第四章 电路定理

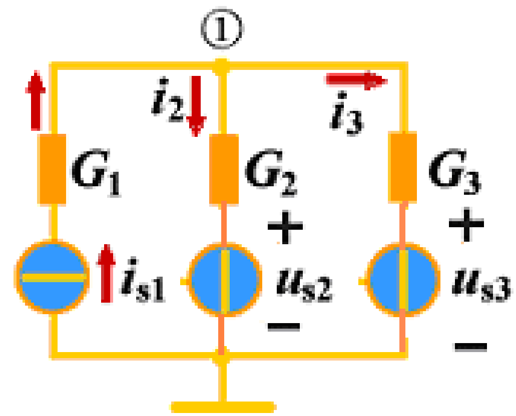
§4.1 叠加定理

一、叠加定理的内容

叠加定理表述为：在线性电路中，任一支路的电流(或电压)都可以看成是电路中每一个独立电源单独作用于电路时，在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

§ 4.1 叠加定理

二、定理的证明



$$(G_2+G_3)u_{n1}=i_{S1}+G_2u_{S2}+G_3u_{S3}$$

$$u_{n1}=\frac{G_2u_{S2}}{G_2+G_3}+\frac{G_3u_{S3}}{G_2+G_3}+\frac{i_{S1}}{G_2+G_3}$$

$$i_2=(u_{n1}-u_{S2})G_2=(\frac{G_2}{G_2+G_3}-G_2)u_{S2}+\frac{G_3u_{S3}}{G_2+G_3}+\frac{i_{S1}}{G_2+G_3}$$

$$i_3=(u_{n1}-u_{S3})G_3=(\frac{G_2}{G_2+G_3})u_{S2}+(\frac{G_3}{G_2+G_3}-G_3)u_{S3}+\frac{i_{S1}}{G_2+G_3}$$

§4.1 叠加定理

以上各式表明：结点电压和各支路电流均为各独立电源的一次函数，均可看成各独立电源单独作用时，产生的响应之叠加，即表示为：

$$u_{n1} = a_1 i_{S1} + a_2 u_{S2} + a_3 u_{S3} = u_{n1}^{(1)} + u_{n1}^{(2)} + u_{n1}^{(3)}$$

$$i_2 = b_1 i_{S1} + b_2 u_{S2} + b_3 u_{S3} = i_2^{(1)} + i_2^{(2)} + i_2^{(3)}$$

$$i_3 = c_1 i_{S1} + c_2 u_{S2} + c_3 u_{S3} = i_3^{(1)} + i_3^{(2)} + i_3^{(3)}$$

§4.1 叠加定理

三、应用叠加定理要注意的问题

1、叠加定理只适用于线性电路。这是因为线性电路中的电压和电流都与激励（独立源）呈一次函数关系。

2、当一个独立电源单独作用时，其余独立电源都等于零（理想电压源短路，理想电流源开路）。

3、功率不能用叠加定理计算(因为功率为电压和电流的乘积，不是独立电源的一次函数)。

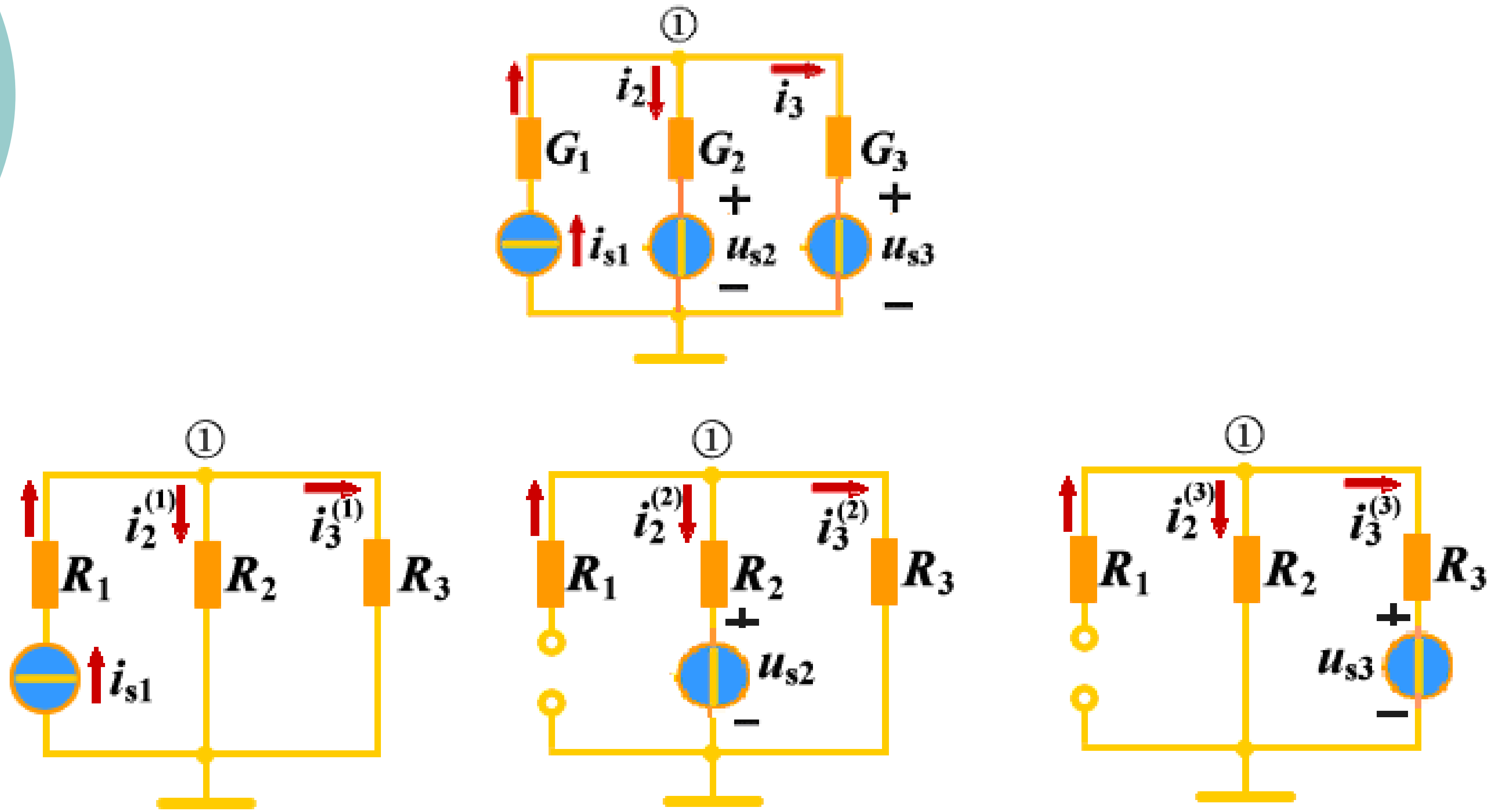
4、应用叠加定理求电压和电流是代数量的叠加，要特别注意各代数量的符号。即注意在各电源单独作用时计算的电压、电流参考方向是否一致，方向一致时相加，反之则相减。

§4.1 叠加定理

5、含受控源(线性)的电路，在使用叠加定理时，受控源不要单独作用，而应把受控源作为一般元件始终保留在电路中，这是因为受控电压源的电压和受控电流源的电流受电路的结构和各元件的参数所约束。

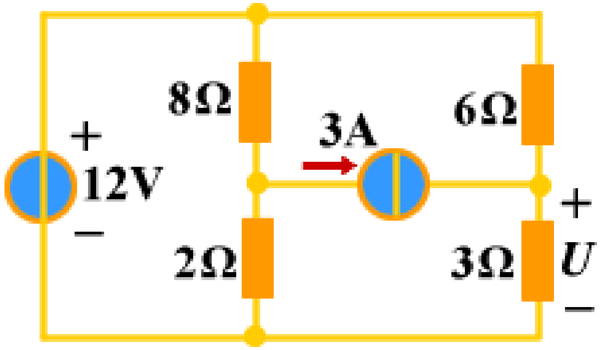
6、叠加的方式是任意的，可以一次使一个独立源单独作用，也可以一次使几个独立源同时作用，方式的选择取决于分析问题的方便。

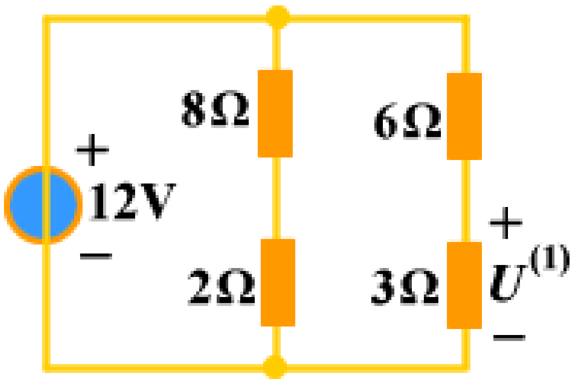
§ 4.1 叠加定理

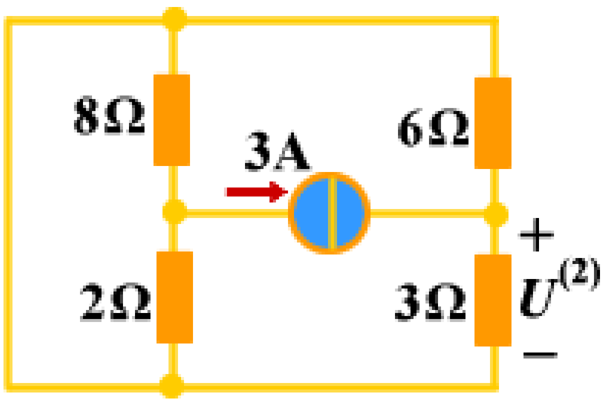


§ 4.1 叠加定理

例1、 求图示电路的电压 U。







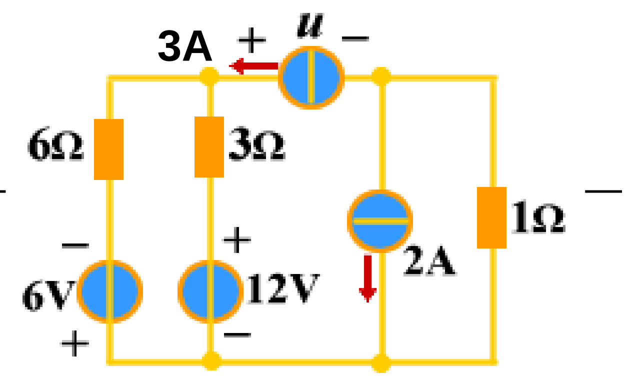
$$U^{(1)} = \frac{12}{9} \times 3 = 4V$$

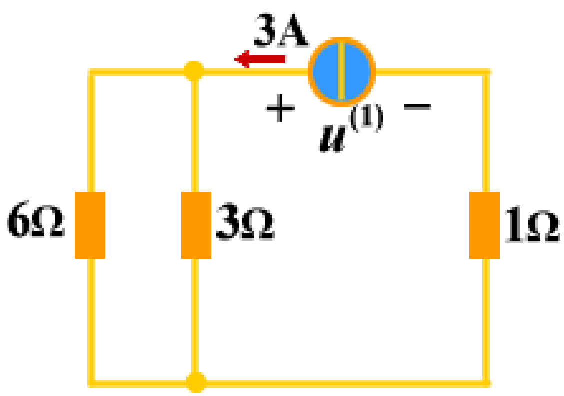
$$U^{(2)} = (6 // 3) \times 3 = 6V$$

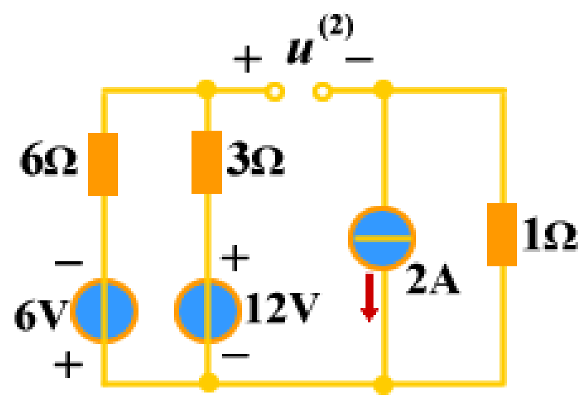
$$U = 4 + 6 = 10V$$

§4.1 叠加定理

例2、 计算图示电路的电压 u 。







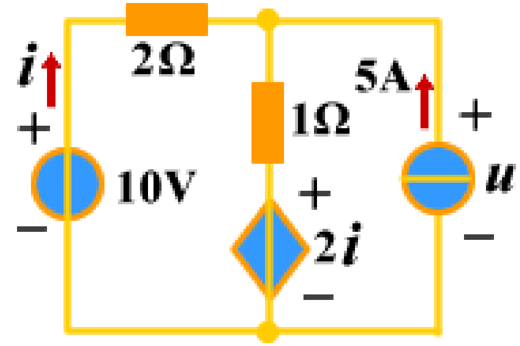
$$u^{(1)} = (6//3+1)\times 3 = 9V$$

$$i^{(2)} = (6+12)/(6+3) = 2A$$

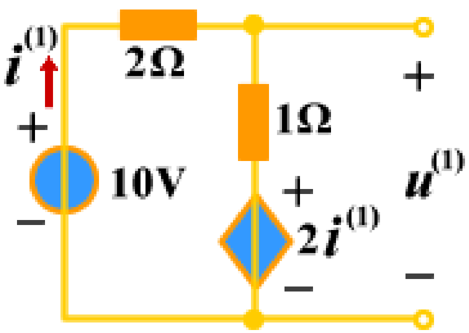
$$u^{(2)} = 6i^{(2)} - 6 + 2\times 1 = 8V$$

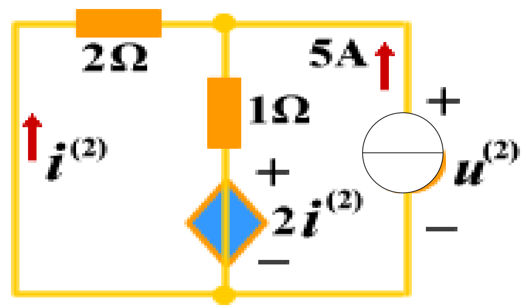
$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = 9+8 = 17V$$

§ 4.1 叠加定理



例3、计算图示电路的电压 u 电流 i 。





$$i^{(1)} = (10 - 2i^{(1)})/(2+1)$$

$$i^{(1)} = 2A$$

$$u^{(1)} = 1 \times i^{(1)} + 2i^{(1)} = 3i^{(1)} = 6V$$

$$2i^{(2)} + 1 \times (5 + i^{(2)}) + 2i^{(2)} = 0$$

$$i^{(2)} = -1A$$

$$u^{(2)} = -2i^{(2)} = -2 \times (-1) = 2V$$

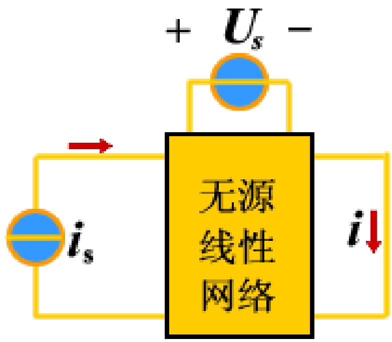
$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = 6 + 2 = 8V$$

$$i = i^{(1)} + i^{(2)} = 2 + (-1) = 1A$$

§ 4.1 叠加定理

例 4、封装好的电路如图，已知下列实验数据：当 $u_S = 1V, i_S = 1A$ 时，响应 $i = 2A$，当 $u_S = -1V, i_S = 2A$ 时，响应 $i = 1A$，求：$u_S = -3V, i_S = 5A$ 时，$i = ?$。

$$i = k_1 i_S + k_2 u_S$$



$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ 2k_1 - k_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

$$i = u_S + i_S = -3 + 5 = 2A$$

§4.1 叠加定理

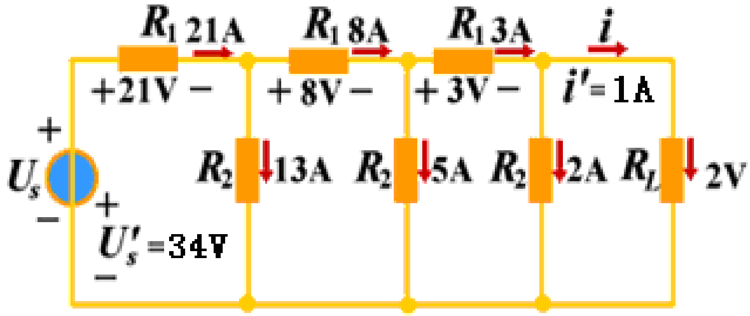
五、齐性定理（齐次定理）

齐性定理表述为：线性电路中，所有激励(独立源)都增大(或减小)同样的倍数，则电路中响应(电压或电流)也增大(或减小)同样的倍数。当激励只有一个时，则响应与激励成正比。

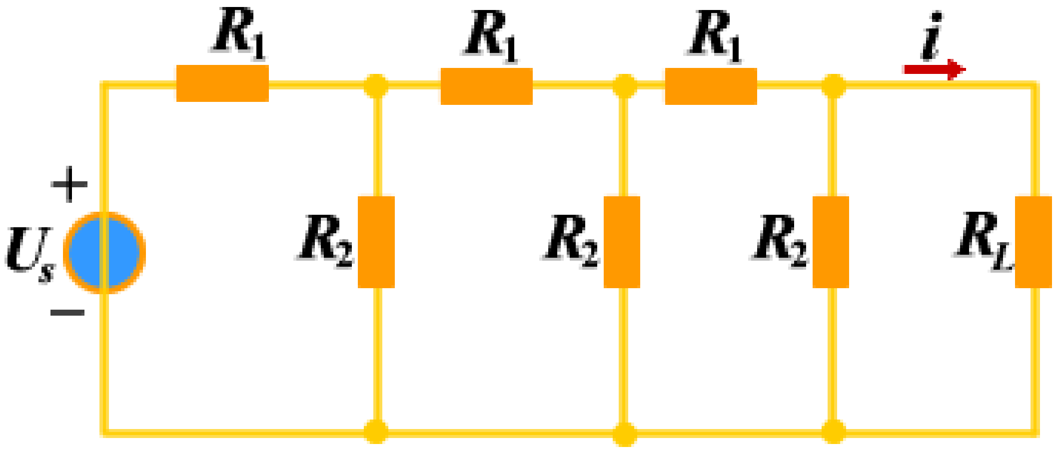
注意：（1）这里的激励是指独立电源，并且必须全部激励同时增大或缩小同样的倍数。

（2）用齐性定理分析梯形电路特别有效。

§ 4.1 叠加定理



例5、求图示电路的电流 i，已知：R_L=2 Ω　R_1=1 Ω　R_2=1 Ω　u_S =51V

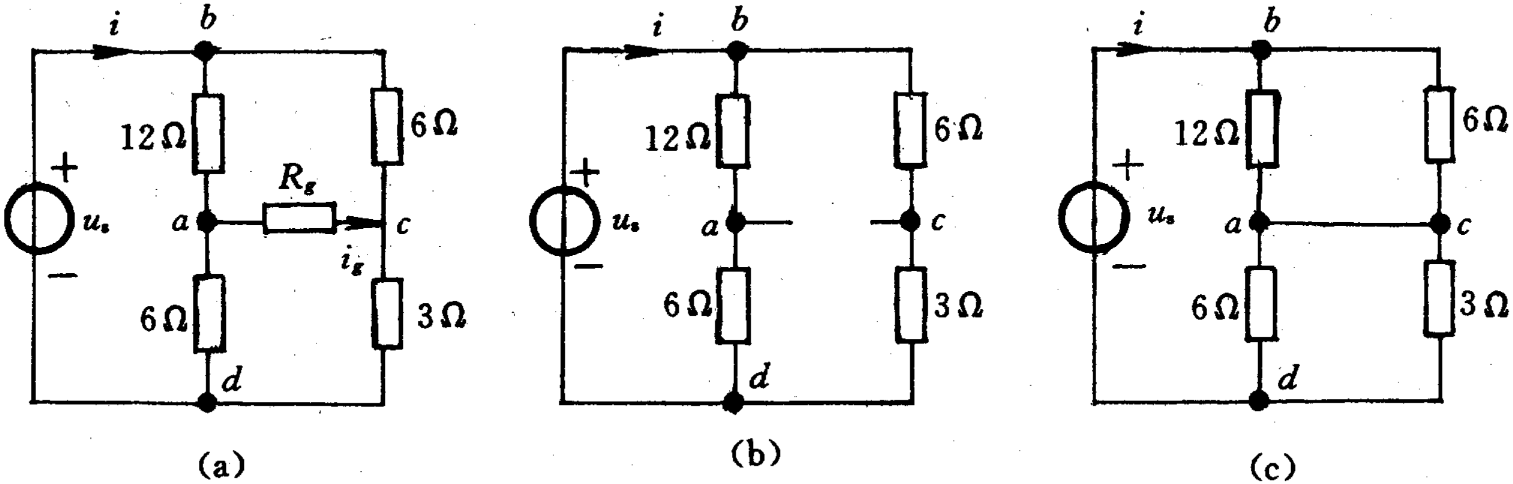


$$u_S^{'} = 34V$$

$$\frac{i}{i^{'}} = \frac{u_s}{u_s^{'}}$$

$$i = \frac{u_s}{u_s^{'}} i^{'} = \frac{51}{34} \times 1 = 1.5A$$

§4.2　替代定理



$$R_{bd} = (6+12)//(6+3) = 6\Omega$$

$$R_{bd} = 12//6+6//3 = 6\Omega$$

替代定理表述为：给定一个线性电阻电路，其中第**k**支路的电压**u$_k$**和电流**i$_k$**为已知，那么此支路就可以用一个电压等于**u$_k$**的电压源**u$_s$**，或一个电流等于**i$_k$**的电流源**i$_s$**替代，替代后电路中全部电压和电流将保持原值。

§4.2　替代定理

　换言之，替代定理又可表述为：具有唯一解的电路中，若知某支路k的电压为u_k，电流为i_k，且该支路与电路中其他支路无耦合,则无论该支路是由什么元件组成的，都可用下列任何一个元件去置换：

(1) 电压等于u_k的理想电压源；

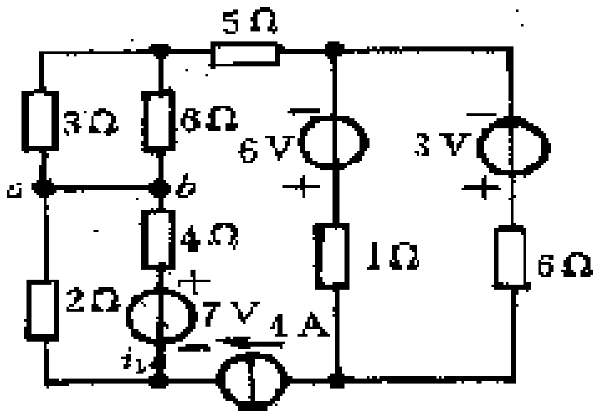
(2) 电流等于i_k的理想电流源；

(3) 阻值为u_k / i_k的电阻。

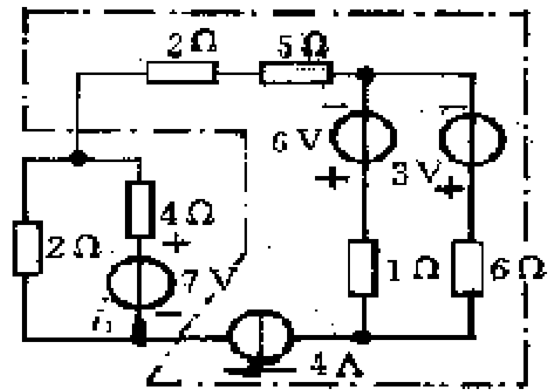
注：如果第k支路中的电压或电流为线性电阻电路中受控源的控制量，而替代后该电压或电流不复存在，则该支路不能被替代。

§4.2 替代定理

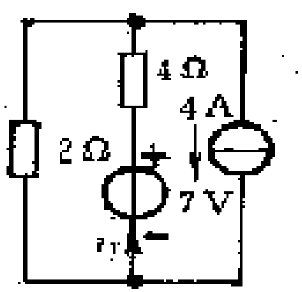
例**1**、对**(a)**图中所示电路，求电流$\boldsymbol{i_1}$。



(a)

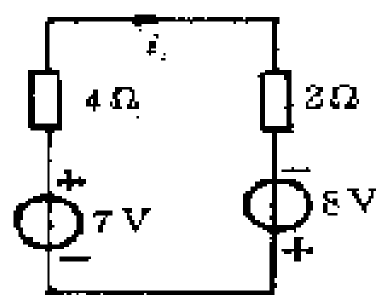


(b)



(c)

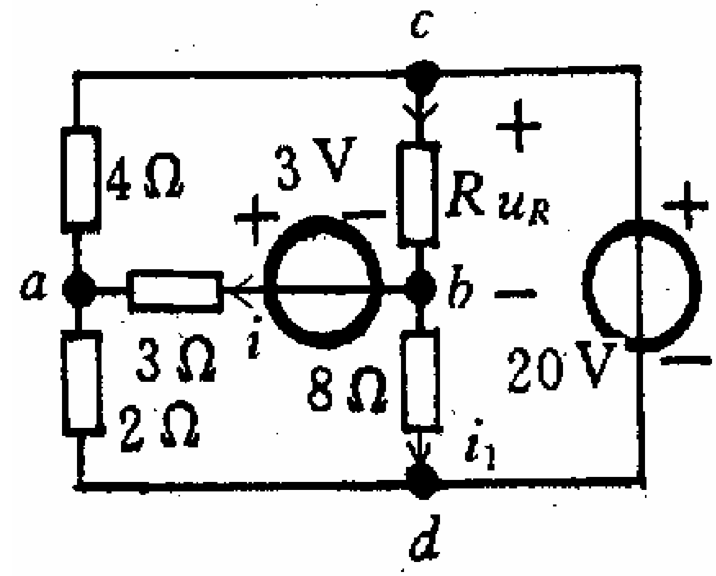
$$i_1 = \frac{7+8}{6} = 2.5A$$



(d)

§ 4.2　替代定理

例2、如(a)图中所示电路，已知$\boldsymbol{u_{ab}}$**=0**，求电阻$\boldsymbol{R}$。



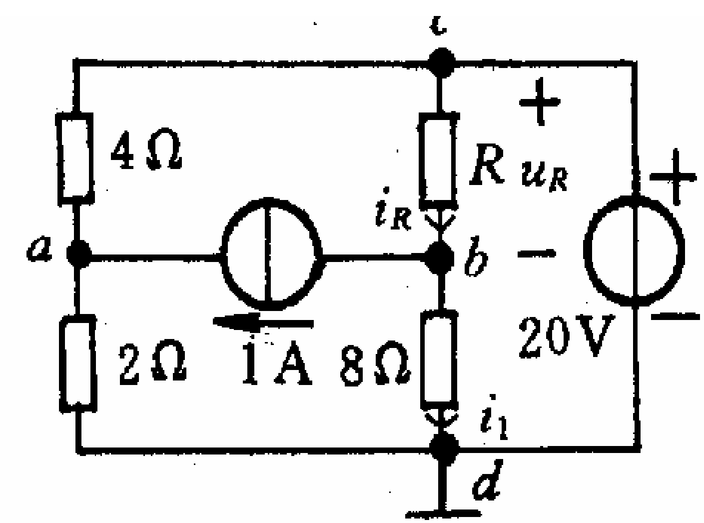
(a)

$$u_{ab} = -3i + 3 = 0 \rightarrow i = 1A$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)v_a - \frac{1}{4}\times 20 = 1$$

$$v_a = 8V$$

因$\mathbf{u_{ab}=0}$，所以$\mathbf{v_b=v_a=8V}$



(b)

$$i_1 = \frac{v_b}{8} = \frac{8}{8} = 1A$$

$$i_R = i_1 + i = 1 + 1 = 2A$$

$$u_R = v_c - v_b = 20 - 8 = 12V$$

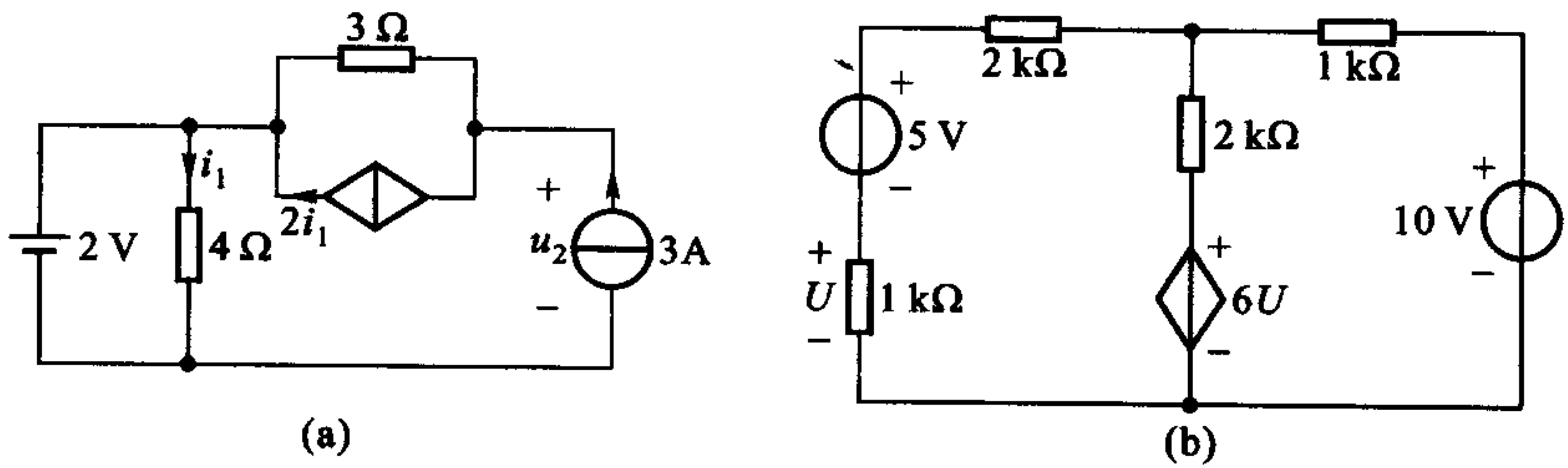
$$R = \frac{u_R}{i_R} = \frac{12}{2} = 6\Omega$$

§4.2　替代定理

4－4　应用叠加定理求：

(1) 题 4－4 图(a)中电压 u_2；

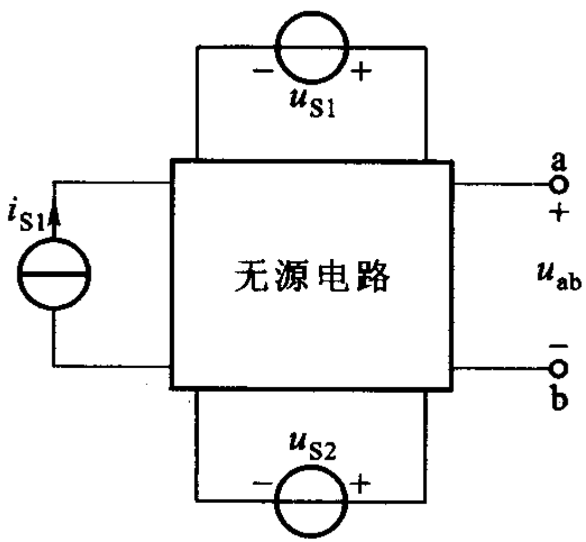
(2) 题 4－4 图(b)中电压 U。



题 4－4 图

§ 4.2　替代定理

4-7　题 4－7 图所示电路中，当电流源 i_{S1} 和电压源 u_{S1} 反向时（u_{S2} 不变），电压 u_{ab} 是原来 0.5 倍；当 i_{S1} 和 u_{S2} 反向时（u_{S1} 不变），电压 u_{ab} 是原来的 0.3 倍。问：仅 i_{S1} 反向（u_{S1}、u_{S2} 均不变）时，电压 u_{ab} 应为原来的几倍？

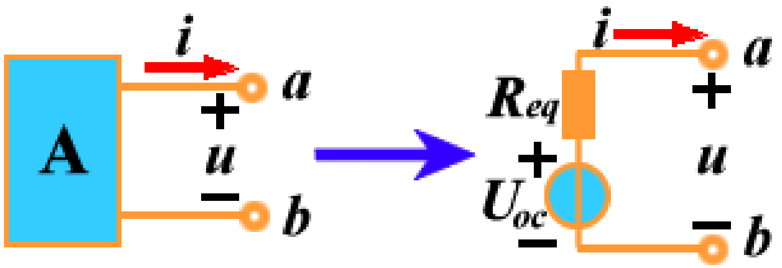


题 4－7 图

§4.3　戴维宁定理和诺顿定理

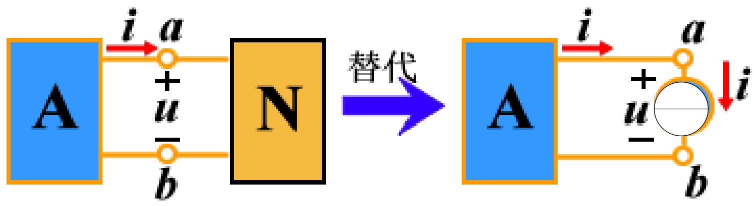
一、戴维宁定理的内容

戴维宁定理表述为：一个含独立电源、线性电阻和受控源的一端口，对外电路来说，可以用一个电压源和电阻的串联组合等效置换，此电压源的电压等于一端口的开路电压，电阻等于一端口的全部独立电源置零后的输入电阻。



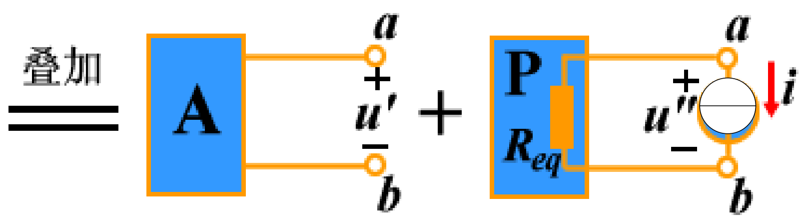
§4.3　戴维宁定理和诺顿定理

二、定理的证明



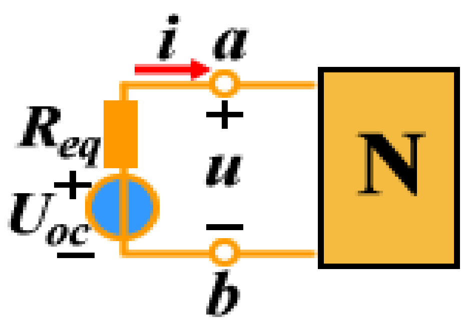
(a)　　　　(b)

$$u = u' + u''$$



$$u' = u_{oc}$$

$$u'' = -R_{eq} i$$



$$u = u' + u'' = u_{oc} - R_{eq} i$$

§4.3　戴维宁定理和诺顿定理

三、应用戴维宁定理要注意的问题

1、含源一端口网络所接的外电路可以是任意的线性或非线性电路，外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变。

2、当含源一端口网络内部含有受控源时，控制电路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。

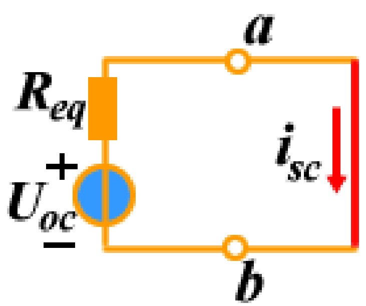
3、开路电压u_{oc}的计算

4、等效电阻的计算

1)当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联和△－ **Y** 互换的方法计算等效电阻；

2)外加电源法（加电压求电流或加电流求电压）。

<u>电路中的独立电源要置零</u>



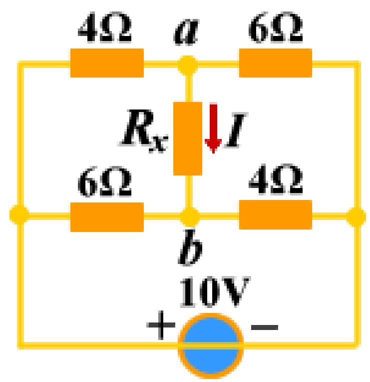
3)开路电压，短路电流法。

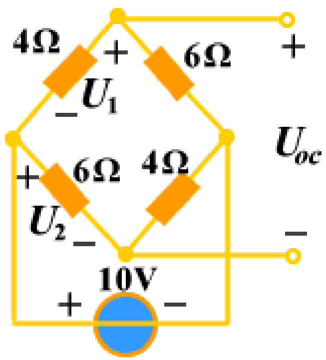
$$R_{eq}=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}$$

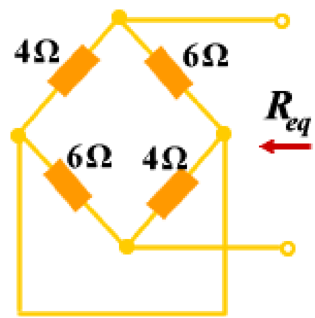
<u>电路中的独立电源要保留</u>

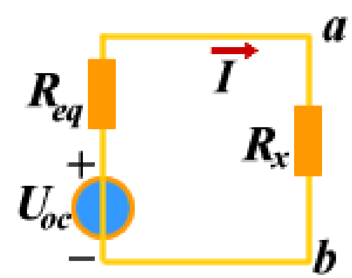
§4.3 戴维宁定理和诺顿定理

例1、计算图示电路中R_x分别为1.2Ω、5.2Ω时的电流 I；









$$U_{oc} = U_1 + U_2 = -\frac{10\times4}{4+6} + \frac{10\times6}{4+6} = -4+6 = 2V$$

$$R_{eq} = 4 /\!/ 6 + 4 /\!/ 6 = 4.8\Omega$$

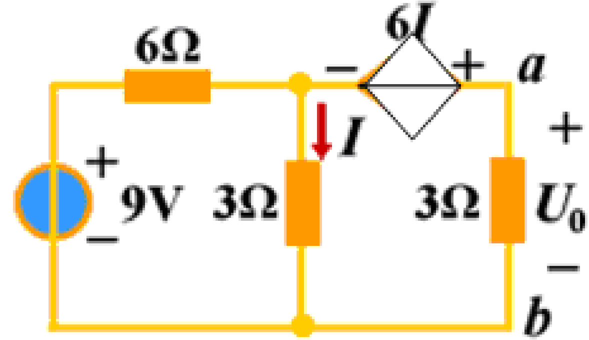
当 Rx=1.2Ω时

$$I = \frac{U_{oc}}{R_{eq}+R_x} = \frac{2}{4.8+1.2} = \frac{1}{3}A$$

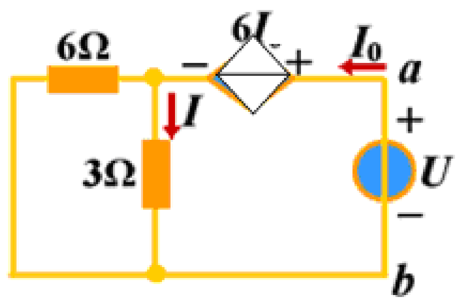
当 Rx =5.2Ω时

$$I = \frac{U_{oc}}{R_{eq}+R_x} = \frac{2}{4.8+5.2} = 0.2A$$

§4.3 戴维宁定理和



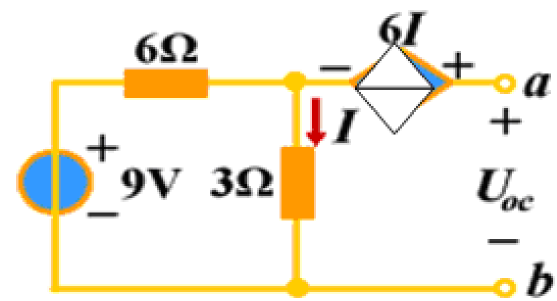
例**2**、计算图示电路中的电压$\boldsymbol{U_0}$ 。



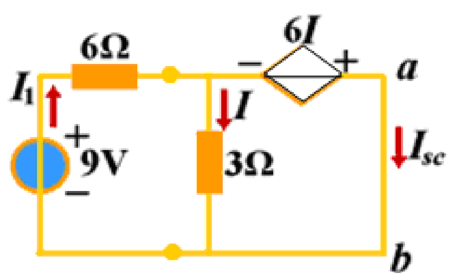
$$\begin{cases} U = 6I + 3I = 9I \\ I = \dfrac{2}{3} I_0 \end{cases}$$

$$U = 9 \times \frac{2}{3} I_0 = 6I_0$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I_0} = 6\Omega$$



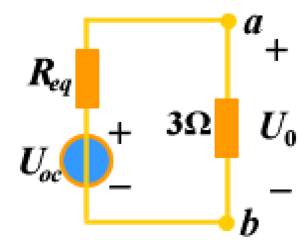
$$U_{oc} = 6I + 3I = 9I = 9 \times 9/9 = 9V$$



$$6I + 3I = 0$$

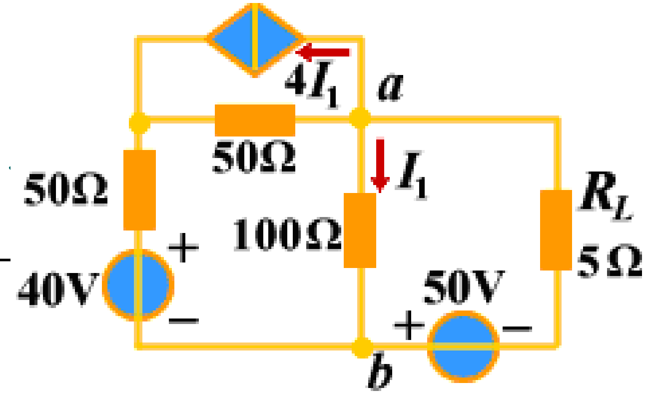
$$I_{SC} = 9/6 = 1.5A$$

$$R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{SC}} = \frac{9}{1.5} = 6\Omega$$

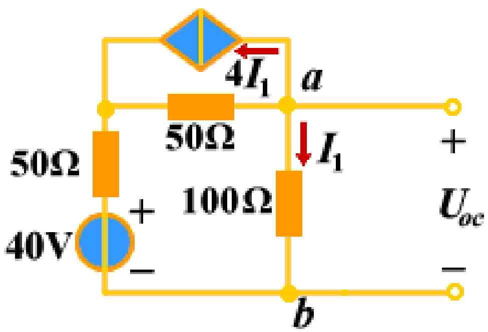


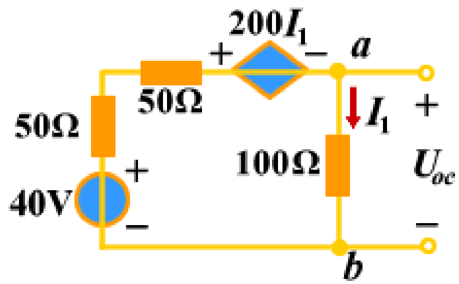
$$U_0 = \frac{9}{R_{eq} + 3} \times 3 = \frac{9}{6+3} \times 3 = 3V$$

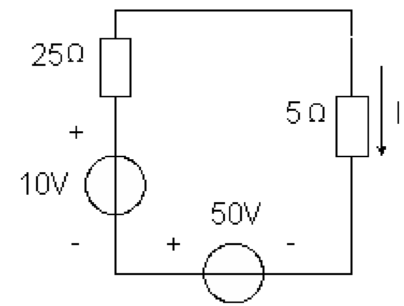
§ 4.3　戴维宁定理和



例3、求图示电路中负载 R_L 消耗的功率。

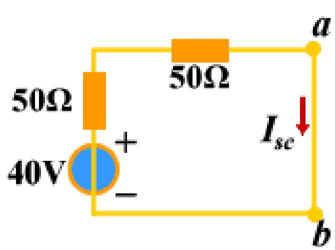






$$100I_1 + 200I_1 + 100I_1 = 40$$

$$I_1 = 0.1A \qquad U_{oc} = 100I_1 = 10V$$



$$I_{sc} = 40/100 = 0.4A$$

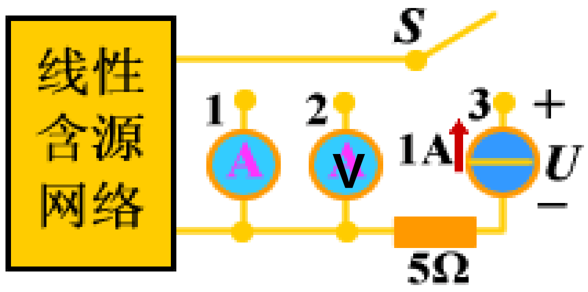
$$R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = 10/0.4 = 25\Omega$$

$$I_L = \frac{U_{oc}+50}{25+5} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$P_L = 5I_L^2 = 5\times4 = 20W$$

§4.3 戴维宁定理和诺顿定理

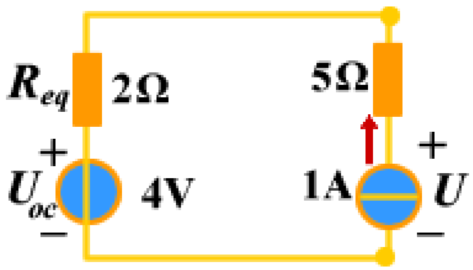
例4、电路如图所示，已知开关S扳向1，电流表读数为2A；开关S扳向2，电压表读数为4V；求开关S扳向3后，电压*U* 等于多少？



$$i_{Sc} = 2A \quad U_{oc} = 4V$$

$$R_{eq} = 2\Omega$$

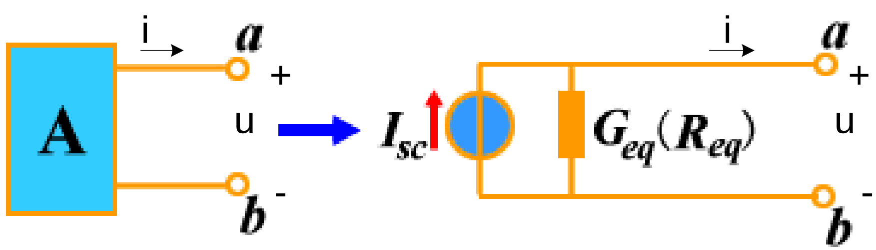
$$U = (2+5)\times 1 + 4 = 11V$$



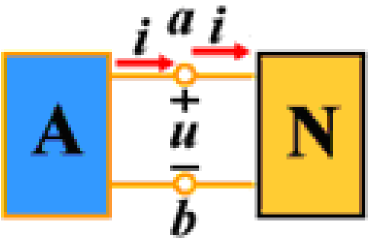
§4.3　戴维宁定理和诺顿定理

五、诺顿定理的内容

诺顿定理表述为：任何一个含源线性一端口电路，对外电路来说，可以用一个电流源和电导 (电阻)的并联组合来等效置换；电流源的电流等于该一端口的短路电流，而电导(电阻)等于把该一端口的全部独立电源置零后的输入电导(电阻)。



§4.3　戴维宁定理和诺顿定理

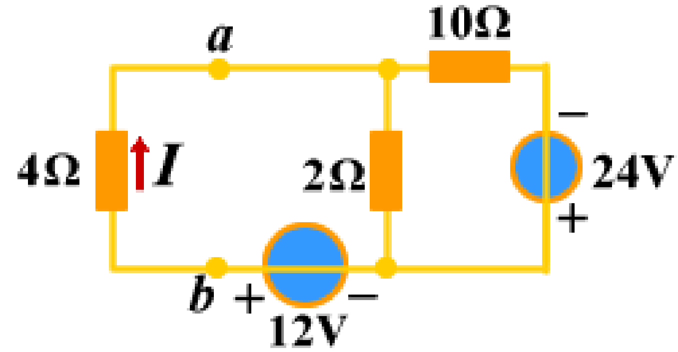


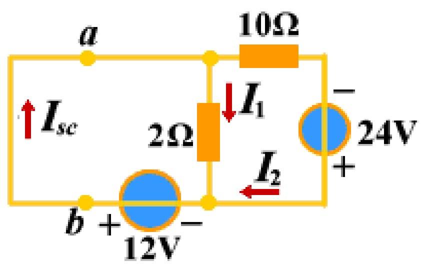
含源一端口A：电压u与电流i取的是非关联参考方向；

负载网络N：电压与电流是关联参考方向。

§4.3　戴维宁定理和诺顿定理

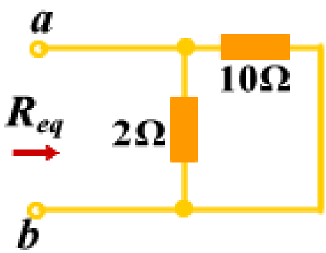
例1、应用诺顿定理求图示电路中的电流 I 。



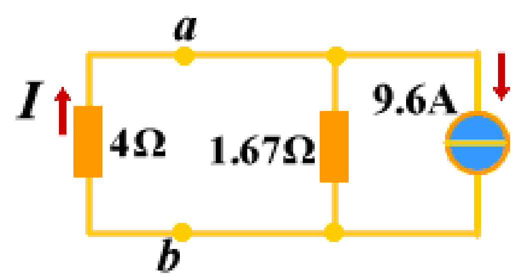


$$I_1 = \frac{12}{2} = 6A \qquad I_2 = \frac{24+12}{10} = 3.6A$$

$$I_{SC} = I_1 + I_2 = 9.6A$$



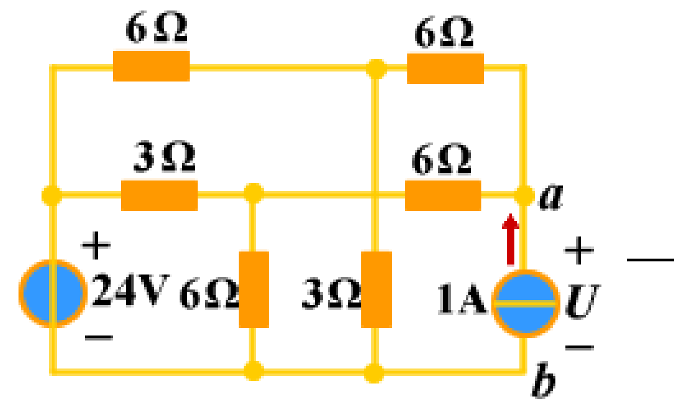
$$R_{eq} = 10 // 2 = 1.67\Omega$$

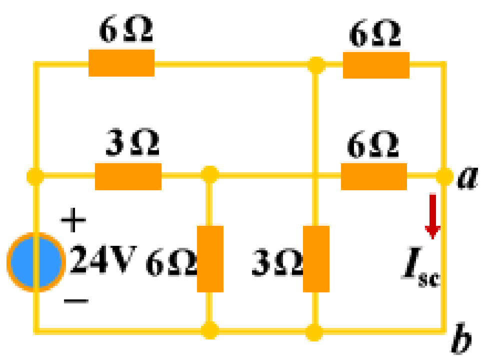


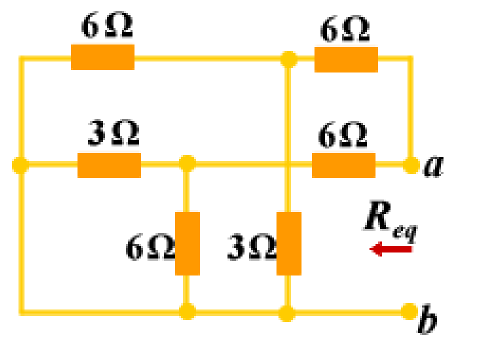
$$I = \frac{9.6\times1.67}{4+1.67} = 2.83A$$

§ 4.3 戴维宁定理

例2、求图示电路中的电压 ***U*** 。

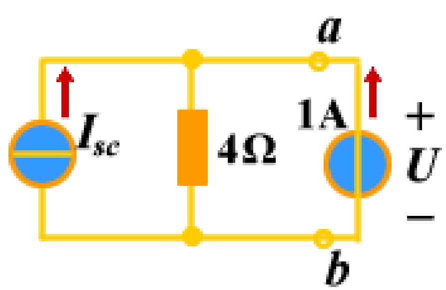






$$I_{sc}=\frac{24}{6//6+3}\times\frac{1}{2}+\frac{24}{3//6+6}\times\frac{3}{3+6}=3A$$

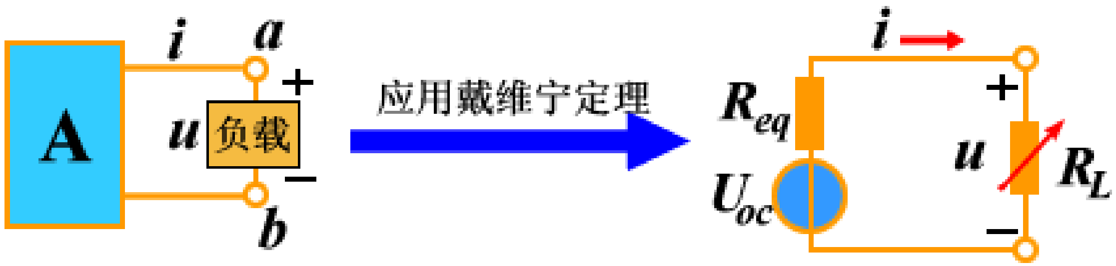
$$R_{eq}=[6//3+6]//[3//6+6]=4\Omega$$



$$U=(3+1)\times4=16V$$

§4.4 最大功率传输定理

将含源一端口电路等效成戴维宁电源模型，如下图所示。



由图可知

$$i = \frac{u_{OC}}{R_{eq} + R_L}$$

电源传给负载R_L的功率为:

$$P_L = R_L i^2 = R_L \left(\frac{u_{OC}}{R_{eq} + R_L} \right)^2$$

为了找P_L的极值点，令 $dP_L / dR_L = 0$ ，即

$$\frac{dP_L}{dR_L} = u_{OC}^2 \frac{(R_L + R_{eq})^2 - 2R_L (R_L + R_{eq})}{(R_L + R_{eq})^4} = 0$$

解上式得:

$$R_L = R_{eq}$$

§4.4 最大功率传输定理

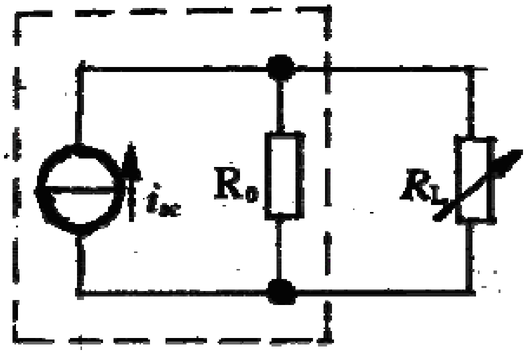
结论：有源线性一端口电路传输给负载的最大功率条件是：负载电阻R_L等于一端口电路的等效内阻。通常称这一条件为最大功率匹配条件。

负载获取的最大功率为：

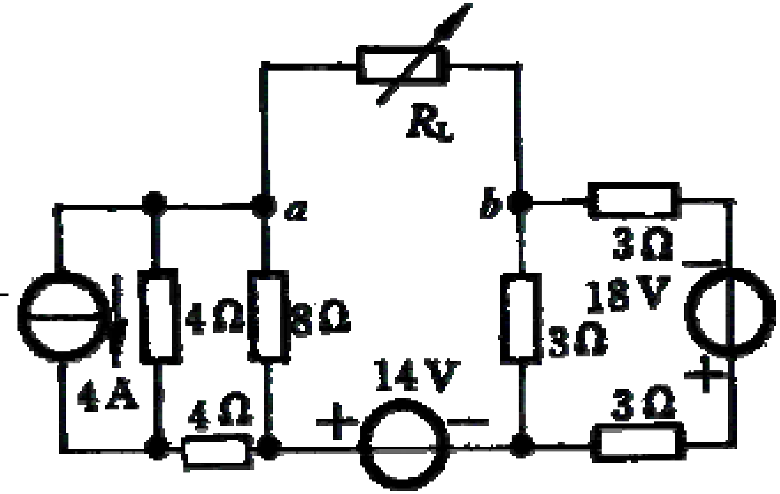
$$P_{L\max} = \frac{u_{OC}^2}{4R_{eq}}$$

若含源一端口电路等效成诺顿电路模型，可得匹配时负载获得的最大功率为：

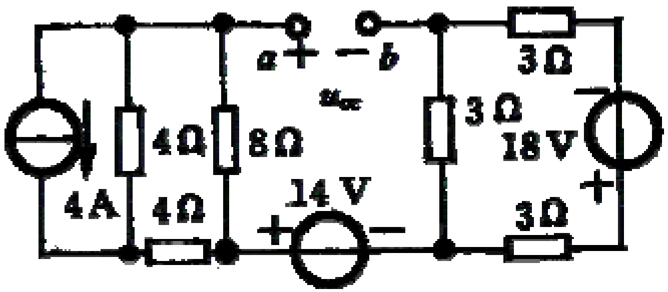
$$P_{L\max} = \frac{1}{4}R_{eq}i_{sc}^2$$

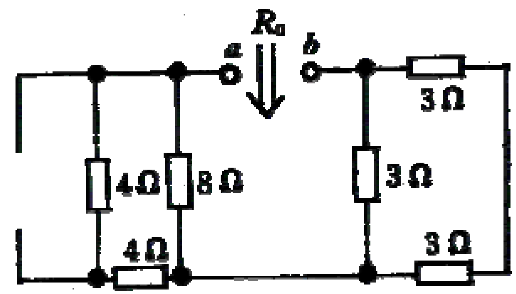


§ 4.4 最大功率传输定理



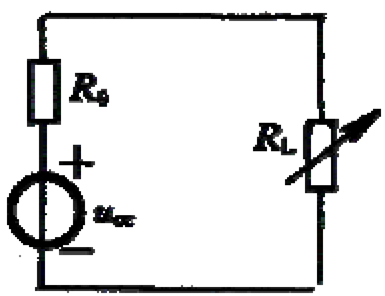
例1、若负载R_L可以任意改变，问负载为何值时其上获得的功率为最大？并求出此时负载上得到的最大功率P_{Lmax}。





$$u_{oc}=-(\frac{4}{4+4+8}\times 4)\times 8+14+\frac{3}{3+3+3}\times 18=12V$$

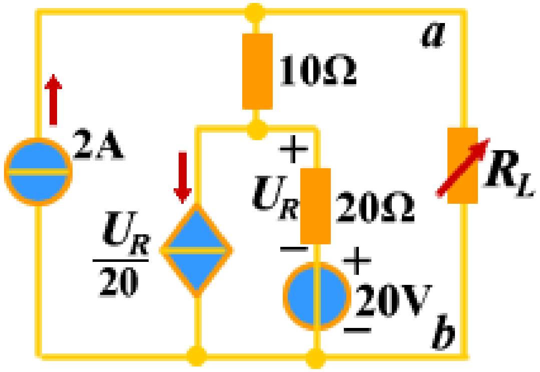
$$R_{eq}=(4+4)//8+3//(3+3)=6\Omega$$



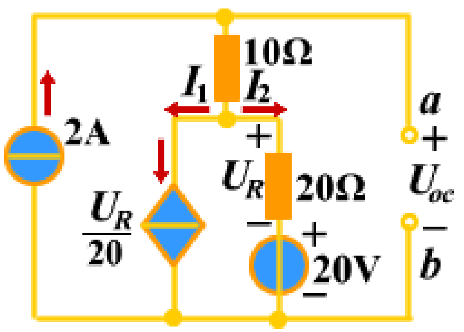
$$R_L=R_{eq}=6\Omega$$

$$P_{L\max}=\frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}=\frac{12^2}{4\times 6}=6W$$

§4.4 最大功率传输定理



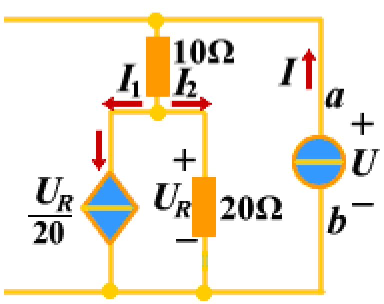
例2、右图中负载电阻R_L可任意改变。问R_L为何值时其上获得最大功率？并求出该最大功率P_{Lmax}。



$$i_1 = \frac{u_R}{20} \qquad i_2 = \frac{u_R}{20}$$

$$i_1 + i_2 = 2A \qquad i_1 = i_2 = 1A$$

$$u_{OC} = 2\times 10 + 20 i_1 + 20 = 60V$$



$$i_1 = i_2 = \frac{1}{2} i$$

$$u = 10i + 20\times\frac{1}{2} i = 20i$$

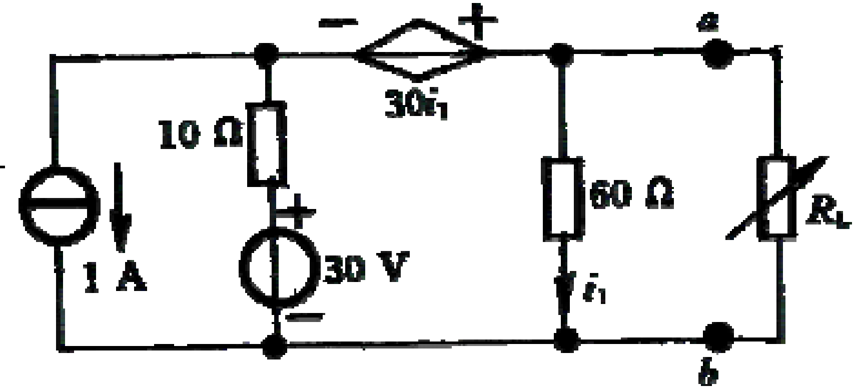
$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 20\Omega$$

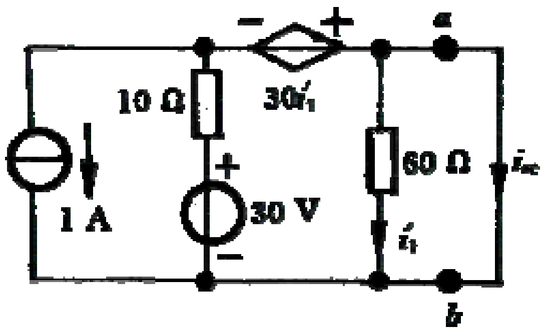
$$R_L = R_{eq} = 20\Omega$$

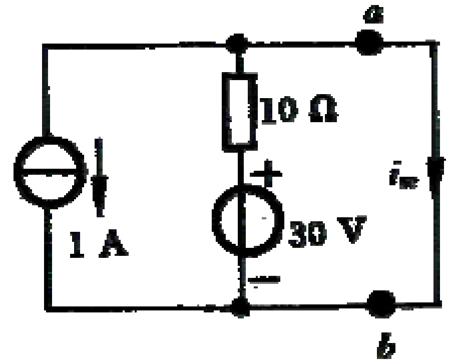
$$P_{L\max} = \frac{u_{OC}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4\times 20} = 45W$$

§ 4.4 最大功率传输定理

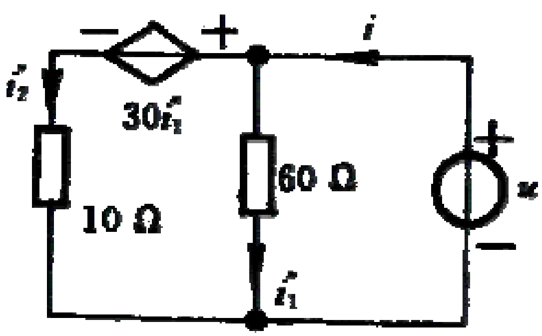
例3、负载电阻R_L可任意改变，问R_L＝？时其上获最大功率，并求出该最大功率$P_{L\max}$。







$$i_{SC} = \frac{30}{10} - 1 = 2A$$



$$i_1' = \frac{1}{60}u$$

$$i_2' = \frac{u - 30i_1'}{10} = \frac{u - 30\times\frac{1}{60}u}{10} = \frac{1}{20}u$$

$$i = i_1' + i_2' = \frac{1}{60}u + \frac{1}{20}u = \frac{2}{30}u$$

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 15\Omega$$

$$R_L = R_{eq} = 15\Omega$$

$$P_{L\max} = \frac{1}{4}R_{eq}i_{SC}^2 = \frac{1}{4}\times 15\times 2^2 = 15W$$

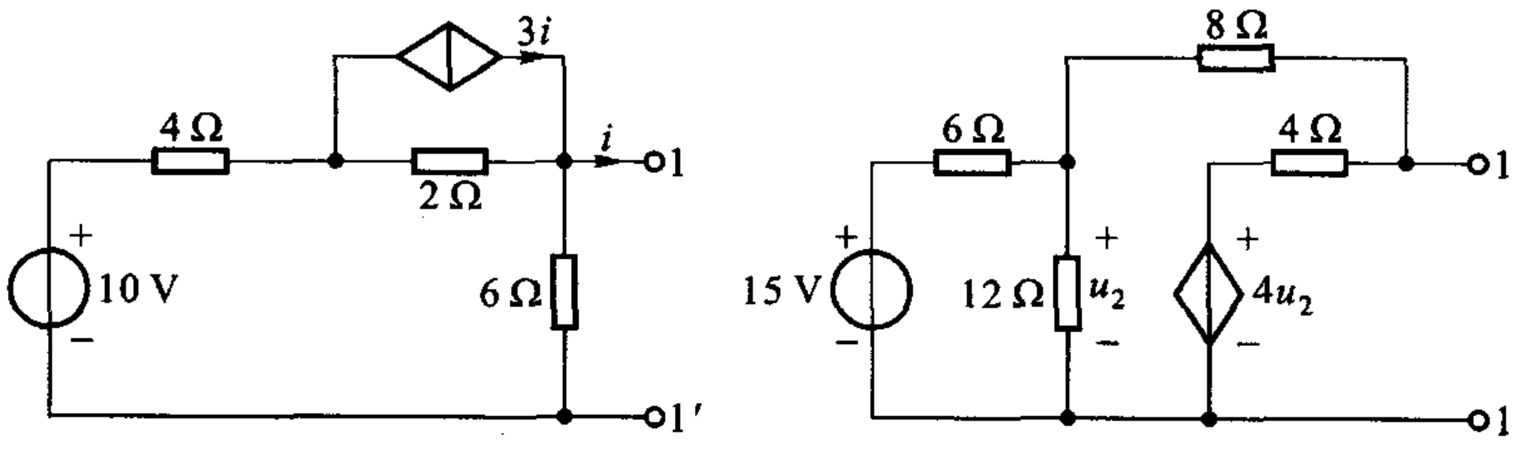
§4.4 最大功率传输定理

最后，需要说明：

最大功率传输定理用于一端口电路给定，负载电阻可调的情况。如果R_S可变而R_L固定，则应使R_S尽量减小，才能使R_L获得的功率增大，当R_S＝0时，R_L获得最大功率。

§ 4.4 最大功率传输定理

4-13 求题 4 - 13 图所示两个一端口的戴维宁或诺顿等效电路，并解释所得结果。

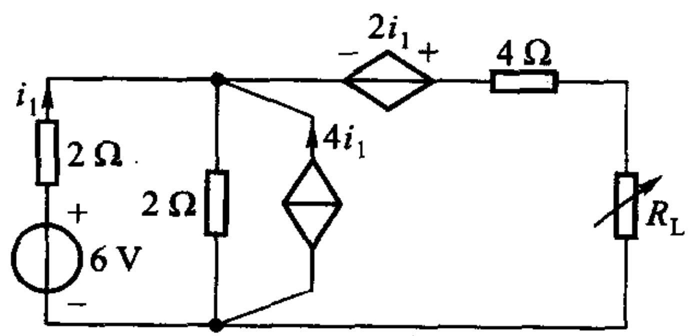


(a) (b)

题 4 - 13 图

§ 4.4 最大功率传输定理

4-17 题 4－17 图所示电路的负载电阻 R_L 可变，试问 R_L 等于何值时可吸收最大功率？求此功率。



题 4－17 图

§4.5 特勒根定理

一、特勒根定理1——功率守恒

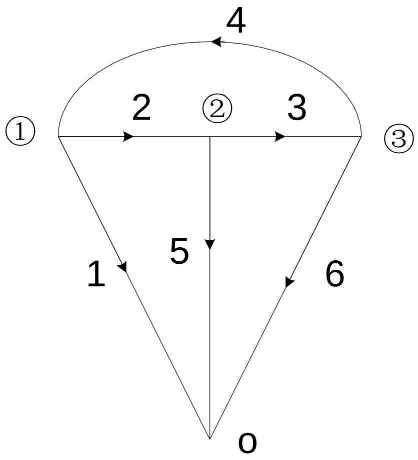
特勒根定理1表述为：对于一个具有**n**个结点和**b**条支路的集总电路，任何时刻，在各支路电流i_k和电压u_k取关联参考方向下，各支路电压与支路电流的乘积的代数和恒等于零。此定理可用下式表示为：

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

§4.5 特勒根定理

即：n个结点，b条支路 $\begin{cases} 支路电流 i_1、i_2、\ldots\ldots i_b \\ 之路电压 u_1、u_2、\ldots\ldots u_b \end{cases}$ 对任何时间t，取关联参考方向，有

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$



证明：

$$\begin{cases} u_1 = u_{n1} \\ u_2 = u_{n1} - u_{n2} \\ u_3 = u_{n2} - u_{n3} \\ u_4 = -u_{n1} + u_{n3} \\ u_5 = u_{n2} \\ u_6 = u_{n3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_4 = 0 \\ -i_2 + i_3 + i_5 = 0 \\ -i_3 + i_4 + i_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{6} u_k i_k &= u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 + u_6 i_6 \\ &= u_{n1} i_1 + (u_{n1} - u_{n2}) i_2 + (u_{n2} - u_{n3}) i_3 + (-u_{n1} + u_{n3}) i_4 + u_{n2} i_5 + u_{n3} i_6 \\ &= u_{n1}(i_1 + i_2 - i_4) + u_{n2}(-i_2 + i_3 + i_5) + u_{n3}(-i_3 + i_4 + i_6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

§4.5 特勒根定理

1、上述证明可推广至任何具有n个结点和b条支路的电路。

2、在证明过程中，只根据电路的拓扑性质应用了基尔霍夫定律，并不涉及支路的内容，因此特勒根定理对任何集总电路都适用。

3、这个定理实质上是功率守恒的数学表达式，它表明任何一个电路的全部支路吸收的功率之和恒等于零。

§4.5 特勒根定理

二、特勒根定理2——拟功率守恒

特勒根定理2表述为：对于两个具有**n**个结点和**b**条支路的集总电路**N** 和 $\hat{N}$，当它们具有相同的拓扑图，但对应的支路的组成和参数不同，任何时刻，在两个电路的支路电流和电压u_k与i_k之间分别取关联参考方向下，两电路中相对应的支路电压与支路电流的乘积的代数和恒等于零。可用下式表示为，

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 \end{cases}$$

§4.5 特勒根定理

即：两个具有**n**个结点，**b**条支路的电路

$$\begin{cases} 支路电流(i_1、i_2 ......i_b)(\hat{i}_1、\hat{i}_2 ......\hat{i}_b) \\ 之路电压(u_1、u_2 ......u_3)(\hat{u}_1、\hat{u}_2 ......\hat{u}_b) \end{cases}$$

具有相同的图，支路构成内容不同，对任何时间**t**，取关联参考方向，有

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 \end{cases}$$

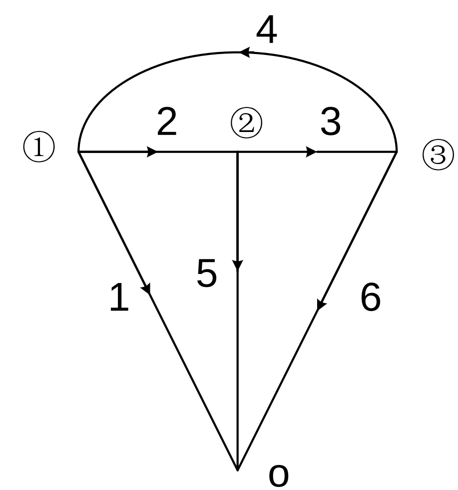
§ 4.5 特勒根定理

对电路1有

$$\begin{cases} u_1 = u_{n1} \\ u_2 = u_{n1} - u_{n2} \\ u_3 = u_{n2} - u_{n3} \\ u_4 = -u_{n1} + u_{n3} \\ u_5 = u_{n2} \\ u_6 = u_{n3} \end{cases}$$

对电路2有

$$\begin{cases} \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{i}_4 = 0 \\ -\hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_5 = 0 \\ -\hat{i}_3 + \hat{i}_4 + \hat{i}_6 = 0 \end{cases}$$



得

$$\sum_{k=1}^{6} u_k \hat{i}_k = u_{n1}(\hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{i}_4) + u_{n2}(-\hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_5) + u_{n3}(-\hat{i}_3 + \hat{i}_4 + \hat{i}_6) = 0$$

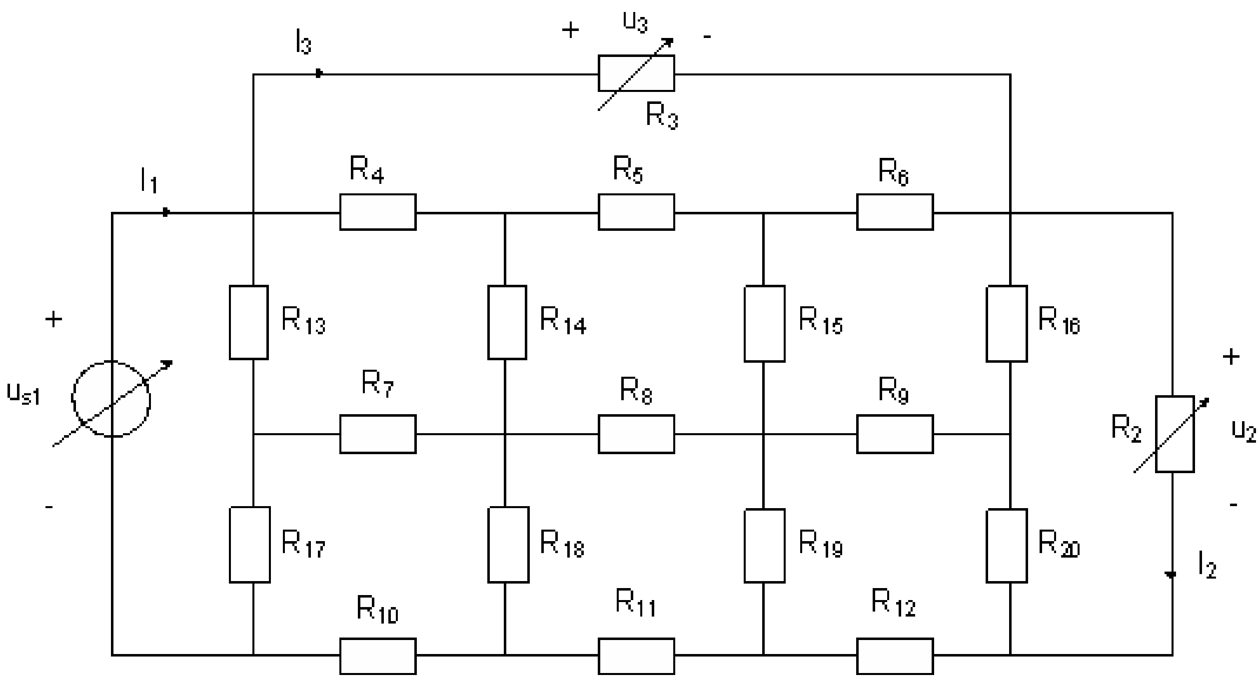
1. 此证明可推广到任何具有n个结点和b条支路的两个电路，只要它们具有相同的图。
2. 定理2不能用功率守恒解释，它是针对两个电路而言的，但由于它仍具有功率之和的形式，故又称之为“拟功率定理”。
3. 定理2对支路的内容没有任何限制，它是普遍适用的定理。

§ 4.5 特勒根定理

例：第一次调节 $\begin{cases} u_{s1} = 3V, R_2 = 20\Omega, R_3 = 5\Omega \\ I_1 = 1.2A, u_2 = 2V, I_3 = 0.2A \end{cases}$

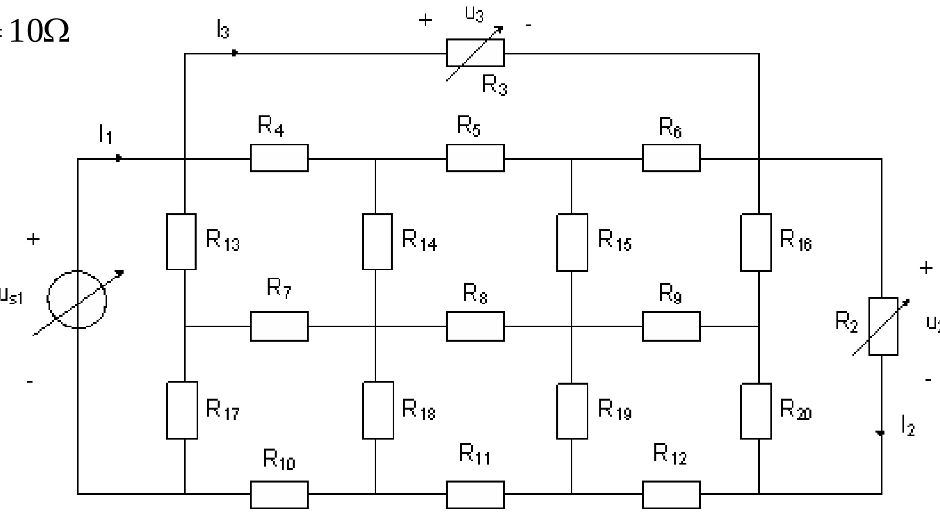
第二次调节 $\begin{cases} \hat{u}_{s1} = 5V, \hat{R}_2 = 10\Omega, \hat{R}_3 = 10\Omega \\ \hat{I}_1 = 2A, \hat{u}_3 = 2V \end{cases}$

求第二种情况下的 $\hat{I}_2 = ?$



$$\begin{cases} u_{s1} = 3V, R_2 = 20\Omega, R_3 = 5\Omega \\ I_1 = 1.2A, u_2 = 2V, I_3 = 0.2A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_{s1} = 5V, \hat{R}_2 = 10\Omega, \hat{R}_3 = 10\Omega \\ \hat{I}_1 = 2A, \hat{u}_3 = 2V \end{cases}$$



§ 4.5 特勒根定理

根据特勒根定理2有

$$\sum_{k=1}^{20} u_k \hat{I}_k = 0$$

$$-u_{s1}\hat{I}_1 + u_2\hat{I}_2 + u_3\hat{I}_3 + \sum_{k=4}^{20} u_k \hat{I}_k = 0$$

另有

$$\sum_{k=1}^{20} \hat{u}_k I_k = 0$$

$$-\hat{u}_{s1} I_1 + \hat{u}_2 I_2 + \hat{u}_3 I_3 + \sum_{k=4}^{20} \hat{u}_k I_k = 0$$

当k≥4时

$$u_k \hat{I}_k = R_k I_k \hat{I}_k$$

$$\hat{u}_k I_k = R_k \hat{I}_k I_k$$

$$\sum_{k=4}^{20} u_k \hat{I}_k = \sum_{k=4}^{20} \hat{u}_k I_k$$

$$-u_{s1}\hat{I}_1 + u_2\hat{I}_2 + u_3\hat{I}_3 = -\hat{u}_{s1} I_1 + \hat{u}_2 I_2 + \hat{u}_3 I_3$$

$$-3\times 2 + 2\hat{I}_2 + 0.2 = -5\times 1.2 + 10\hat{I}_2 \times 0.1 + 2\times 0.2$$

$$\hat{I}_2 = 0.2A$$

§4.5 特勒根定理

应用特勒根定理要注意的问题：

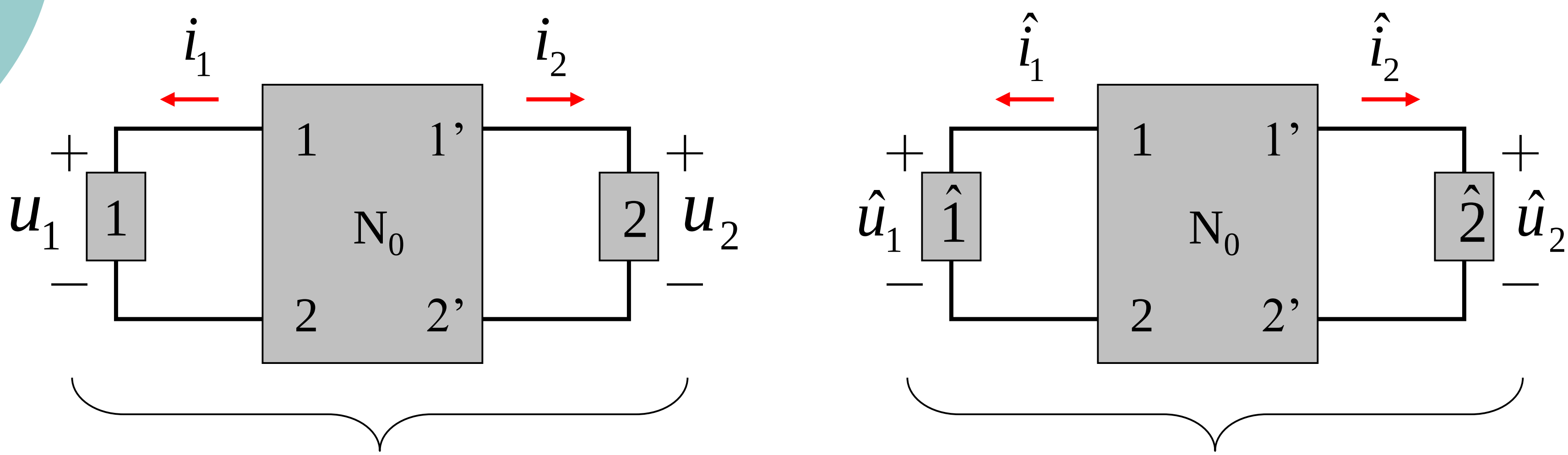
1、定理的正确性与元件的特征全然无关，因此特勒根定理对任何线性、非线性、时不变、时变元件的集总电路都适用。定理实质上是功率守恒的数学表达。

2、电路中的支路电压必须满足**KVL**，支路电流必须满足**KCl**，支路电压和支路电流必须满足关联参考方向（否则公式中加负号）。

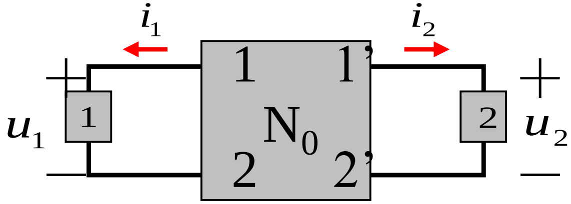
<u>特勒根定理、**KVL**、**KCL**是电路的基本定律，三者之间，用任何两个可推出另一个。</u>

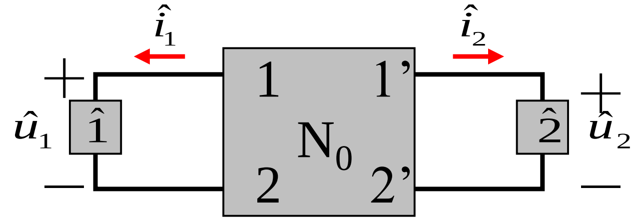
§4.6 互易网络和互易定理

一、互易网络(互易二端口)



（a）网络 N　　　　（b）网络 $\hat{N}$





§ 4.6 互易网络和互易定理

互易网络定义：由一个二端口N_0组成的两个网络N和 $\hat{N}$，支路1、支路2具有不同的伏安关系。根据特勒根定理，有

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \quad \text{或} \quad u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 \quad \text{或} \quad \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k = 0 \end{cases}$$

若网络N_0满足

$$\sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k = \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k$$

则有

$$\boxed{u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2}$$

满足上述关系式的二端口N_0称为互易网络。

§ 4.6 互易网络和互易定理

（1）当N_0仅由线性电阻构成时，二端口N_0是互易的(reciprocal)。亦即，电阻二端口网络是互易网络。

【证明】当方框内部（即网络N_0）仅为线性电阻时，有

$$u_k = R_k i_k \ , \ \hat{u}_k = R_k \hat{i}_k \quad (k = 3, 4, 5, \cdots b)$$

于是，

$$\begin{cases} \sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k = \sum_{k=3}^{b} R_k i_k \hat{i}_k \\ \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k = \sum_{k=3}^{b} R_k \hat{i}_k i_k \end{cases}$$

故有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

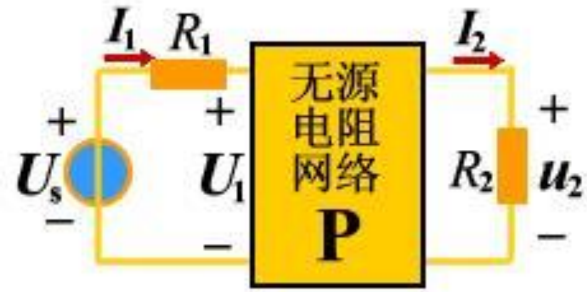
所以，电阻组成的二端口为互易网络。

§4.6 互易网络和互易定理

（2）当N_0含有受控源时，一般来说N_0 是非互易(nonreciprocal)的。亦即，含受控源的二端口一般是非互易网络（当然在一定条件下，也可能是互易网络．参见例5）。

§4.6 互易网络和互易定理

例1 图示电路中已知：（1）$R_1=R_2=2\Omega, Us=8V$ 时,$I_1=2A$,$U_2=2V$ ，（2）$R_1=1.4\Omega$, $R_2=0.8\Omega$, $Us=9V$ 时，$I_1=3A$, 求此时的U_2 。



$$U_1(-\hat{I}_1)+U_2\hat{I}_2=\hat{U}_1(-I_1)+\hat{U}_2 I_2$$

由（1）得：　$U_1=U_S-R_1I_1=4V, I_1=2A, U_2=2V, I_2=U_2/R_2=1A$

由（2）得：　$\hat{U}_1=9-3\times1.4=4.8V,\ \hat{I}_1=3A,\ \hat{I}_2=\hat{U}_2/R_2=(5/4)\hat{U}_2$

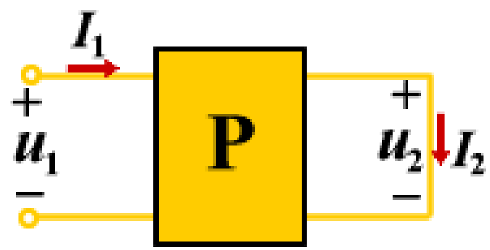
$$-4\times3+2\times1.25\hat{U}_2=-4.8\times2+\hat{U}_2\times1$$

$$\hat{U}_2=2.4/1.5=1.6V$$

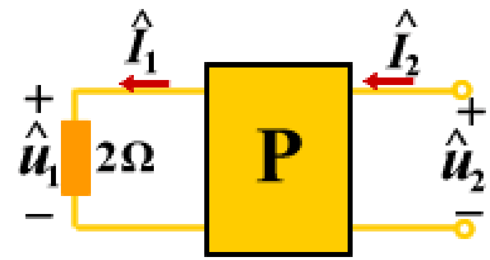
一个网络的2个不同时刻可以看成定理中的两个网络

§ 4.6 互易网络和互易定理

例2、下图所示电路中已知：U_1=10V，I_1=5A，U_2=0，$\hat{U}_2=10V$，I_2=1A，求电压 $\hat{U}_1$。



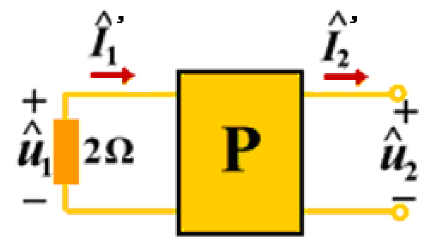
（a）



（b）

$$\begin{cases} \hat{I}_1' = -\hat{I}_1 \\ \hat{I}_2' = -\hat{I}_2 \end{cases}$$

$$U_1(-\hat{I}_1') + U_2\,\hat{I}_2' = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_2\,I_2$$



(c)

$U_2=0$ $\qquad$ $$\hat{I}_1' = -\frac{\hat{U}_1}{2}$$

$$U_1 \times \frac{\hat{U}_1}{2} = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_2\,I_2$$

$$10 \times \frac{\hat{U}_1}{2} = \hat{U}_1 \times (-5) + 10 \times 1$$

$$\hat{U}_1 = 1V$$

§4.6 互易网络和互易定理

二、互易定理

互易定理表述为：对一个互易网络N_0，其中一个端口加激励源，另一个端口做响应端口。在只有一个激励源的情况下，当激励与响应互换位置时，同一激励所产生的响应相同。

概括地讲，所谓互易是指对互易网络而言，当只有1个激励源时，若激励和另外支路地响应互换位置，在电路其它结构不变的情况下，同一数值的激励所产生的响应在数值上不会改变。即激励与其在另外一个之路中的电压、电流响应可以等值地相互易换位置。

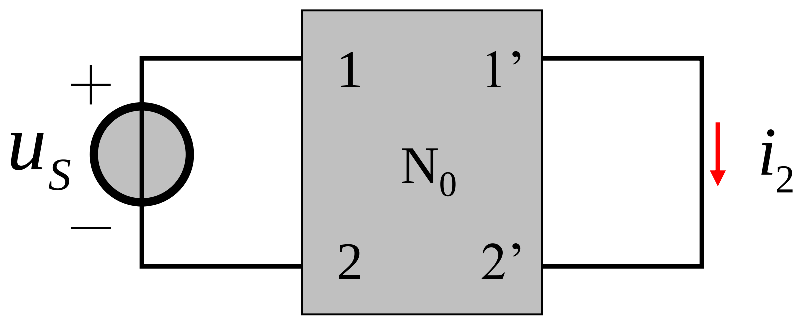
互易定理有以下3种形式：

§ 4.6 互易网络和互易定理

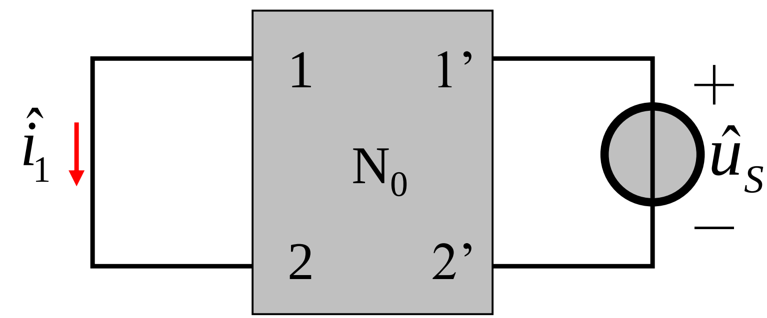
1) 互易定理1　对下图所示电路取激励为电压源，响应为短路电流，则满足：

$$u_S\hat{i}_1 = \hat{u}_S i_2 \quad \text{或} \quad \frac{i_2}{u_S} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{u}_S}$$

传递电导相等



（a）网络 N



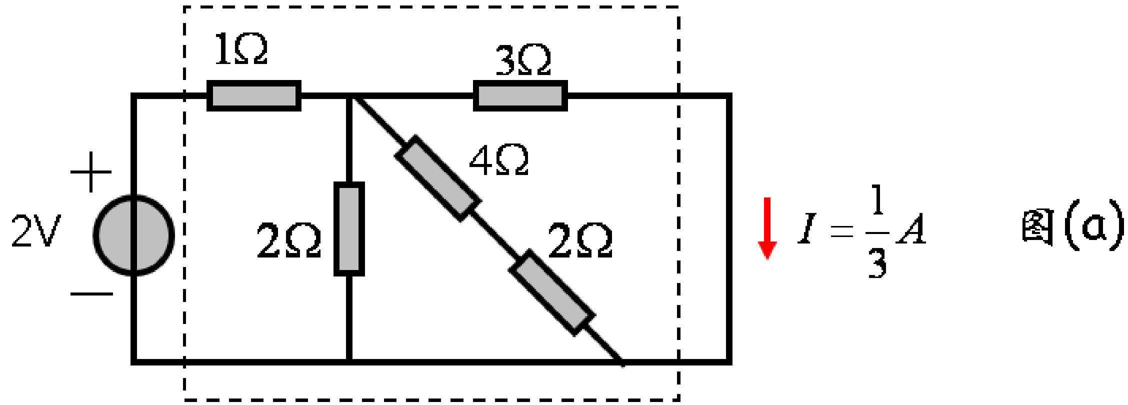
（b）网络 $\hat{N}$

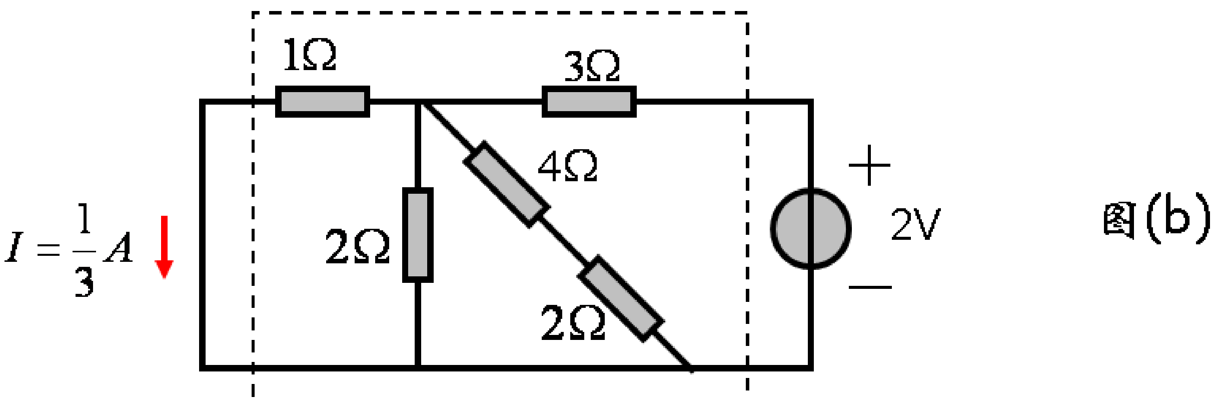
特别，当 $\hat{u}_S = u_S$ 时，有 $\hat{i}_1 = i_2$，形象地说，就是一个电压源和一个电流表可以互换位置而电流表地读数不变。

端口电压、电流同为关联或非关联参考方向

§4.6 互易网络和互易定理

例1:



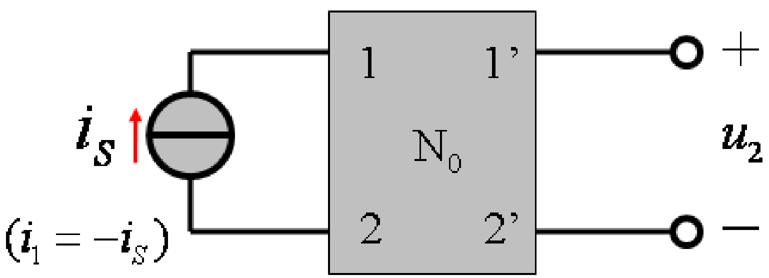


§4.6 互易网络和互易定理

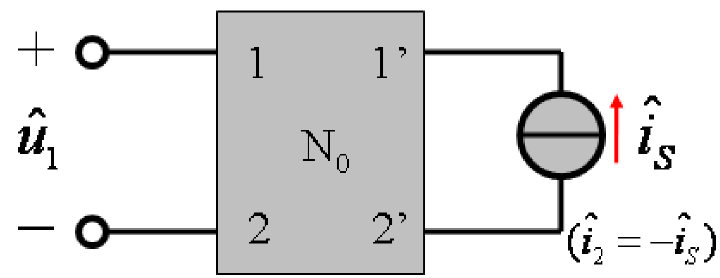
2) 互易定理2　对下图所示电路取激励为电流源，响应为开路电压，则满足：

$$\hat{u}_1 i_S = u_2 \hat{i}_S \quad 或 \quad \frac{u_2}{i_S} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{i}_S}$$

传递电阻相等



（a）网络 N



（b）网络 $\hat{N}$

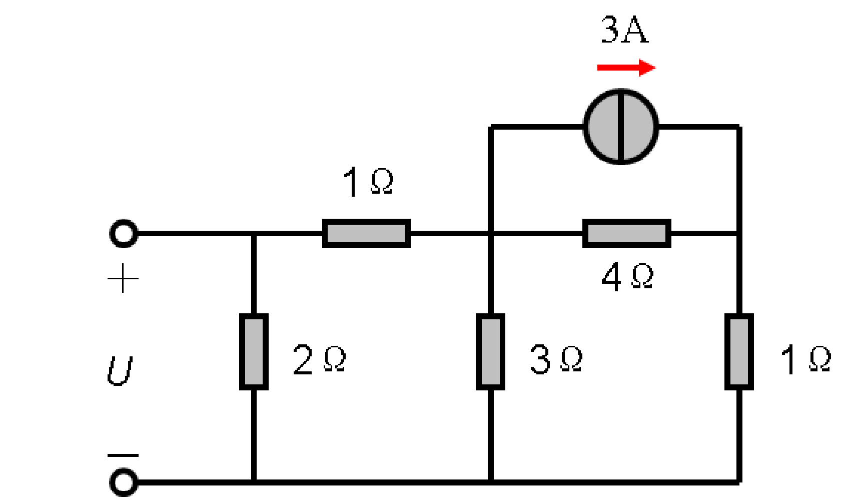
特别当 $i_S = \hat{i}_S$ 时，有：$u_2 = \hat{u}_1$。形象地说，就是一个电流源与一个电压表可以互换位置而电压表地读数不变。

端口电压、电流同为关联或非关联参考方向

§ 4.6 互易网络和互易定理

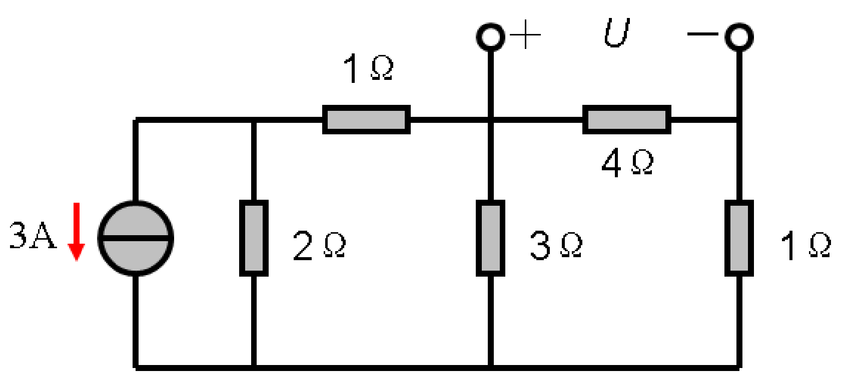
例2:

$$u = -\frac{24}{13}V$$



图(a)

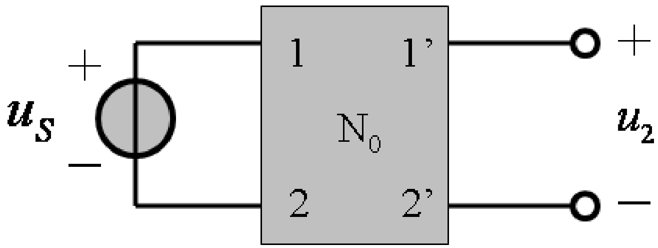
$$u = -\frac{24}{13}V$$



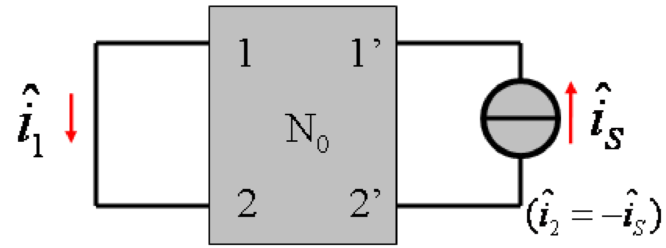
图(b)

§ 4.6 互易网络和互易定理

3) 互易定理3　对下图所示电路取图(a)激励为电压源，响应为开路电压，取图(b)激励为电流源，响应为短路电流，则满足：



（a）网络N



（b）网络$\hat{N}$

$$u_S\hat{i}_1 + u_2(-\hat{i}_S) = 0 \quad 或 \quad \frac{u_2}{u_S} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{i}_S}$$

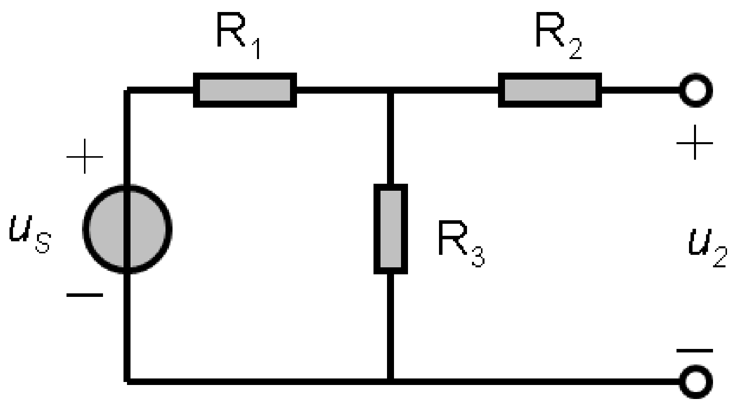
上式表明激励与响应互易时，<u>电压传递比＝电流传递比</u>。

特别，当在数值上满足 $\hat{i}_S = u_S$ 时，有：$\hat{i}_1 = u_2$

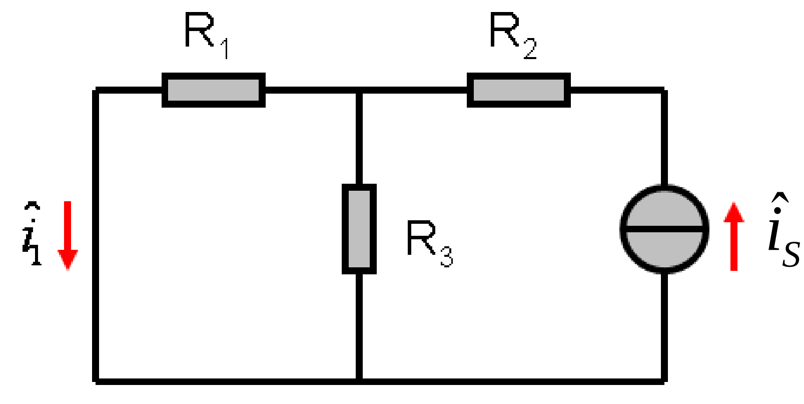
端口电压与电流方向关系：一个关联、一个非关联

§4.6 互易网络和互易定理

例3:



图(a)



图(b)

$$\frac{u_2}{u_S}=\frac{R_3}{R_1+R_3}$$

$$\frac{\hat{i}_1}{\hat{i}_S}=\frac{R_3}{R_1+R_3}$$

§4.6 互易网络和互易定理

应用互易定理要注意的问题：

1) 互易前后应保持网络的拓扑结构不变，仅理想电源搬移；

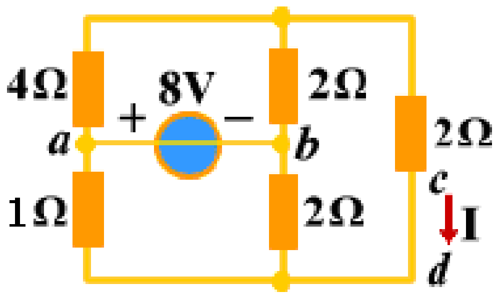
2) 互易前后端口处的激励和响应的极性保持一致；

3) 互易定理只适用于线性电阻网络在单一电源激励下，两个支路电压电流关系。

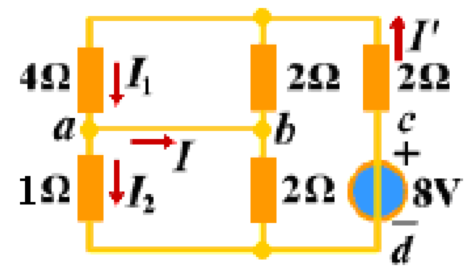
4) 含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

§ 4.6 互易网络和互易定理

例3、求图示电路中的电流 I 。



(a)



(b)

$$I' = \frac{8}{2+4//2+1//2} = \frac{8}{4} = 2A$$

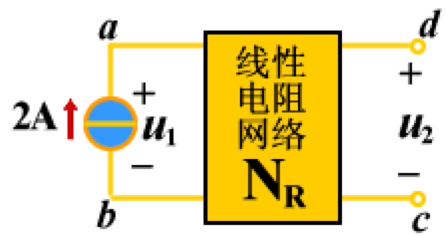
$$I_1 = \frac{2\times I'}{2+4} = \frac{2}{3}A \qquad I_2 = \frac{2\times I'}{1+2} = \frac{4}{3}A$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}A$$

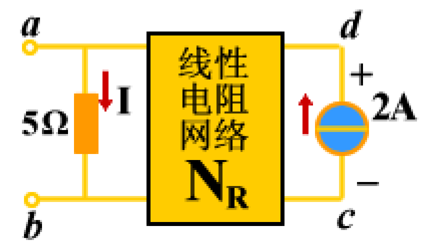
§ 4.6 互易网络和互易定理

例4、测得(a)图中U_1＝10V，U_2＝5V，求(b)图中的电流 I 。

解法1：<u>应用互易网络概念</u>



(a)



(b)

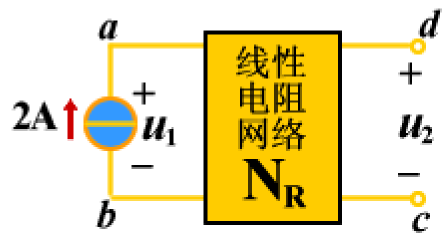
$$u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

$$10\hat{i}_1 + 5\times(-2) = 5\hat{i}_1\times(-2) + \hat{u}_2\times 0$$

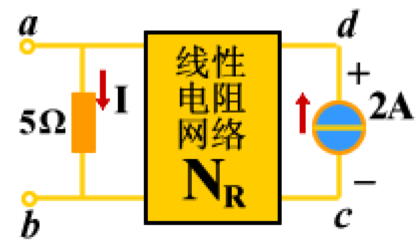
$$I = \hat{i}_1 = 0.5A$$

§4.6 互易网络和互易定理

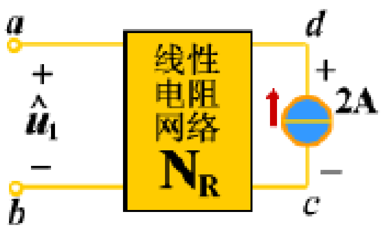
解法2：<u>利用戴维宁定理求解</u>



(a)

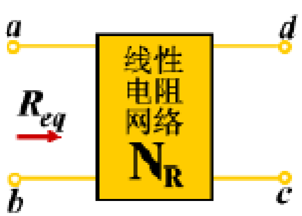


(b)



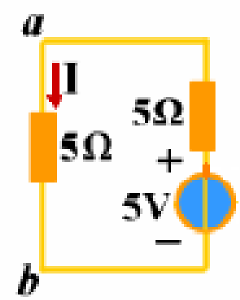
(c)

$$\hat{u}_1 = 5V$$



(d)

$$R_{eq} = \frac{u_1}{2} = \frac{10}{2} = 5\Omega$$

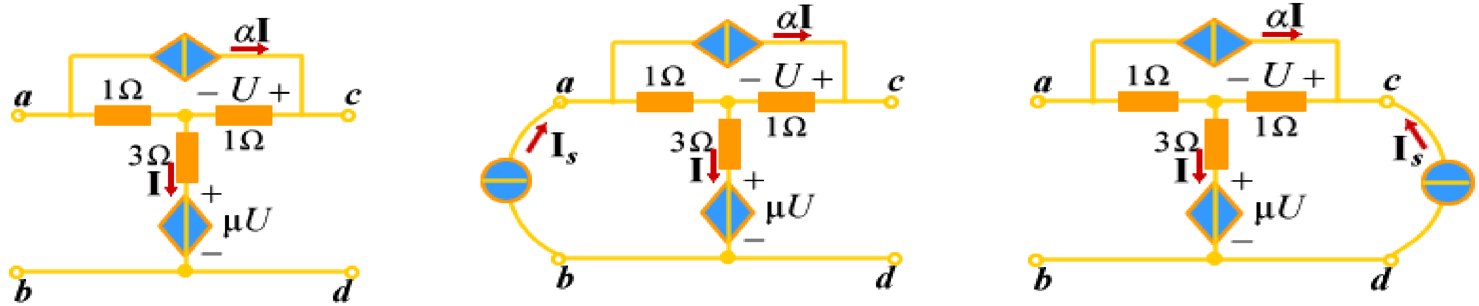


(e)

$$I = \frac{5}{5+5} = 0.5A$$

§ 4.6 互易网络和互易定理

例5、问图(a)所示两端口电路，a 与 μ 取何关系时电路具有互易性。



（a） （b） （c）

图(b)中 $U_{cd} = U + 3I + \mu U = (\mu + 1)\alpha I + 3I = [(\mu + 1)\alpha + 3]I$

图(c)中 $U_{ab} = -\alpha I + 3I + \mu U = (3 - \alpha)I + \mu(I_S + \alpha I) = [\mu + 3 - \alpha + \mu\alpha]I$

其中 $I_S = I$

如要电路具有互易性，则应满足： $U_{ab} = U_{cd}$

$[(\mu + 1)\alpha + 3] = (\mu + 3 - \alpha + \mu\alpha)$ $\qquad \alpha = \dfrac{\mu}{2}$

§4.7 对偶定理

一、对偶关系

在电路理论中有很多成对出现的一一对应关系，这些关系称为对偶关系。

二、对偶元素

在电路理论中，将成对出现的关于电路的元件、参数、结构、变量、定律和定理等对应关系中的要素相互称为对偶元素。

§4.7 对偶定理

变量	u	I
元件及参数	**R**	**G**
	L	**C**
	导纳	阻抗
	u_S	i_S
	VCVS	**CCCS**
	CCVS	**VCCS**
电路结构	串联	并联
	Y接	Δ 接
	网孔	结点
	开路	短路
定律和定理	**KVL**	**KCL**
	戴维宁定理	诺顿定理
关系式和方程	电阻串联公式	电导并联公式
	网孔方程	结点方程
	顺时针方向	指向结点方向

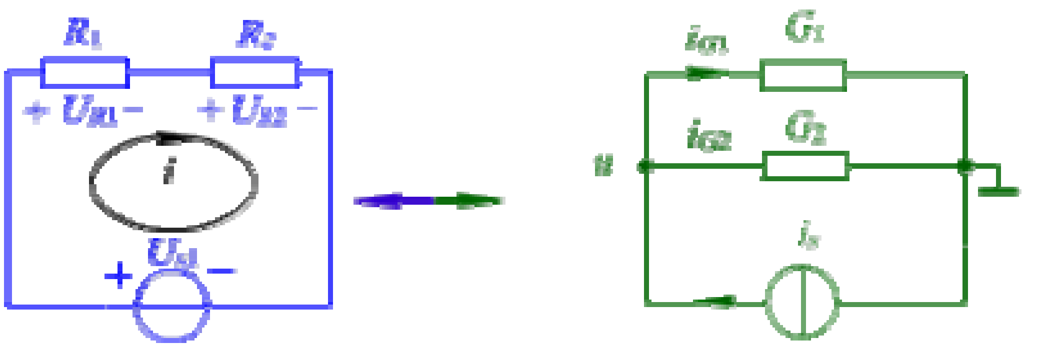
§4.7 对偶定理

三、对偶电路

在电路理论中，将两个存在一一对应关系的电路互称为对偶电路。如下面例题中多给出的两对电路。

§4.7 对偶定理

例1、串联和并联的对偶



(a) (b)

KVL: $u_s=u_{R1}+u_{R2}=(R_1+R_2)i$

KCL: $i_s=i_{G1}+i_{G2}=(G_1+G_2)u$

分压公式: $u_{R1}=\dfrac{u_S}{R_1+R_2}R_1$

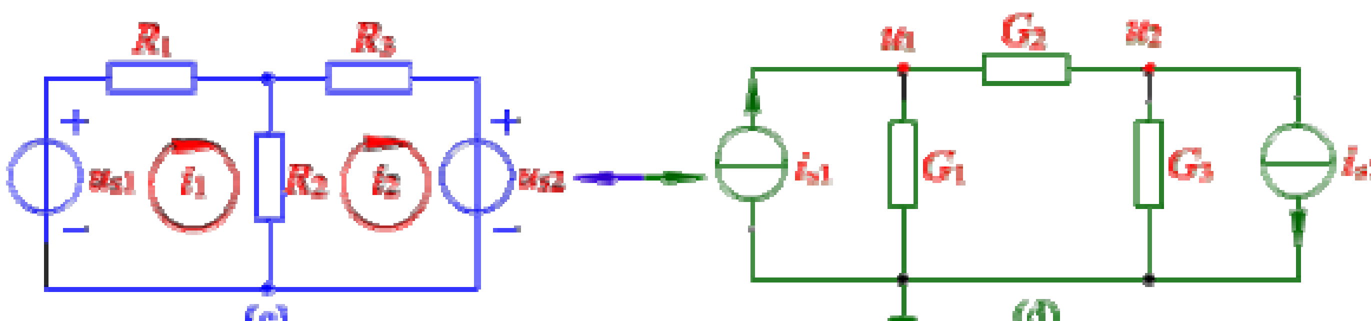
$u_{R2}=\dfrac{u_S}{R_1+R_2}R_2$

分流公式: $i_{G1}=\dfrac{i_s}{G_1+G_2}G_1$

$i_{G2}=\dfrac{i_s}{G_1+G_2}G_2$

§ 4.7 对偶定理

例2、互为对偶的电路



(c) (d)

网孔方程组 $\begin{cases}(R_1+R_2)\,i_1-R_2 i_2=u_{s1}\\ -R_2 i_1+(R_2+R_3)i_2=-u_{s2}\end{cases}$

节点方程组：$\begin{cases}(G_1+G_2)u_1-G_2u_2=i_{s1}\\ -G_2u_1+(G_2+G_3)u_2=-i_{s2}\end{cases}$

§4.7 对偶定理

四、对偶原理

电路中某些元素之间的关系式（或方程），用它们的对偶元素对应地置换后，所得的新关系式（或新方程）也一定成立，后者和前者互为对偶。

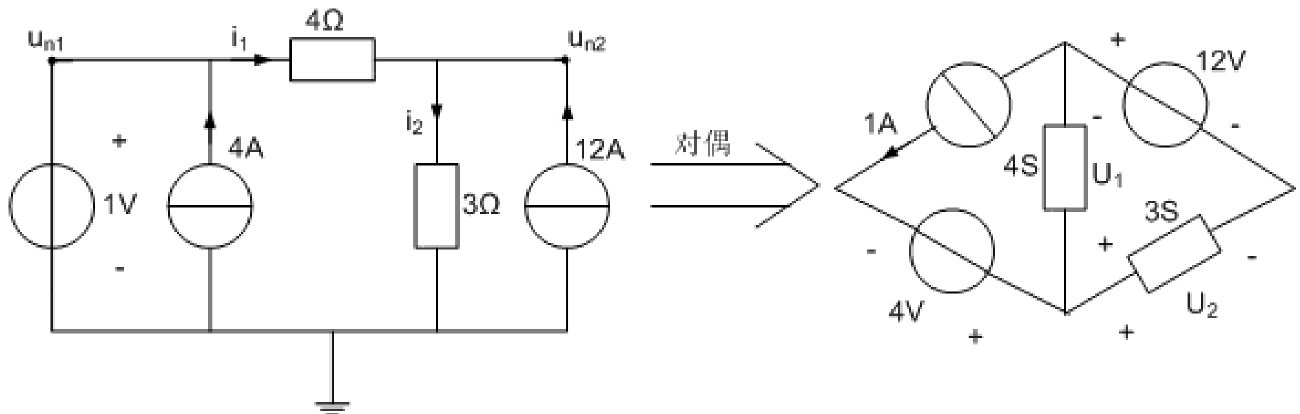
五、对偶原理应用

虽然不常用对偶原理求解电路，但电路理论中有很多知识完全符合对偶原理。用对偶原理学习理解和记忆这些知识可起到事半功倍的效果。这一点在今后的交流电路和动态电路的学习中会有更深的体会。

注意：对偶的两电路之间并非等效。“对偶”和“等效“是两个不同的概念。

§ 4.7 对偶定理

例3、



$$u_{n1}=1V$$

$$\frac{u_{n2}-u_{n1}}{4}+\frac{u_{n2}}{3}=12$$

$$u_{n2}=21V$$

$$i_1=\frac{u_{n1}-u_{n2}}{4}=-5A$$

$$i_2={u_{n2}}/{3}=7A$$

对偶 ⟹

$$U_1=-5V$$

$$U_2=7V$$

§4.7 对偶定理

注意：

（1）惯例网孔电流取顺时针方向，结点电压极性对地为正；

每个网孔对应一个结点，外网孔对应参考结点。

（2）电源方向（在按惯例选取网孔电流和结点电压方向的前提下）

原回路中所包含的电压源如果沿顺时针方向电压升高，则在对偶电路中电流源的电流方向应指向该网孔对应的独立结点。

原回路中所包含的电流源的电流方向如果和网孔电流方向一致，则在对偶电路中电压源的正极落在该网孔对应的独立结点上。如下图所示。