线性代数典型习题

1.判断下列命题正确与否, 并说明理由

(1)若n阶矩阵A,B满足|A|=|B|， 则A=B ; ×

(2)若n阶矩阵A,B满足AB≠BA, 则|AB|≠|BA| ; ×

(3)若n阶矩阵A,B满足|A+AB|=0⇔A = -AB; ×

(4)若n(>1)阶矩阵A满足|A|=k, 则|A+A|=2k ; ×

(5)若n阶矩阵A,B满足AB=E, 则|A|=|B| ; ×

(6)若n阶矩阵A,B的元素均为整数, 且AB=E, 则|A|=|B|; √

(7)二阶行列式等于零⇔行列式的两行成比例; ×

(8)若n阶矩阵A,B的为对角阵, 则|A+B|=|A|+|B|; ×

(9)若A为奇数阶矩阵, 则$|A - A^T|=0$; √

(10) 设A,B均为n阶矩阵, 则AB不可逆的充分必要条件是A,B中至少有一个不可逆; √

(11)若n阶矩阵A,B满足AB=E，则AB=BA; √

(12)若A*为n(>1)阶矩阵A的伴随矩阵,则$|(2A)^*|=2^{n-1}|A^*|$. ×

解: (12) 令B＝2A,则$B_{ij}=2^{n-1}A_{ij}$, $i, j=1, 2, \ldots, n$.

因此

$$B^*=2^{n-1}A^*$$

从而

$$|B^*|=|(2A)^*|=2^{n(n-1)}|A^*|$$

$$=2^{n(n-1)}|A|^{n-1}.$$

(13)若A,B均为n阶可逆矩阵, 则A+B可逆; ×

(14)若A,B均为n阶矩阵,且A+B可逆, 则A与B均可逆; ×

(15)若A,B,A+B均为n阶可逆矩阵,则

$A^{-1}+B^{-1}$为可逆矩阵； √

解(15) $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}+A^{-1}AB^{-1}=A^{-1}(E+AB^{-1})$

$=A^{-1}(BB^{-1}+AB^{-1})=A^{-1}(A+B)B^{-1}$

因此矩阵$A^{-1}+B^{-1}$可逆。

(16)若n阶矩阵A的元素均为整数, 则存在元素为整数的n阶矩阵B, 使得AB=E的充分必要条件是|A|＝±1; ×

(17)若n阶非零矩阵A满足AB=0, 则B=0; ×

(18)若A是n阶矩阵, 且|A|=1, 则(A*)*=A; √

(18)解: 由 $|A|=1$ 有 $A^*A=|A|E=E$, 则 $|A^*|=|A|^{n-1}=1$,

由 $(A^*)^*(A^*)=|A^*|E=E$ 有 $(A^*)^*=(A^*)^{-1}$

又由 $A^*A=E$ 有, $(A^*)^{-1}=A$, 因此 $(A^*)^*=(A^*)^{-1}=A$.

(18)若A是n阶可逆矩阵, 则$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$;

解: 由$A^*A=|A|E$有 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$,

由 $(A^*)^*(A^*)=|A^*|E=|A|^{n-1}E$ 有

$$(A^*)^*=|A|^{n-1}(A^*)^{-1}$$

又由 $A^*A=|A|E$有 $A^*=|A|A^{-1}$

因此 $(A^*)^*=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$.

(19)若A,B均为n阶可逆矩阵,则$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$的充分必要条件为AB=BA; √

(20)设A为s×n阶矩阵,r(A)=s,则s≤n; √

(21)设A为s×n阶矩阵,r(A)=s,则方程组AX=β有解; √

(22)设A为s×n阶矩阵,r(A)=s,则方程组AX=β有唯一解; ×

(23)设A为s×n阶矩阵, B为n×s阶矩阵,r(A)=s,若B满足BA=0, 则B=0; √

(24)设A为s×n阶矩阵,若A有一个n阶子式不为零,则线方程组AX=0只有零解; √

(25)若向量组α_1, α_2,… ,α_s线性无关的充要条件是每一个向量都不能由其余s-1个向量线性表示; √

(26) n维向量α_1, α_2,…,α_n线性无关的充要条件是它们可以表示任一n维向量; √

(27)方阵A属于同一个特征值的特征向量必线性相关; ×

(28)设λ_0是矩阵A的特征值,则r(λ_0E-A)<n; √

(29)设λ_0是矩阵A的特征值,则齐次线性方程组 √

$(\lambda_0 E-A)X=0$有非零解;

(30)若n阶矩阵A的行列式等于零,则0是矩阵A的特征值; √

(31)可逆矩阵A与A^{-1}有公共的特征向量; √

(32)设n阶矩阵A有n个互不相同的特征值, 则A可以对角化; √

(33)设n阶矩阵A的n个特征值相同,且A相似于对角阵, 则A是数量矩阵; √

(34)若矩阵A阶可以对角化, 则A一定有n个互不相同的特征值; ×

(35)正交矩阵A 满足$|A|=\pm 1$; √

(36)正交矩阵A 的特征值为±1。 ×

解:(36)若实数λ是正交矩阵A的特征值,

由$A^{-1}=A^T$有$\lambda^{-1}=\lambda$, 则 $\lambda=\pm 1$. 但是考察矩阵

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$的特征值是虚数$\pm i$.

- 2. 设n阶矩阵A满足$A^2-2A-4E=0$,

(1) 证明：矩阵A可逆, 求A^{-1};

(2) 证明：矩阵A+E可逆, 求$(A+E)^{-1}$;

(3) 证明：矩阵A+2E可逆,求$(A+2E)^{-1}$.

- 3.设n阶矩阵A,B满足A+B=AB,证明:A-E可逆,并求其逆.

- 4. 设n阶矩阵A满足$A^2=A$,证明E-2A可逆,并求$(E-2A)^{-1}$.

- 5. (1)设 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 若r(A)=3, 求k的值;

- **2. 设n阶矩阵A满足$A^2-2A-4E=0$,**

(1) 证明：矩阵A可逆, 求A^{-1};

(2) 证明：矩阵A+E可逆, 求$(A+E)^{-1}$;

(3) 证明：矩阵A+2E可逆,求$(A+2E)^{-1}$.

- **解: (1)由$A^2-2A-4E=0$有**

$$A(A-2E)=4E,$$

因此矩阵A可逆, 且

$$A^{-1}=(A-2E)/4;$$

(2) 由$A^2-2A-4E=0$有

$$(A+E)(A-3E)=E,$$

因此矩阵A+E可逆, 且

$$(A+E)^{-1}=A-3E.$$

- (3) 由$A^2-2A-4E=0$有

$$(A+2E)(A-2E)=2A,$$

由(1)知矩阵A可逆,则

$$(A+2E)(A-2E)A^{-1}=2E,$$

即

$$(A+2E)(E/2-A^{-1})=E,$$

因此矩阵$A+2E$可逆, 且

$$(A+2E)^{-1}=E/2-A^{-1}.$$

- 3.设n阶矩阵A,B满足$A+B=AB$,证明:$A-E$可逆,并求其逆.

解: 由$A+B=AB$有

$$A=-(E-A)B$$

即

$$(A-E)-(A-E)B=-E$$

从而

$$(A-E)(B-E)=E$$

因此矩阵$A-E$可逆, 且

$$(A-E)^{-1}=B-E.$$

- **4. 设n阶矩阵A满足$A^2=A$,证明E-2A可逆,并求$(E-2A)^{-1}$.**

解: 由$A^2=A$有

$$(E-2A)^2=E-4A+4A^2= E,$$

即

$$(E-2A)(E-2A)=E ,$$

因此矩阵E-2A可逆, 且

$$(E-2A)^{-1}=E-2A.$$

- 5. (1)设 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，若r(A)=3, 求k的值;

解:

$$|A| = \begin{vmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ k+3 & k & 1 & 1 \\ k+3 & 1 & k & 1 \\ k+3 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)(k-1)^3=0 \quad \Rightarrow k=-3, k=1.$$

当k=1时, A的三阶子式全为0, 即r(A)≤2.

因此取 k=-3.

- (2)设$B=\begin{pmatrix}1&3&2&k\\-1&1&k&1\\1&7&5&3\end{pmatrix}$，若r(B)=2, 求k的值;

解: B的三阶子式全为0, 因此

$$B\rightarrow\begin{vmatrix}1&3&2\\-1&1&k\\1&7&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2\\0&4&k+2\\0&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2\\0&4&k+2\\0&0&1-k\end{vmatrix}=4(1-k)=0\Rightarrow k=1.$$

$$B\rightarrow\begin{vmatrix}3&2&k\\1&k&1\\7&5&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2-3k&k-3\\1&k&1\\0&5-7k&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-3k&k-3\\5-7k&-4\end{vmatrix}=-7(k-1)^2=0$$

$$B\rightarrow\begin{vmatrix}1&3&k\\-1&1&1\\1&7&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4&k+1\\-1&1&1\\0&8&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&k+1\\8&4\end{vmatrix}=8(k-1)=0$$

- **6. 解方程** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

- **7. 当*a*是为何值时, 方程组有无穷多解？并求出通解.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

- **8.** 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关, 试确定下列向量组是否也线性无关。

(1) $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$, $\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2-4\alpha_3+2\alpha_4$,

$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+4\alpha_4$

(2) $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$, $\beta_2=2\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$,

$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_4$

(3) $\beta_1=-\alpha_1+\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_2-2\alpha_3$,

$\beta_3=2\alpha_1-5\alpha_2+3\alpha_3$

- **9.** 利用正交替换将二次型化成标准形:

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$$

- 6. 解方程 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

解: 由原方程可得 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0, \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- **7. 当*a*是为何值时, 方程组有无穷多解？并求出通解.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + a x_3 = 3 \\ x_1 + a x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

- 解: 由原方程组可得方程组有无穷多解时

$$r(A)=r(\bar{A})<3,$$

由于

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & a & 3\\ 1 & a & 3 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & a+2 & 1\\ 0 & a-1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -3-a & 0\\ 0 & 1 & a+2 & 1\\ 0 & a-2 & 2-a & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=2,\ r(A)=r(\bar{A})=2,$$

- 当a=2时, $\bar{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有

因此 $\begin{cases} x_1 = 5x_3 \\ x_2 = -4x_3 + 1 \end{cases}$ 取x_3=0可得特解 $\gamma_0 = (0,1,0)^T$,

原方程组的导出组为 $\begin{cases} x_1 = 5x_3 \\ x_2 = -4x_3 \end{cases}$

相应的基础解系为 $\eta = (5,-4,1)^T$,

原方程组的通解为 $\gamma_0 + c\eta$, 其中c为任意常数。

- **8. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关, 试确定下列向量组是否也线性无关。**

(1) $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$, $\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2-4\alpha_3+2\alpha_4$,

$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+4\alpha_4$

(2) $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$, $\beta_2=2\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$,

$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_4$

(3) $\beta_1=-\alpha_1+\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_2-2\alpha_3$,

$\beta_3=2\alpha_1-5\alpha_2+3\alpha_3$

(1)解: 设存在实数k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$$

即 $k_1(\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)+k_2(-\alpha_1+\alpha_2-4\alpha_3+2\alpha_4)+k_3(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+4\alpha_4)=0$

$(k_1-k_2+k_3)\alpha_1+(-k_1+k_2-k_3)\alpha_2+(3k_1-4k_2+k_3)\alpha_3+(2k_2+4k_3)\alpha_4=0$

因此,

$$\begin{cases} k_1-k_2+k_3=0 \\ -k_1+k_2-k_3=0 \\ 3k_1-4k_2+k_3=0 \\ \quad 2k_2+4k_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=-3k_3 \\ k_2=-2k_3 \end{cases}$$

即存在非零实数k_1,k_2,k_3, 使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$,

因此向量组β_1,β_2,β_3线性相关。

(2)解: 设存在实数k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$$

即 $k_1(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)+k_2(2\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)+k_3(\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_4)=0$

$$(2k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+2k_3)\alpha_2+(k_1+k_2)\alpha_3+(-k_1-2k_3)\alpha_4=0$$

因此,

$$\begin{cases} 2k_2+k_3=0 \\ k_1+2k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_1+2k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$$

即$k_1=k_2=k_3=0$ 时$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$,

因此向量组β_1,β_2,β_3线性无关。

(3)**解: 设存在实数k_1,k_2,k_3, 使得**

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$$

即

$$k_1(-\alpha_1+\alpha_3)+k_2(2\alpha_2-2\alpha_3)+k_3(2\alpha_1 5\alpha_2+3\alpha_3)=0$$

$$(-k_1+2k_2)\alpha_1+(2k_2-5k_3)\alpha_2+(k_1-2k_2+3k_3)\alpha_3=0$$

因此,

$$\begin{cases} -k_1+2k_2=0 \\ 2k_2-5k_3=0 \\ k_1-2k_2+3k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$$

即$k_1=k_2=k_3=0$ 时$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$,

因此向量组β_1,β_2,β_3线性无关。

- **9. 利用正交替换将二次型化成标准形:**

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$$

解:二次型的矩阵A为 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$

矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda E - A|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda-2 & 2\\ 0 & \lambda-8 & \lambda-1\\ 2 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0$$

因此A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$.

对$\lambda_1=1$解方程组$(E-A)X=0$　得基础解系$\alpha_1=(2,0,-1)^T$;

对$\lambda_2=6$解方程组$(6E-A)X=0$　得基础解系$\alpha_2=(1,5,2)^T$;

对$\lambda_3=-6$解方程组$(-6E-A)X=0$得基础解系$\alpha_3=(1,-1,2)^T$;

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$对单位化, 得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^T,\boldsymbol{\beta}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)^T,\boldsymbol{\beta}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T,$$

令P=(β_1,β_2,β_3),则有 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,6,-6)$.

因相应的正交替换为得
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{30}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_2 = \dfrac{5}{\sqrt{30}}y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \dfrac{2}{\sqrt{30}}y_2 + \dfrac{2}{\sqrt{6}}y_3 \end{cases}$$

二次型的标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3) = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$$