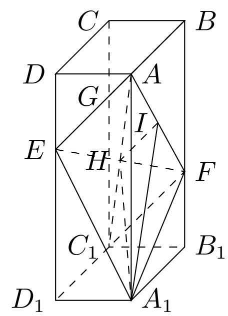
几何法: 复杂不推荐



(1) 证明:

连接 C_1F, 取 G 使 $C_1G=2CG$, 连接 GB

平面 BCC_1B_1 内, $C_1G=\frac{2}{3}CC_1=\frac{2}{3}BB_1=FB$

又 ,$FB \parallel C_1G$, 则 C_1GBF 为平行四边形

则 $GB \mathrel{\underline{\parallel}} C_1F$

又 $CG=\frac{1}{3}CC_1=\frac{1}{3}DD_1=DE, DE \parallel CG$

则 $ABGE$ 共面且为平行四边形, 则 $GB \mathrel{\underline{\parallel}} AE$

故 $AE \mathrel{\underline{\parallel}} C_1F, AEC_1F$ 共面

(2) 解：

记 EF 中点为 H, 由 (1) 知 AEC_1F 为平行四边形

$C_1F=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}, AF=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$AC_1=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}, AH=HC_1=\frac{\sqrt{14}}{2}$

由余弦定理:

$\cos AHF=\frac{(\frac{\sqrt{14}}{2})^2+(\frac{EF}{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\frac{\sqrt{14}}{2}\times\frac{EF}{2}}$

$=-\cos C_1HF=-\frac{(\frac{\sqrt{14}}{2})^2+(\frac{EF}{2})^2-(\sqrt{2})^2}{2\frac{\sqrt{14}}{2}\times\frac{EF}{2}}$

故有: $\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{4}EF^2-8=-\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{4}EF^2+2$

$$\frac{1}{2}EF^2=2+8-7$$

$$EF=\sqrt{6}$$

由 $AE^2+EF^2=2+6=8=AF^2$

故 $\angle AEF=\frac{\pi}{2}$, 即 $AE\perp EF$

$\triangle A_1EF$ 中, 易知 $A_1F=A_1E=\sqrt{5}$

故 $A_1H\perp EF$, 作 $HI \parallel AE$ 交 AF 于 I

则 $\angle IHA_1$ 即为所求二面角的二面角
易知 HI 为 $\triangle FAE$ 中位线,$IH=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$
又 H 为 AC_1 中点, 即立方体几何中心, 故
$A_1H=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{14}}{2}$
在平面 AFA_1 中, 通过辅助线易得 $A_1I=\sqrt{5}$
$\triangle IHA_1$ 中,

$$\begin{aligned}\cos\angle IHA_1 &= \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{2}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{2}-5}{\sqrt{7}}\\ &= -\frac{\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

故 $\sin IHA=\sqrt{1-(-\frac{\sqrt{7}}{7})^2}=\frac{\sqrt{42}}{7}$
故二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$