设圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,定点$P(x_0,y_0)$

(1) 点在圆上:

$\overrightarrow{OP}=(x_0-a,y_0-b)$

$\vec{n}=(y_0-b,a-x_0)$

$$l:(x_0-a)x+(y_0-b)y+C=0$$

带入(x_0,y_0)得 :$C=ax_0+by_0-x_0^2+y_0^2$

$$l:(x_0-a)x+(y_0-b)y+ax_0-x_0^2+by_0-y_0^2=0$$

$$(x_0-a)x+(y_0-b)y+x_0(a-x_0)+y_0(b-y_0)=0$$

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

$$\begin{aligned}\text{另:}C&=ax_0-x_0^2+by_0-y_0^2\\&=-(x_0-a)^2-(y_0-b)^2-ax_0-by_0+a^2+b^2\\&=-r^2-a(x_0-a)-b(y_0-b)\end{aligned}$$

带入 C, 得 :$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

法二:

设切线方程为 $l:A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$(注意自由度为 1)

则圆心到 l 距离:

$$\frac{|Aa-Ax_0+Bb-By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}=r\ldots 1$$

$$(Aa-Ax_0+Bb-By_0)^2=(A^2+B^2)r^2$$

带入 r :$A^2(x_0-a)^2+B^2(y_0-b)^2+2AB(x_0-a)(y_0-b)=(A^2+B^2)[(x_0-a)^2+(y_0-b)^2]$

$$B^2(a-x_0)^2+A^2(b-y_0)^2-2AB(x_0-a)(y_0-b)=0$$

$$[B(x_0-a)-A(y_0-b)]^2=0$$

$$B(x_0-a)-A(y_0-b)=0\ldots 2$$

$$(x-x_0)\times 2+(y_0-b)\times 1:$$

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

也可用隐函数求导.

(2) 点在圆外:

$$\frac{|Aa - Ax_0 + Bb - By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r \ldots ①$$

$$(Aa - Ax_0 + Bb - By_0)^2 = (A^2 + B^2)r^2$$

$$A^2(x_0 - a)^2 + B^2(y_0 - b)^2 + 2AB(x_0 - a)(y_0 - b) = (A^2 + B^2)r^2$$

$$B^2(a - x_0)^2 + A^2(b - y_0)^2 - 2AB(x_0 - a)(y_0 - b) = 0$$

$$[B(x_0 - a) - A(y_0 - b)]^2 = 0$$

$$B(x_0 - a) - A(y_0 - b) = 0 \ldots ②$$