2016 高考卷三理数

levi

2020 年 8 月 20 日

已知抛物线 $C: y^2=2x$ 的焦点为 F , 平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点，交 C 的准线于 P, Q 两点.

(I) 若 F 在线段 AB 上, R 是 PQ 的中点，证明 $AB \mathbin{//} FQ$;

(II) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 AB 中点的轨迹方程.

(I) 证明：

设直线 $AB: x=ky+\frac{1}{2}, l_1: y=y_1, l_2: y=y_2$

则:$A:(\frac{y_1^2}{2}, y_1), B:(\frac{y_2^2}{2}, y_2), R:(-\frac{1}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}), F:(\frac{1}{2}, 0), P:(-\frac{1}{2}, y_1), Q:(-\frac{1}{2}, y_2)$

则:$k_{RA}=\frac{y_1-\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{y_1^2}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{y_1-y_2}{y_1^2+1}, k_{QF}=\frac{0-y_2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=-y_2$

且 y_1, y_2 满足:

$$\begin{cases} C: y^2=2x & (1) \\ AB: x=ky+\dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

故有: $y^2-2ky-1=0$

则: $y_1y_2=-1 \Rightarrow y_2=-\frac{1}{y_2}$

故:$k_{RA}=\frac{y_1+\frac{1}{y_2}}{y_1^2+1}=\frac{y_1^2+1}{y_1(y_1^2+y_1)}=\frac{1}{y_1}=-y_2=k_{QF}$

证毕

(II) 解：

易知 $S_{\triangle PQF}=\frac{1}{2}(y_1-y_2)[\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})]=\frac{y_1-y_2}{2}$

记 AB 与 x 轴交于 D 点, 设 $AB: x=ky+b$, 则 $D:(b,0)$

故 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}|b-\frac{1}{2}|(y_1-y_2)$

由 $S_{\triangle PQF}=2S_{\triangle ABF} \Rightarrow \frac{y_1-y_2}{2}=|b-\frac{1}{2}|(y_1-y_2)$ 则:$|b-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

故 $b=1$ 或 $b=0$(舍去)

且 y_1, y_2 满足:

$$\begin{cases} C: y^2=2x & (3) \\ AB: x=ky+1 & (4) \end{cases}$$

故有 $y^2-2ky-2=0$

则:$y_1y_2=-2, y_1+y_2=2k$

则:$\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{2}=\frac{1}{2}[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]=2k^2+2$

故 AB 中点的轨迹方程为 $x=k^2+1=y^2+1$, 即 $y^2=x-1$

设函数 $f(x)=\alpha\cos 2x+(\alpha-1)(\cos x+1)$, 其中 $\alpha>0$, 记 $|f(x)|$ 的最大值为 A

(I) 求 $f'(x)$;

(II) 求 A;

(III) 证明 $|f'(x)| \leqslant 2A$.

解:

(I) $f'(x)=-2\alpha\sin 2x+(\alpha-1)(-\sin x)=-4\alpha\sin x\cos x-\alpha\sin x+\sin x;$

(II) $(|f(x)|=|\alpha\cos 2x+(\alpha-1)(\cos x+1)|\leqslant a+2(a-1)=3a-2)$

$$f(x)=2\alpha cos^2(x)-\alpha+\alpha cosx+\alpha-cosx-1$$
$$=2\alpha(\cos x+\frac{\alpha-1}{4\alpha})^2-\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{8a}-1$$
$$=2\alpha(\cos x+\frac{\alpha-1}{4\alpha})^2-\frac{\alpha^2+6\alpha+1}{8a}$$

记 $t=\cos x$, 则 $t\in[-1,1], f(x)=g(t)=2\alpha(t-\frac{1-\alpha}{4\alpha})^2-\frac{\alpha^2+6\alpha+1}{8a}$

可知 $g(t)$ 为关于 t 的二次函数, 开口向上, 极小值 $A_1=-\frac{\alpha^2+6\alpha+1}{8a}$

由 $t=\cos x\in[-1,1]$, 若 $\frac{1-\alpha}{4\alpha}\in[-1,1]$, 即 $\alpha\geqslant\frac{1}{5}$ 时: 极值在区间内

$\cos x=1$ 时:$g(1)=3\alpha-2, \cos x=-1$ 时:$g(-1)=\alpha$

则:

(i) $0<\alpha\leqslant\frac{1}{5}$ 时,:

$|g(t)|$ 的最大值在端点取得

又 $|g(-1)|-|g(1)|=\alpha-2+3\alpha=4\alpha-2<0$

故此时 $A=|g(1)|=|3\alpha-2|=2-3\alpha$

(ii) $\alpha>\frac{1}{5}$ 时:

A 为 $|A_1|, |g(1)|, |g(-1)|$ 中的最大值

由 $a>0$, 故 $|A_1|-|g(-1)|=\dfrac{\alpha^2+6\alpha+1}{8\alpha}-\alpha$

$$=\frac{-7\alpha^2+6\alpha+1}{8\alpha}$$
$$=\frac{(7\alpha+1)(1-\alpha)}{8\alpha}$$

(1) $a\geqslant 1$ 时:

$|g(-1)|\geqslant|A_1|$

$|g(1)|-|g(-1)|=3\alpha-2-\alpha=2\alpha-2\geqslant 0$

故此时 $A=3\alpha-2$

(2) $a<1$ 时:

$|g(-1)|<|A_1|$

$$|A_1|-|g(1)|=\frac{\alpha^2+6\alpha+1}{8a}-2+3\alpha$$
$$=\frac{25\alpha^2-10\alpha+1}{8\alpha}$$
$$=\frac{(5\alpha-1)^2}{8\alpha}\geqslant 0$$

故此时 $A=|A_1|=\frac{\alpha^2+6\alpha+1}{8\alpha}$

$$综上,A=\begin{cases}2-3\alpha & ,\alpha\leqslant\frac{1}{5}\\ \frac{\alpha^2+6\alpha+1}{8\alpha} & ,\frac{1}{5}<\alpha<1\\ 3\alpha-2 & ,\alpha\geqslant 1\end{cases}$$

(III) 证明:

$|f'(x)|=|-2\alpha\sin 2x-(\alpha-1)\sin x|<2\alpha+|\alpha-1|$

(a) $\alpha\geqslant 1$ 时:

$|f'(x)|-2A<3\alpha-1-6\alpha+4=3-3\alpha\leqslant 0$

(b) $\frac{1}{5}<\alpha<1$ 时:

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| - 2A &< \alpha + 1 - \frac{\alpha^2 + 6\alpha + 1}{4\alpha} \\
&= \frac{3\alpha^2 - 2\alpha - 1}{4\alpha} \\
&= \frac{(3\alpha + 1)(\alpha - 1)}{4\alpha} < 0
\end{aligned}
$$

(c) $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{5}$ 时:

$$|f'(x)| - 2A < \alpha + 1 - 4 + 6\alpha = 7\alpha - 3 < 0$$

综上，$|f'(x)| \leqslant 2A$