Chpt.7 Statistical Inference: Parameter Estimation

第七章 参数估计

上节回顾

准则	含义	矩估计	最大似然估计
无偏性			
有效性			
相合性			

$\hat{\theta}_{\mathrm{ME}}=2\overline{\mathrm{X}}$ $\hat{\theta}_{\mathrm{M}L\mathrm{E}}$ $\max\limits_{1\leq \mathrm{i}\leq n} X_i$

例4

设总体X~U[0, θ]，其中$\theta > 0$为未知参数，$(X_1, \cdots, X_n)(\mathrm{n} \geq 2)$是取自总体X的样本，试证$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ 比 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 有效。

例4

设总体X~U[0, θ]，其中$\theta > 0$为未知参数，$(X_1, \cdots, X_n)(\mathrm{n} \geq 2)$是取自总体X的样本，试证$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ 比 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$ 有效。

分析：必须先确定$\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$的分布，才能计算出$\mathrm{E}\hat{\theta}_2$，$\mathrm{D}\hat{\theta}_2$，并由此验证$\mathrm{E}\hat{\theta}_2 = \theta$及$\mathrm{D}\hat{\theta}_2 < \mathrm{D}\hat{\theta}_1$

证明：先确定$X_{(n)} = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$的分布。总体X的分布函数为

$$F(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当$0 \le x \le \theta$时，由$X_{(n)}$的分布函数$F_{X_{(n)}}(x)$定义有

$$F_{X_{(n)}}(x) = \mathrm{P}\{X_{(n)} \le x\} = \mathrm{P}\{X_1 \le x, \cdots, X_n \le x\} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\{X_i \le x\} = \{P(X \le x)\}^n = (F(x))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$故 f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

最大似然估计$\hat{\theta}_{MLE} = \max\limits_{1 \le i \le n} X_i = X_{(n)}$

是有偏的！

乘$\frac{n+1}{n}$就无偏了，即 $\mathrm{E}\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}\mathrm{E}X_{(n)} = \theta$

再计算$\mathrm{E}X_{(n)}$，$DX_{(n)}$

$$\mathrm{E}X_{(n)} = \int_0^\theta x \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1}\theta,$$

$$\mathrm{E}X_{(n)}{}^2 = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$DX_{(n)} = \mathrm{E}X_{(n)}{}^2 - \left(EX_{(n)}\right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$$

$$\mathrm{D}\hat{\theta}_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathrm{D}X_{(n)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

$$\mathrm{E}\hat{\theta}_1 = 2E\overline{X} = 2EX = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta,$$
$$\mathrm{D}\hat{\theta}_1 = 4D\overline{X} = 4\cdot\frac{DX}{n} = 4\cdot\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n},$$

显然$\mathrm{E}\hat{\theta}_2 = \mathrm{E}\hat{\theta}_1 = \theta$，且$\mathrm{D}\hat{\theta}_2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{3n} = \mathrm{D}\hat{\theta}_1$，
因此 $\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$有效。

Remark：在点估计中，经常对利用各种点估计方法得到的估计量进行比较，有时还进行改进，从而得到未知参数的较优估计。
例如：本题中，$\max\limits_{1\le i\le n} X_i$与$2\overline{X}$恰为$\theta$的最大似然估计与矩估计，虽然$\max\limits_{1\le i\le n} X_i$是有偏的，但改进后的估计$\frac{n+1}{n}\max\limits_{1\le i\le n} X_i$不仅是无偏的，并且比$2\overline{X}$更有效。

主观题 10分

设置

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中 0< $\theta<1$为未知参数，(X_1，$\cdots$, Xn)是取自总体 X 的样本，试求θ的矩估计量与最大似然估计量

作答

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中 0< $\theta<1$为未知参数，(X_1，…, Xn)是取自总体 X 的样本，试求θ的矩估计量与最大似然估计量

解 $EX=\int_0^1 x\theta dx+\int_1^2 x(1-\theta)dx=\frac{3}{2}-\theta$, $\theta=\frac{3}{2}-EX$

$$\hat{\theta}_{ME}=\frac{3}{2}-\bar{X}$$

记 N 为样本中小于 1 的个数，似然函数为

$$L(\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$$

$$LnL=Nln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$$

似然方程为

$$\frac{dLn\,L}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$$

解得

$$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{N}{n}$$

设置

设总体X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\}\end{cases}$$

其中0<θ<1为未知参数，$(X_1,\cdots,X_n)$是取自总体X的样本

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}_{\mathrm{ME}}$;

(2) 判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量.

作答

设总体X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\}\end{cases}$$

其中0<θ<1为未知参数，$(X_1,\cdots,X_n)$是取自总体X的样本

(1)求θ的矩估计量$\hat{\theta}_{\mathrm{ME}}$;

(2)判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量.

解　(1)

$$(1)EX=\int_0^\theta x\cdot\frac{1}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_\theta^1 x\cdot\frac{1}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{2\theta+1}{4}$$

$$\theta=2EX-\frac{1}{2},\hat{\theta}_{ME}=2\bar{X}-\frac{1}{2}$$

（2）$EX^2=\int_0^{\theta}x^2\cdot\frac{1}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}x^2\cdot\frac{1}{2(1-\theta)}dx=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}-\left(\frac{2\theta+1}{4}\right)^2=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48}$$

$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{DX}{n}+(E\overline{X})^2=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48n}+\frac{4\theta^2+4\theta+1}{16}\neq\frac{\theta^2}{4}$

故， $4\overline{X}^2$不是θ^2的无偏估计量

7.3 区间估计

[1] 为何要引进参数的区间估计

根据具体样本观测值,点估计提供一个明确的数值.
但这一数值距离真值有多大距离?
或者说真值落入估计值附近小区间的可能性有多大?
这些点估计都无法给出。

设X是总体，$X_1, \cdots, X_n$是一样本，θ是待估计的参数。
区间估计的目的是找到两个统计量：

$$\hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_n) \qquad \hat{\theta}_2(X_1, \cdots, X_n)$$

使得随机区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$以一定可靠程度包含真值$\theta$

[2] 区间估计的概念

设 $\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$ 及 $\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$ 是由样本确定的两个统计量

$$\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$$

如果对于给定的α（0<α<1），有

$$P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} \geq 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为参数θ的置信水平为1-α的置信区间，其中 $\hat{\theta}_1$ 叫做置信下限， $\hat{\theta}_2$ 叫做置信上限.

注1： $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ 是概率意义下成立

$$P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} \geq 1-\alpha$$

说明：参数θ虽然未知，但是确定的值.

$\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U$是统计量，随机的，依赖于样本.

置信区间$\left(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right)$是随机的，依赖于样本. 样本不同，

算出的区间也不同.

对于有些样本观察值，区间覆盖θ，但对于另一些

样本观察值，区间则不能覆盖θ.

例1：设总体$X \sim N(\mu,4)$, μ未知, $X_1,\ldots,X_4$是一样本.

则$\bar{X} \sim N(\mu,1)$.

$$P(\bar{X}-2<\mu<\bar{X}+2)=P(|\bar{X}-\mu|<2)$$

$$=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$\Rightarrow (\bar{X}-2, \bar{X}+2)$是$\mu$的置信水平为0.95的置信区间.

若μ=0.5，样本均值的观测值$\bar{x}$分别为3，2，1时，对应得区间分别为

（1，5） （0，4） （-1，3）

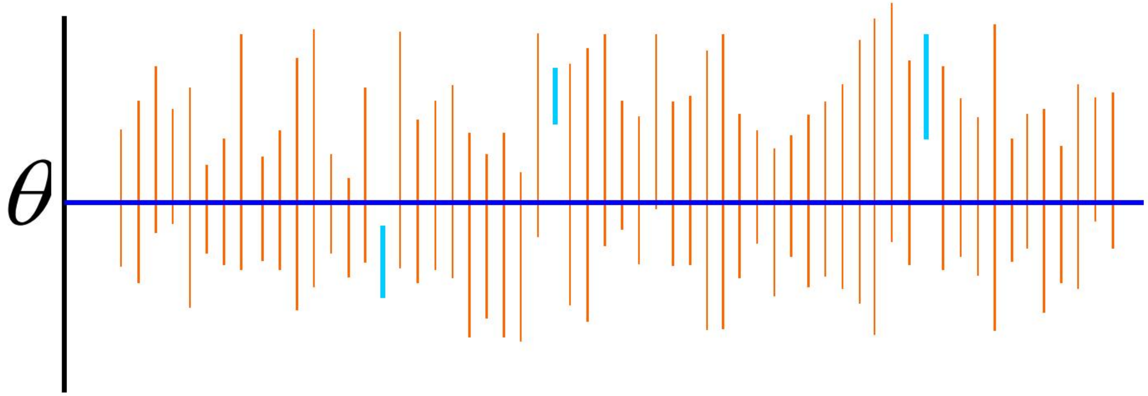
✗ ✓ ✓

对于一个具体的区间而言，或者包含真值或者不包含真值，无概率可言

$(\bar{X}-2, \bar{X}+2)$是μ的置信水平为0.95的置信区间中“置信水平为0.95”的意义是什么?.

反复抽样多次(各次样本容量都为n)。每个样本值确定一个区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$，每个这样的区间或包含θ的真值，或不包含θ的真值。按照伯努利大数定律（频率趋向于概率），在这些区间中，包含真值θ的比例约为1-α.

如何理解置信区间？



如反复抽样10000次，当$\alpha=0.05$，即置信水平为95%时，10000个区间中包含θ真值的约为9500个；当$\alpha=0.01$，即置信水平为99%时，10000个区间中包含θ的真值的约为9900个.

[例2] 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2),(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是一个样本，σ^2已知，μ未知，求μ的置信水平为 1 －α的置信区间。

[例1] 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个样本，σ^2已知，μ未知，求μ的置信水平为 $1-\alpha$的置信区间。

[解]：我们知道 $\overline{X}$ 是μ的无偏估计，且 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，按照标准正态分布$\alpha$分位点的定义，待求常数$z_{\alpha/2}$满足

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

我们也可以用 $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$计算

$$\Downarrow$$

$$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} \le \mu \le \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

这样我们就得到μ的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}\right)$$

如果 α＝0.05, σ＝1, n=16，查表得 $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(15)=t_{0.025}(15)=2.13$。如果我们得到样本的一组观测值，计算得到 $\bar{x}=5.20$，则得到一个置信水平为0.95的的置信区间(4.71, 5.69)； 若$S=1.03$, 则得到另一个置信水平为0.95的置信区间 (4.56,5.63)。

这两个置信区间哪个更好?

[2] 区间估计的步骤

设计统计量$\widehat{W} = W(X_i; \theta)$，W含有参数θ，但是随机变量$\widehat{W}$的分布与θ无关，称$\widehat{W}$为**枢轴量**（随机变量）

例如：$\widehat{W} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，$\widehat{W} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$

对于置信水平1−α，定义常数a和b，使得概率$P\{a < \widehat{W} < b\} = 1 - \alpha$

由此求出随机变量$\overline{\theta} \leftarrow \{\theta: W(X_n; \theta) = b\}$ 和 $\underline{\theta} \leftarrow \{\theta: W(X_n; \theta) = a\}$

那么$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$为一个置信水平为1−α的置信区间，且来自随机变量$\widehat{W}$

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \overline{X} - 1.065\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + 1.065\frac{S}{\sqrt{n}}$$

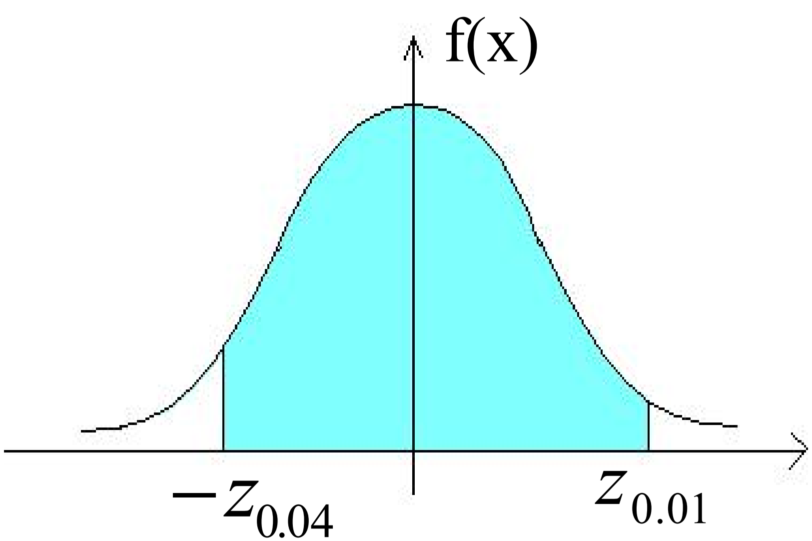
- 置信区间的长度（枢轴量的样本值估计）由枢轴量决定
- 不同枢轴量构造的同样置信水平的置信区间，区间长度越小越好

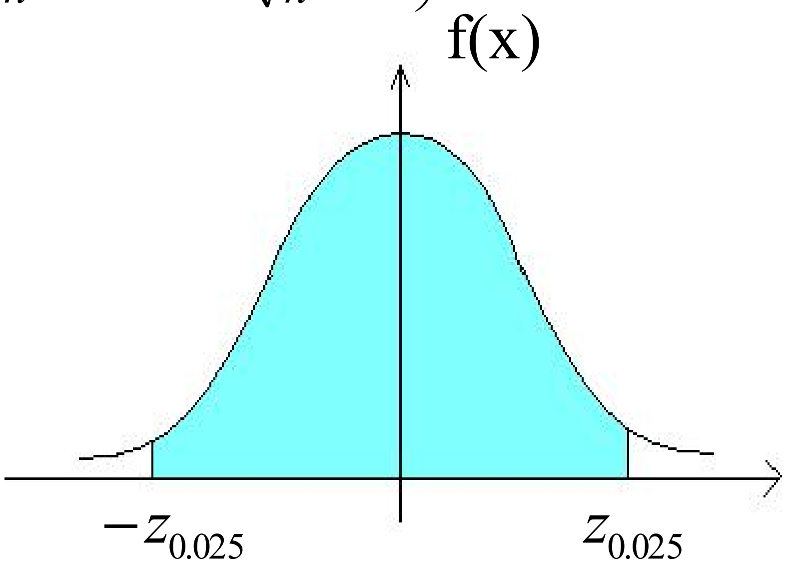
同一个枢轴量也可以构成多个置信区间

注意到 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，可以构造无穷多个置信水平为1-α 的置信区间。

比如α=0.05时，必有 $P\left\{-z_{0.04} \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{0.01}\right\} = 0.95$，那么以下区间

是 μ 的置信水平为0.95的置信区间 $\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01}, \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}\right)$





两个置信水平相等的区间，显然区间长度越短的估计精度越高

上面两个置信水平都为0.95的置信区间的长度分别为

$$2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}=3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04}+z_{0.01})=4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

事实上由于 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ ，其概率密度是对称的单峰函数，可以断定对称置信区间 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$ 长度最短。

例3 某地一旅游者的消费额 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且标准差 $\sigma=12$ 元，今要对该地旅游者的平均消费额 EX 加以估计，为了能以95%的置信度相信这种估计误差小于2元，问至少要调查多少人？

例3 某地一旅游者的消费额 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且标准差$\sigma=12$元，今要对该地旅游者的平均消费额 EX 加以估计，为了能以95%的置信度相信这种估计误差小于2元，问至少要调查多少人？

解 由题意知：消费额 $X\sim N(\mu,\ 12^2)$，设要调查 n 人，使得

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<1.96\right\}=0.95$$ 置信区间定义

$$P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right|<1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$$

而 $\left|\bar{X}-\mu\right|<2 \Longrightarrow 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<2$

$|\bar{X}-\mu|<2$ 为题意，
与置信区间无关

解得 $n>\left(\frac{1.96\times 12}{2}\right)^2=138.29$

至少要调查139人

这道题借用置信区间的概念，
将95%置信度引入，
但后面计算与置信区间无关

总结-关于置信区间的几个重要知识点

1. 置信区间英文为Confidence Interval，与Bayes估计中的 Creditable Interval（可信区间）不同。
2. 置信区间的定义时，在估计的众多区间中，能有多少的区间能够覆盖一个固定的参数值θ。从严格数学意义上讲，不能告诉我们θ的变化范围。
3. 我们通常希望得到的，θ的一定变化范围，是由可信区间得到的。
4. 上述问题的原因是在传统统计学（频率派）中θ是常数或标量（scalar）（而不是随机变量r.v.），没有一个变化的范围的定义。
5. 置信区间估计得到的区间小，意味着在一个很小的区间范围都能很大可能覆盖θ，变相说明我们找的准，进而变相估计认知θ
6. 置信区间的英文是信心区间，顾名思义是对找到的结果有多大的信心（贝努力分布）。
7. 只有把θ看做随机变量，才可以讨论θ的变化范围，也就是我们往往“真实想要”的区间

7.4 单个正态总体均值与方差的区间估计

7.5 两个正态总体均值差与方差比的区间估计

7.6 非正态总体参数的区间估计

7.4 单个正态总体均值与方差的区间估计

正态总体均值 μ 的区间估计

(1) 正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 $\sigma=\sigma_0$，求μ的区间估计

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，未知 σ ， 求μ的区间估计

正态总体方差 σ^2 的区间估计

(1) 正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 $\mu=\mu_0$ ， 求σ^2的区间估计

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，未知μ，求 σ^2的区间估计

正态总体均值μ的区间估计

(1) 设正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 $\sigma=\sigma_0$，求 μ 区间估计

因为 $\overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，所以 $\overline{Y}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，对于给定的α，

我们取区间 $\left(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}\right)$，构造概率为1-α的事件

$$P\left\{\frac{\left|\overline{X}-\mu\right|}{\sigma_0/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

$z_{\alpha/2}$是标准正态分布的 $\alpha/2$ 分位点，即

$$P\{Y \ge z_{\alpha/2}\} = \frac{\alpha}{2}$$

正态总体均值μ的区间估计

(1) 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知 $\sigma = \sigma_0$，求μ区间估计

把上述关于事件概率的描述转化为关于均值μ的概率描述：

$$P\left\{ \overline{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \mu \le \overline{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right\} = 1 - \alpha$$

由此，求得关于μ的置信水平为1-α的置信区间(用观测值)：

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},\ \ \bar{x} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$$

(2) 设正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，未知 σ ，求μ区间估计

因σ 未知，在上面的估计中无法使用 σ^2，我们用 S^2 代替 σ^2 ，得随机变量

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \qquad \text{对比} \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

对于给定的置信水平1- α，我们取区间 $\left(-t_{\alpha/2}, t_{\alpha/2}\right)$ ，满足

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \le t_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，未知σ，求μ的区间估计

由此转化为关于μ的关系式

$$P\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \le \mu \le \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

由此，求得μ的置信水平为1-α的置信区间(用观测值)：

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2},\ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right)$$

例3：已知某种木材横纹抗压力的实验值服从正态分布，对9个试件作横纹抗压力实验得数据如下（单位：kg/cm^2）：

482,493,457,471,510,446,435,418,469

试对下面情况分别求出平均横纹抗压力的95%置信区间.

(1) 已知$\sigma = 25$

(2) σ未知

分析：注意在σ已知与σ未知两种情形下，单个正态总体均值μ的置信区间是不同的，这是因为借助的枢轴量及其分布是不一样的。

在这道题中我们加以对比

解：（1）由于$\sigma = 25$已知，平均横纹抗压力μ的置信区间为

$$(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

利用样本值计算可得$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 464.56$

这里n=9，$\sigma = 25$，给定$\alpha = 0.05$，查附表$z_{0.025} = 1.96$，容易计算

$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$=464.56±16.33, 即置信区间为（448.23,480.89）

（2）由于σ未知，μ的置信区间为$(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$

利用样本值计算可得

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2) = 830.63$$

S=28.82

这里$\alpha = 0.05$，查附表$t_{0.025}(8) = 2.306$，得$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 464.56 \pm 22.15$，即置信区间为（442.41,486.71）

正态总体方差σ^2的区间估计

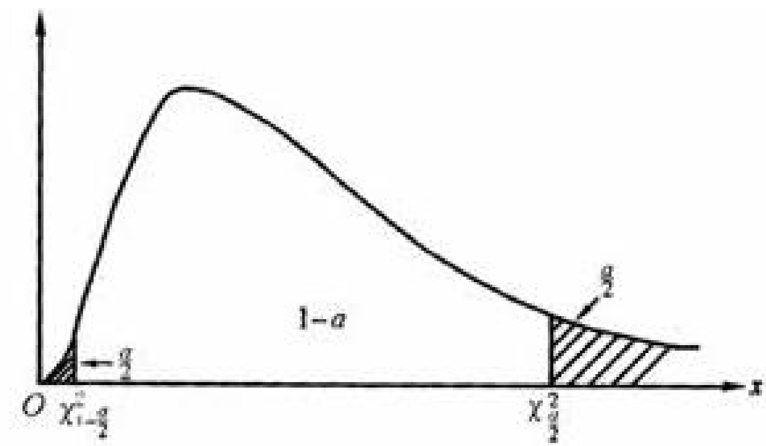
(1) 正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知$\mu=\mu_0$，求σ^2的区间估计

利用随机变量$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$ 进行估计

由于此分布曲线不对称，故对于给定的置信水平1-α，很难找到最短的置信区间. 通常模仿前面的做法，取区间$\left(\chi^2_{1-\alpha/2}, \chi^2_{\alpha/2}\right)$使得：

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2} \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \le \chi^2_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

思考：这种取法是最优的吗？



正态总体方差σ^2的区间估计

(1) 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知 $\mu = \mu_0$，求 σ^2 的区间估计

转化为关于σ^2的概率描述，

$$P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right\} = 1-\alpha$$

得置信水平为1-α的σ^2的置信区间(用观测值)：

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right)$$

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，未知μ，求σ^2的区间估计

由于$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$中$\mu$未知，用$\overline{X}$代替，得到

$$\chi^2=\frac{n-1}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \xrightarrow{\mu\Rightarrow\overline{X}} \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

对给定的置信水平1-**α**，我们取区间$\left(\chi^2_{1-\alpha/2},\ \chi^2_{\alpha/2}\right)$，使

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2} \le \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \le \chi^2_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

得置信水平为1-α的σ^2的置信区间（用观测值）：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$$

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，未知μ，求 σ^2的区间估计

例4 从一批零件中,抽取9个零件,测得其直径(毫米)为

19.7, 20.1, 19.8, 19.9, 20.2, 20.0, 19.9, 20.2, 20.3

设零件直径$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且未知μ

求这批零件直径的方差σ^2对应于置信水平0.95的置信区间.

解: 已知**α= 0.05, *n* = 9, s^2 = 0.411**,按自由度 ***k* = 8** 查表得,

$$\chi^2_{0.975} = 2.18, \quad \chi^2_{0.025} = 17.5$$

所求置信区间为: $\left(\dfrac{8 \times 0.411}{17.5}, \dfrac{8 \times 0.411}{2.18} \right)$

即（**0.188**，**1.508**）.

习题1：

设总体$X \sim N(\mu, 9)$，$(X_1, \cdots, X_n)$是取自总体X的样本欲使μ的$1-\alpha$置信区间长度L不超过2，问在以下两种情况下两种情况下样本容量n至少应取多少？

（1）$\alpha = 0.1$　　（2）$\alpha = 0.01$

习题2：

随机从某毛纺厂生产的羊毛锭中抽测10个样品的含脂率%，得到样本均值$\bar{x}$=7.7，样本方差S^2=0.64，假定含脂率服从正态分布。试分别在下面的置信度下给出平均含脂率的置信区间。（1）1-α=90%；（2）1-α=95%；