第五章 线性变换

(补充) 约当(*Jordan*)标准形介绍

【约当标准形】

前面的讨论可知：并不是对于每一个n阶矩阵A变换都有一个可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角形.

- 希望在与某个n阶矩阵相似的全体矩阵中，找到一个比较简单的矩阵，作为这一类矩阵的代表，从而简化这一类矩阵的讨论.
- 当然对角形矩阵最为简单，但是并不是任意的阶矩阵都能与对角矩阵相似的.
- 但是却相似于一个我们称之为*Jordan*标准形的矩阵，这是一个相对简单的矩阵.

定义 形式为

$$J(\lambda,t)=J_i=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}_{t\times t}$$

的矩阵称为约当(*Jordan*)块，其中 λ 是复数.

【 有的书上定义 形如

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}_{m_i\times m_i}$$

的方阵叫做*Jordan*块（这种定义较少）.】

由若干个约当块组成的准对角矩阵称为约当形矩阵，其一般形状如

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{pmatrix} \qquad (1)$$

其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}$ ，并且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 中有一些可以相等. 记为J (或J_n).

例如
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

都是约当块，而

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

是一个约当形矩阵.

注：

一级约当块就是一级矩阵，因此约当形矩阵中包括对角矩阵.

在一个约当标准形中，主对角线上的元素正是特征多项式的全部的根（重根按重数计算）.

定理 任意一个n阶复矩阵都与一个*Jordan*标准形J相似，若不计J中的*Jordan*块的排列顺序，则J由A唯一确定.