2003 级《概率论与数理统计》考试试题—A 题

一 填空题（每小题 5 分，共 30 分）：

1． 设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于$\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为________________

2． 设随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则系数a为 ____________________

3． 已知 X~ t(n)，则 X^2~ ____________

4． 设某种药品中有效成分的含量服从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，原工艺生产的产品中有效成分的平均含量为a,现在用新工艺试制了一批产品，测其有效成份的含量，以检验新工艺是否真的提高了有效成份的含量，要求当新工艺没有提高有效成分含量时，误认为新工艺提高了有效成分的含量的概率不超过 5%，那么在假设检验中，应取原假设H_0和显著性水平α分别为

____

5． 设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（一小时计）分别为：

6.0 5.7 5.8 6.5 7.0 6.3 5.6 6.1 5.0

设干燥时间总体服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，μ为未知参数，由以往经验知$\sigma=0.6$小时，求μ的置信度为 0.95 的置信区间为 ___________________

（$z_{0.05}=1.645$ $z_{0.025}=1.96$）

6． 设总体 N(μ,1)的两个独立样本分别为$X_1,X_2,\cdots,X_n$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，μ的一个无偏

估计是$T = a\sum_{i=1}^{n} X_i + b\sum_{j=1}^{m} Y_j$,则a和b应满足的条件是__________

二（15 分） 设随机变量 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)} & x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试求:（1） （X, Y）的联合概率密度函数 $f(x,y)$

（2） （X, Y）关于 X 、关于 Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x),\ f_Y(y)$

（3） 问 X、Y 是否独立?

三 （15 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为λ的泊松分布总体的一个样本，试求λ的最大似然估计量及矩估计量。

四 （15 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，并有相同的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，令

$\xi = \alpha X + \beta Y, \eta = \alpha X - \beta Y$，求

（1） ξ 与η的相关系数

（2） ξ 与η相互独立的条件

五（10 分）某码头只能容纳一只船，现预知某日将独立来到两只船，且在 24 小时内各时刻来到的可能性都相等，如果它们需要停靠的时间分别为 3 小时及 4 小时，试求一船要在江中等待的概率。

六（15 分）设齐次马氏链$\{X_n, n\ge 0\}$的状态空间为$I=\{1,2,3\}$，初始分布为$p_1(0)=\frac{1}{4}$，$p_2(0)=\frac{1}{2}$， $p_3(0)=\frac{1}{4}$，一步转移概率矩阵为

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & \\ 3/9 & 1/9 & 5\\ 1/6 & 4/6 & 1\end{pmatrix}$$

计算: （1） $p_{12}(2)=P\{X_2=2 \mid X_0=1\}$

(2) $p_2(2)=P\{X_2=2\}$

(3) 试讨论它的遍历