# 线性代数复习总结1

# 第一章 行列式

1. 基本知识：如排列、反序(逆序)、反序(逆序)数、对换、奇/偶排列、余子式，代数余子式等概念. 排列经一次互换改变奇偶性等基本结论.会排列逆序数的计算方法.

2. 掌握$n$阶行列式的定义.

$$|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

（1）展开式共有$n!$ 项.

（2）每项是取自不同行不同列的$n$个元乘积，冠以正号或负号.

(3) 行标按自然顺序排列时，每项的正负号由列标构成排列的奇偶性(反序数)决定. $n!$项中一半取正号，一半取负号.

(4) 行列式表示一个数(值).

(5) 一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值记号相混淆.

另外，任意一项前面的符号是 $(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$

**3. 掌握行列式按照某一行（列）展开，知道 *Laplace* 定理的结论.**

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} |A|, & 当k=i \\ 0, & 当k\neq i \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{st} = \begin{cases} |A|, & 当j=t \\ 0, & 当j\neq t \end{cases}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{C_n^k} M_i A_i$$

# 4. 掌握行列式的性质(6个).

- 行列互换（转置）值不变（性质1）
- 两行互换，反号（性质2）
- 一行的公因子可以提出（性质3）
- 某行元为两项之和，则等于两个行列式之和（性质4）
- 某行为零、两行相同或成比例，值为零（性质5）
- 某行倍数加到另一行，值不变（性质6）

5. 知道一些特殊的行列式及其性质，例如：对角形行列式、上(下)三角形行列式、范德蒙行列式等，会计算这些行列式的值，知道范德蒙行列式值为零的充要条件.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

6. **熟练应用**行列式的定义、性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.【或证明】

例：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

(定义)　　　　(性质)　　　　(展开)

注意: (1)要首先**观察和分析**行列式的**特点**，然后试一试化简，行不通再试别的方法.

(2)某些特殊的行列式求值需要讨论阶数$n$.

## (3)会一些常见行列式处理方法：

已学过的方法有

- **对角线法**：二阶采用.
- **三角型法**：用性质处理化简成容易计算的上(下)三角形行列式.
- **展开降阶法**：先使得某一行（列）具有较多的零，再展开为低阶行列式.
- **拆项法**：把某一行（列）的元拆成两（多）项，再分解成多个行列式的和.
- **归纳法**：例如*Vandermonde*行列式的证明过程.
- 转化为*Vandermonde*行列式.
- **加边法**
- **递推法**

# 第二章 矩阵

1. 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵：零矩阵、行/列矩阵等，知道单位 / 对角 / 三角 / 对称 / 反对称 / 正交 矩阵及其性质. 理解矩阵的可交换. 了解行阶梯形 / 行最简矩阵.

如对于正交矩阵$A$, $B$，有$A^T=A^{-1}$， $A^{-1}$, $AB$仍为正交阵.

对称矩阵：$A=A^T$，　反对称矩阵：$A=-A^T$.

对角形矩阵的和、乘积、幂.

用对角形矩阵左(右)乘一个矩阵的结果.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置，及运算规律，了解方阵的幂、方阵乘积的行列式.

只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\quad B=(b_{ij})_{n\times s}\quad \Rightarrow AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times s}$$

一般：$AB\neq BA,\ (AB)^k\neq A^kB^k.$

由$AB=O$不能得出$A$、$B$至少有一个零矩阵.

但是，若$A$为可逆矩阵，则可以得到$B=O$.

$$|\lambda A_n|=\lambda^n|A|$$

注意：矩阵与行列式线性运算的不同点，以及

$$(AB)^T=B^TA^T$$

$$|A_nB_n|=|A_n|\,|B_n|=|B_n|\,|A_n|$$

3. 掌握逆矩阵及其性质、矩阵可逆的充要条件，会用伴随矩阵求二阶矩阵逆矩阵.

如：

$|A|\neq 0$时$A$可逆，或对于方阵$A$，若存在方阵$B$，使 $AB=E$ $(AB=BA=E)$则A可逆。

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$， $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，

$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

$A^{-1}=A^*/|A|$，注意$A^*$中元素的排列顺序

对任意方阵$A$，有 $AA^*=A^*A=|A|E$

4. 掌握矩阵的初等变换、初等矩阵及性质，了解矩阵等价、矩阵的秩，会有关的判定定理，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

如：有三类初等变换，分别对应三类初等矩阵.

对矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$施行一次初等行（列）变换，其结果就等于对$A$左（右）乘一个相应的$m$（$n$）阶初等矩阵.

对任何矩阵$A_{m\times n}$总可经有限次初等行变换化为(行)阶梯形和行最简形.

$n$ 级矩阵$A$可逆$\Leftrightarrow$它能表成一些初等矩阵的乘积.

可逆矩阵总可以经过一系列初等行(列)变换化成$E$.

矩阵的行秩等于列秩，等于$A$中一切非零子式最高阶数.

初等变换不改变矩阵的秩.

# 求逆矩阵的方法：

(1)伴随矩阵法.（阶数较低）

(2)由 $AB=E$ 或 $BA=E$.(待定系数法)

(3)初等变换的方法.

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

(4)分块矩阵的方法.

$$diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)^{-1}.$$

$$=diag(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_s^{-1}).$$

矩阵秩为$r$ $\Leftrightarrow$ 有一个$r$级子式不为零，同时所有$r+1$ 级子式全为零.

$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

$P_m, Q_n$可逆，$A_{m\times n}$则 $r(PA) = r(A) = r(AQ)$

若$A$中存在一个$r$阶子式不为零，则 $r_A \geq r$;

若$A$中所有$r$阶子式都为零，则 $r_A < r$.

5. 掌握分块矩阵及其运算，注意分块矩阵运算需要满足的分块条件. 建议会使用分块矩阵的初等变换.

注意：$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix}$ 的应用.

但 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq |AB| - |CD|$

$$(A_{ij})_{st}(B_{ij})_{tr} = (C_{ij})_{sr} = \left(\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}\right)_{sr}$$

分块对角形矩阵的运算性质.

分块矩阵的初等变换和分块初等矩阵.

对一个分块矩阵作一次分块矩阵的初等行（列）变换，相当于在矩阵的左（右）边乘上一个相应的分块初等矩阵，反之亦然.

6. 理解矩阵之间的三种关系(等价、相似、合同)及性质.

若矩阵$A$经过有限次初等变换化为$B$，则称矩阵$A$和$B$等价.

(1) 矩阵$A$与$B$等价$\Leftrightarrow$有初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 使 $B = P_s P_{s-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$.

(2) 两个 $s \times n$ 矩阵$A$, $B$ 等价$\Leftrightarrow$存在可逆的 $s$级矩阵$P$与可逆的$n$ 级矩阵$Q$使 $B = PAQ$.

(3)任意一个 $m \times n$ 矩阵$A$ 都与一形式为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ 的矩阵等价，它称为矩阵$A$ 的标准形.

即:存在可逆阵$P=P_m$和可逆阵$Q=Q_n$使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

设$A$，$B$为两个$n$阶矩阵. 若存在满秩矩阵$M$，使$B=M^{-1}AM$，则称矩阵$A$与$B$相似. 若此时还有$M$为正交矩阵，则$A$与$B$正交相似。

设$A, B$是数域$F$上的$n$阶矩阵，若存在$F$上的可逆矩阵$C$，使得$B=C^TAC$成立，则称$A$与$B$是合同矩阵.

秩为$r$的$n$阶对称矩阵$A$必合同对角形矩阵，即存在满秩矩阵$C$，使得

$$C^T AC = diag(d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 不为零.

•矩阵等价、相似、合同、正交相似的联系与区别

$\forall A,B\in M_n$,

$A$与$B$**相似** $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP=B$

$A$与$B$**合同** $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$C$，使$C^{T}AC=B$

$A$与$B$正交**相似** $\Leftrightarrow$ 存在正交阵$Q$，使$Q^{T}AQ=Q^{-1}AQ=B$

$\forall A,B\in M_{m\times n}$,

$A$与$B$**等价** $\Leftrightarrow$ 存在$m$阶可逆矩阵$P$，$n$阶可逆矩阵$Q$，使$PAQ=B$

共同的性质：自反性、对称性、传递性

•等价、相似、合同、正交相似的关系

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{A\text{与}B\text{正交相似}} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\boxed{A\text{与}B\text{合同}} \arrow[dr] & & \boxed{A\text{与}B\text{相似}} \arrow[dl] \\
& \boxed{\text{方阵}A\text{与}B\text{等价}} &
\end{tikzcd}$$

•等价、相似、合同、正交相似的不变量

等价: 秩，即$R(A)=R(B)$

相似: 秩，即$R(A)=R(B)$

特征多项式，特征值 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

合同: 秩，即$R(A)=R(B)$

对称性，即若$A$对称，则$B$也对称

对称阵$A$、$B$对应的二次型的正(负)惯性指数

对称阵$A$、$B$对应的二次型的规范型

正交相似: 相似+合同

7. 知道实对称矩阵的性质：

(1) 特征值为实数；

(2) 属于不同特征值的特征向量正交；

(而对一般矩阵，属于不同特征值的特征向量仅仅线性无关)

(3) 特征值的代数重数与几何重数相等；

（即与特征子空间维数相等）

(4) 必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值.

## •求方阵特征值和特征向量的步骤

计算$|\lambda E-A|$ → 求$|\lambda E-A| = 0$的根 → 求$(\lambda E-A)x = 0$的基础解系

## •实对称阵对角化的步骤

- 求$A$全部特征值（所有特征值的重根次数之和等于$n$）
- 对每个$k_i$重特征值$\lambda_i$求方程$(A- \lambda_i E)x=0$的基础解系
- 得出对应于特征值$\lambda_i$的$k_i$个线性无关的特征向量
- 将对应于特征值$\lambda_i$的$k_i$个线性无关的特征向量正交、单位化（总共可以得到$n$个两两正交的单位特征向量）
- 将$n$个两两正交的单位特征向量构成正交阵$P$，即可满足$P^{-1}AP=\Lambda$(注意顺序)。

# 第三章 线性方程组

## 一、线性方程组

1. 理解线性方程组的初等变换，知道可用消元法（行初等变换）和*Cramer*法则解方程组.

2. 掌握:齐次线性方程组有非零解⇔系数矩阵$A$的秩 < 未知数个数$n$.

   非齐次线性方程组有解 ⇔ $r(A) = r(B)$.

3. 理解并掌握齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念

   齐次线性方程组若干个解的任意线性组合仍是$Ax=0$的解. 当$r(A)<n$时才有基础解系.

   $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}$， $r = r(A)$ (参数任意取值)

4. 理解并掌握非齐次线性方程组解的结构及通解.

- 非齐次线性方程组的两个解的差是对应导出组的解；
- 非齐次线性方程组的解与导出组的解的和(差)仍是它的解.

通解：$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，

$r = r(A)$, $\gamma_0$是一个特解(随便找到一个即可), 参数任意取值

5. 会讨论(含参)线性方程组解的情况.

$r(A)\neq r(B)$无解， $r(A)=r(B)=n$唯一解, $r(A)=r(B)<n$无穷解.

6. 会把线性方程组的解和向量线性相关性联系起来讨论. 可以使用一些常见结论，如

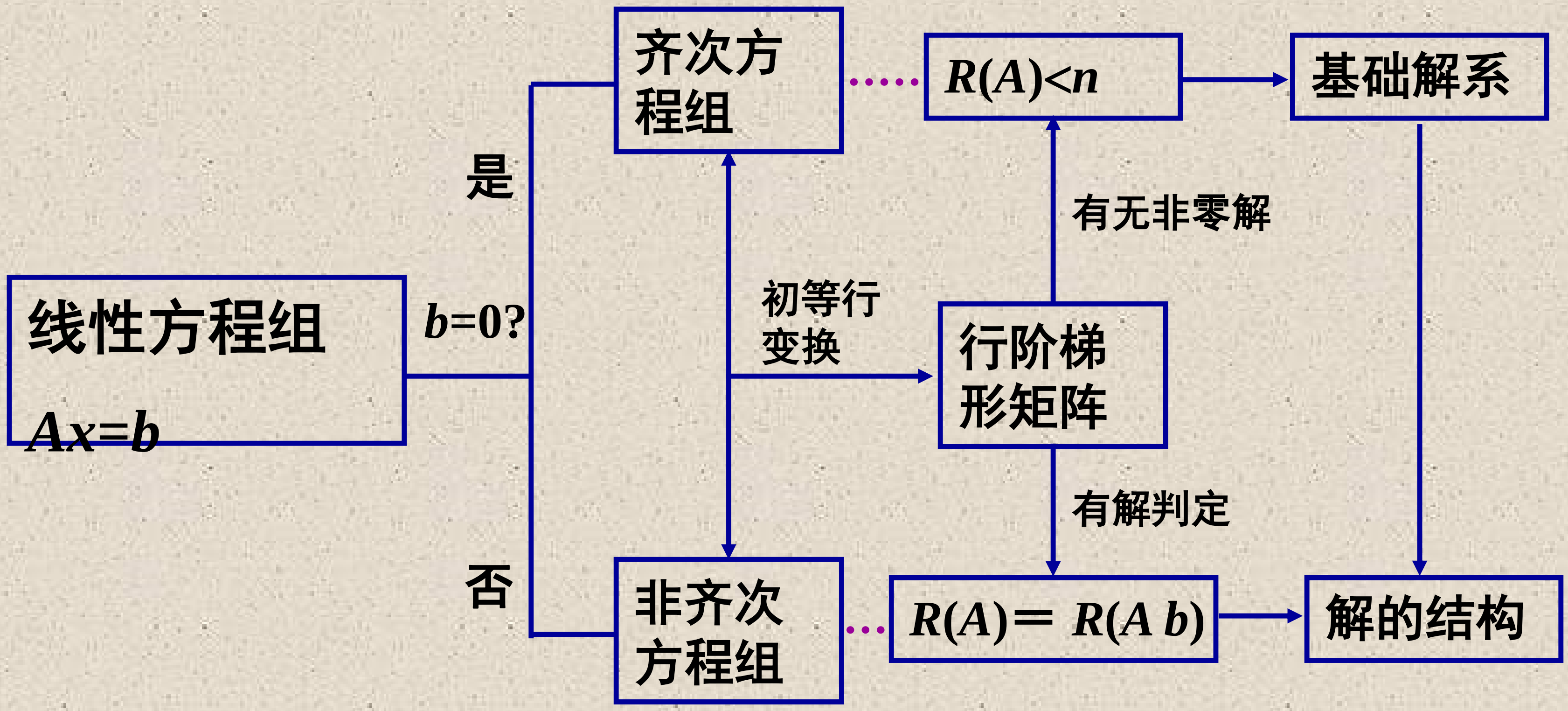
$AB = O \Leftrightarrow B$的每个列向量都是齐次线性方程组$AX = O$的解.

设矩阵$A_{m\times n}$、$B_{n\times p}$，若$AB = O$，则

$$r_A + r_B \leq n$$

$A, B$为同型矩阵，则 $r_{A+B} \leq r_A + r_B$

# 线性方程组


线性方程组
Ax=b
b=0?
是
否
齐次方程组
非齐次方程组
初等行变换
行阶梯形矩阵
有无非零解
有解判定
R(A)<n
R(A)＝ R(A b)
基础解系
解的结构

# 二、向量

1．理解$n$维向量的概念、向量的线性组合与线性表示、向量组的等价.

如：向量组等价具有传递性.

若向量(组)A能由向量组B线性表示，向量组B能由向量组C线性表示，则向量(组)A能由向量组C线性表示.

若矩阵$A$经初等列(行)变换变成$B$，则$A$的列(行)向量组与$B$的列(行)向量组等价.

2. 掌握向量组线性相关、线性无关的定义，会用向量组线性相关 / 无关的有关性质及判别法进行相关证明.

最常用：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$

注：证明有时会用反证法.

知道一些常见结论，如：

部分相关则全体相关.

任何含有零向量的向量组一定是线性相关组.

含有两个相同向量的向量组必线性相关.

全体无关则部分无关.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，则$\beta$可经$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出，且表示法唯一.

$n$阶行列式$|A|=0 \Leftrightarrow$ 它的$n$个行(列)向量线性相关

以少表多，多的相关及其3个推论.

向量组线性无关，则加长向量组线性无关.

向量组线性相关，则截短向量组线性相关.

把向量组的线性相关性和线性方程组联系起来.

3. 会求向量组的极大线性无关组及秩. 会进行相关证明.

把矩阵和向量联系起来；极大线性无关组和向量组的秩有时会用于证明.

例如：若向量组的秩为$r$，则

(1) 向量组中，任何$r+1$个向量必线性相关.

(2) 向量组的线性无关子组所含向量个数最多为$r$.

(3) 向量组中任意$r$个线性无关向量都是一个极大线性无关组.

$m\times n$矩阵A经过初等行变换得到$m\times n$矩阵$B$，那么$A$与$B$的列向量组有着相同的线性关系.

据此得求一个向量组的极大无关组的具体办法

① 用已知向量组为列向量构成矩阵$A$；

② 对$A$施行初等行变换化为行简化矩阵；

③ 可得原向量组的线性关系并求出一个极大线性无关组.

# 向量组与矩阵的关系

矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ $\longleftrightarrow$ 列向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

矩阵$A$的秩$r(A)$ $\longleftrightarrow$ 向量组的秩r

最高阶非零子式 $\longleftrightarrow$ 极大线性无关组

**注：行向量的问题与列向量相同**

# •向量组的线性相关性与非齐次方程组解的关系

向量$b$能由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表示？

是 $\Leftrightarrow$ 有解

否 $\Leftrightarrow$ 无解

$Ax=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)x=b$

$Ax=b$有矛盾方程?

无 $\Leftrightarrow$ 方程组有解 $\Leftrightarrow$ 是

有 $\Leftrightarrow$ 方程组无解 $\Leftrightarrow$ 否

$R(A)=R(A\ b)$?

$R(A)=R(A\ b)<n$ ?

是 $\Leftrightarrow$ 有无穷多组解 $\Leftrightarrow$ 是

否 $\Leftrightarrow$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 否

有效方程数少于未知数个数？

- 向量组的线性相关性与齐次方程组解的关系

向量组$\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$线性相关？

- 是 $\Leftrightarrow$ $R(A)<n$ $\Leftrightarrow$ 有非零解
- 否 $\Leftrightarrow$ $R(A)=n$ $\Leftrightarrow$ 只有零解

$Ax=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)x=0$

$R(A)=n$?

- 是 $\Leftrightarrow$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 否
- 否 $\Leftrightarrow$ 有无穷多组非零解 $\Leftrightarrow$ 是

有效方程数少于未知数个数？

**注意：**齐次线性方程组不会出现矛盾方程。

# 二、典型例题

**例1** 设 $a_1, a_2, a_3, b$ 均为3维列向量, 矩阵$A=(a_1, a_2, a_3)$, $B=(3a_1, 2a_2, b)$, 且已知行列式 $\det A=2$, $\det B=-6$.

计算 $\det(3A-B)$ 和 $\det(3A+B)$.

**解**

$$\det(3A-B)=\det(0,a_2,3a_3-b)=0$$

$$\det(3A+B)=\det(6a_1,5a_2,3a_3+b)$$

$$=30\det(a_1,a_2,3a_3+b)$$

$$=30[\det(a_1,a_2,3a_3)+\det(a_1,a_2,b)]$$

$$=30[3\det A+\frac{1}{6}\det B]=150$$

**例2** 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，计算 $2M_{31}+M_{33}+M_{34}$.

**解** $2M_{31}+M_{33}+M_{34}$

$$=2A_{31}+0A_{32}+1A_{33}+(-1)A_{34}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+c_2]{c_1-2c_2} -\begin{vmatrix} -16 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -16 & -2 \\ 20 & 5 \end{vmatrix}=-(-80+40)=40$$



知识点

**例3** 计算矩阵 $A_{2n}$ 的行列式, 其中

$$A_{2n}=\begin{pmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{pmatrix}$$

**解**

$$|A_{2n}|=\begin{vmatrix} a_n & b_n & \\ c_n & d_n & \\ & & A_{2(n-1)} \end{vmatrix}=(a_nd_n-b_nc_n)|A_{2(n-1)}|$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})|A_{2(n-2)}|=\cdots$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})\cdots(a_2d_2-b_2c_2)|A_2|$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$$

**例4** 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，

且 $A^2+AB-A=E$, 求 $A^9$ 和 $B$.

**解** $A^2=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=9E$

$$A^8=(A^2)^4=(9E)^4=3^8E$$

$$A^9=3^8A$$

$$=\begin{pmatrix}6561&-13122&13122\\-13122&6561&13122\\13122&13122&6561\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}A$$

$$AB=E+A-A^2$$

$$B=A^{-1}(E+A-A^2)$$

$$=A^{-1}+E-A$$

$$=\frac{1}{9}A+E-A$$

$$=E-\frac{8}{9}A$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&16&-16\\16&1&-16\\-16&-16&1\end{pmatrix}$$

**例5** 设 $A$ 满足方程 $A^2+2A-E=O$, 证明 $A$ 与 $A+3E$ 都可逆, 并求它们的逆阵.

**证明** 由 $A^2+2A-E=O$, 得

$$A(A+2E)=E$$

因此 $A$ 可逆, 且有 $A^{-1}=A+2E$.

$$A^2+2A-E=A(A+3E)-A-E$$

$$=A(A+3E)-(A+3E)+2E$$

$$=(A-E)(A+3E)+2E$$

$$(A-E)(A+3E)=-2E$$

$$\frac{1}{2}(E-A)(A+3E)=E$$

因此 $A+3E$ 可逆, 且有 $(A+3E)^{-1}=\frac{1}{2}(E-A)$.

**例6** 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $AB = B + A$, 求 $B$.

**解** $|A|^3 = |A^*| = 64$, $|A| = 4$, 由 $AB = B + A$, 得

$$B = A^{-1}B + E, \quad (E - A^{-1})B = E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \quad E - A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = (E - A^{-1})^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_3]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+2r_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-0.5\, r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1.5 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$B = (E - A^{-1})^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**例7** 设

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&3&3&4\\1&2&2&3\\0&0&3&4\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$A=(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$，求 $A^n$.

**解** $A=(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$

$$=[C(E-C^{-1}B)]^{\mathrm{T}}=(C-B)^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix},$$

令 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$，

则有

$$A_1^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2A_1,$$

$$A_1^n=2^{n-1}A_1,\quad A_2=2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

$$A_2^n=2^n\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^n=2^n\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix},$$

$$A^n=\begin{pmatrix}A_1^n&O\\O&A_2^n\end{pmatrix}$$

$$=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2n&2\end{pmatrix}$$