2016 年普通高等学校招生全国统一考试（课标全国卷 II）.

理数

Wang

2020 年 7 月 9 日

1 解答题

1.1 20. 已知椭圆 E:$\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A,M 两点，点 N 在 E 上，MA⊥NA.

1. 当 $t=4$，$|AM|=|AN|$ 时, 求 $\triangle AMN$ 的面积.
2. 当 $2|AM|=|AN|$ 时，求 k 的取值范围.

解：

1:

$t=4$ 时,$A(-2,0)$

又 $|AM|=|AN|$, 则 M,N 在以 A 为圆心的圆上

且 M，N 在 E 上，故 M，N 关于 x 轴对称

又 MA⊥NA

则 $\angle MAO=\angle NAO=\frac{\pi}{4}$

故直线 MA:$y=x+2$

将 $y=x+2$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得:

$$3x^2+4(x^2+4x+4)-12=0$$
$$7x^2+16x+4=0$$
$$(7x+2)(x+2)=0$$

解得 $x=-2$(舍去)，或 $x=-\frac{2}{7}$
此时 $y=-\frac{2}{7}+2=\frac{12}{7}$
则 $S\triangle AMN=\frac{1}{2}\times[-\frac{1}{2}-(-2)]\times\frac{12}{7}\times 2=\frac{144}{49}$

2:

由 E 方程知，$A(-\sqrt{t},0)$, 又 $k>0$ 且易知 k 存在
可设直线 $AM: y=k(x+\sqrt{t})$
即 $x=\frac{y}{k}-\sqrt{t}$
带入 E 方程得:

$$\frac{(\frac{y}{k}-\sqrt{t})^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1$$
$$3(\frac{y^2}{k^2}-\frac{2y\sqrt{t}}{k}+t)+ty^2-3t=0$$
$$(3+tk^2)y^2-6ky\sqrt{t}=0$$

$y=0$(舍去), 或 $y=\frac{6k\sqrt{t}}{3+tk^2}$
则

$$|AM|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}(\frac{6k\sqrt{t}}{3+tk^2})$$
$$=\frac{6\sqrt{t(1+k^2)}}{3+tk^2}$$

类似的，用 $-\frac{1}{k}$ 代换 k 可得:

$$|AN|=\frac{6k\sqrt{t(1+k^2)}}{3k^2+t}$$

由 $2|AM|=|AN|$ 则：

$$\frac{2}{3+tk^2}=\frac{k}{3k^2+t}$$
$$6k^2+2t=3k+tk^3$$
$$(k^3-2)t=3k(2k-1)$$

$k^3=2$ 时，等式不成立，故有:

$$t=\frac{3k(2k-1)}{k^3-2}$$

由 E 的焦点在 x 轴上，有：

$$\begin{aligned}t&>3\\\frac{3k(2k-1)}{k^3-2}&>3\\\frac{-k^3+2K^2-k+2}{K^3-2}&>0\\\frac{(k-2)(k^2+1)}{k^3-2}&<0\\\Leftrightarrow(k-2)(k^3-2)&<0\end{aligned}$$

又 $k>0$，故 k 的取值范围为 $(\sqrt[3]{2},2)$

1.2 21. 本题 12 分

1. 讨论函数 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性,并证明当 $x>0$ 时,$(x-2)e^x+x+2>0$;
2. 证明: 当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)=\frac{e^x-ax-a}{x^2}(x>0)$ 有最小值. 设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求函数 $h(a)$ 的值域.

1. 证明：

$$\begin{aligned}f'(x)&=[\frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2}+\frac{x-2}{x+2}]e^x\\&=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\geq0\end{aligned}$$

且仅当 $x=0$ 时,$f'(x)=0$
则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2),(-2,\infty)$ 单调递增
故有当 $x>0$ 时,$f(x)>f(0)=-1$
即:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+2}e^x&>-1\\(x-2)e^x+x+2&>0\end{aligned}$$

证毕
2. 解:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{(e^x-a)x^2-2x(e^x-ax-a)}{x^4}\\ &= \frac{(x-2)e^x+a(x+2)}{x^3}\end{aligned}$$

注意，分子与 1 中结论类似，分母 $x^3>0(x>0)$ 受此启发，变形得：

$$g'(x) = \frac{(x+2)[f(x)+a]}{x^3}$$

则 $g'(x)$ 与 $f(x)+a$ 同号

由 1 知 $f(x)+a$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

且 $f(0)+a=a-1<0, f(2)+a=a\geq 0$

则必有唯一点 $x_0\in(0,2]$ 使 $f(x)+a=0$

且当 $x<x_0$ 时，$g'(x)<0; x>x_0$ 时,$g'(x)>0$

且 x_0 满足：

$$\begin{aligned}f(x_0)+a&=0\\ \frac{(x_0-2)e_0^x}{x_0+2}+a&=0\\ (x_0-2)e_0^x&=-a(x_0+2)\\ e_0^x&=\frac{-a(x_0+2)}{x_0-2}\end{aligned}$$

则 $g(x)$ 在 x_0 处取得最小值 $h(a)$ 为:

$$\begin{aligned}h(a)=g(x_0)&=\frac{e_0^x-ax_0-a}{x_0^2}\\ &=\frac{-(x_0+2)-(x_0+1)(x_0-2)}{(x_0-2)x_0^2}a\\ &=\frac{-ax_0^2}{(x_0-2)x_0^2}\\ &=\frac{-a}{x_0-2}\end{aligned}$$

（思考：要求 $h(a)$ 的值域，需知其单调性，需求导数，而表达式中同时含有 a 以及与 a 相关的中间变量 x_0, 高中阶段无法求导，故需再次变形。观察 x_0 与 a 的关系式后易得）

$$h(a)=\frac{e_0^x}{x_0+2}$$

(理解：$h(a)$ 中并未闲事出现自变量 a，而 x_0 的值与 a 相关，即 $x_0=f_1(a)$, 相当于 x_0 作为中间变量，$f_2(x_0)=\frac{e_0^x}{x_0+2}$,$f_2(x_0)$ 的定义域为 $f_1(a)$ 的值域，

$f_2(x_0)$ 的值域与 $h(a)$ 的值域相同)

$$\begin{aligned} f_2'(x_0) &= \frac{e_0^x(x_0+2)-e_0^x}{(x_0+2)^2} \\ &= \frac{e_0^x(x_0+1)}{(x_0+2)^2>0} \end{aligned}$$

故 $f_2(x_0)$ 单调递增，而 $x_0 \in (0,2]$
$f_2(0)=\frac{1}{2}, f_2(2)=\frac{e^2}{4}$
故 $f_2(x_0)$ 的值域为 $(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}]$
也即 $h(a)$ 的值域为 $(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}]$