第六章 方程求根

- 很多方程的求解没有相应的求解公式，本章讨论单变量非线性方程的求解，采用数值方式求解

- 设非线性方程 $f(x) = 0$

  其中$x \in R, f(x) \in C[a,b]$

- 方程$f(x) = 0$的根x^*称为函数f(x)的零点。也就是有：$f(x^*) = 0$

- 若有 $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$，$g(x^*) \neq 0$，则x^*称为函数f(x)的m重零点或m重根，m=1时称为单根。

第一节 二分法

- 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$f(a)*f(b)<0$，根据连续函数的性质可知，方程$f(x)$在(a, b)内一定有实零点（$f(x)$有实根）。相应地，$[a, b]$称为$f(x)=0$的有根区间
- 考虑有根区间$[a, b]$，取其中点 $x_0=(a+b)/2$，检查 $f(x_0)$和$f(a)$的符号
  - ◆如果同号，说明根在(x_0, b)之间，$a= x_0$
  - ◆如果异号，说明根在(a, x_0)之间，$b= x_0$

继续这个过程

二分法

- 停止条件(下列条件之一)：
  1. 找到中间点x_0： $f(x_0)=0$
  2. $|b-a|<\varepsilon$， $\varepsilon>0$，预先给定
  - 若满足条件1，则找到精确解
  - 若满足条件2，取$x=(a+b)/2$为方程的根，近似解
- 特点：有根区间每次缩小一半，即搜索区间减少，二分的过程可继续下去，直到满足精度要求为止。

二分法算法

- 计算$f(x)$在有根区间$[a, b]$端点处的值$f(a)$和$f(b)$
- 计算$f(x)$在区间中点$x_0=(a+b)/2$处的值$f(x_0)$
- 若$f(x_0)=0$，则x_0即是根，结束（若$|a-b|<\varepsilon$，也结束）；否则
    - ◆若$f(x_0)$与 $f(a)$同号，则$a= x_0$
    - ◆若$f(x_0)$与 $f(a)$异号，则$b= x_0$
- 在新的有根区间$[a, b]$内继续前述过程

示例

- 例，求方程$f(x) = x^3-x-1=0$ 在区间[1.0 1.5]内的一个根

第二节 迭代法

- 迭代法一般由一个初始值x_0，通过某一个公式，算出一个新值x_1，用x_1替代x_0，继续计算新值，由此得到一个值的序列。
- 如果该序列收敛，则收敛的极限即是所求的根
- 迭代法中要有一个计算公式：

$$x=\varphi(x)$$

迭代过程

- 给定初始值x_0，计算$x_1=\varphi(x_0)$，由x_1可计算出x_2，

一般地：$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，

极限 $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$

- 迭代法不能保证总是收敛，是否收敛依赖于计算公式$\varphi(x)$ and x_0

示例

- 对于前述的方程f(x) = x^3-x-1=0，可以有两种迭代方式：
  - $x = x^3 - 1$
  - $x = \sqrt[3]{x + 1}$
- 有根区间是[1.0 1.5]，如果选择的初始值不好（例如1.4），则按照第一个公式计算，得到的值序列是发散的，显然不能求出方程的根。

- 定理1：设方程 $x=\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内有根 x^*，则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛的条件为：
  存在定数$0<L<1$，使对任意$x\in[a, b]$，成立

  $$|\varphi'(x_k)|\leqslant L$$

- 证明：由迭代公式 $x=\varphi(x)$ 及微分中值定理

  $$x_{k+1} - x^*=\varphi(x_k)- \varphi(x^*)= \varphi'(\xi)(x_k - x^*) \quad \xi\text{是}x_k\text{与}x^*\text{之间的某一点}$$

  $$|x_{k+1}- x^*|\leqslant L|x_k- x^*|\leqslant L^2|x_{k-1}- x^*|\leqslant\cdots\leqslant L^k|x_0 - x^*| \quad L^k\to 0$$

故 $\lim_{k\to\infty}|x_{k+1}-x^*|=0$ 即 $\lim_{k\to\infty}x_{k+1}=x^*$

- 定理2：设函数$\varphi(x)$ 满足条件：

1. 对任意的$x\in[a, b]$ 有 $a\le\varphi(x)\le b$
2. 存在正数$L<1$，使对任意$x\in[a, b]$ 有

$$|\varphi'(x_k)|\leqslant L<1$$

则迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意初值$x_0\in[a, b]$ 均收敛于方程

$x=\varphi(x)$的根x^*，且误差估计为：

$$|x_k - x^*|\leqslant L^k/(1-L)|x_1 - x_0|$$

- 证明：收敛性由定理1保证。

$|x_{k+1}-x_k| = |\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})| \leqslant L|x_k-x_{k-1}| \leqslant L^2|x_{k-1}-x_{k-2}| \leqslant \cdots \leqslant L^k|x_1-x_0|$

对任意正整数p，有

$|x_{k+p}-x_k| \leqslant |x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k|$

$\leqslant (L^{k+p-1}+L^{k+p-2}+\cdots+L^k)|x_1-x_0| \leqslant \mathbf{L^k/(1-L)|x_1-x_0|}$

在上式中，令p→∞，有 $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k+p} = x^*$

则有，$|x_k-x^*| \leqslant L^k/(1-L)|x_1-x_0|$

- 定义1：如果存在x^*的某个邻域 R：$|x- x^*|\leqslant\delta$，使迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意初值$x_0\in R$ 均收敛，则称迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在根x^*邻近具有局部收敛性。

- 定理3：设x^*为方程 $x=\varphi(x)$ 的根， $\varphi'(x)$ 在 x^* 的邻近连续，且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在 x^* 邻近具有局部收敛性。
- 证明：由连续函数的性质，存在 x^* 的某个邻域 R：$|x-x^*|\leqslant\delta$，使对于任意的$x\in R$，成立：

$$|\varphi'(x)|\leqslant L<1$$

而 $|\varphi(x)-x^*| = |\varphi(x)-\varphi(x^*)| \leqslant L|x-x^*|\leqslant|x-x^*|\leqslant\delta$

即，对于任意$x\in R$，总有$\varphi(x)\in R$，则由定理1可知，对任意初始值$x_0\in R$，$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 均收敛。

示例

- 例：求方程 $x=e^{-x}$在$x=0.5$附近 的一个根，要求精度$\varepsilon=10^{-5}$

迭代收敛的速度

- 迭代法中的收敛速度是很关键的
- 设x_0是根x^*的某个预测值，迭代一次后，得到

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

由微分中值定理，有

$$x_1 - x^* = \varphi(x_0) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_0 - x^*)$$

其中，ξ介于x_0与x^*之间

- 如果$\varphi'(x)$改变不大，可以认为$\varphi'(x)$近似于某个常数L，则

$$x_1-x^* \approx L(x_0-x^*) = Lx_0-Lx^*$$

$$x^*(L-1) \approx Lx_0-x_1$$

$$x^* \approx x_1/(1-L) - Lx_0/(1-L)$$

希望用 $x^* \approx x_1/(1-L) - Lx_0/(1-L)$ 来近似，能得到比x_1更好的值

$$x_2 \approx x_1/(1-L) - L/(1-L)x_0 = x_1+L/(1-L)(x_1-x_0)$$

- 由此，迭代算法表示为

$$\overline{x_{k+1}} = \varphi(x_k)$$

$$x_{k+1} = \overline{x_{k+1}} + \frac{L}{1-L}(\overline{x_{k+1}} - x_k)$$

- 进一步的，需要消去L，

$x_2 = \varphi(x_1)$

$x_2 - x^* \approx L(x_1 - x^*)$

$$\begin{cases} x_1 - x^* \approx L(x_0 - x^*) \\ x_2 - x^* \approx L(x_1 - x^*) \end{cases}$$

消去L： $\frac{x_1 - x^*}{x_2 - x^*} \approx \frac{x_0 - x^*}{x_1 - x^*}$

埃特金Aitken算法

- 整理得：

$$x^*\approx x_0-\frac{(x_0-x_1)^2}{x_0-2x_1+x_2}$$ （右侧的值记为$\overline{x_1}$）

- 埃特金Aitken算法：由x_k得到x_{k+1}、x_{k+2}

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

$$x_{k+2}=\varphi(x_{k+1})$$

然后计算：$\overline{x_{k+1}}=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_k-2x_{k+1}+x_{k+2}}$

- 含义：在原序列$\{\mathrm{x_k}\}$的基础上，得到新的序列$\{\overline{x_{k+1}}\}$
- 新序列的收敛速度，比原序列的收敛速度更快

Steffensen迭代法

将埃特金方法与方程迭代求根方法结合：

$y_k = \varphi(x_k)$

$z_k = \varphi(y_k)$

则得到Steffensen迭代法：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}$$

也可以写为另一种形式：

若将迭代方程表示为：$x_{k+1}=\psi(x_k)$，则

$$\psi(x) = x - \frac{(\varphi(x)-x)^2}{\varphi\big(\varphi(x)\big)-2\varphi(x)+x}$$

第三节 牛顿法

- 对于方程 $f(x) = 0$

迭代公式为 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

- 定义：设迭代方程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根x^*，如果迭代误差 $e_k=x_k-x^*$ 当 $k\to\infty$ 时成立下列渐近关系式：

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\to c \quad c\neq 0 \text{ 是一个常数}$$

则称该迭代过程是 p 阶收敛的。

p=1时，称为线性收敛

p>1时，称为超线性收敛

p=2时，称为平方收敛

- 定理4：对于迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，如果$\varphi^{(p)}(x)$在所求根x^*的邻近连续，并且

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*)=\ldots= \varphi^{(p-1)}(x^*)=0 \qquad \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

则该迭代过程在点x^*邻近是p阶收敛的。

- 定理5：设函数 $f(x)$ 有 $m(>2)$ 阶连续导数，p是方程 $f(x)=0$ 的单根，则当x_0充分接近 p 时，牛顿法收敛，且至少为二阶收敛。
- 证明：

牛顿迭代函数： $$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

因为 $f(x^*)=0$，所以 $\varphi'(x^*)=0$，至少是二阶收敛的。

算法

- 选初始点x_0，计算 $f_0 = f(x_0)$ $f_0' = f'(x_0)$
- 计算 $x_1 = x_0 - \frac{f_0}{f_0'}$ $f_1 = f(x_1)$ $f_1' = f'(x_1)$
- 计算

$$\delta = \begin{cases} |x_1 - x_0| & 当|x_1| < C \\ \frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} & 当|x_1| \geq C \end{cases}$$

通常C可取1

如果$|\delta|<\varepsilon_1$，或$|f_1|<\varepsilon_2$，则结束，x_1即为根，否则执行下步

- 迭代次数加1，若次数大于预定的次数，或者f_1'=0，则方法失败

否则 $x_0 = x_1, f_0 = f_1, f_0' = f_1'$，继续迭代

第四节 弦截法与抛物线法

- 使用函数值替代导数值，以避开导数计算。
- 对于方程 $f(x)=0$

弦截法迭代公式为 $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

（同学们可以找出这个公式和牛顿公式的差异，看看导数是用什么取代的，这实际上是差商的概念，插值一章中要介绍的内容）

- 弦截法中，要使用前两步的结果，所以需要两个初值。
- 具有超线性的收敛性。

- 抛物线法的迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}$$

其中：$\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$

（ $f[x_k, x_{k-1}]$和$f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]$是均差，插值一章介绍）

上式中，正负号的取法：取较接近x_k的一个值作为新的近似根x_{k+1}

- 抛物线法比弦截法收敛得更快。