(1) 由题意 $f(x)=(x-a)^3, f(4)=(4-a)^3=8 \Rightarrow a=2$

(2) 由题意 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$

$f'(x)=(x-b)^2+2(x-a)(x-b)=(x-b)(3x-2a-b)$

故 $\frac{2a+b}{3}$ 则 a,b 只能为 -3 和 3

若 $a=-3,b=3$ 时 $\frac{2a+b}{3}=-1$(舍去)

若 $a=3,b=-3$ 时 $\frac{2a+b}{3}=1$(符合题意)

故 $f(x)=(x-3)(x+3)^2, f'(x)=(x+3)(3x-3)$

$x<-3, f'(x)>0; -3\leqslant x\leqslant 1, f'(x)\leqslant 0; x>1, f'(x)>0;$

故在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-2*16=-32$

(3) 由题意 $f(x)=x(x-b)(x-1)=(x^2-x)(x-b)=x^3-(b+1)x^2+bx$

$f'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$

$f'(x)=0$ 时 $3x^2-2(b+1)x+b=0$

易知 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{2(b+1)-\sqrt{4(b+1)^2-4\cdot 3b}}{6}=\frac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3}$ 处取得极大值

$x_0^2=\frac{2b^2+b+2-2(b+1)\sqrt{b^2-b+1}}{9}, x_0^3=\frac{4b^3+3b^2+3b+4-(4b^2+5b+4)\sqrt{b^2-b+1}}{27}$

$f(x_0)=\frac{-2b^3+3b^2+3b-2+(2b^2-2b+2)\sqrt{b^2-b+1}}{27}$ 难解

注意到 $f(x)=x(x-b)(x-1)$ 为零点式, 过定点 $(0,0),(1,0)$ 动点 $(b,0)$

易知 $0<x_0<b\leqslant 1$ 猜想 $b=1$ 时 $f(x_0)$ 最大

验证: $x_0(x_0-1)(x_0-1)-x_0(x_0-1)(x_0-b)=x_0(x_0-1)(b-1)\geqslant 0$

猜想成立, 此时 $x_0=\frac{1}{3}, f(x_0)=\frac{4}{27}$