第六章 欧几里德空间

§6.2 正交变换

复习

正交矩阵：若n阶方阵满足$A^TA=E$ (即$A^{-1}=A^T$)，则A称为正交矩阵.

定理：方阵A为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A的列(行)向量都是单位向量且两两正交.

证明：练习

例：验证P矩阵为正交矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

正交变换的定义

定义：设T是欧氏空间V中的线性变换，如果对于任意的 $\alpha\in V$，都有 $|T\alpha|=|\alpha|$，即$\langle T\alpha, T\alpha\rangle=\langle\alpha, \alpha\rangle$，则$T$称为正交变换.

【保持向量的模不变】

例 在几何空间中把每一向量旋转一个角θ的线性变换是正交变换.

定理1 欧氏空间V中的一个线性变换T是正交变换 $\Leftrightarrow$对 $\forall\alpha, \beta\in V$, 有 $\langle T\alpha,T\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$

【保持向量的内积不变】

证明：充分性， 如果对$\forall\alpha, \beta\in V$, 有 $\langle T\alpha, T\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$

令$\alpha=\beta$, 有 $\langle T\alpha, T\alpha\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle$, $|T\alpha|=|\alpha|$

则T是正交变换.

必要性，若T是正交变换，则

$$|T\alpha|=|\alpha|,\ |T\beta|=|\beta|,\ |T(\alpha+\beta)|=|\alpha+\beta|$$

从而

$$0=|T(\alpha+\beta)|^2-|\alpha+\beta|^2=|T\alpha+T\beta|^2-|\alpha+\beta|^2$$

$$=|T\alpha|^2+|T\beta|^2+2\langle T\alpha,T\beta\rangle-|\alpha|^2-|\beta|^2-2\langle\alpha,\beta\rangle$$

$$=2\langle T\alpha,T\beta\rangle-2\langle\alpha,\beta\rangle$$

$$\therefore \langle T\alpha,T\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$$

推论 设T为欧氏空间的正交变换，又$\forall \alpha, \beta \in V$，则

$$\widehat{(\alpha, \beta)} = \widehat{(T\alpha, T\beta)}$$

【保持夹角不变】

证

$$\widehat{(\alpha, \beta)} = \arccos \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|} = \arccos \frac{\langle T\alpha, T\beta \rangle}{|T\alpha||T\beta|} = \widehat{(T\alpha, T\beta)}$$

总结：正交变换保持向量的模、内积、夹角不变

n维欧氏空间中正交变换的重要结论

定理2：设 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 是n维欧氏空间V的标准正交基底， V中的线性变换T为正交变换 $\Leftrightarrow$ $[T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n]$ 也是V的标准正交基底.

证明：必要性， 设T是正交变换，由定理1得

$$\langle T\varepsilon_i,T\varepsilon_j\rangle=\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$\therefore T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n$ 是n维线性空间V中标准正交组.

$\therefore T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n$ 是V的标准正交基.

充分性，$T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \cdots, T\varepsilon_n$ 是V的标准正交基，则对于任意$\alpha \in V$，设它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ，则

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

$$T\alpha = a_1 T\varepsilon_1 + a_2 T\varepsilon_2 + \cdots + a_n T\varepsilon_n$$

$$|T\alpha|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = |\alpha|^2$$

$$|T\alpha| = |\alpha|$$

从而T是正交变换.

定理3 设 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 是n维欧氏空间V的标准正交基底，

V中的线性变换T为正交变换 $\Leftrightarrow$ T在标准正交基底 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$下的矩阵$H=(h_{ij})_{n\times n}$是**正交**矩阵.

证明：(正交矩阵的列向量组是由正交的单位向量构成的向量组)

矩阵H是线性变换T在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵. 即

$$[T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\cdots,T\varepsilon_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]H$$

于是，$\left\langle T\varepsilon_i,T\varepsilon_j\right\rangle=h_{i1}h_{j1}+h_{i2}h_{j2}+\cdots+h_{in}h_{jn}=\sum_{k=1}^{n}h_{ik}h_{jk}$

则，T是正交变换

$\Leftrightarrow$ $T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \cdots, T\varepsilon_n$ 是V的标准正交基.

$\Leftrightarrow$ $\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} h_{ik} h_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, (i, j = 1, 2, \cdots n) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $H = (h_{ij})_{n \times n}$ 是正交矩阵.

定理1—3总结为1个定理

定理：设T是欧氏空间V的一个线性变换，则下述条件等价

1）T是正交变换；

2）T保持向量的内积不变；

3）T把标准正交基变为标准正交基；

4）T在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

另外，假设n维欧氏空间V中从基底 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 到基底 $[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$ 的过渡矩阵为M，即

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M$$

(1)若 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 和 $[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$ 都是V的标准正交基底，则M为正交矩阵.

(2)若 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 是V的标准正交基底，M为正交矩阵. 则 $[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$ 也为标准正交基底.

小结

- 正交变换的定义（重点）
- 正交变换的判定（重点）
- n维欧氏空间中正交变换的重要结论

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧式空间的一组基，证明：

(1)如果 $\gamma\in V$ 使 $(\gamma,\alpha_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$，那么 $\gamma=0$

(2)如果 $\gamma_1,\gamma_2\in V$ 使对任一$\alpha\in V$有$(\gamma_1,\alpha)=(\gamma_2,\alpha)$那么$\gamma_1=\gamma_2$.

2.设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$是**5**维欧氏空间 V 的一组标准正交基，

$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5,\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4,\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$

求 V_1 的一组标准正交基.

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$n$维欧氏空间$V$ 的一组向量，而

$$\Delta=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

证明：当且仅当 $|\Delta|\neq 0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证：**1**）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V 的一组基，所以γ 可表示为

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合，即 $\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n.$

由 $(\gamma,\alpha_i)=0$

知

$$(\gamma,\gamma)=(\gamma,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=k_1(\gamma,\alpha_1)+\cdots+k_n(\gamma,\alpha_n)=0$$

故 $\gamma=0.$

2)由题设，特别对基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

有 $(\gamma_1,\alpha_i)=(\gamma_2,\alpha_i)(i=1,2,\cdots,n)$,

即 $(\gamma_1-\gamma_2,\alpha_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$

由**1**）知 $\gamma_1-\gamma_2=0$,

即 $\gamma_1=\gamma_2$.

2.设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$是**5**维欧氏空间 V 的一组标准正交基，

$V_1 = L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中 $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

求 V_1 的一组标准正交基.

解：首先不难证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关,将它们正交化得

$$\beta_1 = \alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \frac{1}{2}\varepsilon_5$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5$$

单位化得

$$\eta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_5),\eta_2=\frac{\sqrt{10}}{10}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_4-\varepsilon_5)$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5)$$

则 η_1,η_2,η_3 就是 V_1 的一组标准正交基.

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$n$维欧氏空间$V$的一组向量，而

$$\Delta=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

证明：当且仅当 $|\Delta|\neq 0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$

两边与 α_i 取内积得

$$k_1(\alpha_i,\alpha_1)+k_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+k_m(\alpha_i,\alpha_m)=0$$

从而 $(k_1,k_2,\cdots,k_m)'$ 是 $\Delta x=0$ 的解，

又当且仅当 $|\Delta|\neq 0$ 时，该方程组只有零解，

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.