(1) 解:

由题意得:$f'(\frac{1}{2})=0$

而 $f'(x)=3x^2+b$

故 $f'(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}+b=0$

$\Rightarrow b=-\frac{3}{4}$

(2) 证明:(法一)

由题意,$\exists x_0\in[-1,1]$, 使 $f(x_0)=x_0^3-\frac{3}{4}x_0+c=0$

则 $c=-x_0^3+\frac{3}{4}x_0$

则 $f(x)=x^3-x_0^3-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}x_0$

$\quad =(x-x_0)(x^2+x_0x+x_0^2)-\dfrac{3}{4}(x-x_0)$

$\quad =(x-x_0)(x^2+x_0x+x_0^2-\dfrac{3}{4})$

则 $f(x)$ 的其他零点必为方程 $x^2+x_0x+x_0^2-\frac{3}{4}=0$ 的根

$$x=\frac{-x_0\pm\sqrt{x_0^2-4(x_0^2-\frac{3}{4})}}{2}=\frac{-x_0\pm\sqrt{3-3x_0^2}}{2}$$

不妨设 $x_0=\sin\theta(\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$,

则 $x=-\dfrac{1}{2}\sin\theta\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$\quad =-\sin(\theta\pm\dfrac{\pi}{3})$

故 $|x|\leqslant 1$

故 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1

法二:

$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-\frac{3}{4}=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

故 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2}],f(x)$ 单调递增, $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),f(x)$ 单调递减, $x\in[-\frac{1}{2},\infty),f(x)$ 单调递增

$f(-1)=c-\frac{1}{4},f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4},f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4},f(1)=c+\frac{1}{4}$

若有一个零点 $\in[-1,1]$, 则 $c-\frac{1}{4}\leqslant 0,c+\frac{1}{4}\geqslant 0$

故 $x\in(-\infty,-1),x<f(-1)=c-\frac{1}{4}<0$

$x\in(1,-\infty),x>f(1)=c+\frac{1}{4}>0$

故 $f(x)$ 所有零点均在 $[-1,1]$ 中, 即 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1