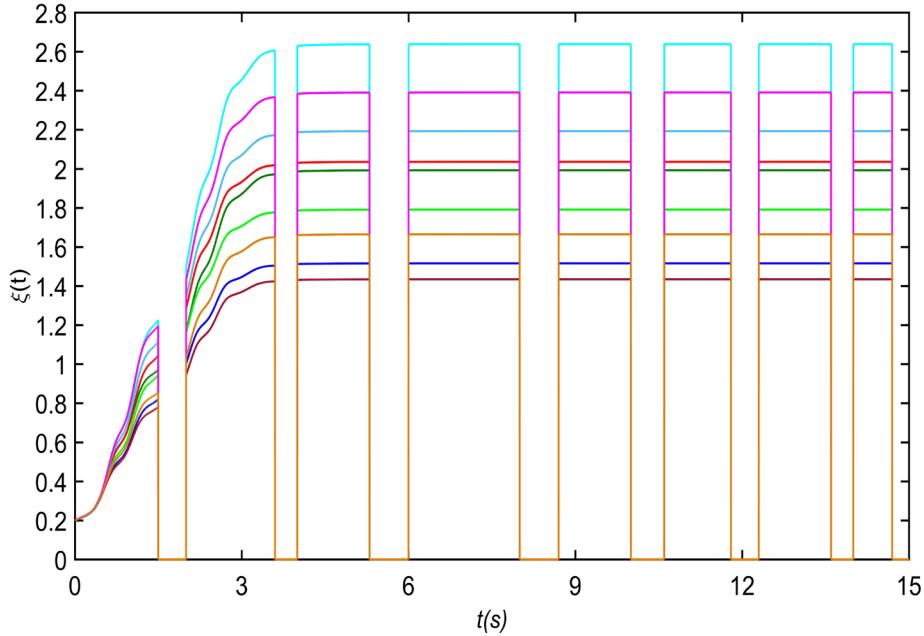


图 4.11 不同牵制控制  $b_1 = b_2 = 5, 6, 7, 8, 8.5, 9, 10, 11, 12$  所对应的自适应增益  $\xi(t)$  的轨迹

## § 4.5 结语

本章研究了非周期间歇牵制控制下的二阶多智能体系统的跟踪滞后一致性。首先，给出了耦合强度和间歇时间间隔与实现滞后一致的相关条件。然后，采用分段式自适应更新律提出了一种新颖的非周期间歇牵制算法，并证明了该算法对二阶滞后一致的有效性，即多智能体网络系统能在该控制算法下实现全局和指数滞后一致性。此外，还将间歇传输过程中产生的随机噪声扰动考虑到网络系统中。最后，通过一些数值模拟来验证所提出的控制方案与理论结果的正确性。

## 第五章 非周期控制下含有时滞的非线性耦合二阶滞后一致

### § 5.1 引言

上一章节讨论了多智能体网络系统在不同的非周期间歇控制策略下的滞后一致性，所探究的智能体的状态是线性耦合的。事实上，对于智能体非线性耦合状态的研究也十分重要。Chen 等<sup>[52]</sup>学者实现了非线性耦合网络系统的指数稳定性。随后，一系列非线性耦合网络系统的研究逐渐被关注<sup>[52-57]</sup>。Li 等<sup>[57]</sup>学者给出了非线性耦合系统需要满足的相关假设，揭示了若非线性耦合函数是严格递增的，则有利于网络系统实现一致性。特别地，Liu 和 Chen 验证了非周期间歇控制对非线性耦合网络实现同步的有效性<sup>[58]</sup>。

同时，考虑到系统外部环境的影响，时滞普遍存在于通信网络和智能系统中。Xie 等<sup>[42]</sup>学者提出领导-跟随滞后一致性概念，即时滞存在于领导者与跟随者之间，跟随者直到  $t + \tau$  时刻后才收到领导者传送出的信息，这里追踪时滞  $\tau > 0$ 。随后，Wang 和 Ma 等<sup>[43-45]</sup>学者又将速度状态考虑到网络系统中，将一阶模型推广到二阶多智能体系统中，相继提出了二阶滞后一致<sup>[43]</sup>和聚类-滞后一致<sup>[45]</sup>的概念，进一步拓展了滞后一致的理论结果。此外，非线性多智能体也存在自身动力学时滞，该内部时滞通常体现在非线性项之中<sup>[24,51,67]</sup>。

在不连续信号的间歇控制假设下，对于具有时滞动力学的非线性耦合网络系统，能否实现二阶滞后一致性尚未可知。本章证明了非周期性间歇自适应控制策略对一类非线性耦合多智能体系统的有效性。本章的研究内容建立在系统控制理论<sup>[76,77]</sup>和稳定性理论<sup>[75]</sup>，从而得到了一些充分判据。本章的研究内容主要关注以下三点：

- (1) 网络系统中智能体的状态是非线性耦合的。另外，与前几章不同，网络通信拓扑图不要求强连通或含有向生成树。
- (2) 探究两种不同类型的时滞。第一种是非线性动力学的内部时滞；另一种是介于跟随智能体和领导者智能体之间的时滞，即滞后时滞或称追踪时滞。
- (3) 提出了基于位置和速度状态信息的非周期自适应间歇控制，通过牵制一小部分智能体来促使非线性耦合系统实现滞后一致。

### § 5.2 模型介绍

本章关注含有时滞非线性耦合多智能体系统在非周期间歇控制下的滞后一致性。

首先，考虑一个孤立的领导智能体通过以下时滞非线性动力学来描述

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = v_0(t), \\ \dot{v}_0(t) = f(x_0(t), v_0(t), x_0(t-\tau_1), v_0(t-\tau_1)), \end{cases} \quad (5.1)$$

其中  $\tau_1 > 0$  为领导智能体自身动力学内部时滞.

接下来, 考虑由  $N$  个跟随智能体组成的非线性耦合二阶动态网络, 每个跟随者的状态方程描述如下

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = f(x_i(t), v_i(t), x_i(t-\tau_1), v_i(t-\tau_1)) \\ \quad + \alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \phi(x_j(t), x_i(t)) + \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \phi(v_j(t), v_i(t)) + u_i(t), \end{cases} \quad (5.2)$$

这里  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个连续映射.  $\alpha, \beta$  分别表示位置  $x_i(t)$  和速度  $v_i(t)$  所对应的耦合强度,  $u_i(t)$  表示外部控制项, 起到调节网络状态的作用. 非线性耦合函数  $\phi(\cdot, \cdot)$  是一个连续映射, 且定义如下特性

$$\phi(x_j(t), x_i(t)) \triangleq \phi(x_j(t)) - \phi(x_i(t)). \quad (5.3)$$

参考第四章中二阶滞后一致的定义, 本章对符号进行轻微地改动, 有如下定义.

**定义 5.1** 如果对于所有  $i \in \mathcal{I}_N$ , 多智能体网络系统 (5.1) 和 (5.2) 的解满足

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_0(t-\tau_2)\| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|v_i(t) - v_0(t-\tau_2)\| &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

那么网络系统实现二阶滞后一致, 这里追踪时滞  $\tau_2 > 0$ .

沿用上一章定义, 记  $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - x_0(t-\tau_2)$ ,  $\tilde{v}_i(t) = v_i(t) - v_0(t-\tau_2)$ , 对于所有  $i \in \mathcal{I}_N$ . 因此, 网络系统的偏差状态为  $e(t) = (\tilde{x}^T(t), \tilde{v}^T(t))^T$ .

**假设 5.1** 如果对于非线性函数  $f$ , 存在非负常数  $\rho_i$ , 使得

$$\begin{aligned} &\|f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(y_1, y_2, y_3, y_4)\| \\ &\leq \rho_1 \|x_1 - y_1\| + \rho_2 \|x_2 - y_2\| + \rho_3 \|x_3 - y_3\| + \rho_4 \|x_4 - y_4\|, \end{aligned}$$

成立, 对所有  $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**假设 5.2**<sup>[57]</sup> 假设非线性函数  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个非线性连续映射, 若存在两个标量  $\underline{\gamma}$  和  $\bar{\gamma}$ , 使得

$$0 < \underline{\gamma} \leq \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} \leq \bar{\gamma},$$

成立, 对  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ .

**注 5.1** 显然, 假设 5.2 要求非线性耦合函数  $\phi(\cdot)$  是严格递增的且满足式 (5.3). 此外, 该假设不是实现一致的必要条件. 例如, 选取  $\phi(s(t)) = \sin(s(t))$ , 则该假设不成立. 我们注意到, 该类函数的特性类似于神经网络中的激活函数类, 如 sigmoid, ReLU, Maxout<sup>[79]</sup>等.

### § 5.3 主要结果

本节将非周期间歇自适应牵制控制应用到时滞非线性耦合多智能体网络系统中以研究二阶滞后一致性。借助于所设计的自适应更新律，导出了实现二阶滞后一致的一些充分条件。

下面，给出一个对本章研究内容重要的引理。

**引理 5.1** [58] 假设一个时滞系统

$$\dot{x}(t) = M(x(t), x(t - \tau(t))) - Z(t)x(t), \quad (5.5)$$

其中  $M(\cdot, \cdot)$  是一个连续映射，满足

$$x(t)M(x(t), x(t - \tau(t))) \leq L_M x^2(t) + \tilde{L}_M x^2(t - \tau(t)),$$

且有  $L_M > 0, \tilde{L}_M > 0$  以及  $M(0, 0) = 0$ 。  $Z(t)$  是一个自适应间歇控制增益函数，定义为

$$Z(t) = \begin{cases} Z(0), & t = 0, \\ Z(s_k), & t = t_{k+1}, \\ 0, & s_k < t < t_{k+1}, \end{cases} \quad (5.6)$$

且其相关的自适应更新率为

$$\dot{Z}(t) = z \cdot \max_{-\tau^* \leq m \leq 0} x^T(t+m) \cdot x(t+m), \quad z > 0, \quad t \in [t_k, s_k], \quad k \in \mathbb{N}.$$

假设  $\tau(t) \leq \tau^* < \inf_k \{s_k - t_k\}$  以及  $\tau(t) \leq \bar{\tau}$ ，则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

**注 5.2** 若  $\tau(t) = \tau < \inf_k \{s_k - t_k\}$ ，即时变时滞弱化为固定时滞情形，则引理 5.1 依旧成立。特别地，如果  $\tau(t) = 0$ ，则  $M(x(t), x(t - \tau(t))) = M(x(t))$ 。该情形已在文献[63] 中被详细地讨论。

通常固定的耦合强度会大于网络中实际所需的强度，因此随时间变化的耦合增益更符合系统特性且能减少能耗。为了克服控制增益过大的缺点，一种随着网络的动态演化自主地调整耦合强度的自适应控制策略应运而生<sup>[7]</sup>。本章考虑非线性耦合状态下的自适应牵制间歇控制，其控制制器的形式如下

$$u_i(t) = -D(t)b_i[\phi(x_i(t), x_0(t - \tau_2)) + \phi(v_i(t), v_0(t - \tau_2))], \quad (5.7)$$

其中  $b_i \geq 0$  是牵制控制增益被定义在式 (4.7)，表示第  $i$  个跟随智能体是否收到来自领导智能体的信息。自适应增益  $D(t)$  满足式 (5.6) 的定义，其对应的自适应率为

$$\dot{D}(t) = d \cdot \max_{t - \tau_1 \leq \kappa \leq t} \sum_{i=1}^N [\Phi^T(\tilde{x}_i(\kappa))\Phi(\tilde{x}_i(\kappa)) + \Phi^T(\tilde{v}_i(\kappa))\Phi(\tilde{v}_i(\kappa))], \quad (5.8)$$

这里  $d > 0$ ，对于所有  $k \in \mathbb{N}, t \in [t_k, s_k], \tau_1 < \inf_k \{s_k - t_k\}$  以及  $t + m \triangleq \kappa \in [t - \tau_1, t]$ 。根据滞后一致的偏差定义，令

$$\Phi(\tilde{x}_i(\kappa)) \triangleq \phi((x_i(\kappa)) - \phi(x_0(\kappa - \tau_2))),$$

$$\Phi(\tilde{v}_i(\kappa)) \triangleq \phi(v_i(\kappa)) - \phi(v_0(\kappa - \tau_2)).$$

现在考虑自适应间歇牵制控制 (5.7) 下具有时滞动力学的非线性耦合智能体系统 (5.2), 并假设控制前  $l$  个智能体 (对 Laplace 矩阵进行重排, 将需要控制的节点排在前边). 网络中跟随智能体系统的动态方程描述如下

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = f(x_i(t), v_i(t), x_i(t-\tau_1), v_i(t-\tau_1)) - \alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} \phi(x_j(t)) - \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} \phi(v_j(t)) \\ \quad - D(t) b_i [\phi(x_i(t)) - \phi(x_0(t-\tau_2)) + \phi(v_i(t)) - \phi(v_0(t-\tau_2))], \quad t \in [t_k, s_k], \\ \dot{v}_i(t) = f(x_i(t), v_i(t), x_i(t-\tau_1), v_i(t-\tau_1)) - \alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} \phi(x_j(t)) - \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} l_{ij} \phi(v_j(t)), \\ \quad t \in (s_k, t_{k+1}). \end{array} \right. \quad (5.9)$$

显然, 系统 (5.9) 可以改写为向量形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}(t) = F(e(t), e(t-\tau_1)) + (H_2 \otimes I_n) \Phi(e(t)) \\ \quad + D(t) (H_3 \otimes I_n) \Phi(e(t)), \quad t \in [t_k, s_k], \\ \dot{e}(t) = F(e(t), e(t-\tau_1)) + (H_2 \otimes I_n) \Phi(e(t)), \quad t \in (s_k, t_{k+1}). \end{array} \right. \quad (5.10)$$

其中  $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_l, \overbrace{0, \dots, 0}^{N-l})$ ,  $f(x(t), v(t), x(t-\tau_1), v(t-\tau_1)) = (f^T(x_1(t), v_1(t), x_1(t-\tau_1), v_1(t-\tau_1)), \dots, f^T(x_N(t), v_N(t), x_N(t-\tau_1), v_N(t-\tau_1)))$ ,  $\mathcal{F}(t) = f(x(t), v(t), x(t-\tau_1), v(t-\tau_1)) - \mathbf{1}_N \otimes f(x_0(t-\tau_2), v_0(t-\tau_2), x_0(t-\tau_1-\tau_2), v_0(t-\tau_1-\tau_2))$ ,  $F(e(t), e(t-\tau_1)) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N \\ \mathcal{F}(t) \end{pmatrix}$  以及

$$H_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & I_N \\ -\alpha L & -\beta L \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ -B & -B \end{pmatrix}.$$

**定理 5.1** 假设非线性函数  $f$  满足假设 5.1, 非线性耦合函数  $\phi$  满足假设 5.2. 对于自适应非周期间歇牵制控制 (5.7), 若假设 2.2 成立, 则具有自适应律 (5.8) 的多智能体系统 (5.1) 和 (5.2) 可以达到二阶滞后一致.

证明 首先, 对于所有  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . 由式 (5.10) 定义一个函数

$$\bar{F}(e(t), e(t-\tau_1)) = F(e(t), e(t-\tau_1)) + (H_2 \otimes I_n) \Phi(e(t)) \quad (5.11)$$

然后, 类似于第四章节中定义 Lyapunov 函数的分析步骤, 令

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t) (\mathbb{P} \otimes I_n) e(t). \quad (5.12)$$

显然, 有

$$V(t) \geq \frac{1}{2} e^T(t) (\mathbb{P}_1 \otimes I_n) e(t) \quad \text{和} \quad V(t) \leq \frac{1}{2} e^T(t) (\mathbb{P}_2 \otimes I_n) e(t), \quad (5.13)$$

其中

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 2\alpha\beta L^s + (\alpha+\beta)B & \alpha I_N \\ \alpha I_N & \beta I_N \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(2\alpha\beta L^s + (\alpha+\beta)B) I_N & \alpha I_N \\ \alpha I_N & \beta I_N \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbb{P}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{\max}(2\alpha\beta L^s + (\alpha+\beta)B) I_N & \alpha I_N \\ \alpha I_N & \beta I_N \end{pmatrix}.$$

沿着偏差系统 (5.10) 的轨迹计算  $V(t)$  的导数, 有

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e^T(t)(\mathbb{P} \otimes I_n)[F(e(t), e(t-\tau_1)) + (H_2 \otimes I_n)\Phi(e(t))] \\
 &= (\alpha \tilde{x}^T(t) + \beta \tilde{v}^T(t))\mathcal{F}(t) + e^T(t)((\mathbb{P}H_2)^s \otimes I_n)\Phi(e(t)) \\
 &= (\alpha \tilde{x}^T(t) + \beta \tilde{v}^T(t)\mathcal{F}(t) + e^T(t)(Q_2 \otimes I_n)\Phi(e(t)),
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

其中

$$(\mathbb{P}H_2)^s = Q_2 = \begin{pmatrix} -\alpha^2 L^s & \frac{(\alpha+\beta)B}{2} \\ \frac{(\alpha+\beta)B}{2} & -\beta^2 L^s + \alpha I_N \end{pmatrix}.$$

根据假设 5.1 及引理 2.5, 将式 (5.14) 进行分步讨论, 有

$$\begin{aligned}
 &\alpha \tilde{x}^T(t)[F(x(t), v(t), x(t-\tau_1), v(t-\tau_1)) - 1_N \otimes f(x_0(t-\tau_2), \\
 &\quad v_0(t-\tau_2), x_0(t-\tau_1-\tau_2), v_0(t-\tau_1-\tau_2))] \\
 &\leq \alpha \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\| (\rho_1 \|\tilde{x}_i(t)\| + \rho_2 \|\tilde{x}_i(t)\| + \rho_3 \|\tilde{x}_i(t-\tau_1)\| + \rho_4 \|\tilde{v}_i(t-\tau_1)\|) \\
 &\leq \alpha \left( (\rho_1 + \frac{\rho_2 + \rho_3 + \rho_4}{2}) \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + \frac{\rho_2}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\rho_3}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t-\tau_1)\|^2 + \frac{\rho_4}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t-\tau_1)\|^2 \right), \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 &\beta \tilde{v}^T(t)[F(x(t), v(t), x(t-\tau_1), v(t-\tau_1)) - 1_N \otimes f(x_0(t-\tau_2), \\
 &\quad v_0(t-\tau_2), x_0(t-\tau_1-\tau_2), v_0(t-\tau_1-\tau_2))] \\
 &\leq \beta \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\| (\rho_1 \|\tilde{x}_i(t)\| + \rho_2 \|\tilde{v}_i(t)\| + \rho_3 \|\tilde{x}_i(t-\tau_1)\| + \rho_4 \|\tilde{v}_i(t-\tau_1)\|) \\
 &\leq \beta \left( \frac{\rho_1}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + (\rho_2 + \frac{\rho_1 + \rho_3 + \rho_4}{2}) \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\rho_3}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t-\tau_1)\|^2 + \frac{\rho_4}{2} \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t-\tau_1)\|^2 \right). \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
 &e^T(t)(Q_2 \otimes I_n)\Phi(e(t)) \\
 &= -\alpha^2 \tilde{x}^T(t)L^s\Phi(\tilde{x}(t)) + \frac{(\alpha+\beta)}{2} \tilde{v}^T(t)B\Phi(\tilde{x}(t)) \\
 &\quad + \frac{(\alpha+\beta)}{2} \tilde{x}^T(t)B\Phi(\tilde{v}(t)) + \tilde{v}^T(t)(\alpha I_N - \beta^2 L^s)\Phi(\tilde{v}(t)) \\
 &\leq -\underline{\gamma}\alpha^2 \sum_{j=1}^N l_{ij}^s \tilde{x}_i^T(t) \tilde{x}_i(t) + \frac{\bar{\gamma}(\alpha+\beta)}{2} \sum_{i=1}^N b_i \tilde{v}_i^T(t) \tilde{x}_i(t) \\
 &\quad + \frac{\bar{\gamma}(\alpha+\beta)}{2} \sum_{i=1}^N b_i \tilde{x}_i^T(t) \tilde{v}_i(t) + \bar{\gamma}\alpha \sum_{i=1}^N \tilde{v}_i^T(t) \tilde{v}_i(t) - \underline{\gamma}\beta^2 \sum_{j=1}^N l_{ij}^s \tilde{v}_i^T(t) \tilde{v}_i(t) \\
 &= -\underline{\gamma}\alpha^2 \tilde{x}^T(t)(L^s \otimes I_n)\tilde{x}(t) + \bar{\gamma}(\alpha+\beta)\tilde{x}^T(t)(B \otimes I_n)\tilde{v}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\bar{\gamma}\alpha\tilde{v}^T(t)(I_N \otimes I_n)\tilde{v}(t) - \underline{\gamma}\beta^2\tilde{v}^T(t)(L^s \otimes I_n)\tilde{v}(t) \\
 & \leq \underline{\gamma}\alpha^2\tilde{x}^T(t)(L^s \otimes I_n)\tilde{x}(t) + \frac{\bar{\gamma}(\alpha+\beta)}{2}\tilde{x}^T(t)(B^TB \otimes I_n)\tilde{v}(t) \\
 & \quad + \frac{\bar{\gamma}(3\alpha+\beta)}{2}\tilde{v}^T(t)(I_N \otimes I_n)\tilde{v}(t) - \underline{\gamma}\beta^2\tilde{v}^T(t)(L^s \otimes I_n)\tilde{v}(t) \\
 & = e^T(t)(\tilde{Q}_2 \otimes I_n)e(t),
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

其中

$$\tilde{Q}_2 = \begin{pmatrix} -\underline{\gamma}\alpha^2 L^s + \frac{\bar{\gamma}(\alpha+\beta)}{2} B^T B & 0_N \\ 0_N & -\underline{\gamma}\beta^2 L^s + \frac{\bar{\gamma}(3\alpha+\beta)}{2} I_N \end{pmatrix}.$$

结合式 (5.15), 式(5.16) 和式 (5.17) 代入式 (5.14), 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) & \leq \Theta_1 \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t)\|^2 + \Theta_3 \sum_{i=1}^N \|\tilde{x}_i(t-\tau_1)\|^2 + \Theta_2 \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t)\|^2 \\
 & \quad + \Theta_4 \sum_{i=1}^N \|\tilde{v}_i(t-\tau_1)\|^2 - e^T(t)(\tilde{Q}_2 \otimes I_n)e(t) \\
 & = -e^T(t)(R_2 \otimes I_n)e(t) + \frac{1}{2}e^T(t-\tau_1)(S_1 \otimes I_n)e^T(t-\tau_1),
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

其中相关参数为  $2\Theta_1 = 2\alpha\rho_1 + \alpha\rho_2 + \alpha\rho_3 + \alpha\rho_4 + \beta\rho_1$ ,  $2\Theta_2 = 2\beta\rho_2 + \alpha\rho_2 + \beta\rho_1 + \beta\rho_3 + \beta\rho_4$ ,  $\Theta_3 = \rho_3(\alpha + \beta)$ ,  $\Theta_4 = \rho_4(\alpha + \beta)$  以及相关的矩阵为

$$R_2 = \begin{pmatrix} -\underline{\gamma}\alpha^2 L^s + \frac{\bar{\gamma}(\alpha+\beta)}{2} B^T B + \Theta_3 I_N & 0_N \\ 0_N & -\underline{\gamma}\beta^2 L^s + \frac{\bar{\gamma}(3\alpha+\beta)}{2} + \Theta_4 I_N \end{pmatrix} \text{和 } S_1 = \begin{pmatrix} \Theta_3 I_N & 0_N \\ 0_N & \Theta_4 I_N \end{pmatrix}.$$

对于不等式 (5.18), 可以进一步约化为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) & \leq \lambda_{\max}(\mathbb{P}^{-1}R_2)e^T(t)(\mathbb{P} \otimes I_n)e(t) + \frac{\rho_0}{2\lambda_{\min}(\mathbb{P}_1)}e^T(t-\tau_1)e(t-\tau_1) \\
 & \leq \mu_3 V(t) + \mu_2 V(t-\tau_1),
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

这里  $\mu_3 = 2\lambda_{\max}(\mathbb{P}^{-1}R_2)$ ,  $\mu_2 = \rho_0\lambda_{\min}^{-1}(\mathbb{P}_1)$ .

类似于上述分析, 式 (5.14) 再次分步约化为

$$\begin{aligned}
 & e^T(t)(\mathbb{P} \otimes I_n)(H_3 \otimes I_n)\Phi(e(t)) \\
 & = e^T(t)(\mathbb{P} H_3 \otimes I_n)\Phi(e(t)) \\
 & = e^T(t)(Q_3 \otimes I_n)\Phi(e(t)) \\
 & = -\alpha\tilde{x}^T(t)B\Phi(\tilde{x}(t)) - \frac{(\alpha+\beta)}{2}\tilde{v}^T(t)B\Phi(\tilde{x}(t)) \\
 & \quad - \frac{(\alpha+\beta)}{2}\tilde{x}^T(t)B\Phi(\tilde{v}(t)) - \tilde{v}^T(t)B\Phi(\tilde{v}(t)) \\
 & \leq -\underline{\gamma}\alpha \sum_{i=1}^N b_i \tilde{x}_i^T(t) \tilde{x}_i(t) - \frac{\underline{\gamma}(\alpha+\beta)}{2} \sum_{i=1}^N b_i \tilde{v}_i^T(t) \tilde{x}_i(t) \\
 & \quad - \frac{\underline{\gamma}(\alpha+\beta)}{2} \sum_{i=1}^N b_i \tilde{x}_i^T(t) \tilde{v}_i(t) - \underline{\gamma}\alpha \sum_{i=1}^N b_i \tilde{v}_i^T(t) \tilde{v}_i(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq -\underline{\gamma} \cdot \min_{1 \leq i \leq l} b_i \cdot e^T(t)(\Pi \otimes I_n)e(t) \\
 &\leq -\underline{\gamma} \cdot \min_{1 \leq i \leq l} b_i \cdot \lambda_{\min}(\Pi)e^T(t)(I_{2N} \otimes I_n)e(t) \\
 &\leq -\underline{\gamma} \cdot \min_{1 \leq i \leq l} b_i \cdot \frac{2\lambda_{\min}(\Pi)}{\lambda_{\max}(\mathbb{P}_2)} \cdot V(t) \triangleq -2\mu_4 V(t),
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

其中  $\mu_4 = \underline{\gamma} \cdot \min_{1 \leq i \leq l} b_i \cdot \lambda_{\min}(\Pi) \lambda_{\max}^{-1}(\mathbb{P}_2)$ ,  $Q_3 = (\mathbb{P}H_3)^s = -\Pi \otimes B$  且

$$\Pi = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} & \beta \end{pmatrix}.$$

现在, 偏差系统 (5.10) 可以转换为

$$\dot{e}(t) = \bar{F}(e(t), e(t-\tau_1)) + D(t)(H_3 \otimes I_n)\Phi(e(t)). \tag{5.21}$$

由式 (5.12) 重新构造一个新的 Lyapunov 函数, 定义为

$$W(t) = e^T(t)(\mathbb{P} \otimes I_n)e(t).$$

对  $W(t)$  沿着式 (5.11) 轨迹求导, 可得,

$$\begin{aligned}
 \dot{W}(t) &= 2e^T(t)(P \otimes I_n)\bar{F}(e(t), e(t-\tau_1)) \\
 &\quad + 2D(t)e^T(t)(H_3 \otimes I_n)\Phi(e(t)) \\
 &\leq \mu_3 W(t) + \mu_2 W(t-\tau_1) - 2D(t) \cdot W(t).
 \end{aligned}$$

借助于引理 5.1, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = 0. \tag{5.22}$$

显然, 对于所有的  $k \in \mathbb{N}$ , 自适应增益  $D(t_k)$  在时间序列  $\{t_k\}_{k=0}^\infty$  中是单调递增的正值.

接下来, 讨论两种情形来验证该结论的正确性.

**情形 1.** 如果存在某个时刻  $k^* > 0$ , 使得  $D(t_{k^*}) > D^*$ , 这里  $D^* > 0$  是个标量且有

$$\tilde{\eta} = \tilde{\lambda}(\theta - \tau_1) - \tilde{q}(\delta - \theta) > 0, \tag{5.23}$$

其中  $\tilde{q} = \mu_3 + \mu_2$ ,  $\tilde{\lambda} > 0$  是方程  $\tilde{\lambda} + (\mu_3 - 2\mu_4 D^*) + \mu_2 \exp\{\tilde{\lambda}\tau_1\} = 0$  的唯一正解.

对于不等式  $\tau_1 < \inf_k \{s_k - t_k\}$ , 易知存在  $D^*$ .

因而, 对于  $k \geq k^*$  所在的时间间隔  $t \in [t_k, s_k]$  上, 有

$$\begin{aligned}
 \dot{W}(t) &\leq \mu_3 W(t) + \mu_2 W(t-\tau_1) - 2\mu_4 D(t) \cdot W(t) \\
 &\leq (\mu_3 - 2\mu_4 D^*) W(t) + \mu_2 W(t-\tau_1).
 \end{aligned}$$

这就导致了

$$W(t) \leq \max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(t_{k^*} + \kappa) \exp\{-\tilde{\lambda}(t - t_{k^*})\}. \tag{5.24}$$

相反地, 当  $t \in (s_k, t_{k+1})$  时, 可得

$$\dot{W}(t) \leq \mu_3 W(t) + \mu_2 W(t-\tau_1),$$

从而易得

$$W(t) \leq \max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(s_{k^*} + \kappa) \exp\left\{\tilde{q}(t - s_{k^*})\right\}. \quad (5.25)$$

根据文献[67]中的引理 8, 按相似的证明方法, 可得

$$W(t) \leq \exp\left\{\tilde{\eta} + \tilde{q}\delta\right\} \cdot \max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(t_{k^*} + \kappa) \cdot \exp\left\{-\frac{\tilde{\eta}}{\delta}(t - t_{k^*})\right\}.$$

所以, 对于所有的  $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = 0$  均成立. 这就意味着  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$ .

**情形 2.** 对于所有的  $t > 0, D(t) < D^*$ . 在该情况下, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{s_k} \max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(r + \kappa) dr < +\infty,$$

故而可得

$$\int_{t_k}^{s_k} \max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(r + \kappa) dr \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (5.26)$$

鉴于此, 可知  $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = 0$ . 否则, 对于任何常数  $\xi > 0$ , 都存在一个相对应的时间序列  $T_1 < \dots < T_p < \dots$ , 使得  $T_q < [t_{k-1}, t_{k+1}) < T_{q+1}$ . 同时也存在一个时间序列  $t'_q \in [t_k, t_{k+1})$ , 满足  $W(t'_q) \geq \xi$ .

根据不等式 (5.25), 可知对于任何  $t \leq t'_q$ , 都有

$$W(t'_q) \leq \max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(t + \kappa) \exp\left\{\tilde{q}(t'_q - t)\right\}. \quad (5.27)$$

对不等式 (5.27) 两边同乘  $\exp\left\{-\tilde{q}(t'_q - t)\right\}$ , 可得

$$\begin{aligned} \max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(t + \kappa) &\geq W(t'_q) \exp\left\{-\tilde{q}(t'_q - t)\right\} \\ &\geq \xi \exp\left\{-\tilde{q}(t'_q - t)\right\}. \end{aligned}$$

考虑在时刻  $t \in [t_{k-1}, t_k)$  上, 得出

$$\max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(t + \kappa) \geq \xi e^{-2\tilde{q}\omega}.$$

因此, 有

$$\max_{-\tau_1 \leq \kappa \leq 0} W(r + \kappa) dr \geq \xi \theta e^{-2\tilde{q}\omega}. \quad (5.28)$$

显然, 这与式 (5.26) 相矛盾. 故而在该情形中, 依然有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = 0$ . 所以偏差状态也满足  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$ . 即对于含有时滞动力学的非线性耦合多智能体在自适应牵制间歇控制下可以实现二阶滞后一致.

定理 5.1 证明完毕. ■

## § 5.4 数值模拟

假设网络系统包含一个领导者和六个跟随智者 (图 5.1), 智能体的自身动力学

$f$  由时滞蔡氏电路来描述<sup>[24]</sup>

$$f(x_i(t-\tau_1), v_i(t-\tau_1), x_i(t), v_i(t)) = \begin{pmatrix} \varpi(-v_{i1} + v_{i2} - h(v_{i1})) \\ v_{i1} - v_{i2} + v_{i3} \\ -\zeta v_{i2} - \epsilon \sin(\sigma v_{i1}(t-\tau_1)) \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

其中  $h(v_{i1}) = -\frac{3}{4}v_{i1} - \frac{7}{24}(|v_{i1} + 1| - |v_{i1} - 1|)$ ,  $\varpi = 10$ ,  $\zeta = 18$ ,  $\epsilon = 0.02$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\tau_1 = 0.01$  以及智能体的位置状态  $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}]^T \in \mathbb{R}^3$  和速度状态  $v_i = [v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}]^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . 在上述的参数设定下, 根据假设 5.1, 有  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 0.0004$ ,  $\rho_3 = 0$ ,  $\rho_4 = 4.3871$ . 此常时滞非线性函数  $f$  的运动轨迹将呈现出一个双涡卷混沌吸引子 (图 5.2).

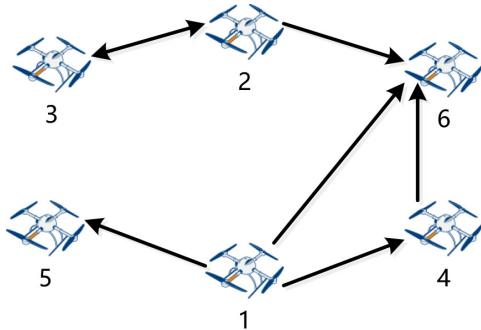


图 5.1 智能体网络拓扑结构

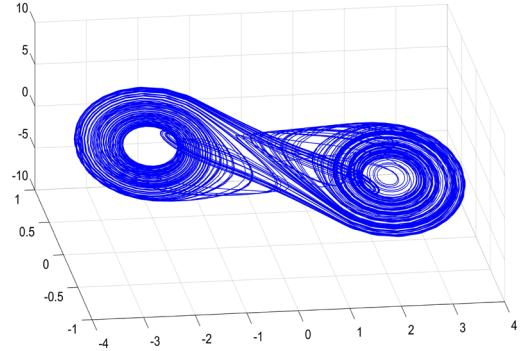


图 5.2 双涡卷混沌吸引子

从图 5.1 中明显可以看出网络拓扑结构既不包含有向生成树, 也不保持强连通. 此外, 根据权重关系, 定义一个耦合 Laplace 矩阵  $L = (l_{ij})_{6 \times 6}$  为

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

### § 5.4.1 牵制节点选择

在本小节中, 将讨论如何选择牵制节点 (或智能体) 以及需要牵制多少个智能体方可实现二阶滞后一致且提高控制效率. 受牵制控制方案<sup>[9,23,44,59]</sup>和图论<sup>[74]</sup>的启发, 在表 5.1 中, 根据智能体的出度与入度之差, 按降序方式重新排列了智能体的顺序, 其中定义  $\deg_{\text{dif}}(i) = \deg_{\text{out}}(i) - \deg_{\text{in}}(i)$ . 注意到第一个智能体的入度为零, 第二个智能体的出度大于其入度. 根据牵制控制方案可知, 第一个智能体应首先被视为要牵制的

节点，是因为它不受周围任何邻居节点的影响。同时，第二和第三个智能体也应视为备选牵制节点。此外，如果牵制第一与第二个智能体，那么虚拟的领导智能体与六个跟随智能体将形成一棵有向生成树。

表 5.1 网络拓扑 (图 5.1) 中 6 个智能体的入度、出度及度差

| 智能体 $i$         | 1  | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|-----------------|----|---|---|----|----|----|
| 入度 $\deg_{in}$  | 0  | 4 | 4 | 3  | 5  | 9  |
| 出度 $\deg_{out}$ | 10 | 7 | 4 | 1  | 0  | 0  |
| 度差 $\deg_{dif}$ | 10 | 3 | 0 | -2 | -5 | -9 |

表 5.2 对称化后的 Laplace 矩阵  $L^s$  的特征值

| 智能体 $i$              | 1       | 2       | 3      | 4      | 5      | 6      |
|----------------------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| 特征值 $\lambda_i(L^s)$ | -1.6286 | -0.1650 | 3.2957 | 5.6842 | 6.3052 | 8.5084 |

其次，可以计算出对称矩阵  $L^s$  所对应的特征值，从表 5.2 中可以看出  $\lambda_3(L^s) > 0$ ， $\lambda_1(L^s) < \lambda_2(L^s) < 0$ 。所以，至少要选择前两个智能体 ( $l_{min} = 2$ ) 来接收领导者发出的信息。根据表 5.1 和 5.2 本次数值应该选择前两个智能体作为控制节点。

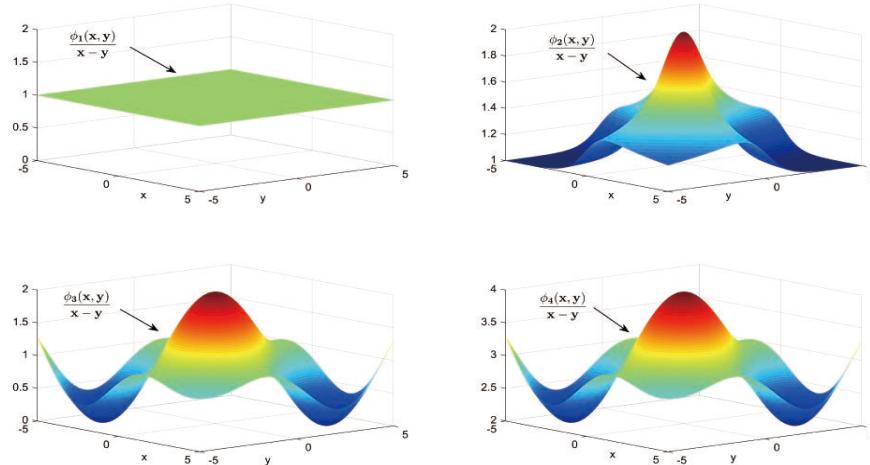


图 5.3 非线耦合函数曲面图

#### § 5.4.2 非线性耦合函数

本小节将详细地讨论非线性耦合函数  $\phi(\cdot)$ 。为了更加直观地阐述非线性函数  $\phi(x, y)$ ，本小节选取如下四个函数来进行对比分析，分别为

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= x - y, \\ \phi_2(x, y) &= [x + \tanh(x)] - [y + \tanh(y)], \\ \phi_3(x, y) &= [x + \sin(x)] - [y + \sin(y)], \\ \phi_4(x, y) &= [3x + \sin(x)] - [3y + \sin(y)].\end{aligned}$$

根据假设 5.2 可知, 上述四个非线性耦合函数均满足严格递增的性质. 事实上, 函数  $\phi_i$  等价于线性耦合的情形. 通过计算, 易得这四个函数的约束标量  $\underline{\gamma}_i$  和  $\bar{\gamma}_i$ , 分别为  $\underline{\gamma}_1 = 1, \bar{\gamma}_1 = 1, \underline{\gamma}_2 = 1, \bar{\gamma}_2 = 2, \underline{\gamma}_3 = 1, \bar{\gamma}_3 = 2$  以及  $\underline{\gamma}_4 = 2, \bar{\gamma}_4 = 4$ . 按照严格递增的性质对四个函数进行排序, 可得  $\phi_4 > \phi_3 > \phi_2 > \phi_1$ .

现在, 对这种特性进行解释. 图 5.3 描绘了  $\frac{\phi_i(x, y)}{x - y}, i = 1, 2, 3, 4$  的曲面图. 从该图可知, 标量  $\bar{\gamma}_i$  越大, 非线性耦合效果越明显, 更利于探究非线性耦合与二阶滞后一致性的关系.

#### § 5.4.3 细节分析

在本小节的数值实验中, 考虑在自适应牵制非周期间歇控制下的非线性耦合网络系统的二阶滞后一致性. 选取非线性耦合函数为  $\phi_4(s) = 3s + \sin(s)$ , 在时间范围  $[0, 12]$  上选取控制非周期间歇间隔如下

$$\begin{aligned}[0, 0.5] \cup [1, 1.7] \cup [2.3, 2.7] \cup [3.1, 4] \cup [5, 5.6] \cup [6.5, 7.5] \\ \cup [8.2, 9] \cup [9.8, 10.4] \cup [10.8, 11] \cup [11.4, 11.8] \cup \dots\end{aligned}$$

由上述控制间隔与假设 2.2, 可得  $\theta = 0.2$  及  $\delta = 1.9$ . 此外, 设置追踪滞后时滞  $\tau_2 = 0.5$ , 位置与速度的耦合强度分别为  $\alpha = 2.5$  和  $\beta = 1.3$ , 在自适应律 (5.8) 下的自适应参数为  $d = 0.002$ . 借助于小节 5.4.1 中的分析可知, 至少选取前两个智能体作为牵制节点. 由理论分析表明只需控制前两个节点即可确保网络系统达到稳定. 为不失一般性, 本次数值模拟取前三个智能体进行控制, 即  $B = \text{diag}(9, 9, 9, 0, 0, 0)$ .

图 5.4 和 5.5 分别展示了网络系统的位置与速度偏差轨迹, 这表明了在没有任何控制下, 具有非线性耦合函数  $\phi_3(s) = s + \sin(s)$  的多智能体网络系统无法实现二阶滞后一致. 图 5.6 和 5.7 刻画了六个跟随智能体在非周期自适应牵制控制 (5.7) 下与领导跟随智能体的位置和速度均实现了追踪时滞为  $\tau_2 = 0.5$  二阶滞后一致性, 其中选取的非线性耦合函数为  $\phi_4(s) = 3s + \sin(s)$ . 同样地, 相应的位置与速度的滞后偏差轨迹也在设定的时间范围  $[0, 12]$  内与非周期信号下稳定到零值 (图 5.8 和 5.9). 图 5.10 描述了不同的牵制控制强度对自适应增益效果的影响. 显然, 自适应增益  $D(t)$  逐渐趋于某一个稳定的常值.

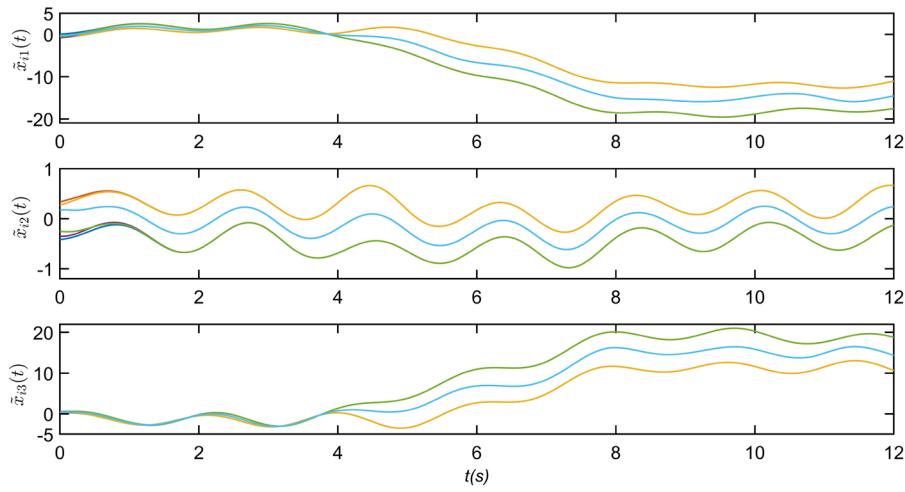


图 5.4 多智能体网络系统在无控制下的位置偏差轨迹, 其中  $\phi_3(s) = s + \sin(s)$ .

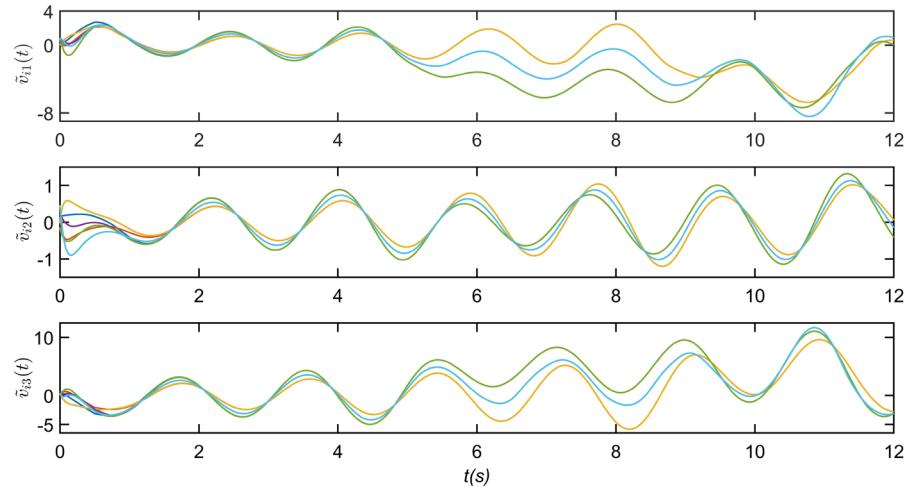


图 5.5 多智能体网络系统在无控制下的速度偏差轨迹, 其中  $\phi_3(s) = s + \sin(s)$ .

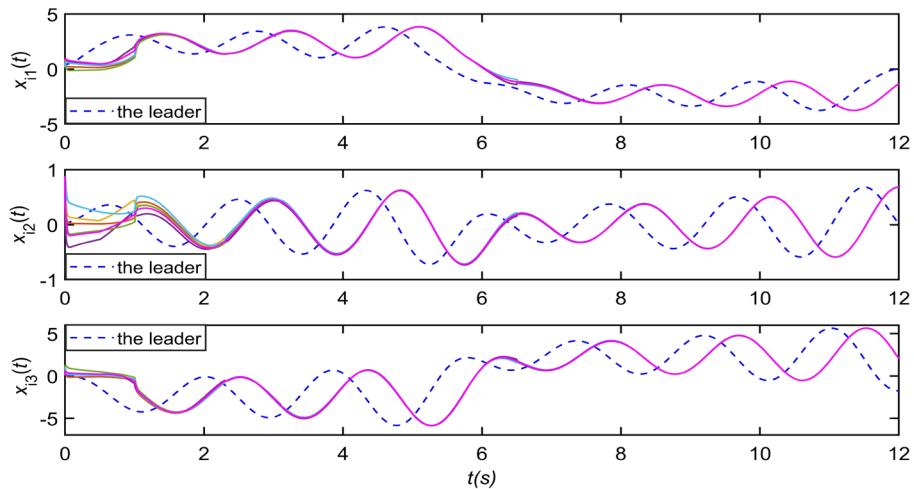


图 5.6 网络系统在控制 (5.7) 下的位置轨迹, 其中  $\phi_4(s) = 3s + \sin(s)$ ,  $\tau_2 = 0.5$ .

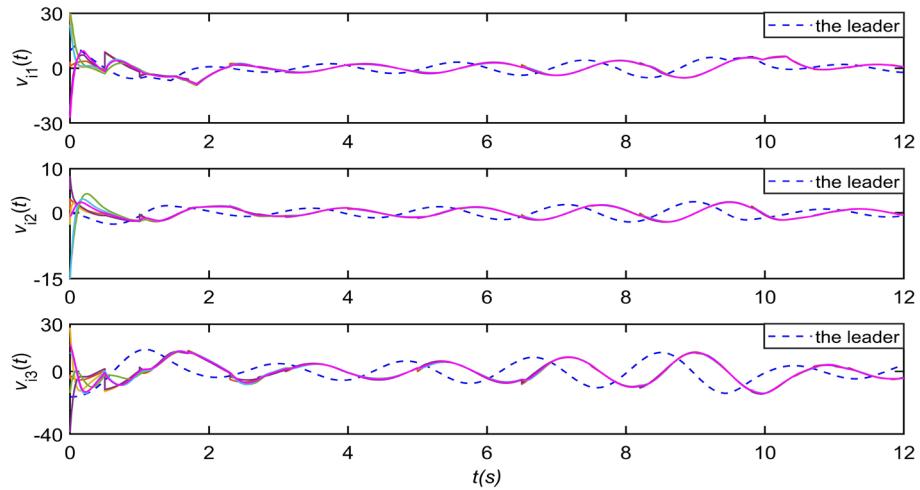


图 5.7 网络系统在控制 (5.7) 下的速度轨迹, 其中  $\phi_4(s) = 3s + \sin(s)$ ,  $\tau_2 = 0.5$ .

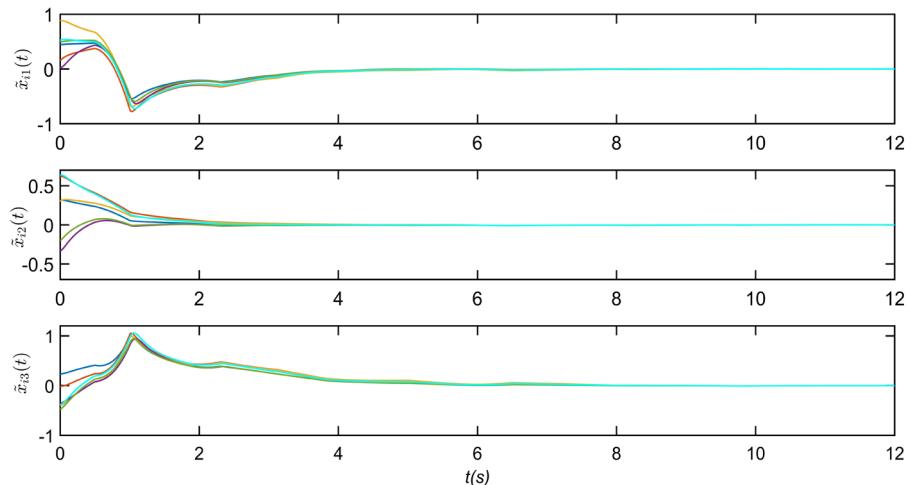


图 5.8 智能体网络控制系统 (5.9) 的位置偏差轨迹, 其中  $\phi_4(s) = 3s + \sin(s)$ ,  $\tau_2 = 0.5$ .

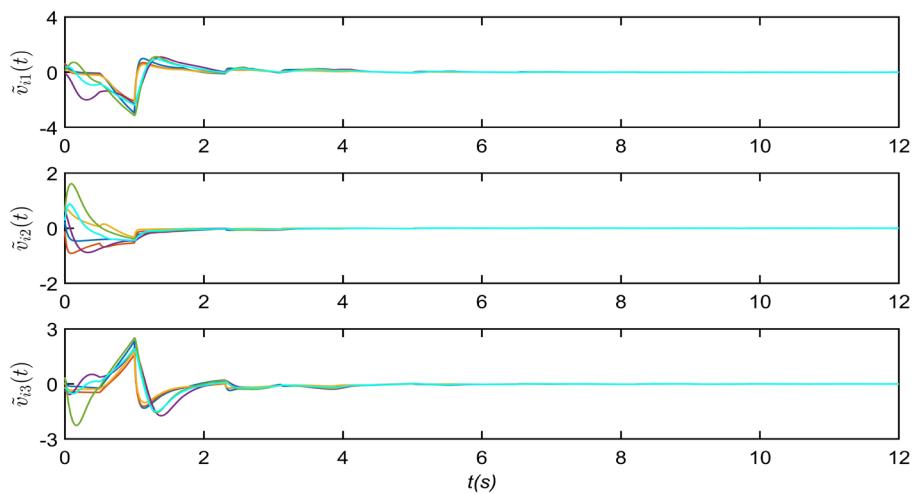


图 5.9 智能体网络控制系统 (5.9) 的速度偏差轨迹, 其中  $\phi_4(s) = 3s + \sin(s)$ ,  $\tau_2 = 0.5$ .

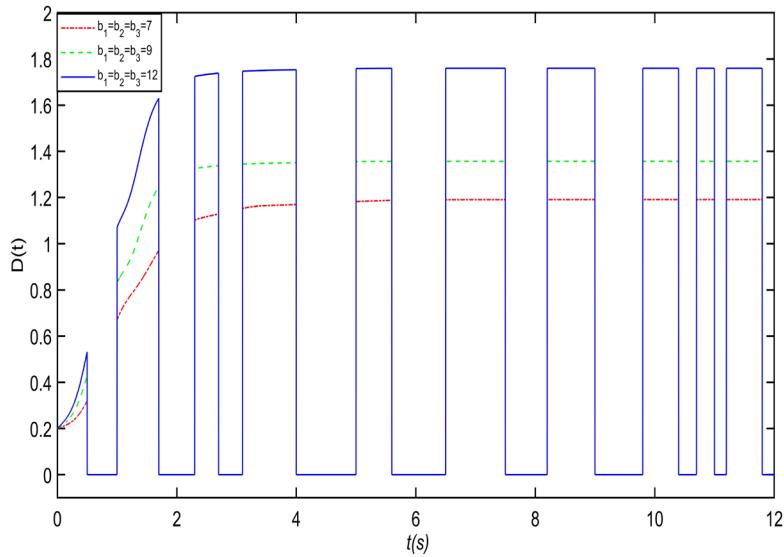


图 5.10 网络系统自适应增益  $D(t)$  的轨迹, 其中牵制强度  $b_1 = b_2 = b_3 = 7, 9, 12$ .

### § 5.5 结语

本章研究了常时滞二阶多智能体系统的滞后一致性。与前几章的结果相比较, 本章不要求通信图是强连通或包含生成树。此外, 网络系统中的位置与速度状态信息是非线性耦合的。基于间歇信号和局部信息, 本章提出了自适应牵制非周期间歇控制, 理论与数值结果表明了控制策略对非线性耦合系统是有效的, 多智能体网络系统最终实现指数滞后一致性。在未来的工作中, 将基于符号图论, 研究智能体间的信息交互是正负权重值(即合作与竞争)的滞后两分一致性, 并考虑状态时滞对网络系统的影响。

## 第六章 总结与展望

在当今人工智能与机器学习兴起的时代，多智能体网络系统的协调控制显得极为重要。智能体之间的相互通信、协调合作、任务分配以及目标任务的实现都与一致性问题密切相关。本文探讨了几类非线性多智能体网络系统在间歇控制下的一致性，分析了两种比恒同一致更弱的群体动力学行为：部分分量一致与滞后一致。基于图论与系统控制理论，利用 Lyapunov 稳定性方法，判断网络中偏差系统的稳定性，从而验证多智能体系统的一致性。本文研究在间歇控制下的一致性问题，着力于信息物理系统，将智能体之间的通信中断，通信时滞，随机噪声扰动考虑到网络系统之中，更加符合客观系统的描述。本文的研究内容可广泛应用于实际系统中，如物流车队自动驾驶、无人机编队巡航和卫星姿态控制等。

尽管近些年涌现出大量优秀的多智能体系统一致性与协调控制的文献与专著，多智能体系统一致性控制的分析框架基本建立，但仍然有许多值得深入探究的问题需要去进一步完善与探讨。

1. 对于多智能体系统协调控制，目前已经有许多相关的工作。对于如何使智能体的控制能耗最小，控制性能最优的绿色控制还需要深入分析。如稀疏控制，最大限度的放宽控制器取零值的长度，通常也称为  $L^0$  最优控制问题。众所周知， $L^0$  优化问题涉及到 NP 难题<sup>[80]</sup>。因此，许多研究者致力于用  $L^1$  范数正则化来逼近  $L^0$  稀疏表示，近些年来有少量的工作关注于此<sup>[14]</sup>。

2. 对于智能体系统如何完全自主地进行各自协调合作，通过一组初始数据对智能体进行训练，让智能体与周围的邻居智能体进行自主地信息交互，或者是否需要通信以及确定与哪些智能体进行信息交流，即多智能体系统自主学习问题<sup>[78]</sup>。目前已经有些许工作致力于多智能体系统的强化学习，特别是 Q Learning 以及 Online Learning。

3. 多智能体系的二分一致性，在真实的网络中，不仅仅只有正向权重，还需要考虑具有负向权重的情形。因此对于符号图论下构成的合作与竞争的网络仍需要去进一步探究，二分一致性就是该网络特性的一个研究突破<sup>[30]</sup>。

## 参考文献

- [1] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [2] H. G. Tanner, A. Jadbabaie and G. J. Pappas. Flocking in fixed and switching networks[J], IEEE Trans. Autom Contr, 2007, 52(5): 863-868.
- [3] J. Lin, A. S. Morse and B. D. O. Anderson. The multi-agent rendezvous problem[J], SIAM J. Contr Optim, 2007, 46(5): 2096-2119.
- [4] M. Egerstedt and X. M. Hu. Formation constrained multi-agent control[J]. IEEE Trans. Robot. Autom, 2001, 17(6): 947-951.
- [5] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Phys. Rev. Lett, 1995, 75(6): 126, Aug. 1995.
- [6] R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans. Autom Contr, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [7] 虞文武, 温广辉, 陈关荣, 曹进德. 多智能体系统分部式协同控制(英文版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016, 10.
- [8] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 网络科学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012, 04.
- [9] 陈天平, 卢文联. 复杂网络协调性理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013, 10.
- [10] 余莹莹. 多智能体系统一致性若干问题的研究[D]. 华中科技大学, 2010.
- [11] P. Tabuada. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Trans. Autom Contr, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [12] W. M. Haddad, V. Chellaboina and N. A. Kablar. Nonlinear impulsive dynamical systems part I: Stability and dissipativity[J]. Int. J. Contr, 2010, 74(17): 1631-1658.
- [13] Y. Yamamoto. A function space approach to sampled data control systems and tracking problems[J]. IEEE Trans. Autom Contr, 1994, 39(4): 703-713, Apr. 1994.
- [14] T. Ikeda. Sparse optimal control for continuous-time dynamical systems[D]. Kyoto University, 2019.
- [15] M. Nagahara, D. E. Quevedo and D. Nesic. Maximum hands-off control: A paradigm of control effort minimization[J]. IEEE Trans. Autom Contr, 2016, 61(3): 735-747.
- [16] M. Zochowski. Intermittent dynamical control[J]. Phys D, 2000, 145(3): 181-190.
- [17] M. H. Degroot. Reaching a consensus[J]. J. Am. Stat. Assoc., 1974, 69(1): 118-121.
- [18] C. W. Reynolds. Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model[J]. Computer Graphics and Interactive Techniques. New York, USA: ACM, 1987, 21(4): 25-34.
- [19] W. Ren and R.W. Beard. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans. Autom Contr, 2005, 50(5): 655-661.
- [20] W. Ren and E. Atkins. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange [J]. Int. J. Robu. Non Contr, 2007(10): 1002-1007.
- [21] I. D. Couzin, J. Krause, N. R. Franks and S. A. Levin. Effective leadership and decision-making in animal groups on the move[J]. Nature, 2005, 433(7025): 513-516.
- [22] W. W. Yu, G. R. Chen and M. Cao. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems[J]. Automatica, 2010, 46(6): 1089-1095.
- [23] Q. Song, J. D. Cao and W. W. Yu. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control[J]. Syst Contr Lett, 2010, 59(9): 553-562.

- [24] G. H. Wen, Z. S. Duan and W. W. Yu, et al. Consensus of second-order multi-agent systems with delayed nonlinear dynamics and intermittent communications[J]. *Int. J. Contr.*, 2013, 86(2): 322-331.
- [25] S. Djaidja, Q. H. Wu and H. Fang. Leader-following consensus of double-integrator multi-agent systems with noisy measurements[J]. *Int. J. Contr. Autom. Syst.*, 2015, 13(1): 17-24.
- [26] X. L. Wang, H. S. Su, X. F. Wang and B. Liu. Second-order consensus of multi-agent systems via periodically intermittent pinning control[J]. *Cir Syst Sign Pro*, 2016, 35(7): 2413-2431, Jul. 2016.
- [27] N. Huang, Z. S. Duan and Y. Zhao. Consensus of multi-agent systems via delayed and intermittent communications[J]. *IET Contr Theo Appl*, 2015, 9(1): 62-73.
- [28] M. C. Bragagnolo, I. C. Morarescu and J. Dafouz et al. Reset strategy for consensus in networks of cluster[J]. *Automatica*, 2016, 65(2): 53-63
- [29] 张文, 马忠军, 王毅. 带未知耦合权重的领导-跟随多智能体系统的实用一致性[J]. 自动化学报, 2018, 44(12): 2300-2304.
- [30] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. *IEEE Trans. Autom. Contr*, 2013, 58 (10): 935-946.
- [31] J. Cortés. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus[J] *Automatica*, 2006, 42 (11): 1993-2000
- [32] S. E. Parguel, A. E. Polyakov and P. S. Shcherbakov. Fixed-Time consensus algorithm for multi-Agent systems with integrator dynamics[J]. *IFAC Proce Vol*, 2013, 46(27): 110-115.
- [33] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 2001.
- [34] F. Xiao, L. Wang and J. Chen. Partial state consensus for networks of second-order dynamic agents[J]. *Syst Contr Lett*, 2010, 59 (12): 775-781.
- [35] 吴彬彬, 马忠军, 王毅. 领导-跟随多智能体系统的部分分量一致性[J]. 物理学报, 201766(06): 5-11.
- [36] F. B. Li, Z. J. Ma and Q.C. Duan. Partial component synchronization on chaotic networks[J]. *Phys. A Stat. Mech. Appl*, 2019, 515: 707-714.
- [37] Z. C. Zhang, Z. J. Ma and Y. Wang. Partial component consensus of leader-following multi-agent systems via intermittent pinning control[J]. *Phys. A Stat. Mech. Appl*, 2019, 536: 1-15.
- [38] 陈慧芳. 多智能体系统的聚类一分量一致性[D]. 桂林电子科技大学, 2019.
- [39] 杨洪勇, 徐群叁. 具有单向时延的多智能体系统的一致性分析[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2008, 5(3): 62-67.
- [40] X. F. Wang, G. R. Chen and X. H. Yu. Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delay feedback[J]. *Chaos*, 2000, 10 (4): 771-779
- [41] S. I. Niculescu and K. Q. Gu. *Advances in time-delay systems*[M]. Berlin: Springer, 2004.
- [42] 谢媛艳,王毅,马忠军.领导-跟随多智能体系统的滞后一致性[J].物理学报, 2014, 63(4): 040202.
- [43] Y. Wang and Z. J. Ma. Lag consensus of the second-order leader-following multi-agent systems with nonlinear dynamics[J]. *Neurocom*, 2016, 171: 82-88.
- [44] Y. Wang, Z. J. Ma, S. Zheng and G. R. Chen. Pinning control of lag consensus for second-order nonlinear multiagent systems[J]. *IEEE Trans. Cyber*, 2017, 47(8): 2203-2211.
- [45] Y. Wang, Z. J. Ma and G. R. Chen. Avoiding congestion in cluster consensus of the second-order nonlinear multiagent systems[J]. *IEEE Trans. Neur. Net. Lear. Syst*, 2017, 29(8): 3490-3498.
- [46] K. Z. Li, W. W. Yu and Y. Ding. Successive lag synchronization on nonlinear dynamical networks via linear feedback control[J]. *Nonlin Dyna*, 2015, 80(2): 421-430.
- [47] W. G. Xia and J. D. Cao. Pinning synchronization of delayed dynamical networks via periodically

- intermittent control[J]. Chaos, 2009, 19(1): 013120.
- [48] 刘金山, 吴付科译. 随机微分方程导论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [49] W. Sun, J. H. Lü, X. H. Yu and S. H. Chen. Second-order consensus of multi-agent systems with noise[J]. IET Contr Theo Appl, 2014, 8(17): 2026-2032.
- [50] X. W. Mu and X. H. Wu. Second-order consensus of multi-agent systems with noises via intermittent control[J]. Int. J. Syst. Sci, 2018, 49(7): 1529-1539.
- [51] 吴僖慧. 间歇控制下的二阶多智能体系统的一致性问题[D]. 郑州大学, 2017.
- [52] T. P .Chen and Z. M. Zhu. Exponential synchronization of nonlinear coupled dynamical networks [J] Int. J. Bifurcat Chaos, 2007, 17(03): 999-1005.
- [53] T. Liu, J. Zhao and D. J. Hill. Synchronization of complex delayed dynamical networks with nonlinearly coupled nodes [J]. Chaos, Soli. Fract, 2009, 40(3): 1506-1519.
- [54] X. W. Liu, T. P. Chen and W. L. Lu. Consensus problem in directed networks of multi-agents via nonlinear protocols [J]. Phys Lett. A, 2009, 373(35): 3122-3127.
- [55] W. L. Guo, F. Austin and S. H. Chen. Global synchronization of nonlinearly coupled complex networks with non-delayed and delayed coupling[J]. Commu Nonlin Sci Num Sim, 2010, 15(6): 1631-1639.
- [56] A. V. Proskurnikov. Average consensus in networks with nonlinearly delayed couplings and switching topology[J]. Automatica, 2013, 49(9): 2928-2932.
- [57] J. Li, Z. H. Guan and G. R. Chen. Multi-consensus of nonlinearly networked multi-agent systems[J]. Asian J. Contr, 2015, 17(1): 157-164.
- [58] X. W. Liu and T. P. Chen. Synchronization of nonlinear coupled networks via aperiodically intermittent pinning control[J]. IEEE Trans. Neur. Net. Lear. Syst, 2015, 26(1): 113-126.
- [59] W. L. Lu, X. Li and Z. H. Rong. Global stabilization of complex networks with digraph topologies via a local pinning algorithm[J]. Automatica, 2010, 46(1): 116-121.
- [60] C. D. Li, G. Feng and X. F. Liao. Stabilization of nonlinear systems via periodically intermittent control[J]. IEEE Trans. Cir Syst. II, Exp Br, 2007, 54(11): 1019-1023.
- [61] H. J. Li, Y. L. Zhu, J. Liu and Y. Wang. Consensus of second-order delayed nonlinear multi-agent systems via node-based distributed adaptive completely intermittent protocols[J]. Appl Math Compu, 2018, 326(1): 1-15.
- [62] J. L. Qiu, L. Y. Cheng and X. Y. Chen. Semi-periodically intermittent control for synchronization of switched complex networks: a mode-dependent average dwell time approach[J]. Nonlin Dyn, 2016, 83(3): 1757-1771.
- [63] X. W. Liu and T. P. Chen. Synchronization of complex networks via aperiodically intermittent pinning control[J]. IEEE Trans. Autom. Contr, 2015, 60(12): 3316-3321.
- [64] X. W. Liu and T. P. Chen. Synchronization of linearly coupled networks with delays via aperiodically intermittent pinning control[J]. IEEE Trans. Neur. Net. Lear. Syst, 2015, 26(10): 2396-2407.
- [65] M. H. Ma and J. P. Cai. Synchronization of lagrangian networks with a directed graph via aperiodically intermittent pinning control[J]. Neurocom, 2018, 313(3): 175-183.
- [66] P. P. Zhou and S. M. Cai. Pinning synchronization of complex directed dynamical networks under decentralized adaptive strategy for aperiodically intermittent control[J]. Nonlin Dyn, 2017, 90(1): 287-299.
- [67] 于志永. 基于自适应调控和通讯限制的多智能体系统一致性[D]. 新疆大学, 2018.
- [68] 蔡佐威. 几类基于微分包含的不连续系统的动力学研究[D]. 湖南大学, 2014.

## 参考文献

---

- [69] 程桂芳. 不连续非线性系统的稳定与镇定的若干问题[D]. 郑州大学, 2008.
- [70] J. Y. Zhang and T. L. Shen. Generalized Filippov Solution in Stability Analysis and Stabilization of Piecewise Continuous Time-delay Systems[J]. IFAC Proce Vol, 2012, 45(14): 19-24, Jun. 2012.
- [71] T. Matsumoto, L. O. Chua and K. Ayaki. Reality of chaos in the double scroll circuit: A computer-assisted proof [J]. IEEE Trans. Circu Syst, 1988, 35(7): 909-925.
- [72] R. A. Horn and C. R. Johnson. Topics in Matrix Analysis[M]. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1991.
- [73] 方保镕, 周继东, 李医民. 矩阵论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [74] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 安徽: 中国科学技术大学出版社, 2011.
- [75] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [76] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [77] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [78] T. T. Nguyen, N. D. Nguyen and S. Nahavandi. Deep reinforcement learning for multiagent systems: A review of challenges, solutions, and applications[J]. IEEE Trans. Cyber, 2020, 99: 1-14.
- [79] C. M. Bishop. Pattern recognition and machine learning[M]. New York: Springer, 2006.
- [80] B. K. Natarajan. Sparse approximate solutions to linear systems[J]. SIAM Journal on Comp, 1995, 24(2): 227-234.

## 致谢

本文是在导师马忠军教授严格要求、悉心指导下完成的。马老师在文章的选题、创新、写作规范化等方面，给予了我莫大的支持。马老师严谨的科研态度、渊博的学术知识，是我学习的榜样和追随的目标。在科研与学习的道路中，马老师时刻引导我去思考，去发现问题，培养我独立科研的能力。在这近三年时间里，马老师不仅在科研上为我引路导航，还在生活中教会我许多为人处事的道理，这些使我受益良多。在此，向马忠军老师表示由衷地感谢和深深的敬意。

其次，我要向我在日本北九州市立大学国际环境工学研究生院信息科学系访学期间的指导教师永原正章教授 (Masaaki Nagahara, The University of Kitakyshu, India Institute of Technology, Bombay) 致以由衷地感谢！永原老师在科研课题探讨、论文修改、论文写作等方面，都给予我无私的帮助与指导。永原老师对科研的不懈追求以及一丝不苟的科研态度，值得我一生去学习和追求，他对我的关心和教导我将铭记在心。在此，我向永原正章老师致以深深的谢意，感谢在我访问求学期间在生活及学习方面给与我的关心与帮助。

由衷地感谢数学与计算科学学院的领导与老师的指导和帮助。感谢他们为我提供了良好科研环境、先进的科研设备。特别要感谢基础数学方向的所有老师，他们认真无私地教导，为我在查阅参考文献、撰写学术论文时夯实了牢固的基础。我要感谢师兄张文、刘鹏飞、何东平、张银星、沈瑞刚，师姐陈慧芳、邱小芬，师妹刘雪雪、黎美华和张斯，他(她)们不管在生活还是科研中，都让带给我快乐与成长。他们的支持与鼓励促使我在枯燥的科研道路中继续前行。感谢我的室友申飞超、周峰和刘海国，和你们一起生活、一起科研让我觉得生活是如此的美妙。我还要感谢1715班的所有同学，和你们一起在桂电相遇认识、相互学习交流、共同进步是我的一种荣幸。

研究生期间，我的家人、亲人和朋友在给予我生活物质上的支持同时，也赋予我精神上的鼓励。再次表达我内心诚挚的谢意！

最后感谢国家对我的培养，感谢桂林电子科技大学对我的栽培，感谢数学与计算科学学院老师们对我的鼓励、支持与教导！

## 作者在攻读硕士期间的主要研究成果

### 论文

- [1] Partial component consensus of leader-following multi-agent systems via intermittent pinning control[J]. *Phys. A Stat. Mech. Appl.* 2019, 536: 1-15. (已发表, 第一作者, SCI)
- [2] Second-order lag consensus tracking for multi-agent system via aperiodically intermittent pinning control. (已投稿 IEEE Trans 系列刊物, 第一作者)
- [3] Adaptive pinning aperiodically intermittent control for lag consensus of nonlinear coupled multiagent systems with delays. (待投稿, 第一作者)
- [4] Linear quadratic tracking with sparse regularization. (已投稿, 第一作者)

### 科研项目

- [1] 多智能体系统的聚类-分量一致性. 校级研究生科研创新项目(项目编号 2018YJCX61, 参与, 起止时间: 2017.12-2020.06).
- [2] 多智能体系统在间歇控制下的一致性研究. 院级研究生优秀论文培育项目 (项目编号 2018YJSPY01, 主持, 起止时间: 2018.12-2019.12).
- [3] 多智能体网络系统一致性协调控制. 校级研究生海外研修项目 (项目编号 GDYX2019015, 主持, 起止时间: 2019.09-2020.09).
- [4] 复杂环境下网络系统的协同控制. 院级创新项目 (项目编号 2020YJSCX03, 参与, 起止时间: 2019.12-2021.06).

### 获奖情况

2018 年校级研究生学业奖学金一等奖.

2019 年校级研究生学业奖学金一等奖.

2019 年硕士研究生国家奖学金.

### 学术活动

第十四届复杂网络大会, 2018. 10, 重庆.

第十七届全国非线性振动暨第十四届非线性动力学和运动稳定性会议, 2019.05, 南京.

SIAM 控制理论及其应用会议, 2019.06, 成都.

International school and conference on network science, 2020.01, Tokyo.

### 学术协会

Student Member of SICE, IET, AAAI, SIAM and IEEE.