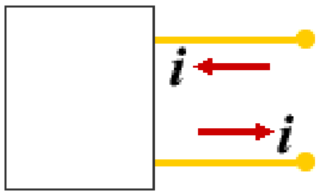
第二章　电阻电路的等效变换

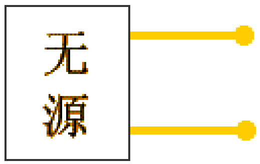
§2—1　电路的等效变换

一、二端电路（网络）

任何一个复杂的电路, 向外引出两个端钮，且从一个端子流入的电流等于从另一端子流出的电流，则称这一电路为二端电路(或一端口电路)。若二端电路仅由无源元件构成，称无源二端电路。



二端电路

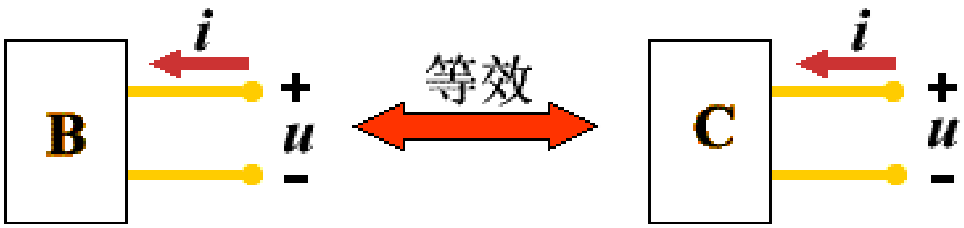


无源二端电路

§2—1　电路的等效变换

二、二端电路等效的概念

结构和参数完全不相同的两个二端电路**B**与**C**，当它们的端口具有相同的电压、电流关系**(VCR),**则称**B**与**C**是等效的电路。



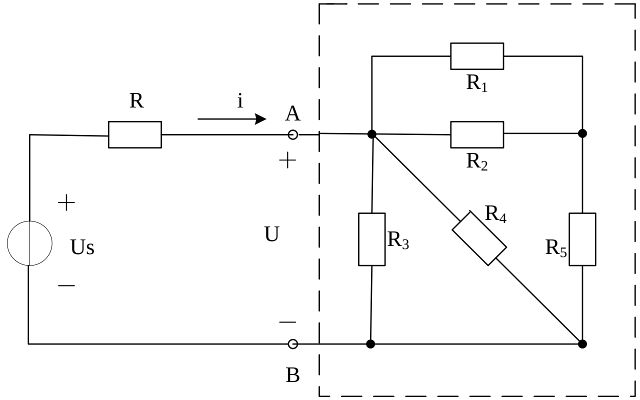
§2—1　电路的等效变换

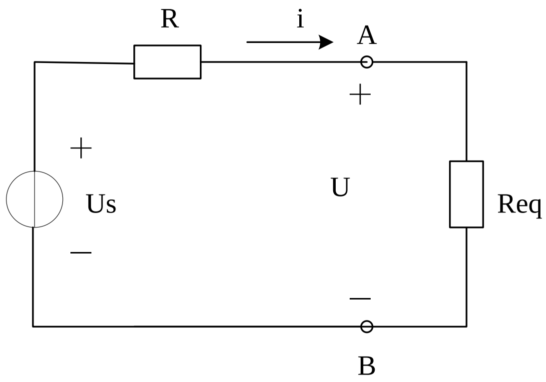
结论：

1）电路等效变换的条件：两电路具有相同的**VCR**；

2）电路等效变换的对象：未变化的外电路**A**中的电压、电流和功率；

3）电路等效变换的目的：化简电路，方便计算。





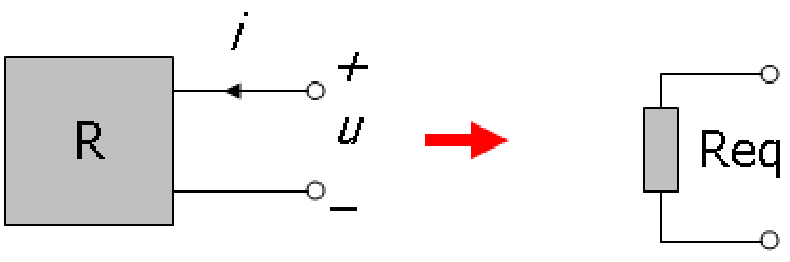
§2—1　电路的等效变换

三、二端网络的几种等效情况

1、若二端网络内只有电阻组成，则在端口电压、电流为关联参考方向下，二者比值一定是一个正常数。亦即二端电阻网络的**VCR**为

$$u = R_{eq} i$$

可见，二端电阻网络的等效电路是一个阻值等于$\mathbf{R_{eq}}$的电阻。称$\mathbf{R_{eq}}$为二端网络的等效电阻。

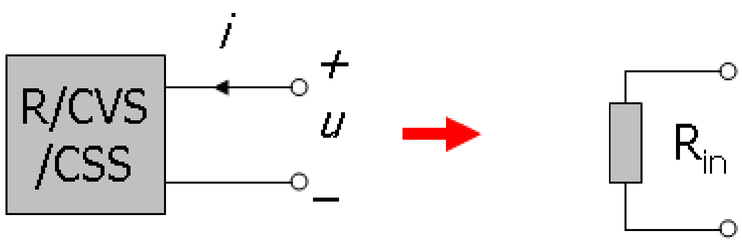


§2—1　电路的等效变换

2、若二端网络内除电阻外还有受控源，则在端口电压、电流为关联参考方向下，二者比值也是一个常数。亦即二端网络的**VCR**为

$$u = R_{in} i$$

可见，含受控源二端网络的等效电路是一个阻值等于$\mathbf{R_{in}}$的电阻。称$\mathbf{R_{in}}$为该二端网络的输入电阻或输出电阻。



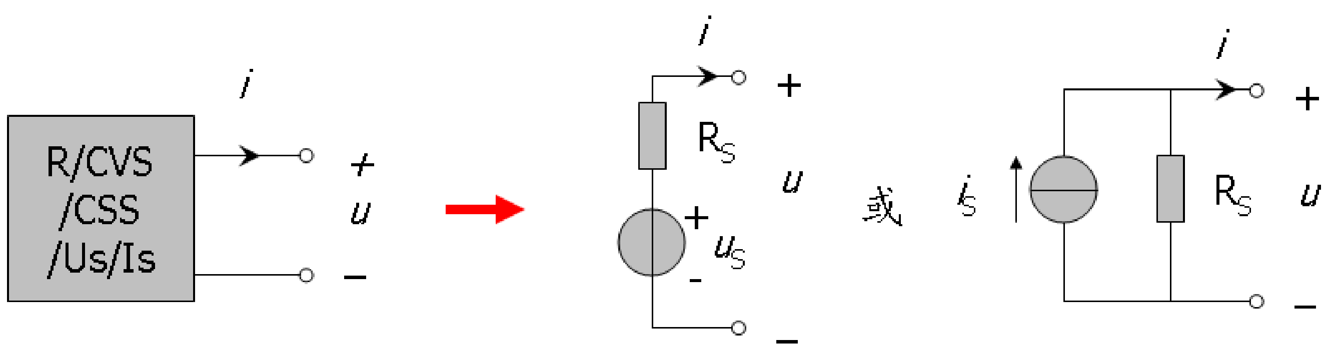
***R_{eq}与R_{in}的不同*：** 输入电阻可正、可负、可零。而等效电阻总是大于零。等效电阻和输入电阻可以通称二端网络的端口电阻。

§2—1　电路的等效变换

3、若二端网络内含独立源，在u、i非关联参考方向下，其VCR为，

$$u = u_S - R_S i \qquad \text{或} \qquad i = i_S - u/R_S$$

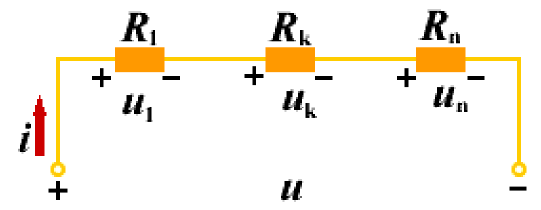
这时二端网络的等效电路为一个电压源与电阻的串联、或一个电流源与电阻的并联。



§2—2　电阻的串联和并联

一、电阻串联

1、电路特点



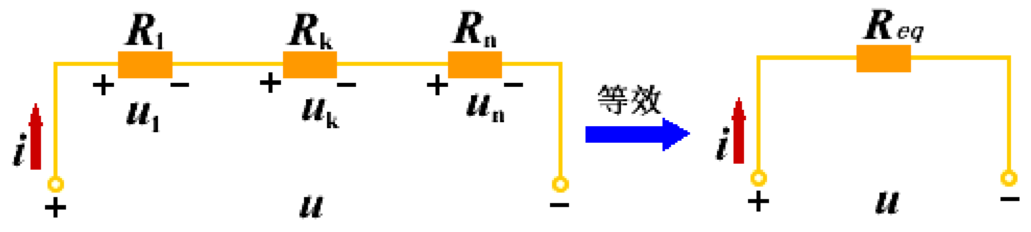
(a) 各电阻顺序连接，根据**KCL**知，各电阻中流过的电流相同；

(b) 根据**KVL**，电路的总电压等于各串联电阻的电压之和，即：

$$u = u_1 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$

§2—2　电阻的串联和并联

2、等效电阻



(a)　　(b)

把欧姆定律代入电压表示式中得：

$$u = R_1 i + \cdots + R_K i + \cdots + R_n i = (R_1 + \cdots + R_n) i = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k > R_k$$

§2—2　电阻的串联和并联

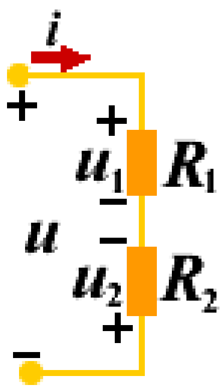
3、串联电阻的分压

若已知串联电阻两端的总电压，求各分电阻上的电压称分压。

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u < u$$

$$u_1 : u_2 : \cdots : u_k : \cdots : u_n = R_1 : R_2 : \cdots : R_k : \cdots : R_n$$

两个串联电阻上的电压：



$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \qquad u_2 = \frac{-R_2}{R_1 + R_2} u$$

（注意U_2的方向）

§2—2　电阻的串联和并联

4、功率

各电阻的功率为：

$$P_1 = R_1 i^2, P_2 = R_2 i^2, \cdots, P_k = R_k i^2, \cdots P_n = R_n i^2$$

所以：

$$P_1 : P_2 : \ \cdots : P_k : \cdots : \ P_n = R_1 : R_2 : \cdots : R_k : \cdots : R_n$$

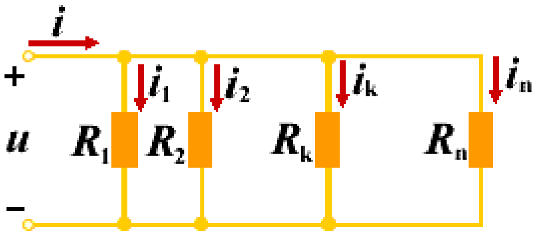
总功率：

$$\begin{aligned} P &= R_{eq} i^2 = (R_1 + R_2 + \cdots + R_k + \cdots + R_n) i^2 \\ &= R_1 i^2 + R_2 i^2 + \cdots + R_k i^2 + \cdots + R_n i^2 = P_1 + P_2 + \cdots + P_n \end{aligned}$$

§2—2 电阻的串联和并联

二、 电阻并联 (Parallel Connection)

1、电路特点



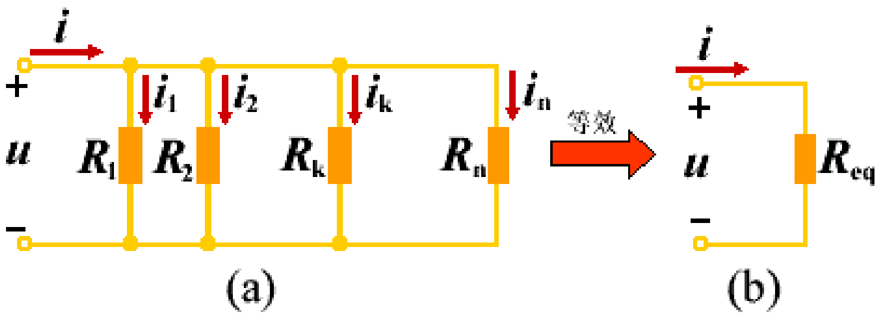
(a) 各电阻两端分别接在一起，根据**KVL**知，各电阻两端为同一电压；

(b) 根据**KCL**，电路的总电流等于流过各并联电阻的电流之和，即：

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

§2—2　电阻的串联和并联

2、等效电阻



$$G_{eq}=G_1+G_2+\cdots+G_n=\sum_{k=1}^{n}G_k>G_k$$

$$\frac{1}{R_{eq}}=G_{eq}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n}\quad \text{即}\quad R_{eq}<R_k$$

最常用的两个电阻并联时求等效电阻的公式：

$$R_{eq}=\frac{1/R_1\cdot 1/R_2}{1/R_1+1/R_2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

§2—2　电阻的串联和并联

3、并联电阻的电流分配

若已知并联电阻电路的总电流，求各分电阻上的电流称分流。

$$\frac{i_k}{i}=\frac{u/R_k}{u/R_{eq}}=\frac{G_k}{G_{eq}}$$

即：

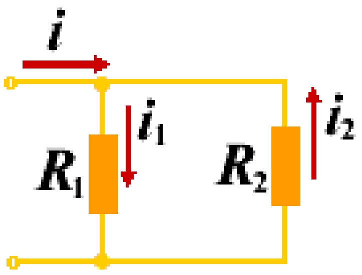
$$i_k=\frac{G_k}{G_{eq}}i$$

满足：

$$i_1:i_2:\cdots:i_k:\cdots:i_n=G_1:G_2:\cdots:G_k:\cdots:G_n$$

§2—2　电阻的串联和并联

对于两电阻并联，有：



$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_2 i}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{-1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{-R_1 i}{R_1 + R_2} = -(i - i_1)$$

§2—2　电阻的串联和并联

4、功率

各电阻的功率为：

$$P_1 = G_1 u^2, P_2 = G_2 u^2, \cdots, P_k = G_k u^2, \cdots, P_n = G_n u^2$$

所以：

$$P_1 : P_2 : \cdots : P_k : \cdots : P_n = G_1 : G_2 : \cdots : G_k : \cdots : G_n$$

总功率：

$$P = G_{eq} u^2 = (G_1 + G_2 + \cdots + G_k + \cdots + G_n) u^2$$
$$= G_1 u^2 + G_2 u^2 + \cdots + G_k u^2 + \cdots + G_n u^2 = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

§2—2　电阻的串联和并联

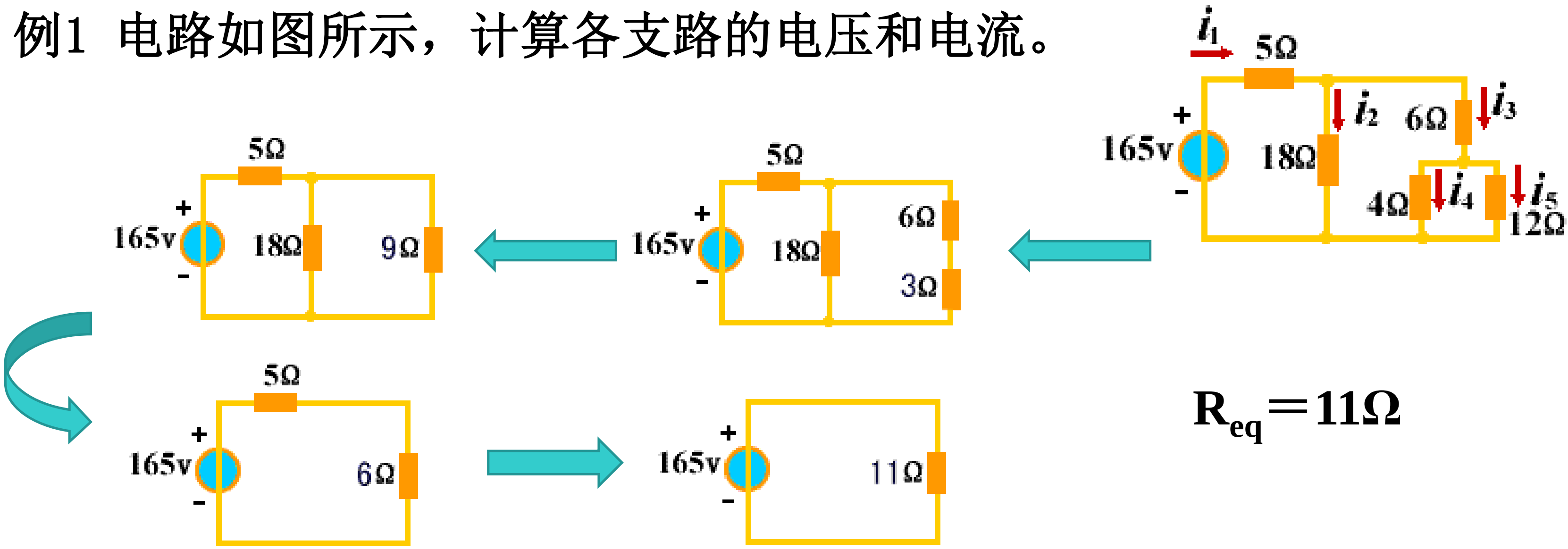
三、电阻的串并联

判别电路的串并联关系一般应掌握下述4点：

（1）看电路的结构特点。若两电阻是首尾相联就是串联，是首首尾尾相联就是并联。
（2）看电压电流关系。若流经两电阻的电流是同一个电流，那就是串联；若两电组上承受的是同一个电压，那就是并联。
（3）对电路作变形等效。如左边的支路可以扭到右边，上面的支路可以翻到下面，弯曲的支路可以拉直等；对电路中的短线路可以任意压缩与伸长；对多点接地可以用短路线相连。一般，如果真正是电阻串联电路的问题，都可以判别出来。
（4）找出等电位点。对于具有对称特点的电路，若能判断某两点是等电位点，则根据电路等效的概念，一是可以用短接线把等电位点联起来；二是把联接等电位点的支路断开（因支路中无电流），从而得到电阻的串并联关系。

§2—2　电阻的串联和并联

例1　电路如图所示，计算各支路的电压和电流。



$R_{eq}=11\Omega$

$$i_1=165/11=15A \qquad u_2=6i_1=6\times15=90V$$

$$i_2=90/18=5A \qquad u_3=6i_3=6\times10=60V$$

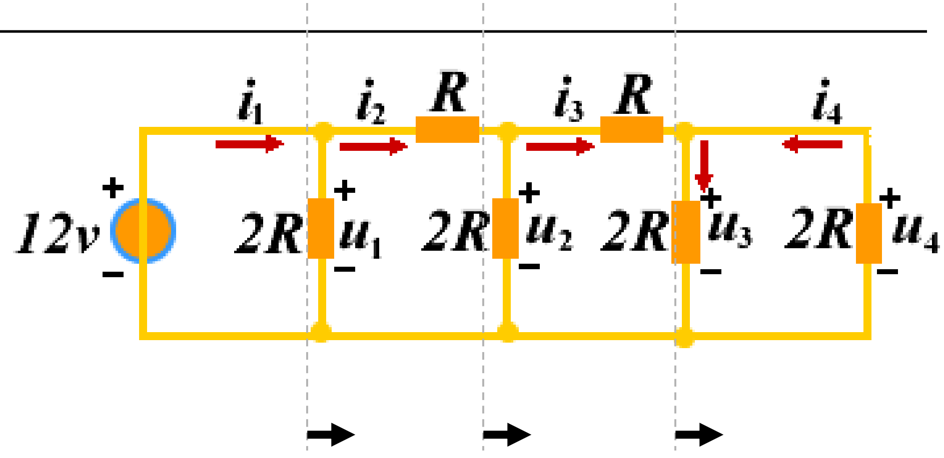
$$i_3=15-5=10A \qquad u_4=3i_3=30V$$

$$i_4=30/4=7.5A \qquad i_5=10-7.5=2.5A$$

§2—2　电阻的串联和并联

例2、求图示电路的I_1, I_4, U_4

电路特点：
从3条虚线向右看去得电阻均为R



① 用分流方法做

$$i_4 = -\frac{1}{2}i_3 = -\frac{1}{4}i_2 = -\frac{1}{8}i_1 = -\frac{1}{8}\frac{12}{R} = -\frac{3}{2R}$$

$$u_4 = -i_4 \times 2R = 3V$$

$$i_1 = \frac{12}{R}$$

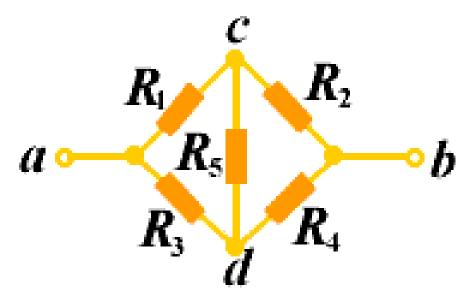
②用分压方法做

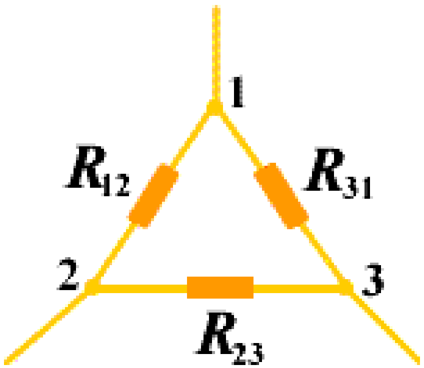
$$u_4 = \frac{u_2}{2} = \frac{1}{4}u_1 = 3V$$

$$i_4 = -\frac{3}{2R}$$

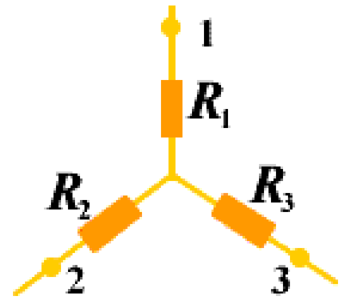
§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

一、电阻的△形与Y形连接

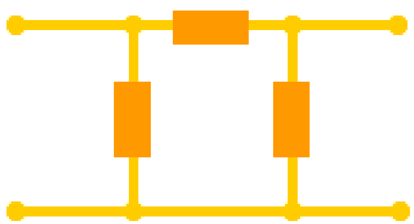




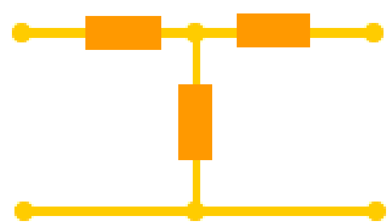
△形网络



Y形网络



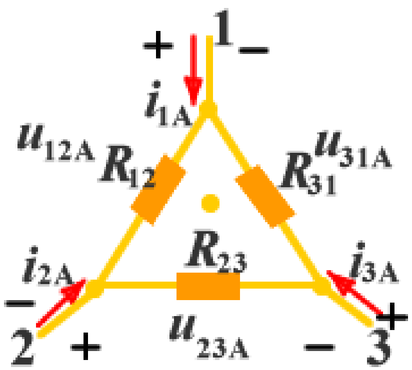
π形电路

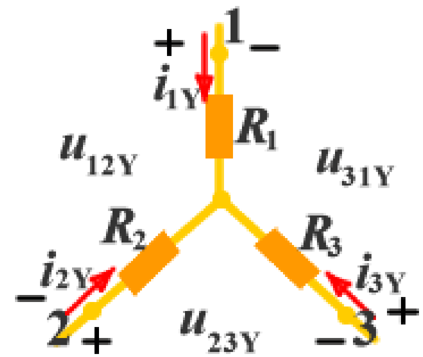


T形电路

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

二、 △—Y 电路的等效变换





必须满足如下端口条件：

$$i_{1\Delta}=i_{1Y} \qquad i_{2\Delta}=i_{2Y} \qquad i_{3\Delta}=i_{3Y}$$

$$u_{12\Delta}=u_{12Y} \qquad u_{23\Delta}=u_{23Y} \qquad u_{31\Delta}=u_{31Y}$$

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

Y→△电路的变换条件：

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

或

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

△→Y电路的变换条件：

$$G_1 = G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12} G_{31}}{G_{23}}$$

$$G_2 = G_{23} + G_{12} + \frac{G_{23} G_{12}}{G_{31}}$$

$$G_3 = G_{31} + G_{23} + \frac{G_{31} G_{23}}{G_{12}}$$

或

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

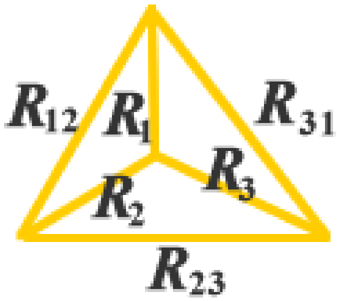
$$R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

简记方法：

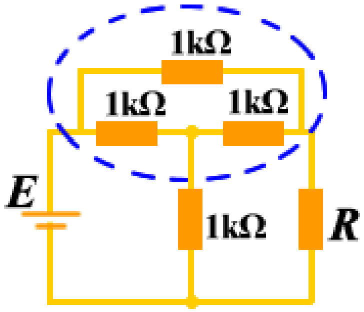
$$R_Y = \frac{\triangle\text{相邻电阻乘积}}{\sum R_\triangle} \qquad G_\triangle = \frac{\text{Y相邻电导乘积}}{\sum G_Y}$$

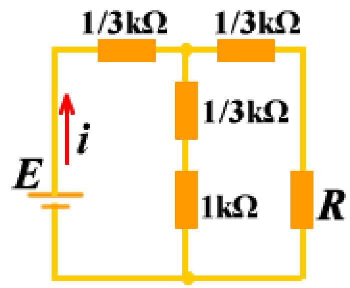
$R_\triangle = 3R_Y$



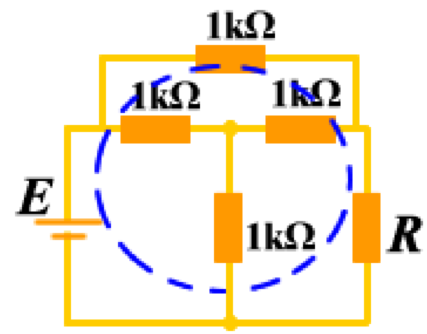
§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

例1、求图示电路中电压源中的电流，其中$E=13V$，$R=2k\Omega$。





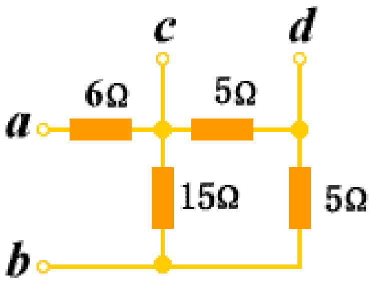
$$R_{eq}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}}{\frac{4}{3}+\frac{7}{3}}=\frac{13}{11}k\Omega$$



$$i=\frac{13}{13/11}=11mA$$

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

例2、求图示电路的等效电阻: Rab , Rcd

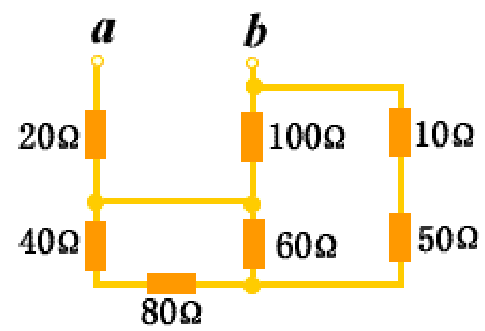


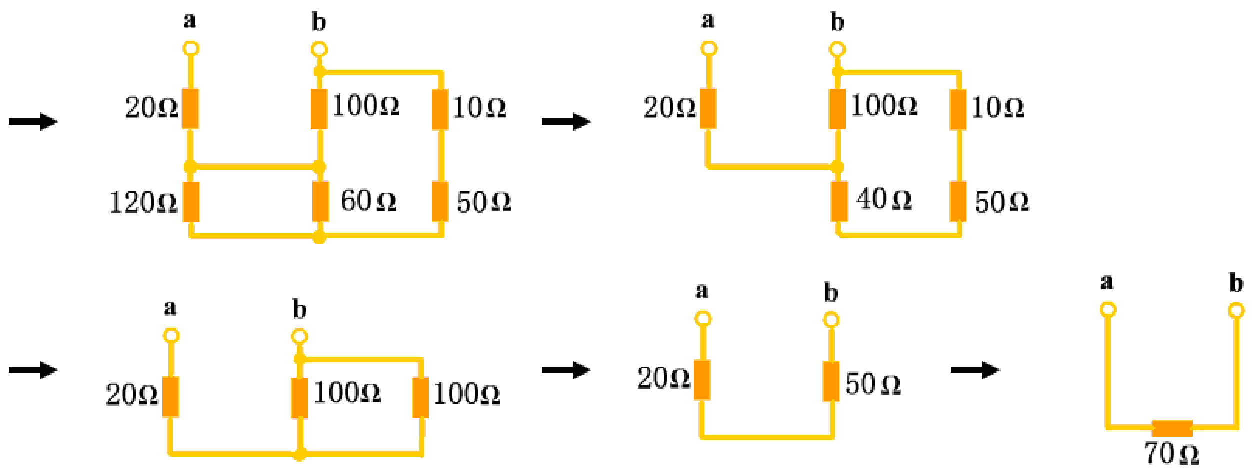
$$R_{ab} = (5+5)//15+6 = 12\Omega$$

$$R_{cd} = (15+5)//5 = 4\Omega$$

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

例3、求图示电路的等效电阻: Rab 。

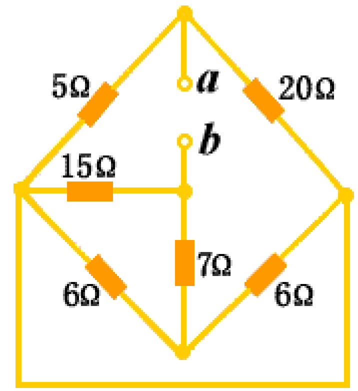


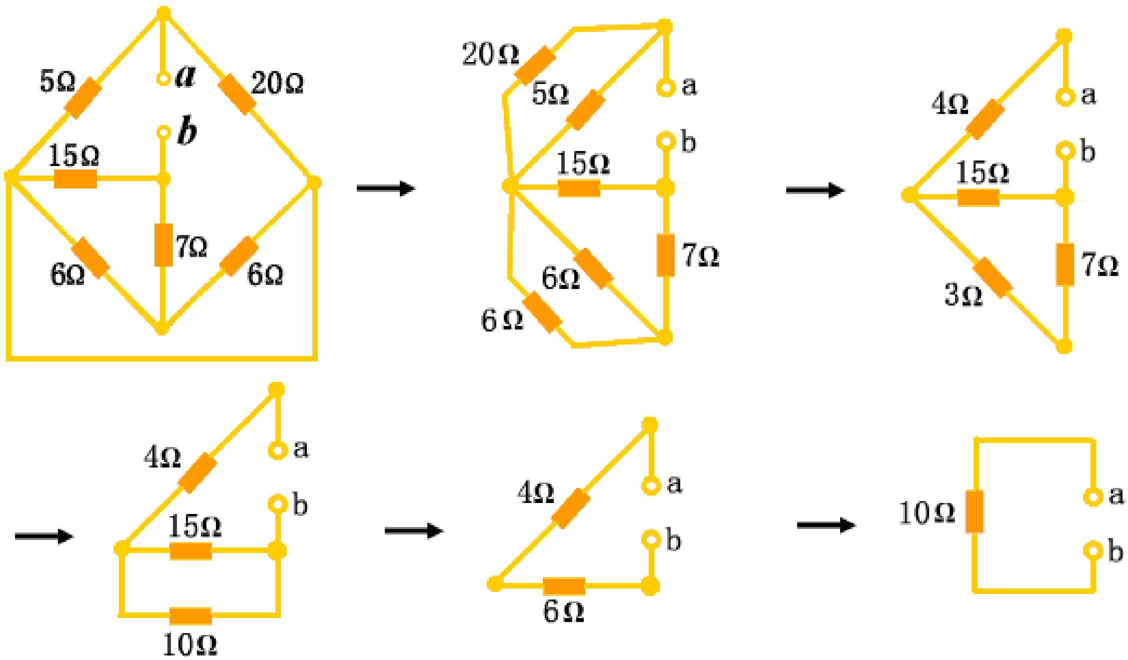


$$R_{ab} = 70\Omega$$

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

例4、求图示电路的等效电阻: Rab 。

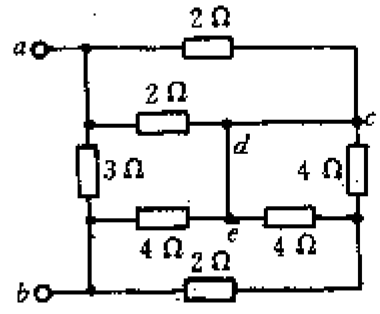


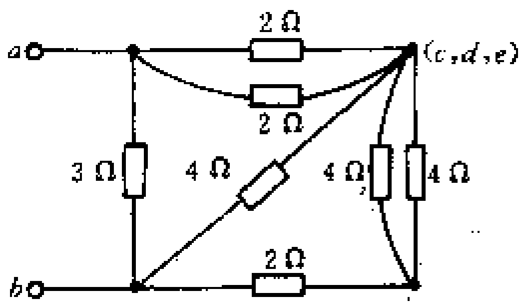


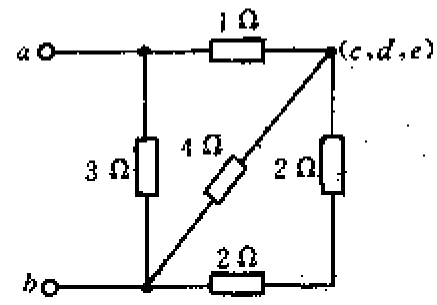
$$R_{ab} = 10\Omega$$

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

例5、求下图所示电路*ab*端的等效电阻。



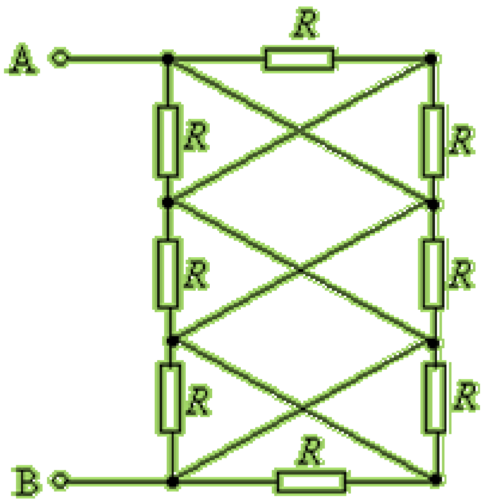




$$R_{eq} = R_{ab} = [(2+2)//4+1]//3 = 1.5\Omega$$

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

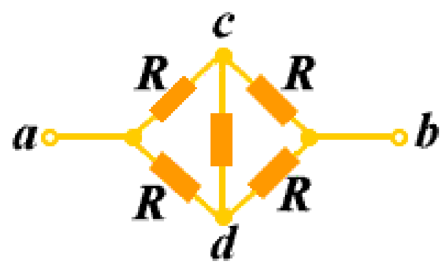
例6、图示电阻连线网络，试求AB间等效电阻R_{AB}。

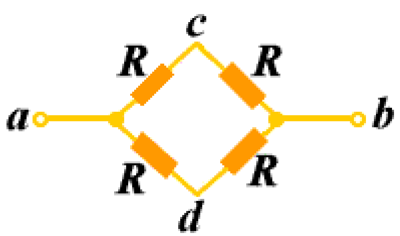


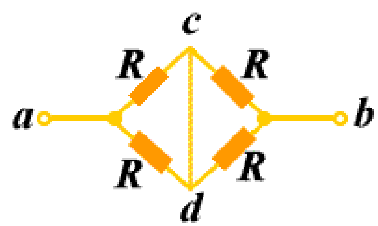
$$R_{AB} = \frac{1}{8}R$$

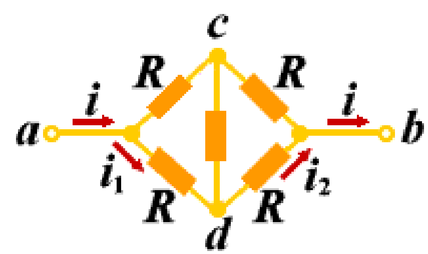
§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

例7、求图示电路的等效电阻: **Rab** 。









$R_{ab}=R$

$R_{ab}=R$

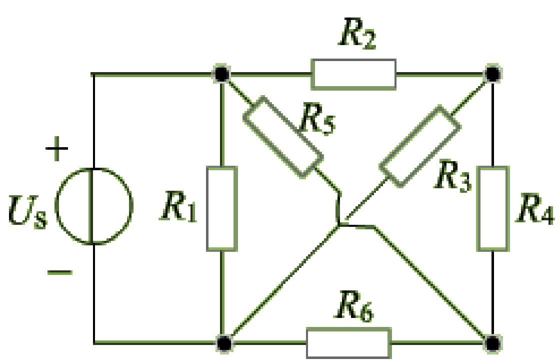
$$i_1=\frac{1}{2}i=i_2$$

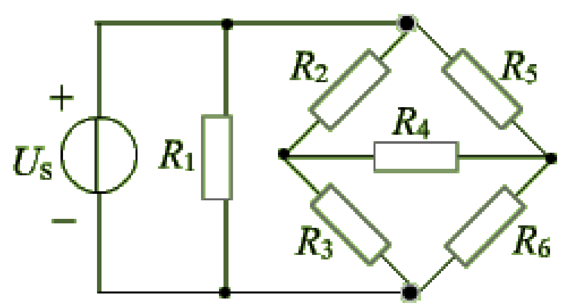
$$u_{ab}=i_1R+i_2R=(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i)R=iR$$

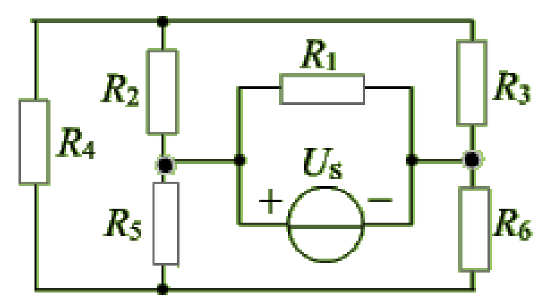
$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i}=R$$

§2—3 电阻的星形联接与三角形联接的等效变换 (△—Y 变换)

注意：在电路学习中，有时同一电路有几种不同画法，只要抓住其各支路与相关联的节点之间的联系，就不难找到各元件在不同电路中的对应位置，如下三个电路图，看似有区别，实际上其联接关系都是相同的。



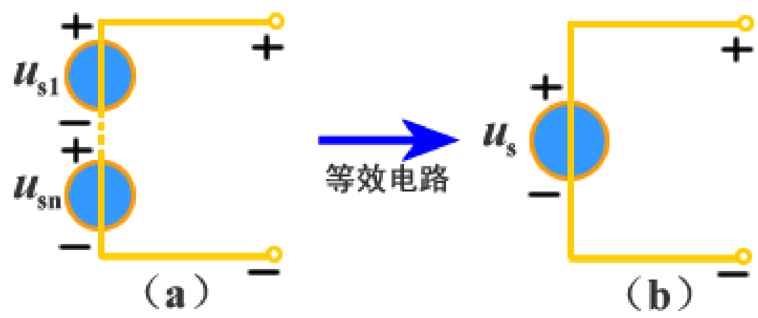




§2—4 电压源、电流源的串联和并联

一、理想电压源的串联和并联

1、串联

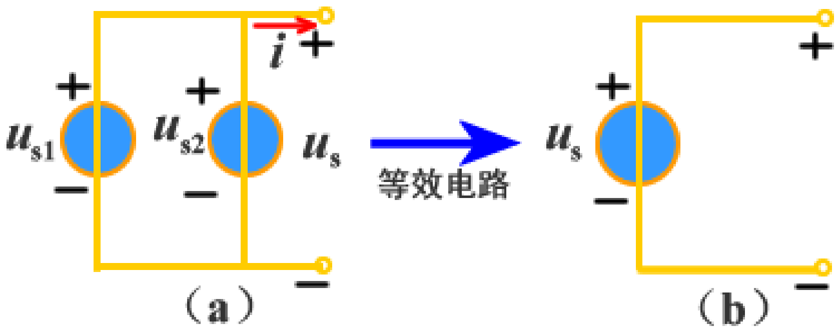


$$u_s = u_{s1} + u_{s2} + \cdots + u_{sn} = \sum_{k=1}^{n} u_{sk}$$

注意：<u>式中u_{sk}的参考方向与u_s的参考方向一致时，u_{sk}在式中取“＋”号，不一致时取“－”号。</u>

§2—4 电压源、电流源的串联和并联

2、并联



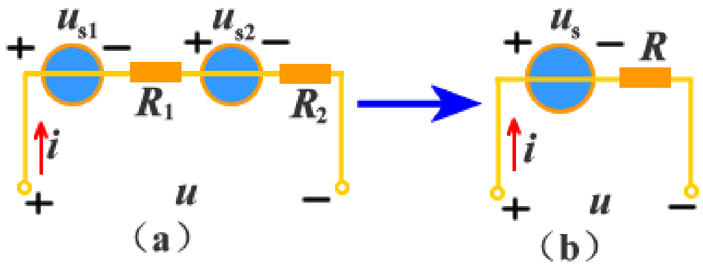
$$u_s = u_{s1} = u_{s2}$$

<u>只有电压相等且极性一致的电压源才能并联，此时并联电压源的对外特性与单个电压源一样</u>

§2—4 电压源、电流源的串联和并联

二、电压源与支路的串、并联等效

1、串联

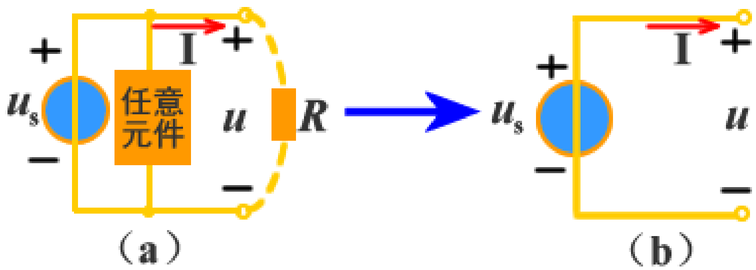


$$u = u_{s1} + R_1 i + u_{s2} + R_2 i = (u_{S1} + u_{S2}) + (R_1 + R_2)i = u_S + Ri$$

$$u_s = (u_{S1} + u_{S2}) \qquad R = (R_1 + R_2)$$

§2—4 电压源、电流源的串联和并联

2、并联

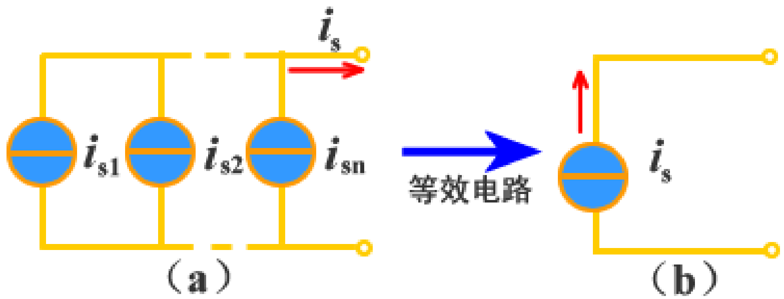


<u>电压源和任意元件并联就等效为电压源。即与电压源并联的器件在涉及电压的电路分析中不予考虑。</u>

§2—4 电压源、电流源的串联和并联

三、理想电流源的串联和并联

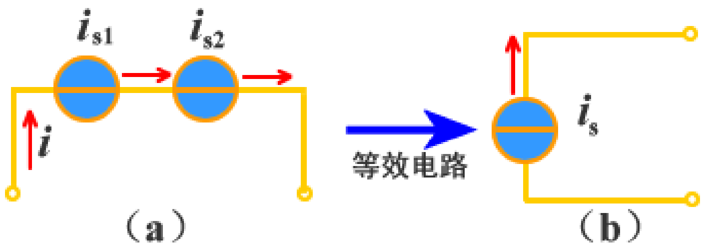
1、并联



$$i_s = i_{s1} + i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum_{k=1}^{n} i_{sk}$$

§2—4 电压源、电流源的串联和并联

2、串联



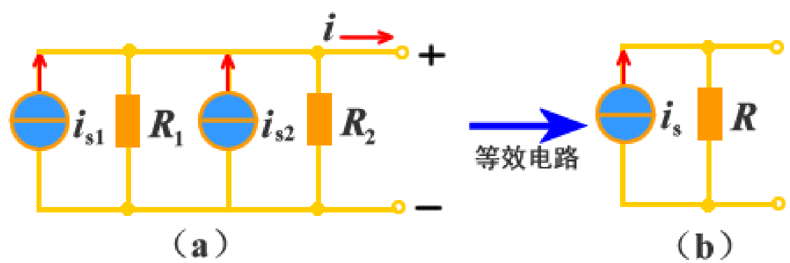
$$i_s = i_{s1} = i_{s2}$$

<u>只有电流相等且输出电流方向一致的电流源才能串联，此时串联电流源的对外特性与单个电流源一样</u>

§2—4 电压源、电流源的串联和并联

四、电流源与支路的串、并联等效

1、并联

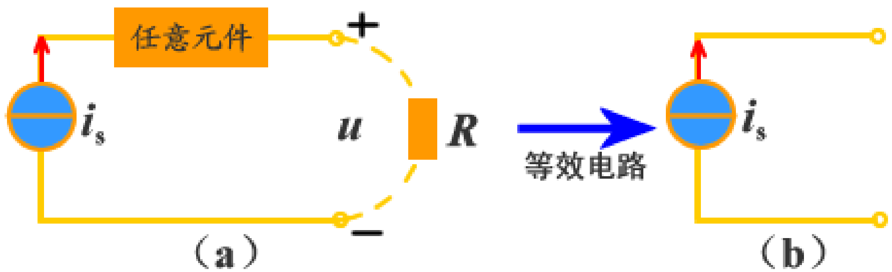


$$i = i_{s1} + u/R_1 + i_{s2} + u/R_2 = i_{s1} + i_{s2} + (1/R_1 + 1/R_2)u = i_s + u/R$$

$$i_s = (i_{s1} + i_{s2}) \qquad \frac{1}{R} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

§2—4 电压源、电流源的串联和并联

2、串联

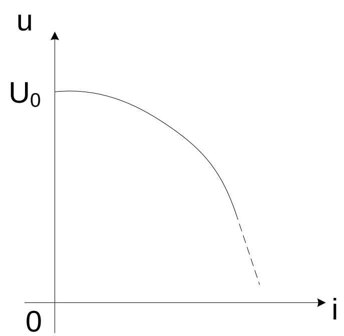


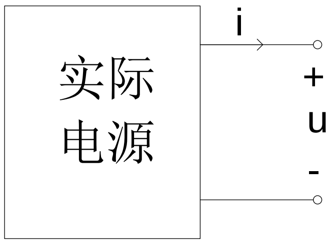
$$u = u_S \qquad I = u/R$$

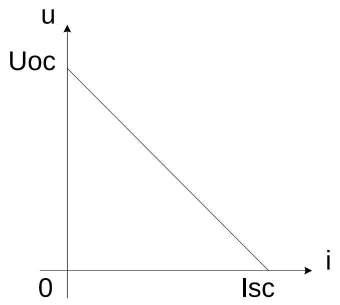
电流源和任意元件串联就等效为电流源。即与电流源串联的器件在涉及电流的电路分析中不予考虑。

§2－5 实际电源的两种模型及其等效变换

一、实际电源的伏安特性



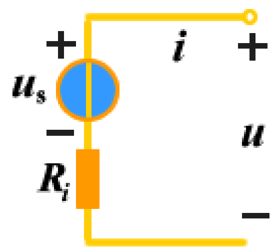




Isc——短路电流
Uoc——开路电压

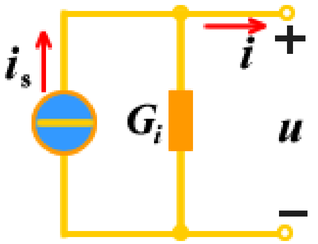
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

二、电源的两种模型



实际电压源

$$u = u_S - R_i i$$

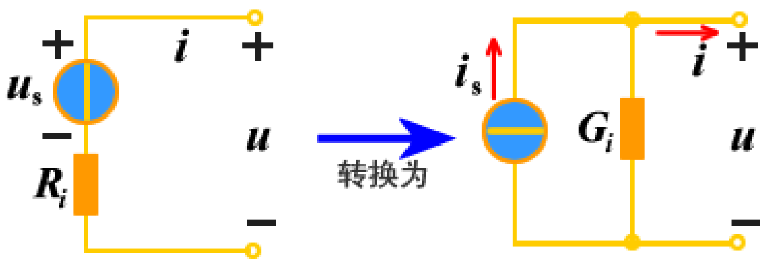


实际电流源

$$i = i_S - G_i u$$

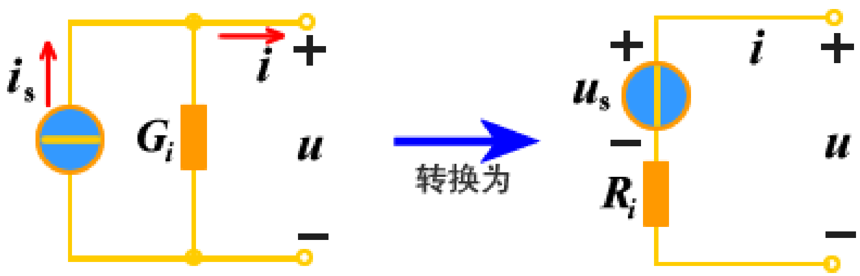
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

三、实际电压源与实际电流源的等效变换



$$i_s = u_s / R_i$$

$$G_i = 1 / R_i$$



$$u_s = i_s / G_i$$

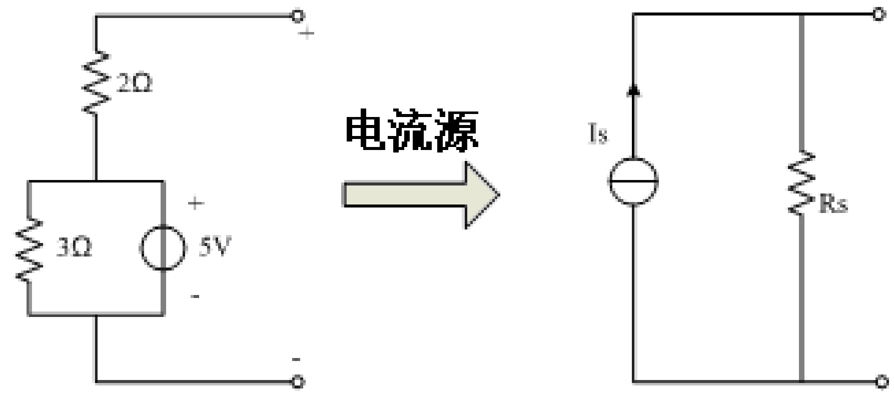
$$R_i = 1 / G_i$$

<u>即i_s的参考方向由u_s的负极指向正极</u>。

§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

四、示例练习

1、

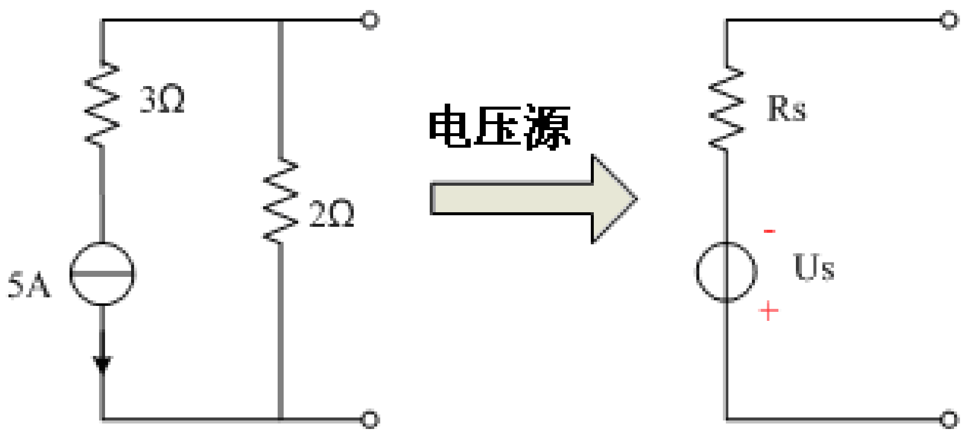


$$I_S = 2.5A$$

$$R_S = 2\Omega$$

§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

2、

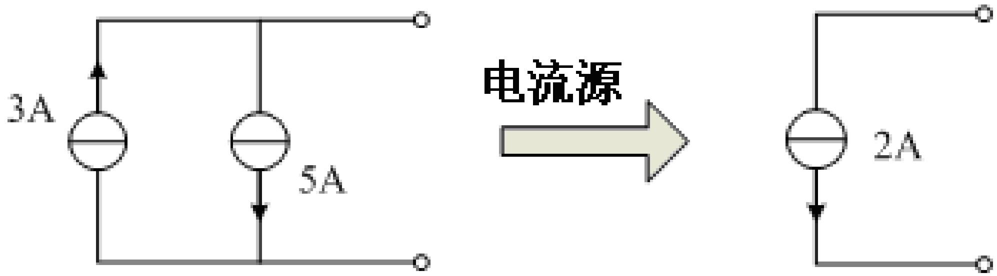


$$U_S = 10V$$

$$R_S = 2\Omega$$

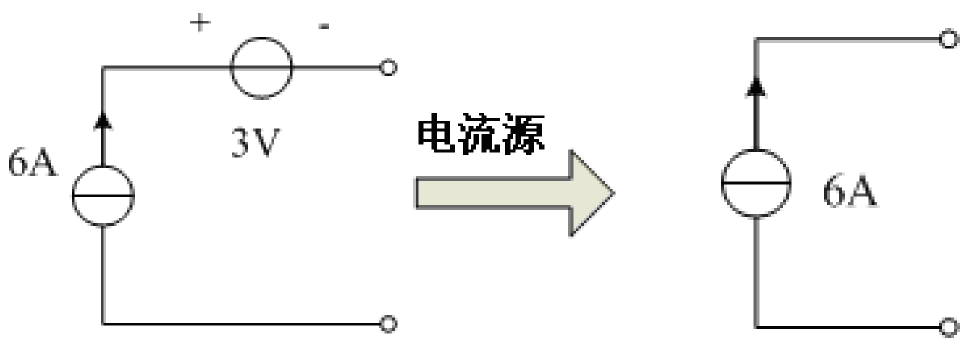
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

3、



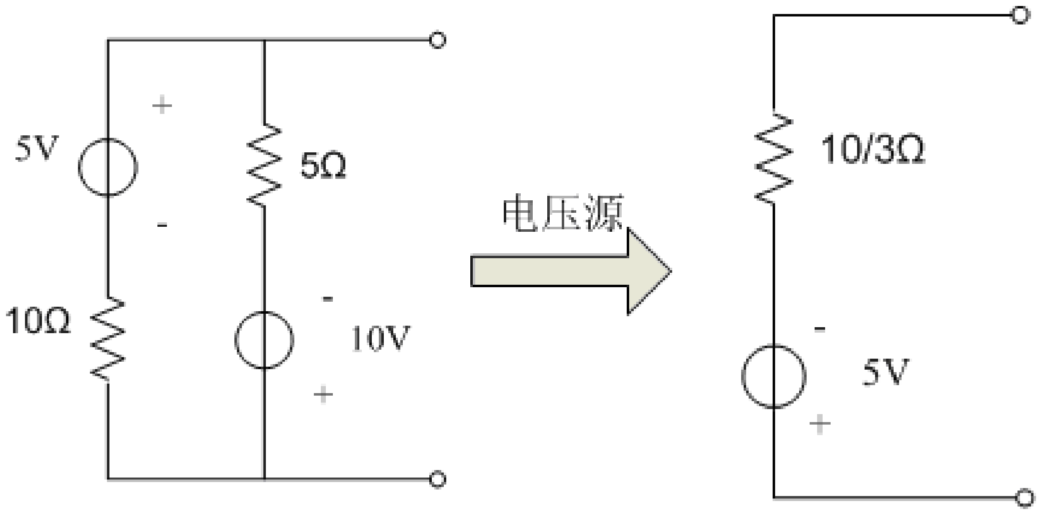
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

4、



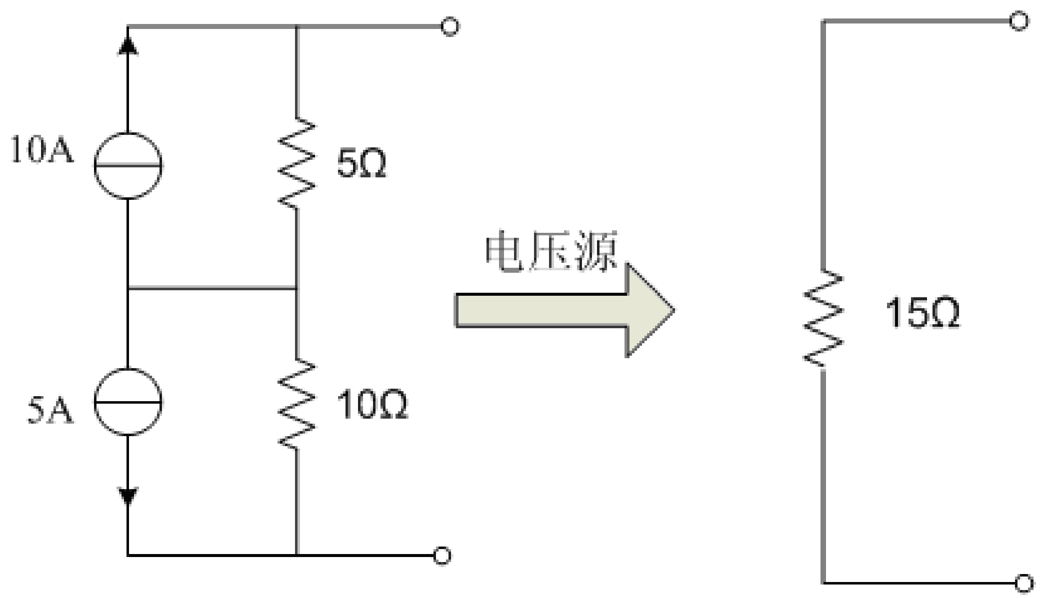
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

5、



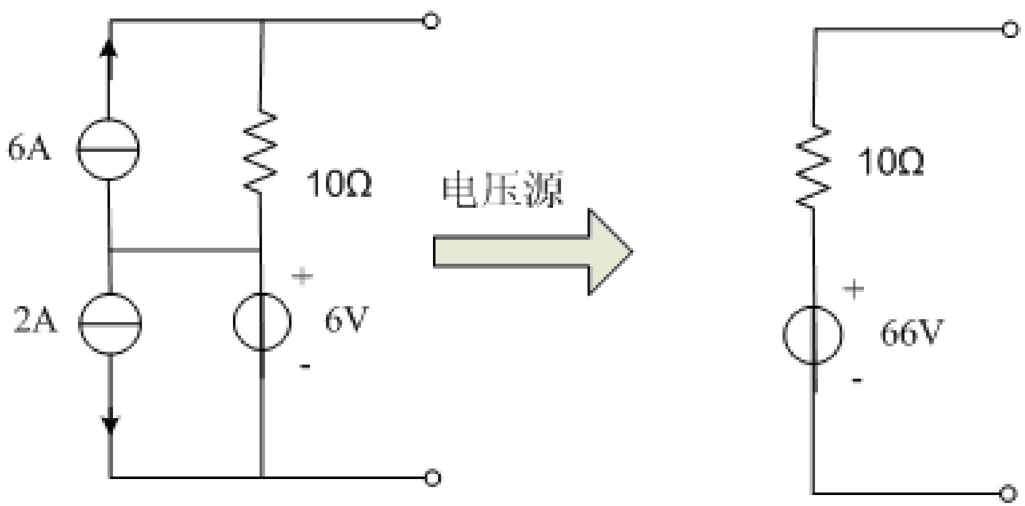
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

6、



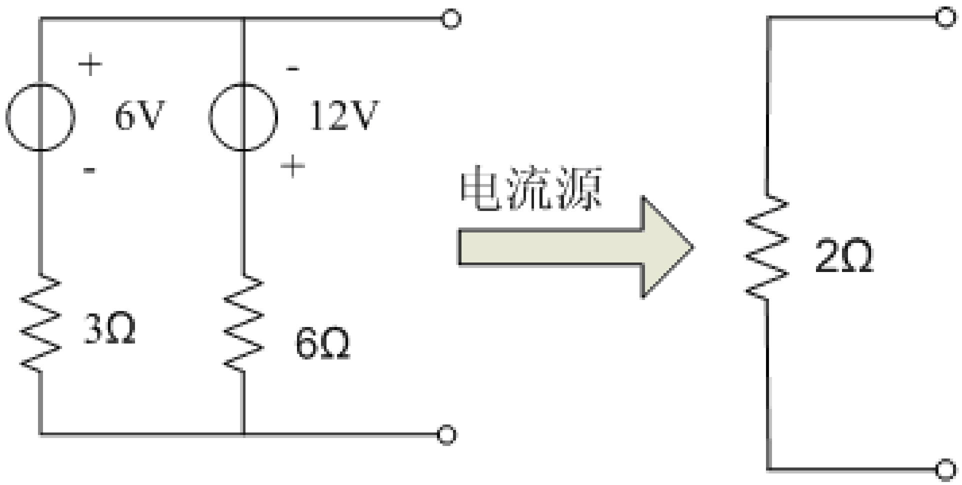
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

7、



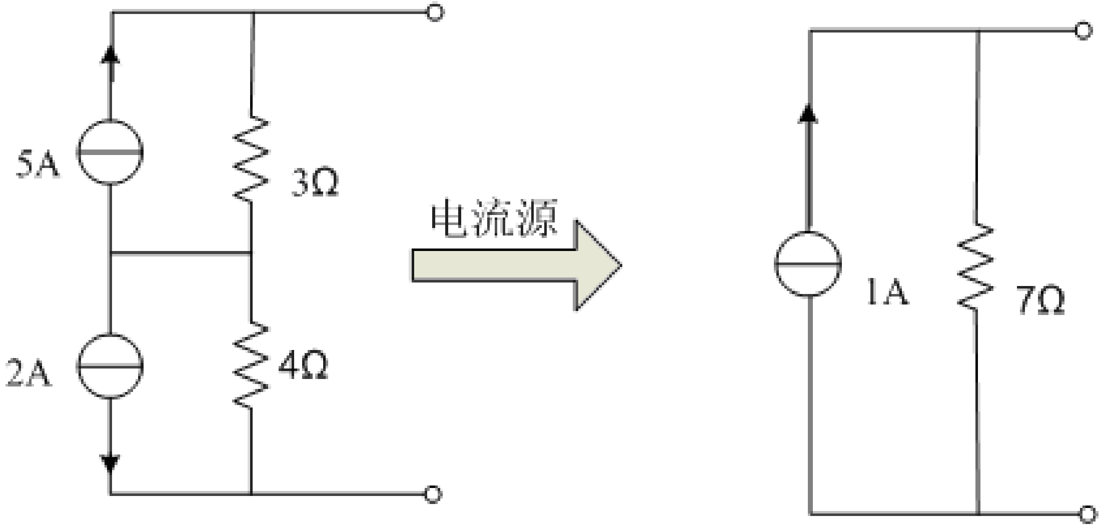
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

8、



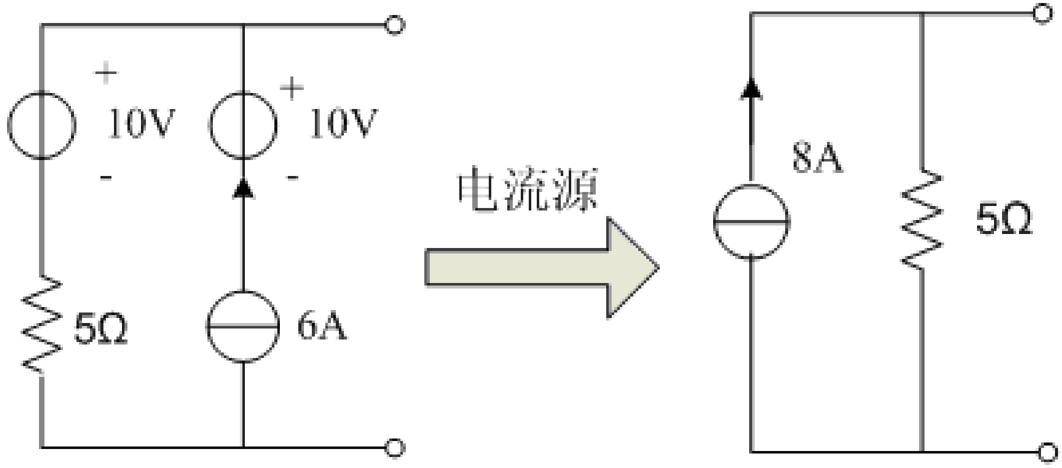
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

9、



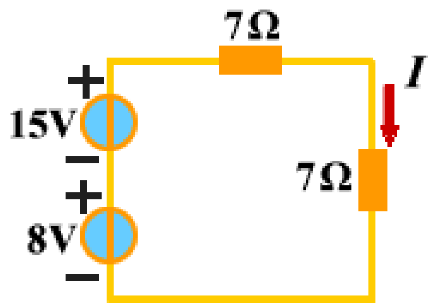
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

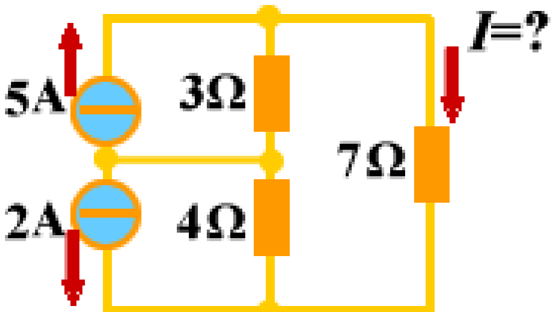
10、



§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

例2、利用电源等效互换简化电路计算图示电路中的电流I。

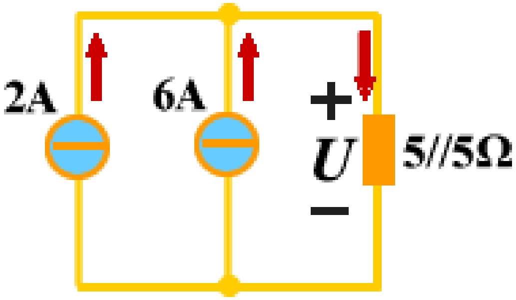


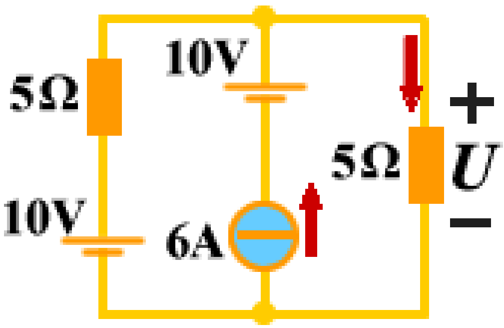


$$I=\frac{15-8}{14}=0.5A$$

§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

例3、利用电源等效互换计算图示电路中的电压U。

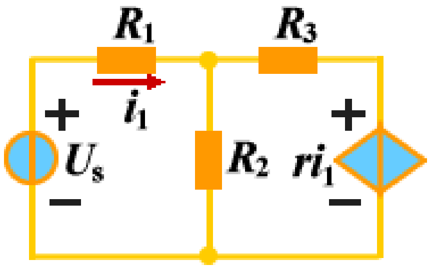


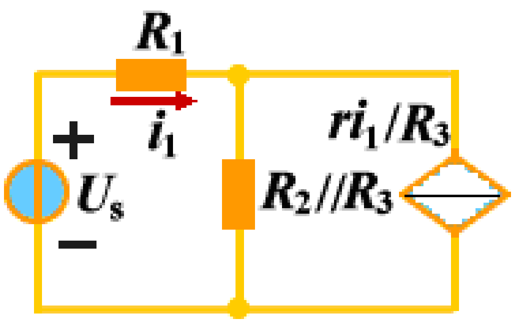


$$U=(2+6)\times(5//5)=20V$$

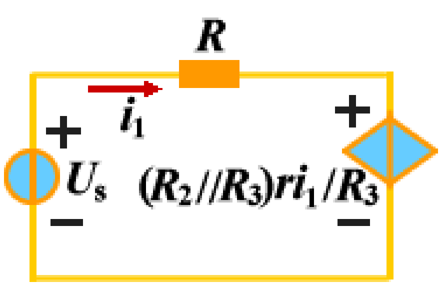
§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

例4、求图示电路中的电流i_1





$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

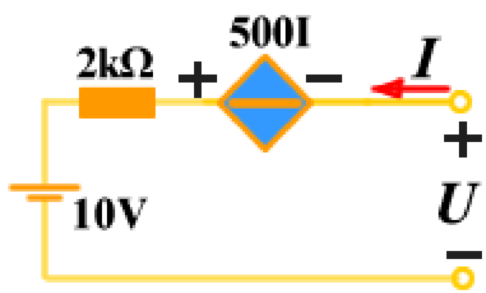


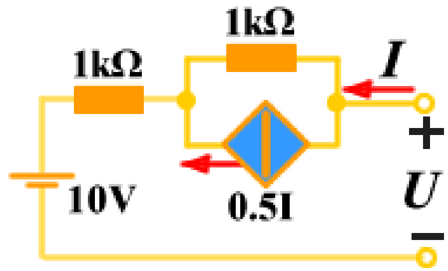
$$Ri_1 + (R_2 // R_3)ri_1 / R_3 = U_S$$

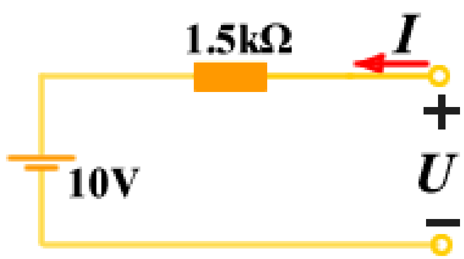
$$i_1 = \frac{U_S}{R + (R_2 // R_3)r / R_3}$$

§2—5 实际电源的两种模型及其等效变换

例5、把图示电路转换成一个电压源和一个电阻的串连。





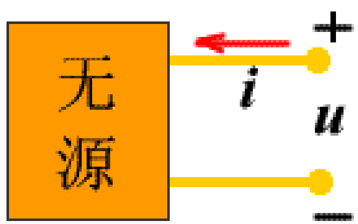


$$U = -500I + 2000I + 10 = 1500I + 10$$

§2—6　　输入电阻

一、定义

对于一个<u>不含独立源</u>的一端口电路，不论内部如何复杂，其端口电压和端口电流成正比，定义这个比值为一端口电路的输入电阻（如图示）。 这个输入电阻用R_{in}表示。



$$R_{in} = \frac{u}{i}$$

§2—6　输入电阻

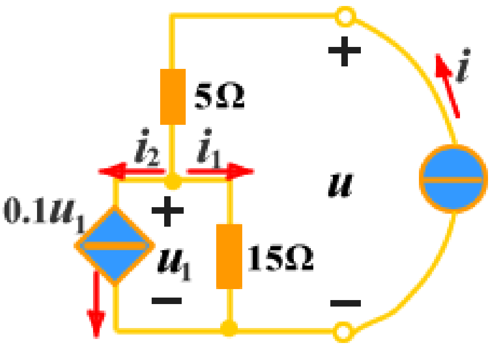
二、计算方法

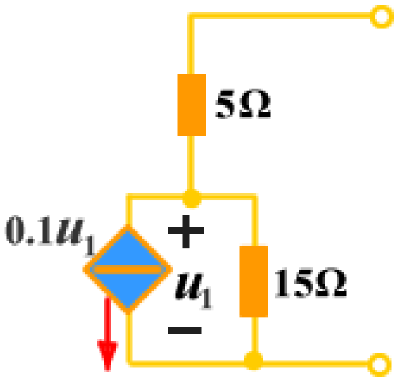
（**1**） 如果一端口内部仅含电阻，则应用电阻的串、 并联和**Δ—Y**变换等方法求它的等效电阻，输入电阻等于等效电阻；

（**2**） 对含有受控源和电阻的两端电路，应用在端口加电源的方法求输入电阻：加电压源，求得电流；或加电流源，求电压，然后计算电压和电流的比值得输入电阻，这种计算方法称为电压、电流法。

§2—6　输入电阻

例1、计算图示含有受控源的一端口电路的输入电阻。





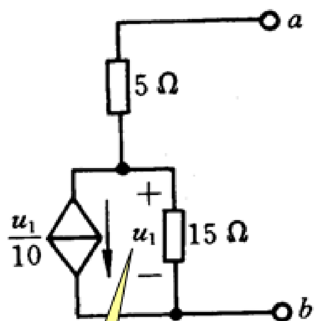
$$u_1 = 15i_1 \qquad i_2 = 0.1u_1 = 1.5i_1$$

$$i = i_1 + i_2 = 2.5i_1$$

$$u = 5i + u_1 = 5\times 2.5i_1 + 15i_1 = 27.5i_1$$

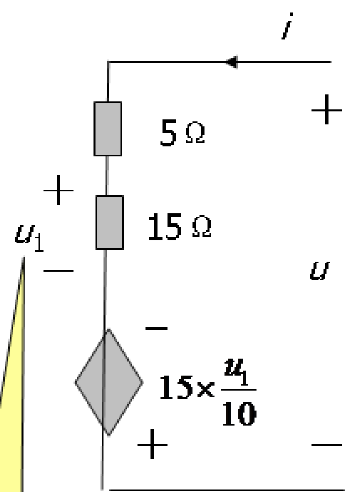
$$R_{in} = u/i = 27.5i_1/2.5i_1 = 11\Omega$$

§2—6　　输入电阻

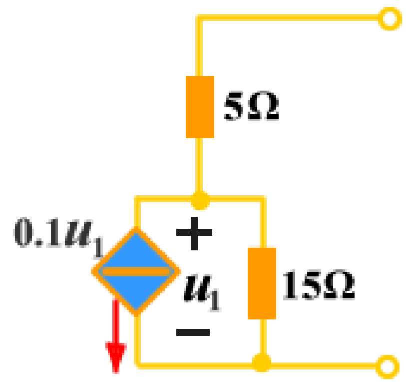


(a)

此u_1

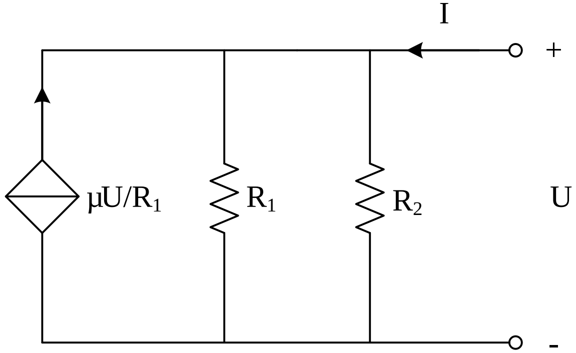


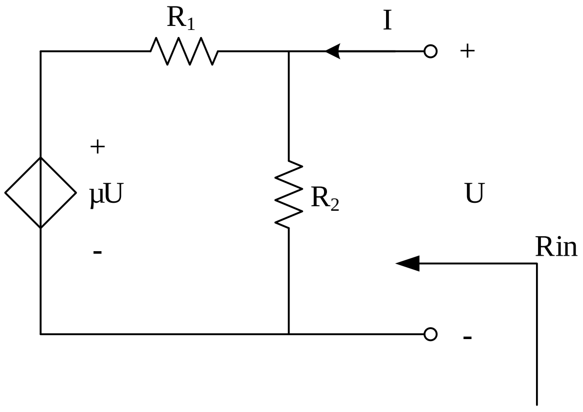
非彼u_1



§2—6　　输入电阻

例2、计算图示电路的输入电阻





$$I=\frac{U}{R_1}+\frac{U}{R_2}-\frac{\mu U}{R_1}$$

$$=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{\mu}{R_1}\right)\cdot U$$

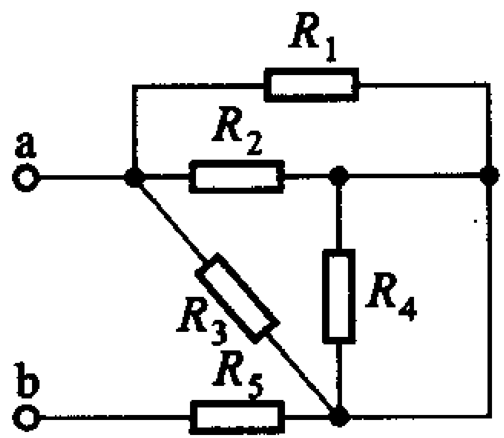
$$=\left(\frac{1-\mu}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdot U$$

$$R_{in}=\frac{U}{I}$$

$$=\frac{1}{\frac{1-\mu}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

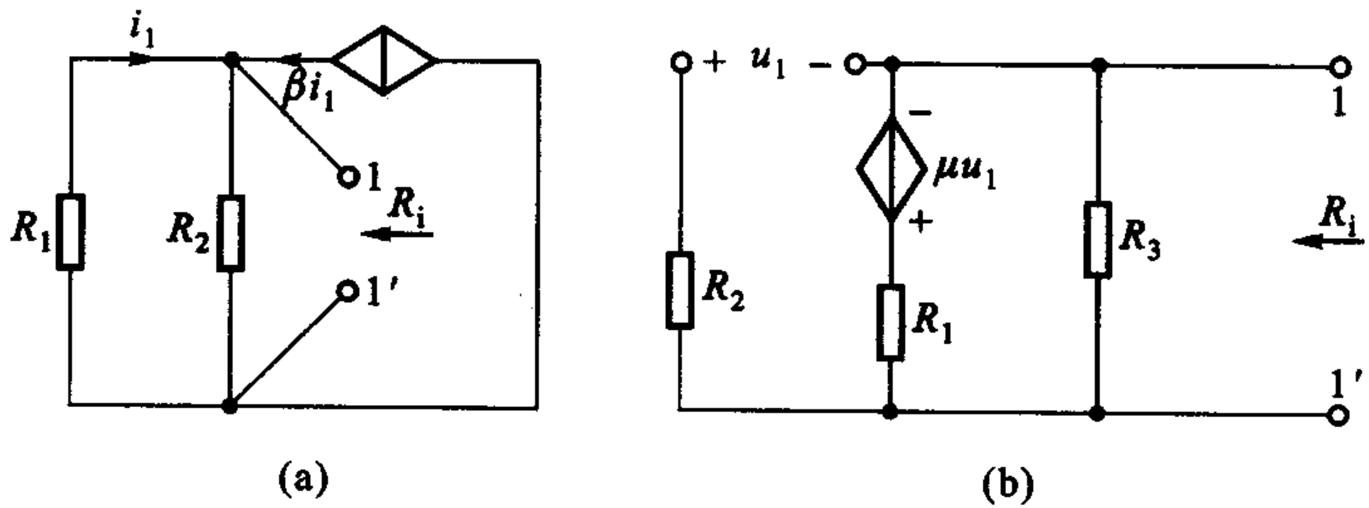
$$\frac{1}{(1-\mu)G_1+G_2}$$

2－4 求题 2－4 图所示各电路的等效电阻 R_{ab}，其中 $R_1=R_2=1\ \Omega$，$R_3=R_4=2\ \Omega$，$R_5=4\ \Omega$，$G_1=G_2=1\ \mathrm{S}$，$R=2\ \Omega$。



(a)

2－15 试求题 2－15 图(a)、(b)的输入电阻 R_i。



题 2－15 图