练习

一．填空题：

1．已知随机变量X的密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, 0<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$，且$P\{X>0.5\}=5/8$，则

$a=$__________ $b=$__________

一．填空题：

1．已知随机变量X的密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, 0<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$，且$P\{X>0.5\}=5/8$，则

$a=$ <u>1</u>　　$b=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>

解：由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，得$\int_0^1 (ax+b)dx=\frac{a}{2}+b=1$

又$P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^1 (ax+b)dx=\frac{3a}{8}+\frac{b}{2}=\frac{5}{8}$，

解得：$a=1$，$b=\frac{1}{2}$

2. 已知 X、Y 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1
0	1/3	b
1	a	1/6

且$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$独立,则 $a=$ ___ , $b=$ ____ .

2. 已知 X、Y 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1
0	1/3	b
1	a	1/6

且 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 独立,则 $a=$ _1/3_ , $b=$ _1/6_ .

解 $P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0, Y=1\}=a$

$$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}=a+\frac{1}{3}$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=1, Y=0\}=a+b$$

因为$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$独立，所以

$$P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\}$$

即

$$a=(a+\frac{1}{3})(a+b)$$

联立

$$a+b+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

得到

$$a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}.$$

3.设$X \sim N(10,0.6), Y \sim N(1,2)$,且$X$与$Y$相互独立,则$D(3X-Y)=$__ .

3.设$X \sim N(10,0.6), Y \sim N(1,2)$，且$X$与$Y$相互独立，则$D(3X-Y)=$ __ .

解：由方差的性质得

$$D(3X-Y)=9D(X)+D(Y)=5.4+2=7.4$$

4. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的样本，令 $Y = (X_1 + X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2$ 则当 $C =$ ______ 时 $CY \sim \chi^2(2)$.

4. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的样本，令 $Y=(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2$ 则当 $C=$ $\underline{\quad \frac{1}{8} \quad}$ 时 $CY \sim \chi^2(2)$.

解：因 $X_1+X_2 \sim N(0,8)$ $X_3-X_4 \sim N(0,8)$

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{8}} \sim N(0,1) \qquad \frac{X_3-X_4}{\sqrt{8}} \sim N(0,1)$$

所以 $\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{8}}\right)^2+\left(\frac{X_3-X_4}{\sqrt{8}}\right)^2 \sim \chi^2(2)$

即 $\frac{Y}{8} \sim \chi^2(2)$ 故 $C=\frac{1}{8}$

5. 设总体 $X \sim U\left[0,\theta\right]$,$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自 X 的样本，则θ的极大似然估计量是__________

5. 设总体 $X \sim U[0,\theta]$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自 X 的样本，则θ的极大似然估计量是 $\underline{\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}}$

解：由 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0\le x_i\le\theta, i=1,2,\cdots n \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

即 $$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0\le\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\theta, \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore\ \hat{\theta}=\max_{1\le i\le n}\{x_i\}$$

6.设总体$X \sim N(\mu, 0.9^2)$容量为9的简单随机变量，均值$\overline{x} = 5$，则未知参数μ的置信度为0.95的置信区间是____________

6.设总体$X \sim N(\mu,0.9^2)$容量为9的简单随机变量，均值$\bar{x}=5$，则未知参数μ的置信度为0.95的置信区间是$\underline{(4.412,5.588)}$

解：$\sigma^2=0.9^2$已知， 置信区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$

而$\bar{x}=5, n=9, \sigma=0.9, \alpha=0.05$， $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$

故$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}=0.588$ 置信区间为$(4.412,5.588)$

二、选择题

1.设X_1, X_2, X_3相互独立服从参数$\lambda = 3$的泊松分布，

令$Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$,则$E(Y^2) = \underline{C}$

$(A)1$　　$(B)9$　　$(C)10$　　$(D)6$

1.设X_1, X_2, X_3相互独立服从参数$\lambda=3$的泊松分布，

令$Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$，则$E(Y^2)=\underline{C}$

(A)1　　(B)9　　(C)10　　(D)6

解：$E(Y)=E[\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)]=\frac{1}{3}\times 3\times \lambda=3$

$$D(Y)=D[\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)]=\frac{1}{9}\times 3\times \lambda=1$$

$$E(Y^2)=D(Y)+E(Y)^2=1+9=10$$

2. 已知$X \sim t(n)$那么$X^2 \sim$________

A）$F(1,n)$　　B）$F(n,1)$　　C）$\chi^2(n)$　　D）$t(n)$

2. 已知 $X \sim t(n)$ 那么 $X^2 \sim$ ____**A**____

A） $F(1,n)$　　B） $F(n,1)$　　C） $\chi^2(n)$　　D） $t(n)$

解： $X \sim t(n)$，则 $X = \dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$

其中 $U \sim N(0,1)$， $V \sim \chi^2(n)$

故 $X^2 = \dfrac{U^2/1}{V/n} \sim F(1,n)$

3. 设 $X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，那么 X 和 Y 的联合分布为______.

$A.$ 二维正态分布,且 $\rho = 0$

$B.$ 二维正态分布,且 ρ 不定

$C.$ 未必是二维正态分布

$D.$ 以上都不对

3. 设 $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$，那么 X 和 Y 的联合分布为 ___C___.

A. 二维正态分布,且 $\rho = 0$

B. 二维正态分布,且 ρ 不定

C. 未必是二维正态分布

D. 以上都不对

当 X、Y 相互独立时，则 X 和 Y 的联合分布为 A .

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为正态总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 容量为**n**的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2, \quad S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2,$$

则服从自由度为n-1的t分布的随机变量是（）

（A）$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}$，（B）$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}}$，（C）$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}$，（D）$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$，

$$\because \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

$$\therefore \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$$

答案：（B）

5. 设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n>1)$独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$

令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$， 则

（A） $\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$ （B） $\mathrm{cov}(X_1,Y)=\sigma^2$

（C） $D(X_1+Y)=(n+2)\sigma^2/n$ （D） $D(X_1-Y)=(n+1)\sigma^2/n$

由题设可知， $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>1)$ 相互独立同分布，并且有

$D(X_1)=\text{cov}(X_1, X_1)=\sigma^2>0.$ $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>1)$ 相互独立，

所以 $\text{cov}(X_1, X_i/n)(i \neq 1)=0.$

$$\text{cov}(X_1, Y)=\sum_{i=1}^{n}\text{cov}(X_1, X_i/n)=\text{cov}(X_1, X_1/n)+\sum_{i=2}^{n}\text{cov}(X_1, X_i/n).$$

$$=\text{cov}(X_1, X_1/n)+0$$

$$=\left(\frac{1}{n}\right)\text{cov}(X_1, X_1)=\frac{\sigma^2}{n}$$

答案：（A）

6. 设随机过程$X(t)=e^{-At}$，$t>0$,其中A是在区间$(0,a)$上服从均匀分布的随机变量， 那么$X(t)$的均值函数为（）

（A）$\frac{1}{at}(1-e^{-at})$, t>0　　（B） $1-e^{-at}$

（C） $\frac{1}{at}(1+e^{at})$, t>0　　（D） $\frac{1}{at}(1+e^{at})$

解： $\mu_X(t) = E\left[X(t)\right]$

$$= E(e^{-At}) = \int_0^a e^{-ut} \times \frac{1}{a} du = \frac{1}{at}(1 - e^{-at}), \qquad t>0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E(e^{-At_1} \bullet e^{-At_2}) = E[e^{-A(t_1+t_2)}]$$

$$= \int_0^a e^{-u(t_1+t_2)} \times \frac{1}{a} du = \frac{1}{a(t_1+t_2)}[1 - e^{-a(t_1+t_2)}], \qquad t_1, t_1 > 0$$

答案：（A）

三、解答题

1. 3架飞机中有1架长机及2架僚机，一同飞往某目标执行轰炸任务。要飞到目的地一定要有无线电导航，但只有长机有此设备。一旦到达目的地，各飞机将独立轰炸，且每架飞机轰炸目标时炸毁目标的概率为0.3。到达目的地前，要经过敌方高射炮阵地，此时任一架飞机被击落的概率为0.2，求目标被炸毁的概率。

设A=“目标被炸毁”， B_0=“没有飞机到达目的地”，B_1=“只有长机到达目的地”

B_2=“长机及一架僚机到达目的地”，B_3=“3架飞机到达目的地”，
C_1=“长机炸毁目标”， C_2=“僚机1炸毁目标”， C_3=“僚机2炸毁目标”

$$P\left(B_0\right)=0.2, P\left(B_1\right)=0.8\times0.2\times0.2=0.032,$$

$$P\left(B_2\right)=C_2^1\left(0.8\times0.8\times0.2\right)=0.256, P\left(B_3\right)=0.8^3=0.512$$

$$P\left(A|B_0\right)=0, P\left(A|B_1\right)=0.3, P\left(A|B_2\right)=P\left(C_1+C_2\right)=0.3+0.3-0.3^2=0.51,$$

$$P\left(A|B_3\right)=P\left(C_1+C_2+C_3\right)=3\times0.3-3\times0.3^2+0.3^3=0.657,$$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P\left(B_i\right)P\left(A|B_i\right)=0.032\times0.3+0.256\times0.51+0.512\times0.657\approx0.48,$$

2. 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})$$

(1) 求A、B、C 的值，

(2) 求(X,Y)的联合密度，

(3) 判断 X、Y 的独立性 .

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})$$

解 (1) 由 $F(+\infty,-\infty)=0$, $F(-\infty,+\infty)=0$,

$F(+\infty,+\infty)=1$, 得到

$$A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$$

$$A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=0$$

$$A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$$

解得 $A=\dfrac{1}{\pi^2}$, $B=C=\dfrac{\pi}{2}$.

$$(3)\, F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}) \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}) \quad (-\infty<y<+\infty)$$

可见 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\,(x,y)\in R^2.$

故 X、Y 相互独立 .

(2) (X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$$

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{9+y^2}dy$$

$$=\frac{2}{\pi^2(4+x^2)}[\arctan\frac{y}{3}]_{-\infty}^{\infty}=\frac{2}{\pi(4+x^2)}$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\frac{6}{\pi^2(9+y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx$$

$$=\frac{3}{\pi^2(9+y^2)}[\arctan\frac{x}{2}]_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{3}{\pi(9+y^2)}\qquad(-\infty<y<+\infty)$$

可见 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\quad(x,y)\in R^2.$

故 X、Y 相互独立.

3. 设 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} Ay(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\ , & 其它 \end{cases}$$

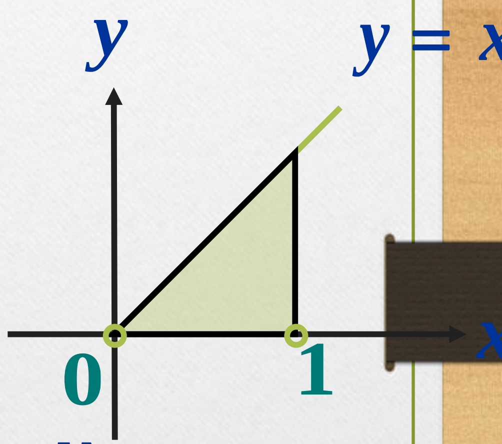
(1) X 与Y 是否相互独立?

(2) 求 $f\left(y|x\right)$和 $f\left(x|y\right)$;

(3) 求 $Z=X+Y$概率密度.

解 $$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

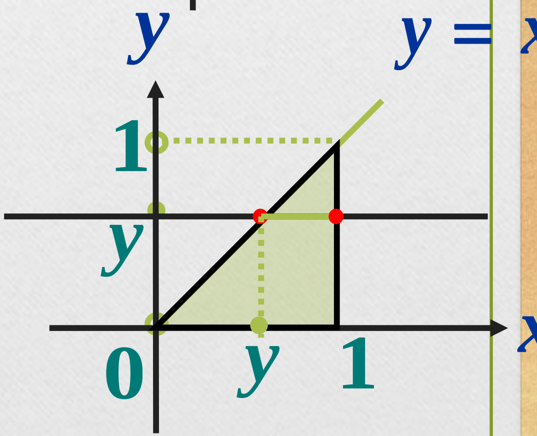


$$f_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1)

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

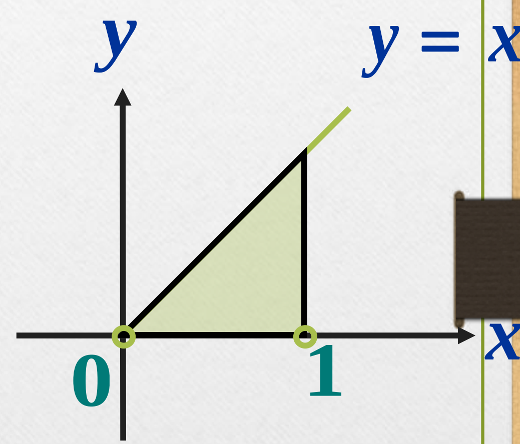
所以 X 与Y 不独立.



(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



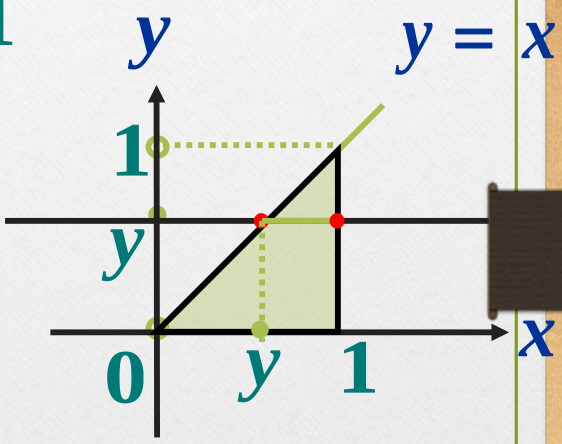
当 $0 < x < 1$ 时, $f_X(x)\neq 0.$

故 $$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}2y/x^2, & 0< x<1, 0< y\le x\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

暂时固定

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0\quad, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



当 $0<y<1$ 时, $f_Y(y)\neq 0.$

故

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2(1-x)\big/(1-y)^2, & y\le x<1, 0<y<1\\ 0\quad, & \text{其它}\end{cases}$$

暂时固定

(3)

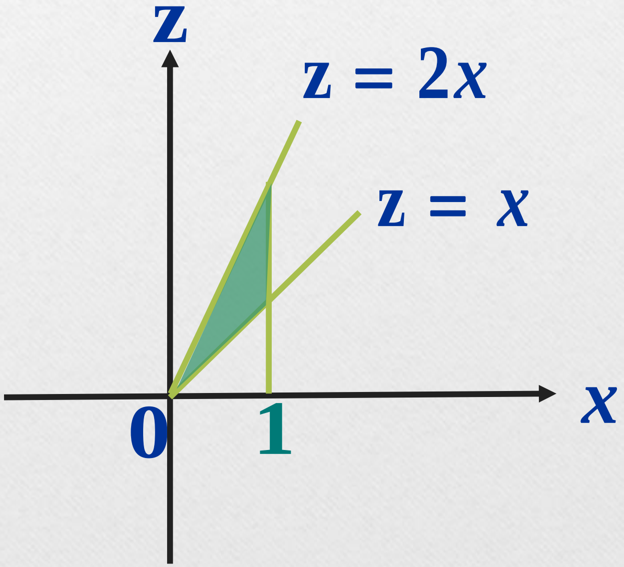
暂时固定

$Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le z-x\le x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x\le z\le 2x \end{cases}$$



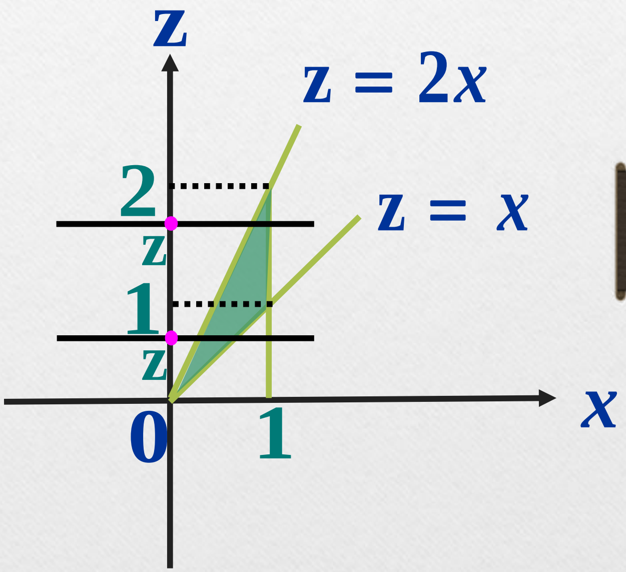
当 $z \le 0$ 或 $z > 2$ 时， $f_Z(z) = 0.$

当 $0 < z \le 1$ 时，

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{z} 24(z-x)(1-x)dx$$

当 $1 < z \le 2$ 时，

$$f_Z(z) = \int_{z/2}^{1} 24(z-x)(1-x)dx$$



4. 某单位设置一台电话总机，共有200架分机。设每个电话分机是否使用外线通话是相互独立的。设每时刻每个分机有5%的概率要使用外线通话，问总机需要多少外线才能以不低于90%的概率保证每个分机要使用外线时可供使用？

解：设需要k条外线，X为某时刻通话的分机数，则

$$X \sim B(200, 0.05), np = 10, npq = 9.5$$

$$P(0 \le X \le k) \approx \phi\left[\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right] - \phi\left[\frac{0-np}{\sqrt{npq}}\right]$$

$$= \phi\left[\frac{k-10}{\sqrt{9.5}}\right] - \phi\left[\frac{-10}{\sqrt{9.5}}\right] \approx \phi\left[\frac{k-10}{\sqrt{9.5}}\right] \ge 90\%$$

$$\frac{k-10}{\sqrt{9.5}} \ge 1.29, \therefore k \ge 14.$$

总机需要14外线才能以不低于90%的概率保证每个分机要使用外线时可供使用

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} \beta x^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$\beta > 0$ 求参数 β 的矩估计量和极大似然估计量。

解：

1^0 $E(X) = \int_0^1 x\beta x^{\beta-1} dx = \dfrac{\beta}{\beta+1} = \mu_1 \quad \therefore \beta = \dfrac{1}{1-\mu_1}$

$\therefore$ 矩估计量 $\hat{\beta} = \dfrac{1}{1-\overline{X}}$

$$f(x)=\begin{cases}\beta x^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\beta>0$$

2^0 似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\beta x_i^{\beta-1}, & 0<x_i<1, i=1,2,\cdots n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\ln\left(L(\beta)\right)=n\ln\beta+\left(\beta-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

当 $0<x_i<1, i=1,2,\cdots n$ 时

对β求导数得 $$\frac{n}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

最大似然估计值为 $$\hat{\beta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

最大似然估计量为 $$\hat{\beta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

7.某台机器加工某种零件，规定零件长度为 **100cm**，标准差不超过 **2cm**，每天定时检查机器运行情况，某日抽取 **10** 个零件，测得平均长度 $\overline{X}=101$ **cm**，样本标准差 $S=2$ **cm**，设加工的零件长度服从正态分布，问该日机器工作是否正常（$\alpha=0.05$）？

解 已知 $\overline{X}=101, n=10, S=2, \alpha=0.05$

(1) 由题意需检验 $H_0: \mu=100, H_1: \mu\neq 100$

由 $$t=\frac{\overline{X}-100}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

拒绝域 $$|t|=\frac{|\overline{X}-100|}{S/\sqrt{n}}\geq t_{\alpha/2}(9)$$

$t_{\alpha/2}(9)=2.2622$

$$|t|=\frac{|\overline{X}-100|}{S/\sqrt{n}}=1.5<2.2622$$

接受H_0

(2) 由题意需检验 $H_0:\sigma^2=4, H_1:\sigma^2>4$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

拒绝域 $(\chi_\alpha^2(n-1),\infty)$

$$\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(9)=16.919,$$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=9<16.919$$ 接受H_0

由1、2的证明可知，机器可以正常工作

结束