设抛物线 $C: y^2=2px, A(a,0), B(ab,0)$, 经过 A 的直线交 C 于 M,N 两点, 直线 MB, NB 与 C 的另一交点分别为 P,Q, 求 PQ 与 x 轴的交点.

解: 设 $M(\frac{m^2}{2p}, m), N(\frac{n^2}{2p}, n)$

$k_{MN}=\frac{m-n}{\frac{m^2}{2p}-\frac{n^2}{2p}}=\frac{2p}{m+n}$

$l_{MN}: y=\frac{2p}{m+n}(x-\frac{m^2}{2p})+m=\frac{2p}{m+n}x+\frac{mn}{m+n}=\frac{2px+mn}{m+n}$

l 经过 $(a,0)$ 则 $mn=-2pa$

$K_{MD}=\frac{m}{\frac{m^2}{2p}-ab}$

则 $MD: y=\frac{1}{\frac{m}{2p}-\frac{ab}{m}}(x-ab)$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{\frac{m}{2p}-\frac{ab}{m}}(x-ab), \\ y^2=2px \end{cases}$$

消去 x 得:$(\frac{m}{2p}-\frac{ab}{m})y=\frac{y^2}{2p}-ab \Leftrightarrow y^2-(m-\frac{2abp}{m})y-2abp=0$

则方程的另一解为 $\frac{-2pab}{m}=\frac{mnb}{m}=nb$

故 $P(\frac{n^2b^2}{2p}, nb)$, 同理 $Q(\frac{m^2b^2}{2p}, mb)$

故 $k_{PQ}=\frac{2bp^2(n-m)}{b^2(n^2-m^2)}=\frac{2p}{b(m+n)}=\frac{-mn}{ab(m+n)}$

$$\begin{aligned} l_{PQ}: y &= \frac{2p}{b(m+n)}(x-\frac{n^2b^2}{2p})+nb \\ &= \frac{2p}{b(m+n)}x-\frac{n^2b}{m+n}+nb \\ &= \frac{2px-n^2b^2+n^2b^2+mnb^2}{b(m+n)} \\ &= \frac{2p}{b(m+n)}(x-ab^2) \\ &= \frac{-mn}{ab(m+n)}(x-ab^2) \end{aligned}$$

$y=0$ 时 $x=ab^2$, 故 PQ 经过 $(ab^2,0)$

若设 $MN: y=k(x-a)$, 则 m,n 满足 $\frac{y^2}{2p}-\frac{y}{k}-a=0$

则 $mn=-2pa, m+n=2pk$

此时 $l_{MN}: y=\frac{-2pa}{ab\cdot 2pk}(x-ab^2)=\frac{-1}{kb}(x-ab^2)$

故其方程与抛物线参数 p 无关