导函数为二次函数的分类讨论

王骝维

不惑面试

2021 年 7 月 1 日

$f(x) = x - a\ln x + \frac{1+a}{x}$

(1) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 在 $x \in [1, 3]$ 的最小值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若 $\exists x \in [1, e]$, 使得 $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围。

(1): 若 $a=1$, 求 $f(x)$ 在 $x\in[1,3]$ 的最小值;

$$
\begin{aligned}
a=1, f'(x) &= x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\\
&= \frac{x^2-x-2}{x^2}\\
&= \frac{(x+1)(x-2)}{x^2}
\end{aligned}
$$

故在 $x=2$ 处取得最小值为 $f(2)=2-\ln 2+1=3-\ln 2$
故 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)$ 最小值为 $f(2)=3-\ln 2$

(2): 求 $f(x)$ 的单调区间;

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= x - \frac{a}{x} - \frac{1+a}{x^2} \\
&= \frac{x^2 - ax - 1 - a}{x^2} \\
&= \frac{(x+1)(x-1-a)}{x^2}
\end{aligned}
$$

由原函数定义域为 $x \in (0, +\infty)$
$x > -1$ 则 $f'(x)$ 与 $x - a - 1$ 同号
$a \leqslant -1$ 时,$f'(x) > 0$ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
$a > -1$ 时,$f'(x) > 0$ $f(x)$ 在 $(0, 1+a)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

(3): 若 $\exists x \in [1, e]$, 使得 $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围。

1: $< a \leqslant -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,
则 $f(1) = a + 2 < 0 \Rightarrow a < -2$

2: $a > -1$ 时

i:$a \leqslant 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,
则 $f(1) = a - 2 < 0 \Rightarrow a < -2$ 无解

ii:$1 < a < 1 - e$, 函数 $f(x)$ 在 $x = a + 1$ 处取的最小值,
则 $f(1 + a) = 1 + a - a \ln a + 1 + 1 < 0$ 无解 $(x \in [1, e])$

iii:$1 - e \leqslant a$, 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,
则 $f(e) = e - a + \frac{1+a}{e} < 0 \Rightarrow a > \frac{e^2+1}{e-1}$

综上,$a \in (-\infty, -2) \cup (\frac{e^2+1}{e-1}, +\infty)$