2016年普通高等学校招生全国统一考试（课标全国卷II）.
理数

Wang

2021 年 6 月 6 日

1 选择题

1.1 12.设函数$f'(x)$是奇函数$f(x)(x\in\mathbb{R})$的导函数,$f(-1)=0$,当$x>0$时,$xf'(x)-f(x)<0$,则使得$f(x)>0$成立的x的取值范围是

A.$(-\infty,-1)\cup(0,1)$ $B.(-1,0)\cup(1,+\infty)$ $C.(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ $D.(0,1)\cup(1,+\infty)$

解:
$f(x)$为奇函数，则$f(0)=0,f(-x)=-f(x),f(-1)=0$则$f(1)=0$
又$xf'(x)-f(x)<0$形如$g(x)=\frac{f(x)}{x}$的导数$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)<0}{x^2}$
则$x>0,g'(x)<0$,则$g(x)$在$(x>0)$上单调递减
则$x>1$时,$f(x)<f(1)=0;x\in(0,1)$时,$f(x)>f(1)>0$
又$g(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$则$g(x)$为偶函数
则$\forall x\in(-1,0),g(x)>0;\forall x\in(-\infty,-1),g(x)<0$
且$\forall x<0,f(x),g(x)$异号，$\forall x>0,f(x),g(x)$同号
故$f(x)>0$的解集为$(-\infty,-1)\cup(0,1)$,故选A

2 解答题

2.1 20.本题12分

已知椭圆$C: 9x^2+y^2=m^2 \Phi m>0)$，直线$l$不过原点$O$且不平行于坐标轴，$l$与$C$ 有两个交点A,B,线段AB的中点为M.

1. 证明:直线OM的斜率与l的乘积为定值；
2. 若l过点$(\frac{m}{3},m)$,延长线段OM与C交于点P,四边形$OAPB$能否为平行四边形？若能，求此时l的斜率；若不能,说明理由

1.证明:
（点差法）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则有:
$k_l=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, k_{OM}=\frac{\frac{1}{2}(y_1+y_2)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}=\frac{(y_1+y_2)}{(x_1+x_2)}$

$$\begin{cases} 9x_1^2+y_1^2=m^2 & (1) \\ 9x_2^2+y_2^2=m^2 & (2) \end{cases}$$

$\Phi 1\Psi-\Phi 2\Psi$得:

$$9(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$$
$$\frac{y_1+y_2}{x_1+y_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-9$$

即$k_l\cdot k_{OM}=-9$,证毕.
2.解：
l过点$(\frac{m}{3},m)$,且l不过圆点，不与坐标轴垂直，可设

$$l: y=k(x-\frac{m}{3})+m=kx+(1-\frac{k}{3})m$$

对于椭圆C上的点(x,y),有$x\le\frac{m}{3}, y\le m$
故要使l与C有两个交点,需有$k>0$且$k\ne 3$
要使四边形$OAPB$为平行四边形，需使M同时也是OP中点
联立l与C:

$$\begin{cases} y=kx+(1-\frac{k}{3})m & (3) \\ 9x^2+y^2=m^2 & (4) \end{cases}$$

$$9x^2+[k^2x^2+(1-\frac{k}{3})^2m^2+2mk(1-\frac{k}{3})x]=m^2$$
$$(9+k^2)x^2+2mk(1-\frac{k}{3})x+m^2(\frac{k^2}{9}-\frac{2}{3}k)=0$$
$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{2mk(\frac{k}{3}-1)}{9+k^2}$$

又由（1）知$k_{OM}=-\frac{9}{k}$,再联立l_{OP}与C:

$$\begin{cases} y=-\frac{9}{k}x & (5)\\ 9x^2+y^2=m^2 & (6)\end{cases}$$

$$9x^2+\frac{81}{k^2}x^2=m^2$$
$$\Rightarrow x_p=\frac{\pm mk}{3\sqrt{k^2+9}}$$

由$OM=MP\Rightarrow x_p=2x_m=x_1+x_2$:

$$\frac{\pm mk}{3\sqrt{k^2+9}}=\frac{2mk(\frac{k}{3}-1)}{9+k^2}$$
$$\frac{\frac{k}{3}-1}{\sqrt{9+k^2}}=\pm\frac{1}{6}$$
$$\frac{k^2}{9}+1-\frac{2k}{3}=\frac{9+k^2}{36}$$
$$4k^2+36-24k-9-k^2=0$$
$$3k^2-24k+27=0$$
$$k^2-8k+9=0$$
$$\Rightarrow k=\frac{8\pm\sqrt{64-4\times9}}{2}$$
$$k=4\pm\sqrt{7}$$

且$4\pm\sqrt{7}>0,\neq 3$

故$OAPB$可以是平行四边形，此时l的斜率为$4+\sqrt{7}$或$4-\sqrt{7}$

2.2 21.本题12分

设函数$f(x)=e^{mx}+x^2-mx.$

1. 证明:$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增;
2. 若对于任意$x_1,x_2\in[-1,1]$,都有$|f(x_1)-f(x_2)|\le e-1$,求m的取值范围.

1.证明:

$$\begin{aligned}f'(x)&=me^{mx}+2x-m\\&=m(e^{mx}-1)+2x\end{aligned}$$

1. $m>0$时:
   若$x\ge 0: m(e^{mx}-1)\ge 0, 2x\ge 0, f'(x)\ge 0;$
   若$x<0: m(e^{mx}-1)<0, 2x<0, f'(x)<0;$

2. $m<0$时:
   若$x\ge 0: m(e^{mx}-1)\ge 0, 2x\ge 0, f'(x)\ge 0;$
   若$x<0: m(e^{mx}-1)>0, 2x<0, f'(x)<0;$

故:$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增;证毕.
2.解:
由(1)知,$\forall x\in[1,1], f(x)$在$x=0$处取得最小值
在$x=1$或$x=-1$处取得最小值
故

$$\begin{aligned}&|f(x_1)-f(x_2)|\le e-1\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}f(1)-f(0)\le e-1\\f(-1)-f(0)\le e-1\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}e^m-m\le e-1\\e^{-m}+m\le e-1\end{cases}\end{aligned}$$

记函数$g(x)=e^x-x$,则$g(m)=e^m-m, g(-m)=e^{-m}+m$
则$g'(x)=e^x>0$故$g(x)$单调递增
又$g(1)=e-1$,故$e^m-m\le e-1\Leftrightarrow g(m)\le g(1)\Leftrightarrow m\le 1$
类似的，有$e^{-m}+m\le e-1\Leftrightarrow g(-m)\le g(1)\Leftrightarrow -m\le 1\Leftrightarrow m\ge -1$
综上，满足题设的m的取值范围为$[-1,1]$