10--11 学年第 1 学期《概率论与数理统计》期末考试答案（A）

一、填空：

1. $\dfrac{2}{3}$
2. $a=2/9, b=1/9$
3. $\dfrac{1}{4}$
4. F(1,1)
5. $\theta=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

二、单项选择：

1. C
2. B
3. A
4. C
5. B

三、设 $A_i=$｛所取的 3 个部件中含有 i 个优质品｝，$i=0,1,2,3$

$B=$｛仪器不合格｝

（1）由已知条件可得：

$P(B|A_0)=1-0.2=0.8$

$P(B|A_1)=1-0.5=0.5$

$P(B|A_2)=1-0.9=0.1$

$P(B|A_3)=1-1=0$ （4 分）

每个部件为优质品的概率均为 0.8，且互不影响，即相互独立，因此事件 A_i 发生

的概率 $P(A_i)$ 为

$P(A_i)=C_3^i 0.8^i (1-0.8)^{3-i}, i=0,1,2,3$（2 分）

由全概率公式得

$P(B)=\sum_{i=0}^{3} P(A_i)P(B|A_i)=0.0928$（2 分）

（2）由贝叶斯公式：

$$P(A_2 \mid B)=\frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.384\times 0.1}{0.0928}=0.414$$ （4 分）

四、 (1) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2y}^{1}(2-x-y)dx=\frac{7}{24}$.（5 分）

(2) 方法一： 先求 Z 的分布函数:

$$F_Z(z)=P(X+Y\le Z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

当 z<0 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\int_0^{z}dy\int_0^{z-y}(2-x-y)dx$

$$=z^2-\frac{1}{3}z^3$$；（1 分）

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=1-\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=1-\int_{z-1}^{1}dy\int_{z-y}^{1}(2-x-y)dx$

$$=1-\frac{1}{3}(2-z)^3$$；（1 分）

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$.（1 分）

故 $Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1,\\ (2-z)^2, & 1\le z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ （3 分）

方法二： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$，

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2-x-(z-x), & 0<x<1, 0<z-x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2-z, & 0<x<1, 0<z<1+x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ （3 分）

当 $z\le 0$ 或 $z\ge 2$ 时，$f_Z(z)=0$；（1 分）

当 $0<z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^{z}(2-z)dx=z(2-z)$；（1 分）

当 $1\le z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1}(2-z)dx=(2-z)^2$；（1 分）

故 $Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1,\\ (z-2)^2, & 1\le z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

五、（1）因为 $X\sim b(n,p)$，所以 $E(X)=np$， $D(X)=np(1-p)$ （2 分）

所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{cov}(X,n-X)=\mathrm{cov}(X,n)-\mathrm{cov}(X,X)\\ &=[E(nX)-nE(X)]-D(X) \qquad （3 分）\\ &=0-np(1-p)=-np(1-p)\end{aligned}$$

（2）当 $|x|<1$ 时，

$f_X(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}[1+xy(x^2-y^2)]dy=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{2}$ （1 分）

同理：当 $|y|<1$ 时，

$f_Y(y)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}[1+xy(x^2-y^2)]dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$ （1 分）

显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不相互独立。（1 分）

又因为 $E(X)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x\frac{1}{4}[1+xy(x^2-y^2)dxdy=0$

同理 $E(Y)=0$ （1 分）

而 $E(XY)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xy\frac{1}{4}[1+xy(x^2-y^2)dxdy$

$==\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[xy+x^2y^2(x^2-y^2)dxdy=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^4y^2-x^2y^4)dxdy=0$ （1 分）

由 $E(XY)-E(X)E(Y)=0$ 可知 $\rho_{XY}=0$，所以 X 与 Y 不相关。

六、(1) 因为 $Y\sim N(\mu,1)$，所以 $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}},-\infty<y<\infty$ （1 分）

由 $X=e^Y$，

$$b=E(X)=E(e^Y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^ye^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{u+\frac{1}{2}}e^{-\frac{[y-(\mu+1)]^2}{2}}dy$$

所以 $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{u+\frac{1}{2}}e^{-\frac{[y-(\mu+1)]^2}{2}}d[y-(u+1)]$ （3 分）

$$=e^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=e^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

（2）此为求单个正态总体 σ^2 已知的条件下 μ 在 $\alpha=0.05$ 下的置信区间

由 $P\{\left|\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{0.025}\}=0.95$，得置信区间为 $\{\overline{y}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\}$（2 分）

而 $\overline{y}=\frac{1}{4}(\ln 0.5+\ln 0.8+\ln 1.25+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 1=0$ 和 $z_{0.025}=1.96$（1 分）

可得置信区间为 $(-0.98,0.98)$（1 分）

（3）因为 $x=e^y$ 为单调增函数，而 $b=e^{\mu+\frac{1}{2}}$（1 分）

由 $-0.98<\mu<0.98$，得 $-0.98+\frac{1}{2}<\mu+\frac{1}{2}<0.98+\frac{1}{2}$，即 $-0.48<\mu+\frac{1}{2}<1.48$（2 分）

所以 b 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(e^{-0.48},e^{1.48})$（1 分）

七、解：（1）假设 $H_0:\mu\le\mu_0=225;H_1:\mu>\mu_0=225$. （1 分）

当 H_0 为真，检验统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ （2 分）

而 $\alpha=0.05,\ n=16$，所以 $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(15)=1.7531$ ，

拒绝域 $\Re=(1.7531,+\infty)$ （2 分）

$\overline{x}=241.5, s^2=98.73^2$

$T_0=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{241.5-225}{98.73/\sqrt{16}}=0.6685\notin\Re$，所以接受 H_0.

即可以认为元件的平均寿命小于 225 小时　　　　（4 分）

八、解：$\mu_X(t)=E\left[X(t)\right]=tE(A)+E(B)$　　（1 分）

$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

$=t_1t_2E(A^2)+(t_1+t_2)E(AB)+E(B^2)\quad t_1,t_2\in T$　　（2 分）

当$A\sim N\left(0,1\right),B\sim U\left(0,2\right)$时，

$E(A)=0,E(A^2)=1,E(B)=1,E(B^2)=\dfrac{4}{3}$　　（2 分）

又因为A,B独立，故$E(AB)=E(A)E(B)=0$　　（2 分）

$\Rightarrow\mu_X(t)=1,R_X(t_1,t_2)=t_1t_2+\dfrac{4}{3}\quad t_1,t_2\in T$　　（3 分）