第三章 解线性方程组的直接方法

- 一个线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

- 线性代数方程组的解法分为两种：
  - 直接法：对于给定的方程组，在没有舍入误差的假设下，能在预定的运算次数内求得精确解
  - 迭代法：是基于一定的逆推格式，产生逼近方程组精确解的近似解序列

第一节 Gauss（高斯）消去法

- Gauss消去法是线性代数方程组的最简单而实用的解法
- 设n阶线性代数方程组形如：
- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1\,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2\,n+1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n\,n+1} \end{cases} \qquad (1)$$

其中系数a_{ij}是实数或复数，也可以写成矩阵形式：Ax=b

记 $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$，$i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n+1$，则有$A^{(1)}=A$，$b^{(1)}=b$

方程组记为：$A^{(1)}x=b^{(1)}$

第1次消去

- 设$a_{11}^{(1)} \neq 0$, 在(1)式中利用第1个方程乘以数$-a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$加至第i个方程，从而消去第i个方程中的$x_1$， $i = 2, \dots, n$, 方程组(1)变换为：

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1\,n+1}^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2\,n+1}^{(2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{nn+1}^{(2)}
\end{cases}
$$

第1次消去

- 其中后n-1个方程的系数的计算公式为：

$$l_{i1} = a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}, \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1}a_{1j}^{(1)}, i=2,\ldots,n \ \ j=2,\ldots,n+1$$

这样，方程组写为：$A^{(2)}x=b^{(2)}$

第1次消去完成。

继续这个过程。

下面看一般情况。

第k次消去

- 若已得到第k-1次消去后的结果： $A^{(k)}x=b^{(k)}$

其形式是：

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1k}^{(1)}x_k + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1\,n+1}^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2k}^{(2)}x_k + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2\,n+1}^{(2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{kk}^{(\mathrm{k})}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k)}x_n = a_{k\,n+1}^{(k)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nk}^{(k)}x_k + \cdots + a_{nn}^{(k)}x_n = a_{n\,n+1}^{(k)}
\end{cases}
$$

第k次消去

- 设$a_{kk}^{(k)}$ ≠0，则可进行第k次消去。在前式中利用第k个方程乘以数$-a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$加至第i个方程，从而消去第i个方程中的$x_k$， $i=k+1,\dots,n,$ 得到方程组：

$$A^{(k+1)}x=b^{(k+1)}$$

其中$A^{(k+1)}$ 与$A^{(k)}$的前k行相同， $b^{(k+1)}$ 与$b^{(k)}$的前k个元素相同。后n-k个新方程的系数需要计算，计算公式为：

$$l_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}，\quad a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(1)}，\quad i=k+1,\dots,n\ ，\quad j=k+1,\dots,n+1$$

第k次消去完成。

第n-1次消去

- 如果依次有$a_{kk}^{(k)}$ ≠0，k=1,2,…,n-1，则一直可继续到第n-1次消去，得到与最初的方程组等价的方程组： $A^{(n)}x=b^{(n)}$

其中，系数矩阵$A^{(n)}$是上三角形，方程组的形式如下：

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1\,n+1}^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2\,n+1}^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = a_{n\,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

前面所述的这个过程，是一个递推过程，称为消去过程。

回代过程

- 在得到上述方程组之后，可以采用另一个递推过程，求出方程组的解：

$$x_n = a_{n\,n+1}^{(n)}/a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i = (a_{i\,n+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}\, x_j)/a_{ii}^{(i)} \qquad i = n-1, \dots, 2, 1$$

- 这个过程称为回代过程。

例题

- 例：使用Gauss消去法求解以下方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

使用条件

- Gauss消去法实现方程组求解的条件是：

$$a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)} \neq 0$$

- 定理1：设方程组Ax=b的系数矩阵A的顺序主子式全不为零，即

$$\Delta_i=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} \neq 0 \;\; i = 1,2,\ldots,n$$

则使用Gauss消去法能实现方程组Ax=b的求解。

- 推论：若定理1的条件成立，则

$$\mathrm{a}_{11}^{(1)}=\Delta_1$$

$$\mathrm{a}_{ii}^{(i)}=\Delta_i/\Delta_{i-1} \quad \mathrm{i}=2,\ldots,\mathrm{n}$$

- 定理2：设方程组Ax=b满足定理1中的条件，使用Gauss消去法求解时，共需乘除法次数为：

$$n^3/3+n^2-n/3$$

加减法次数为：

$$n(n-1)(2n+5)/6$$

矩阵的三角分解

- 令：

$$L_k=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -l_{k+1\,k} & 1 & & & \\ & & -l_{k+2\,k} & & 1 & & \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & -l_{n\,k} & & & & 1\end{bmatrix} \quad k=1,2,\dots,n-1$$

其中， $l_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$

- L_k是如下n-k个初等矩阵之积：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \vdots & \ddots & & & \\ & -l_{i\,k} & \dots & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad i = k+1, \dots, n$$

- 可以验证以下结论：

第1次消去等价于在矩阵形式的方程$A^{(1)}x=b^{(1)}$的两端左乘L_1，

得到$A^{(2)}x=b^{(2)}$，即 $A^{(2)}= L_1A^{(1)}$，$b^{(2)} = L_1b^{(1)}$

一般地，第k次消去等价于在矩阵方程$A^{(k)}x=b^{(k)}$的两端左乘L_k，

得到$A^{(k+1)}x=b^{(k+1)}$，即 $A^{(k+1)}= L_kA^{(k)}$，$b^{(k+1)} = L_kb^{(k)}$

看矩阵A的变化过程： $L_{n-1} \dots L_2 L_1A^{(1)} =A^{(n)}$

三角分解

- 定理3：设矩阵A满足定理1的条件（即顺序主子式全不为零），则A存在唯一的分解 A=LU，其中L是单位下三角矩阵（对角线全为1的下三角矩阵），U是上三角矩阵。

简单说明

- 由线性代数知识可知：

$$L_{n-1}\ldots L_2L_1A^{(1)} = A^{(n)}$$

$$L_{n-1}\ldots L_2L_1b^{(1)} = b^{(n)}$$

$$U= A^{(n)} =L_{n-1}\ldots L_2L_1A^{(1)}$$

- 在第一个式子中消去左侧的L_k：

$$L_1^{-1}L_2^{-1}\ldots L_{n-1}^{-1}L_{n-1}\ldots L_2L_1A^{(1)} = L_1^{-1}L_2^{-1}\ldots L_{n-1}^{-1}A^{(n)}$$

则有：$A^{(1)} = L_1^{-1}L_2^{-1}\ldots L_{n-1}^{-1}A^{(n)}$

- 实际上，可得到：

$$L = L_1^{-1}L_2^{-1}\ldots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ & \cdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n\,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

例题

- 例：将以下方程组的系数矩阵进行三角分解：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

第二节 Gauss主元素消去法

- Gauss消去法第k次消去时，需要满足的条件是$a_{kk}^{(k)} \neq 0$, 这个元素是实现第k次消去时的关键元素，称为第k次消去的主元素。
- 特点：不进行行交换、列交换。
- 存在的问题：实际求解过程中，如果主元素为零，或者非常小，都可能使消去过程中断（不能得到解），或求得的解的误差非常大。

（大家思考原因是什么？）

- 改进的办法：采用主元素消去法

分为两种：完全主元素消去法、列主元素消去法

完全主元素消去法

- 记$A^{(1)}=A$，$b^{(1)}=b$，方程组形式如下：

$$[A^{(1)}|b^{(1)}]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{array}\right]$$

- 在每一步消去之前，先全面选择主元素，然后进行行交换、列交换。之后，再进行Gauss消去。

完全主元素消去法

- 看一般情形。设经过k-1（1⩽k ⩽ n-1）次选主元、行交换、列交换及消去后，已经将矩阵$[A^{(1)}|b^{(1)}]$ 约化为如下形式：

$$[A^{(k)}|b^{(k)}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} & a_{1\,n+1}^{(k)} \\ & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2k}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} & a_{2\,n+1}^{(k)} \\ & & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k\,n+1}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n\,n+1}^{(k)} \end{array}\right]$$

- 下面看第k次消去。

完全主元素消去法第k次消去

- 首先，全面选主元素。
  - 在矩阵$[A^{(k)}|b^{(k)}]$中的红色方框内选取绝对值最大的主元素$a_{ikjk}^{(k)}$，即

$$|a_{ikjk}^{(k)}| = \max_{k\le i,j\le n} | a_{ij}^{(k)} |$$

- 然后，交换$[A^{(k)}|b^{(k)}]$中第k行与第i_k行、第k列与第j_k列
- 结果：元素$a_{ikjk}^{(k)}$放在主元素的位置上
- 含义：
  - 第k行与第i_k行：在原方程组中交换两个方程的次序（对解没有任何影响）
  - 第k列与第j_k列：在原方程组中交换对应于第k个及第j_k个分量，之后需要还原

选主元素的可能性

- 如果出现某个主元素为零，则方程组系数矩阵A必为奇异矩阵，方程组无解。
- 否则，经过n-1次消去后，化为如下的形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots & a_{1n}^{(n)} \\ & a_{22}^{(n)} & \cdots & a_{2n}^{(n)} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\,n+1}^{(n)} \\ a_{2\,n+1}^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n\,n+1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

- 通过回代过程，可以求出$y_1, y_2, \cdots, y_n$，这里，$y_1, y_2, \cdots, y_n$是$x_1, x_2, \cdots, x_n$的某种排列，通过还原即可得到$x_1, x_2, \cdots, x_n$的解。

完全主元素方法的特点

- 因为是在剩余待选区域内选择绝对值最大的元素，而在计算机上目前只能通过比较操作进行，所以时间开销比较大。
- 如果选出的主元素为零，可以立即判定原方程组无解。
- 替代的方法：列主元素消去法。

列主元素消去法

- 完全主元素的时间开销较大，可以采用另一种替代方法：列主元素消去法。
- 列主元素消去法是在局部范围内选取主元素，这个局部范围即是当前候选区域中的第1列（红色框内）。

$$
[A^{(k)}|b^{(k)}] = \left[\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} & & a_{1\,n+1}^{(k)} \\
 & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2k}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} & & a_{2\,n+1}^{(k)} \\
 & & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\
 & & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & & a_{k\,n+1}^{(k)} \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & & a_{n\,n+1}^{(k)}
\end{array}\right]
$$

列主元素消去法

- 因为是在$a_{kk}^{(k)}$ $a_{k+1k}^{(k)}$ … $a_{nk}^{(k)}$之间选择主元素，所以有以下两个特点：
  - 候选元素个数少，元素之间的比较次数就少，时间开销较小
  - 因为只涉及到这一列，所以只相当于是改变了方程的次序，求解后不需要还原
  - 主元素为零时，并不能得出方程组无解的结论
  - 列主元素消去法得到的解，可能误差较大

列主元素消去法的矩阵变换

- 基于线性代数的知识，矩阵进行两行互换，相当于对矩阵左乘初等矩阵；进行两列互换，相当于对矩阵右乘初等矩阵。
- 设L_k的定义如下：

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -l_{k+1\,k} & 1 & & & \\ & & -l_{k+2\,k} & & 1 & & \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & -l_{n\,k} & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{k} = 1,2,\dots,\mathrm{n}-1$$

- I_{ij}是初等排列矩阵，即将单位矩阵互换第i行和第j行之后的矩阵。使用I_{ij}左乘矩阵A，相当于互换A的第i行和第j行。
    - $I_{ij}\ I_{ij}=I$ （存在逆矩阵，且逆矩阵等于自己）

- 这样，我们有

$$L_1 I_{1\ i1} A^{(1)} = A^{(2)}, \quad L_1 I_{1\ i1} b^{(1)} = b^{(2)}$$

- 一般情况可表示为：

$$L_k I_{k\ ik} A^{(k)} = A^{(k+1)}, \quad L_k I_{k\ ik} b^{(k)} = b^{(k+1)}$$

- 经过所有n-1步消去的矩阵变换如下：

$$L_{n-1} I_{n-1\ in-1} \dots L_2 I_{2\ i2} L_1 I_{1\ i1} A^{(1)} = A^{(n)} = U$$

令：$\tilde{P} = L_{n-1} I_{n-1\ in-1} \dots L_2 I_{2\ i2} L_1 I_{1\ i1}$

- 接下来，要简化矩阵A左侧的矩阵串$\tilde{P}$ 。以n=4为例。

$$\tilde{P} = L_3 I_{3\,i3}\, L_2 I_{2i2}\, L_1 I_{1i1}$$

$$= L_3 (I_{3\,i3}\, L_2\, I_{3\,i3})(I_{3\,i3}\, I_{2\,i2}\, L_1\, I_{2\,i2} I_{3\,i3})(I_{3\,i3}\, I_{2\,i2}\, I_{1\,i1})$$

$$= \widetilde{L}_3 \widetilde{L}_2 \widetilde{L}_1 \mathrm{P}$$

$\widetilde{L}_3 = L_3$ （单位下三角阵，元素绝对值 $\leqslant 1$）

$\widetilde{L}_2 = I_{3\,i3} L_2 I_{3\,i3}$ （单位下三角阵，元素绝对值 $\leqslant 1$ ）

$\widetilde{L}_1 = I_{3\,i3} I_{2\,i2} L_1 I_{2\,i2} I_{3\,i3}$ （单位下三角阵，元素绝对值 $\leqslant 1$ ）

$\mathrm{P} = I_{3\,i3} I_{2\,i2} I_{1\,i1}$ （排列阵）

- 得到：$\widetilde{L_3}\widetilde{L_2}\widetilde{L_1}$PA=U

  记$\widetilde{L_3}\widetilde{L_2}\widetilde{L_1}$ =L^{-1}，则有PA=LU

其中，L是单位下三角矩阵，U是上三角矩阵，P是排列矩阵

- 定义：如果矩阵P可由单位矩阵经若干次行交换而得到，即P等于若干个I_{ij}类型的初等矩阵之积，则称P为排列矩阵。
- 当用一个排列矩阵左乘某个矩阵时，将实现矩阵行的重排。对于矩阵的列也有类似的结论，即用一个排列矩阵右乘某个矩阵时，将实现矩阵列的重排。

- 列主元素消去法中，依次按列选主元素，实际上就是确定排列矩阵P，使得方程组重排后得到的等价方程组PAx=Pb，能使用Gauss消去法求解。
- PA=LU式子的含义：（满足条件的）系数矩阵A经过某些行的互换之后，可以分解为一个单位下三解矩阵和一个上三角矩阵的乘积。
- 定理1：设A是非奇异矩阵，则存在排列矩阵P及单位下三角矩阵L和上三角矩阵U，使得 PA=LU （列主元素三角分解）
- 定理2：设A是非奇异矩阵，则存在排列矩阵P和Q，及单位下三角矩阵L和上三角矩阵U，使得 PAQ=LU （完全主元素三角分解）

Gauss-Jordan消去法

- Gauss消去法在消去时，仅消去对角线下方的元素，然后通过回代得出方程组的解。G-J消去法对Gauss消去法做了修改：同时消去对角线下方及上方的元素，这样，可以取消回代过程。
- G-J消去后，将[A|b]约化为如下的形式：

$$[A^{(n)}|b^{(n)}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & | & a_{1\,n+1}^{(n)}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & a_{2\,n+1}^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & a_{n\,n+1}^{(n)}\end{bmatrix}$$

- A约化为单位阵，方程组的解为：$\mathrm{x}_i=a_{i\,n+1}^{(n)}\ \ i=1,2,\ldots,n$

G-J消去法的优势

- G-J消去法没有回代过程，但并没有因此而在时间开销上有所降低，因为回代过程的工作分摊在前面的消去过程中了。求解线性方程组时，其乘除法的次数及加减法的次数，均多于使用Gauss消去法，也就是说，效率不如Gauss消去法。
- G-J消去法的优势：主要用于求逆矩阵。

使用G-J消去法求逆矩阵

- 设A=(a_{ij})$_n$为非奇异矩阵，I为n阶单位矩阵，将增广矩阵[A|I]约化为[I|B]的形式，则A^{-1}=B。

- 例$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$，求A的逆矩阵

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

示例

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -13/41 & -1/41 & 23/41 \\ 0 & 1 & 0 & -6/41 & 9/41 & -2/41 \\ 0 & 0 & 1 & 11/41 & 4/41 & -10/41 \end{bmatrix}
$$

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -13/41 & -1/41 & 23/410 \\ -6/41 & 9/41 & -2/41 \\ 11/41 & 4/41 & -10/41 \end{bmatrix}
$$

第三节 Gauss消去法的变形

- 若矩阵$A=(a_{ij})_n$的顺序主子式均不为零，则A可分解为单位下三角矩阵L与上三角矩阵U的乘积： A=LU，称这种分解为矩阵A的LU分解。
- 借助于LU分解，则求解Ax=b时，可将求解过程归结为利用递推方式相继求解两个三角形方程组：

  Ly=b 求y

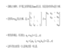
  Ux=y 求x

Doolittle分解法

- 求解LU分解时，并不像之前那样通过Gauss消去法。而是直接对矩阵A进行分解。
- 设矩阵$A=(a_{ij})_n$有LU分解，记$L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$
- 利用矩阵乘法，可以推出：$a_{1i}=u_{1i}(i=1,2,\ldots,n)$

$$a_{i1}=l_{i1}u_{11}\quad l_{i1}=a_{i1}/u_{11}\ (i=2,3,\ldots,n)$$

- 这样可得出U的第一行元素和L的第一列元素。



Doolittle分解法

- 设已得到U的第1行到第r-1行元素，L的第1列到第r-1列元素，下面求U的第r行及L的第r列元素：
- 由矩阵乘法有：$a_{ri} = \sum_{k=1}^{n} l_{rk}u_{ki} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki} + u_{ri}$
- 故： $u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki} \quad (i = r, r+1, \dots, n)$

- 又有： $a_{ir} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kr} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr} + l_{ir}u_{rr}$

计算公式

- 由此得到以下计算公式：

(1) $u_{1i} = a_{1i} \quad (i = 1,2, \dots, n)$

$l_{i1} = a_{i1}/u_{11} \quad (i = 2,3, \dots, n)$

- 计算U的第r行、L的第r列元素，r=2,3,…,n

(2) $u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki} \quad (i = r, r+1, \dots, n)$

(3) $l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr})/u_{rr} \quad (i = r+1, r+2, \dots, n, r \neq n)$

计算公式

- 求解Ly=b 及 Ux=y的计算公式

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, y_k \qquad i = 2, 3 \dots, n$$

$$x_n = y_n / u_{nn}$$

$$x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}\, x_k)/u_{ii} \qquad i = n-1, \dots, 1$$

实现细节

- 这种直接三角分解法称为Doolittle分解。
- 计算效率：大约需要$n^3/3$次乘除法。
- 空间存储上，可利用原存储空间保存L和U，如下所示：

u_{11}	u_{12}	u_{13}	---	u_{1n}	第一步
l_{21}	u_{22}	u_{23}	---	u_{2n}	第二步
l_{31}	l_{32}				
$\vdots$	$\vdots$				
l_{n1}	l_{n2}			u_{nn}	第n步

示例

- 例：用直接三角分解（Doolittle）法解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- 矩阵的LU分解为：

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \quad y=\begin{pmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

列主元素三角分解法

- 求解线性方程组时，需要满足一定的条件。
- 三角分解也不例外。当不满足条件时（请思考条件是什么？），也有对应的主元素三角分解，比如列主元素三角分解法。

平方根法（cholesky分解法）

- 当矩阵A是正定矩阵时，对A的三角分解方法可以有显著的改进。
- 定理1：若A是正定矩阵，则存在唯一的对角元素均为正数的下三角矩阵L，使

$$A=LL^T$$

计算公式

- A的LL^T分解过程

对 j=1,2,…,n

(1) $l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{1/2}$

(2) 对 i=j+1, …, n

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk})/l_{jj}$$

计算公式

- 解 Ly=b 与 $L^T x=y$

(1) 对 i=1,2,…,n

$$y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k)/l_{ii}$$

(2) 对 i=n, n-1,…,1

$$x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k)/l_{ii}$$

- 定理2：用cholesky分解法求解n阶正定方程组共需

  n 次开平方

  $(n^3+9n^2+2n)/6$ 次乘除运算

  $(n^3+6n^2-7n)/6$ 次加减运算

- cholesky分解法所需的计算量大约为Gauss消去法的一半
- 正定性保证了不需选主元

- 例：求解方程组

$4x_1-x_2+x_3=6$

$-x_1+4.25x_2+2.75x_3=-0.5$

$x_1+2.75x_2+3.5x_3=1.25$

系数矩阵的顺序主子式：

$\Delta_1=4 \quad \Delta_2=16 \quad \Delta_3=16$ 均大于零，故系数矩阵为正定阵

求解过程

- j=1:

  $l_{11}=(a_{11})^{1/2}=4^{1/2}=2$ $l_{21}=a_{21}/ l_{11}=-1/2=-0.5$ $l_{11}= a_{31}/ l_{11}=1/2=0.5$

- j=2:

  $l_{22}=(a_{22}-l_{21}*l_{21})^{1/2}=(4.25-(-0.5)^2)^{1/2}=2$

  $l_{32}= (a_{32}-l_{31}*l_{21})/l_{22}=(2.75-0.5*(-0.5))/2=1.5$

- j=3:

  $l_{33}= (a_{33}-l_{31}*l_{31}-l_{32}*l_{32})^{1/2}=(3.5-0.5^2-1.5^2)^{1/2}=1$

- 得到矩阵L，故有：

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ -0.5 & 2 & \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ & 2 & 1.5 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

求解两个三角方程组

- 解 $Ly=b$

$$y_1=b_1/l_{11}=6/2=3$$

$$y_2=(b_2-l_{21}y_1)/l_{22}=(-0.5+0.5*3)/2=0.5$$

$$y_3=(b_3-l_{31}y_1-l_{32}y_2)/l_{33}= =(1.25-0.5*3-1.5*0.5)/1=-1$$

- 解 $L^Tx=y$

$$x_3=y_3/l_{33}=-1/1=-1$$

$$x_2=(y_2-l_{32}x_3)/l_{22}=(0.5+1.5)\ /2=1$$

$$x_3=(y_1-l_{21}x_2-l_{31}x_3)/l_{11}=(3-(-0.5)*1-0.5*(-1))/2=2$$

改进的平方根法

- 求解系数矩阵是正定矩阵的线性方程组时，可以采用chelesky分解法求解，但其中不能避免开平方运算
- 现在改进这个方法，从而避免开方（开方不能必须的）
- 如果正定矩阵A采用形如LDL^T这样的分解形式，则可以避免开方运算：
  $A=LDL^T$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

改进的平方根法算法

- A的LDL^T分解过程

对 i=1, 2,…,n

(1) 对 j=1, 2,…,i-1

$$t_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik} l_{jk}$$

(2) 对 j=1, 2,…,i-1

$$l_{ij}=t_{ij}/d_j$$

(3) $d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} l_{ik}$

改进的平方根法算法

- 解 Ly=b 与 $DL^T x=y$
- (1) 对 i=1, 2,…,n

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k$$

- (2) 对 i=n, n-1,…, 1

$$x_i = y_i / d_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k$$

追赶法

- 如果线性方程组的系数矩阵是三对角矩阵，则求解过程可进一步简化。
- 所谓三对角矩阵是如下这样的：

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

LU分解

- 三对角矩阵也可以进行LU分解，且L是单位下三角矩阵，U是上三解矩阵。
- 可以验证，将三对角矩阵进行LU分解时，L及U仍保持与A的一致性，这意味着，L和U中都仅有两条对角线上存在非零元素，且L的主对线元素均为1，具体形式如下：

$$L=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1\end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix}u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & u_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & & u_n\end{bmatrix}$$

求解公式

$v_i = c_i \quad i=1,2,\ldots,n-1$

$u_1 = b_1 \quad l_i = a_i/u_{i-1} \; u_i = b_i - l_i v_{i-1} \; i=2,\ldots,n$

- 得到L和U后，后续的求解过程与前述一致。

追赶法算法

- (1) $u_1=b_1$
- (2) 对 $i=2, 3,\dots n$

    $l_i=a_i/u_{i-1}$ $u_i=b_i-l_ic_{i-1}$

- (3) 解$Ly=d$

    $y_1=d_1$

    对 $i=2,3,\dots,n$ $y_i=d_i-l_iy_{i-1}$

- (4) 解 $Ux=y$

    $x_n=y_n/u_n$

    对 $i=n-1, n-2,\dots,1$ $x_i=(y_i-c_ix_{i+1})/u_i$

“追赶”的含义

- 计算过程是：

$$u_1 \to l_2 \to u_2 \to l_3 \to \dots \to u_n \to l_n$$

$$y_1 \to y_2 \to \dots \to y_n$$

这个过程是“追”的过程

然后，计算：

$$x_n \to x_{n-1} \to \dots \to x_1$$

这个过程是“赶”的过程

例题

- 利用追赶法求解三对角线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

使用条件

- 定理：设A是三对角矩阵，如下：

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

且 $|b_1|>|c_1|$， $|b_n|>|a_n|$， $|b_i|>|a_i|+|c_i|$，$a_ic_i\neq 0$，$i=2,3,\ldots,n-1$

则A非奇异，并能满足使用追赶法算法求解方程组Ax=d的条件。

第四节 向量和矩阵的范数

- 导引

记号：R^n：表示n维实向量空间

C^n：表示n维复向量空间

设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ 是R^n中的任一向量，在线性代数中，记x的长度为|x|，定义如下：

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

- 它有如下的性质：
  - $|x|\geq 0$，当且仅当$x=0$时，$|x|=0$
  - $|\alpha x|=|\alpha||x|$
  - $|x+y|\leq|x|+|y|$

向量范数

- 设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$， $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$， $x,y\in R^n$ （或C^n），将实数 $(x,y)=y^Tx=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ （或复数$(x,y)=y^Hx=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i$ ）称为向量x、y的数量积，或内积。
- 它有如下的性质：
  - $(x, y)=(y, x)$（或 $(x, y)=\overline{(y,x)}$）
  - $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$ α是实数 （或是$(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$ α是复数 ）
  - $(x, x) \geq 0$，当且仅当$x=0$时，$(x, x)=0$
  - $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)$ (x_2, y)

向量范数的定义

- 定义：如果向量$x \in R^n$（或C^n）的某个实值函数$N(x)=\|x\|$，满足条件：
  - 非负性：$\|x\| \geq 0$，当且仅当$x=0$时，$\|x\| =0$
  - 齐次性：对任一数$\alpha \in R$（或C），有$\|\alpha x\|=|\alpha| \, \|x\|$
  - 成立三角不等式：$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

则称$N(x)$是 R^n（或C^n）上的一个向量范数（或称做模）。

典型的向量范数

- 定理：对R^n中的任一向量 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$

记：　$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \ll i \ll n} |x_i|$

则，$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_\infty$都是向量范数，分别称为向量的1-范数、2-范数和∞-范数。

证明

- 证明：1-范数、 ∞-范数证明略。只证2-范数。

根据定理中给出的公式，$\|\cdot\|_2$非负，满足定义中的条件(1)。

对任一数$\alpha \in R$，有

$$\|\alpha x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)^2)^{1/2} = |\alpha|(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} = |\alpha|\|x\|_2$$

故满足条件(2)。

由$\|\cdot\|_2$的公式知，可用内积表示$\|\cdot\|_2$：$\|x\|_2=(x^Tx)^{1/2}$

任取向量$y\in R^n$，则有：$\|x+y\|_2^2 = (x+y)^T(x+y) = \|x\|_2^2 + 2x^Ty + \|y\|_2^2$

证明

- 根据Couchy-Schwarz不等式：$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$（向量形式）

对应到这里是： $(x^T y)^2 \leq (x^T x)\ (y^T y)$

则有： $\|x+y\|_2^2 \ll \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$

因为非负性，则有： $\|x+y\|_2 \ll \|x\|_2 + \|y\|_2$

故满足条件(3)。

p−范数

- 2-范数又称为向量x的欧氏范数。
- 推广到一般情况：

　　定义向量的p-范数：$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$　p∈[1,∞)

- 定理：设$\|\cdot\|_\alpha$　$\|\cdot\|_\beta$是R^n上的任二种范数，则存在与x无关的常数m和M（0<m≤M），使得

　　$m\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le M\|x\|_\alpha \quad \forall x \in R^n$

- 含义：向量x的某一种范数可以任意小（大）时，该向量的其他任何一种范数也会任意小（大）

矩阵范数

- 以$R^{n\times n}$表示$n\times n$矩阵集合
- 定义：称定义在$R^{n\times n}$上的实值函数$\|\cdot\|$为矩阵范数，如果对于$R^{n\times n}$中的任意矩阵A和B，它满足
  - 非负性：$\|A\|\geq 0$，当且仅当$A=0$时，$\|A\| =0$
  - 齐次性：对任一数$k\in R$，有$\|kA\|=|k|\ \|A\|$
  - 成立三角不等式：$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$
  - 成立三角不等式：$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

相容

- 矩阵与向量通常会出现在一起，所以常常要求矩阵范数与向量范数之间存在某种关系，即相容关系。
- 定义：对于给定的向量范数$\|\cdot\|$和矩阵范数$\|\cdot\|$，如果对任一个$x\in R^n$和任一个$A\in R^{n\times n}$，满足：$\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$

则称所给的矩阵范数与向量范数是相容的。

- 当定义一种矩阵范数时，应当使它能与某种向量范数相容。
- 在同一个问题中，要同时使用矩阵范数和向量范数时，这两种范数应当是相容的。

- 定理：设在R^n中给定了一种向量范数，对任一矩阵$A\in R^{n\times n}$，令

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

则，上面定义的$\|\cdot\|$是一种矩阵范数，并且它与所给定的向量范数相容。

证明：先证明相容性，再证明满足定义的4个条件。

对任意的矩阵$A\in R^{n\times n}$，和任意的非零向量$y\in R^n$

由于$\max_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \left\| A\frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{1}{\|y\|}\|Ay\|$

故有： $\|Ay\| \leq \|y\| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|\|y\|$

这个等式对于y=0显然也成立。——满足相容性定义

(1) 当A=0时，$\|A\|=0$，当$A\neq0$时，必有$\|A\|>0$

(2) 对任一数$k\in R$，有

$$\|kA\|=\max_{\|x\|=1}\|kAx\|=|k|\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=|k|\ \|A\|$$

(3) 对$\forall A, B\in R^{n\times n}$，有

$$\|A+B\|=\max_{\|x\|=1}\|(A+B)x\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax+Bx\|\ll\max_{\|x\|=1}(\|Ax\|\|Bx\|)$$

$$\ll\max_{\|x\|=1}\|Ax\|+\max_{\|x\|=1}\|Bx\|=\|A\|+\|B\|$$

(4) $\|AB\|=\max_{\|x\|=1}\|(AB)x\|\ll\max_{\|x\|=1}\|A\|\|Bx\|=\|A\|\max_{\|x\|=1}\|Bx\|=\|A\|\|B\|$

- 定理中定义的范数为从属于所给定向量范数的矩阵范数。
- 设给定的向量范数为$\|\cdot\|_p$，则从属于向量范数$\|\cdot\|_p$的矩阵范数仍记为$\|\cdot\|_p$，即

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

其中，$A\in R^{n\times n}$，$x\in R^n$，$\|A\|_p$也称为矩阵A的p-范数。

- 定理：设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，则

$$\|A\|_1 = \max_{1\ll j\ll n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \qquad 列范数$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} \qquad 2\text{-}范数$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\ll i\ll n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad 行范数$$

其中$\lambda_{max}(A^TA)$表示矩阵A^TA的最大特征值。

示例

例　设$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，求矩阵A的范数

解：

$||A||_1$=max{|1|+|-1|+|0|, |2|+|2|+|1|, |0|+|-1|+|1|}=5

$||A||_\infty$=max{|1|+|2|+|0|, |-1|+|2|+|-1|, |0|+|1|+|1|}=4

$$A^TA=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 2 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 9 & -1\\1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

示例

- A^TA的特征多项式为：

$$\det(\lambda I - A^TA) = \lambda^3 - 13\lambda^2 + 38\lambda - 25$$

它的三个根如下：

$$\lambda_1 = 9.1428 \quad \lambda_2 = 2.921125 \quad \lambda_3 = 0.936075$$

$$\|A\|_2 = (\lambda_{max}(A^TA))^{1/2} = (\max(\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3))^{1/2} = 3.0237$$

示例

例　设x=(3,-5,1)^T，$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -8 & 2\end{bmatrix}$，求向量x、矩阵A的范数

解：

$\|x\|_1=9$，　$\|x\|_2=\sqrt{35}$，$\|x\|_\infty=5$

$\|A\|_1=\max\{6, 14, 4\}=14$

$\|A\|_\infty=\max\{8, 3, 13\}=13$

$$A^TA=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & 1 & -8\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -8 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -21 & 4\\ -21 & 90 & -26\\ 4 & -26 & 8\end{bmatrix}$$

示例

- A^TA的特征多项式为：

$$\det(\lambda I- A^TA)= \lambda^3-112\lambda^2+ 959\lambda-16=0$$

最大根 $\lambda_1 \approx 102.66$

$$\|A\|_2=(\lambda_{max}(A^TA))^{1/2}=\sqrt{\lambda_1} \approx 10.132$$

第五节 误差分析

- 考虑线性方程组 $Ax=b$

其中设A为非奇异矩阵，x为方程组的精确解。

由于A或b是测量或计算的结果，其中必有观测误差或是舍入误差。因此处理的实际矩阵是$(A+\delta A)$或$(b+\delta b)$，则我们需要研究A或b的微小误差对解的影响。

- 看一个示例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

- 两个方程组的解相差很大：常数项的微小变化，对解的影响非常大

- 定义：如果矩阵A或常数项b的微小变化，引起方程组Ax=b解的巨大变化，则称此方程组为“病态”方程组，矩阵A称为“病态”矩阵，否则称方程组为“良态”方程组，矩阵A称为“良态”矩阵。
- 现设A是精确的，b有误差δb，解为x+δx，则

$$A(x+\delta x)=b+\delta b$$

$$\delta x=A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\ \|\delta b\|$$

$$\|b\| \le \|A\|\ \|x\| \qquad \text{即：} \quad \frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad （设b\neq 0）$$

- 定理：设A是非奇异阵，Ax=b≠0，且

  $$A(x+\delta x)=b+\delta b$$

  则 $$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

- 含义：解的相对误差的上界。即：常数项b的相对误差在解中可能放大$\|A^{-1}\|\|A\|$倍。

- 定义：设A为非奇异阵，称数

$$cond(A)_v = \|A^{-1}\|_v \|A\|_v \, (v = 1,2,\infty)$$

为矩阵A的条件数。

- 当A的条件数相对的大，即$cond(A)_v \gg 1$时，则Ax=b是“病态”的。条件数越大，病态越严重。当A的条件数相对的小，则Ax=b是“良态”的。

常用的条件数

- 通常使用的条件数有：

(1) $cond(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty$

(2) A的谱条件数$cond(A)_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$

当A为对称矩阵时， $cond(A)_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$，其中$\lambda_1$、$\lambda_n$为A的绝对值最大、最小的特征值。

条件数的性质

(1) 对任何的非奇异矩阵A，都有$cond(A)_v \geqslant 1$

$$cond(A)_v = \|A^{-1}\|_v \|A\|_v \geqslant \|A^{-1}A\|_v = 1$$

(2) 设A为非奇异矩阵，且c≠0（常数），则

$$cond(cA)_v = cond(cA)_v$$

(3) 如果A为正交矩阵，则$cond(A)_2 = 1$。如果A为非奇异矩阵，R为正交矩阵，则$cond(RA)_2 = cond(AR)_2 = cond(A)_2$

近似的方法

- 实际计算中，计算A^{-1}时时间开销较大，故检测病态方程组时采用下述近似的方法：
  - A的三角约化时，出现小主元
  - 系数矩阵的行列式值相对很小，或系数矩阵某些行近似线性相关
  - 系数矩阵A元素间数量级相差很大，并且无规则