

导函数为二次函数的分类讨论

王骝维

不惑面试

2021 年 7 月 1 日

$$f(x) = x - a \ln x + \frac{1+a}{x}$$

- (1) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 在 $x \in [1, 3]$ 的最小值;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间
- (3) 若 $\exists x \in [1, e]$, 使得 $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围

$$\begin{aligned}
 (1) \ a = 1, f'(x) &= x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} && \text{故在 } x = 2 \text{ 处取得最小值为} \\
 &= \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\
 &= \frac{(x+1)(x-2)}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$f(2) = 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2$$

$$f(1) = 3, f(3) = \frac{7}{3} - \ln \frac{2}{3}$$

故在 $x \in [1, 3]$ 上的最大值和最小值分别为

$$f(1) = 3, f(2) = 3 - \ln 2$$

(1):

$$a = 1, f(x) = x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad \text{故在 } x = 2 \text{ 处取得最小值为}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$$

$$f(2) = 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2$$

故 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x)$ 最小值为 $f(2) = 3 - \ln 2$

(2):

$$f'(x) = x - \frac{a}{x} - \frac{1+a}{x^2}$$

由原函数定义域为 $x \in (0, +\infty)$

$$= \frac{x^2 - ax - 1 - a}{x^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1-a)}{x^2}$$

$x > -1$ 则 $f'(x)$ 与 $x - a - 1$ 同号
 $a > 1$ 时,