(1) 证明:

由 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=0$

得: $ab+bc+ca=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

又由 $abc=1$, 故 $a,b,c\neq 0$

则: $a+b+c<0$

(2) 证明:(法一)

易知 a,b,c 中有且仅有 2 个为负数, 一个为正数, 不妨设该正数为 a

则 $max\{a,b,c\}$ 即为 a;

由 $a+b+c=0,\Rightarrow b=-a-c$

又由 $abc=1\Rightarrow \quad -ac(a+c)=1$

$$ac^2+a^2c+1=0$$

将上式视为 a 为参数关于 c 的二次方程, 若要 c 存在, 则必有:

$a^4-4a\geqslant 0$

则:$(a^3-4)\geqslant 0$

又 $a\neq 0$, 故有 $a\geqslant\sqrt[3]{4}$

法二:

$b=\frac{1}{ac}$, 由$a+b+c=1$

$$\Leftrightarrow a=(\frac{-1}{ac}-c)\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}}$$

$$\Leftrightarrow a-2\sqrt{\frac{1}{a}}\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{3}{2}}-\geqslant 2$$

$$\Leftrightarrow a\geqslant\sqrt[3]{4}$$

法三:$a=\frac{1}{bc}, a^2=(b+c)^2$,

$a^3=\frac{(b+c)^2}{bc}=\frac{b^2+c^2+2bc}{bc}\geqslant\frac{2bc+2bc}{bc}=4$