Ch.1 Basic Concepts of Probability

第一章 概率论的基本概念

1.1 Introduction

1.1.1 What Is Random Event

确定性现象

在一定条件下必然发生的现象

早晨太阳从东方升起

随机现象

在一定条件下具有多种可能结果， 且试验前无法预知出现哪个结果的现象

抛硬币， 可能正面朝上， 也可能反面朝上

你能举出更多随机现象的例子吗？

填空题 3分

设置

在空格处填A或B：

1.向上抛出的物体会落下 [填空1]

2.打靶，击中靶心 [填空2]

3.买了彩票会中奖 [填空3]

A.确定性现象 B.随机现象

作答

1.1 Introduction

1.1.1 What Is Random Event

随机现象有其偶然性的一面，也有其必然性的一面

其必然性表现在大量重复试验或观察中会呈现出固有规律性

⇓

规律性：随机现象的统计规律

研究目标：寻求随机现象的统计规律性

例如：反复多次抛硬币，正面朝上的可能性为1/2
中国人的人均预期寿命为78.2岁

1.1 Introduction

1.1.2 Why to Study

随机现象是普遍存在的，需要正面对待。

概率论与数理统计是唯一一门专门研究随机现象的学科。

概率论在计算机领域应用广泛。

贝叶斯推断

随机游走

……

极大似然估计
EM迭代

概率图

1.1.2 Why to Study

随机现象是普遍

对待。

概率论与数理统

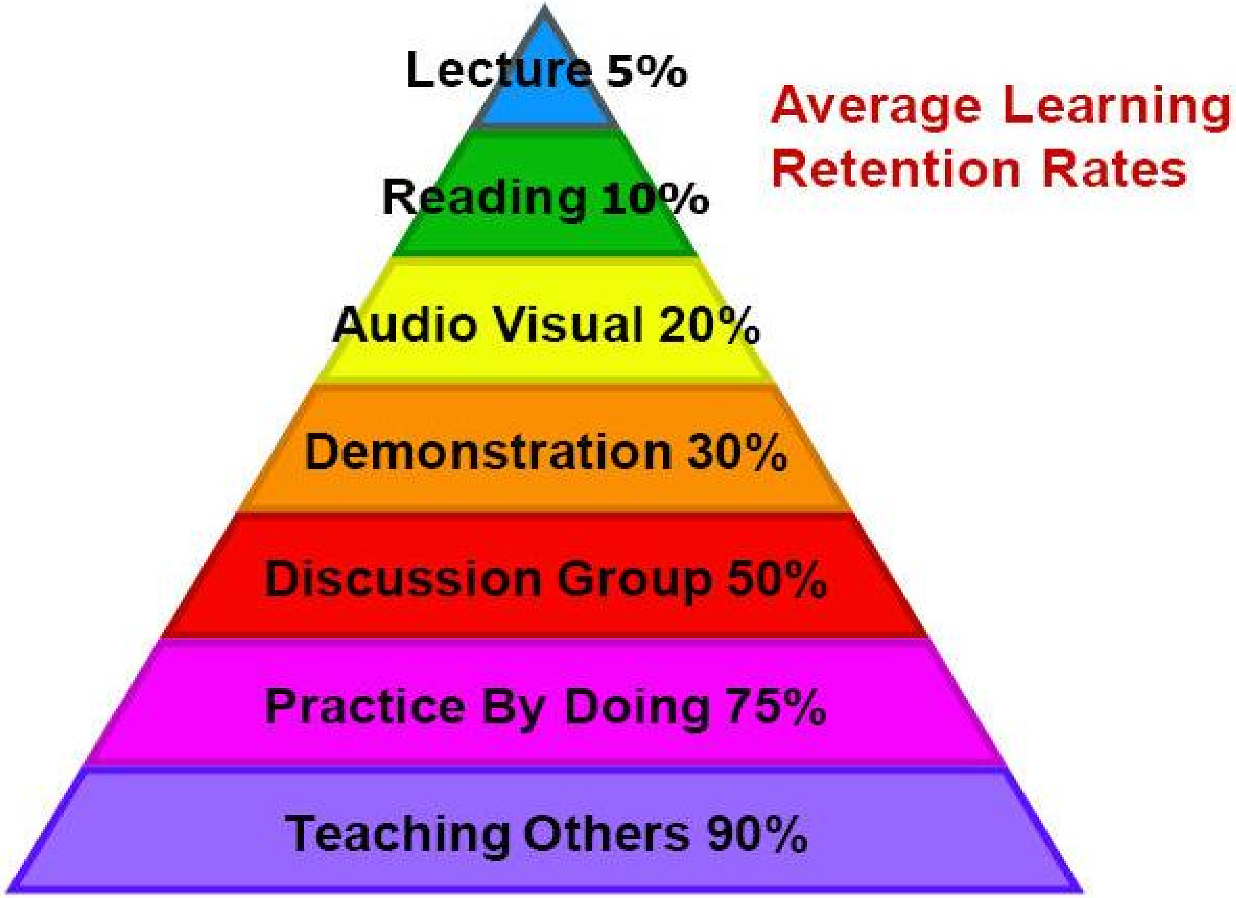
研究随机现象的学科。

概率论在计算机

4个学分

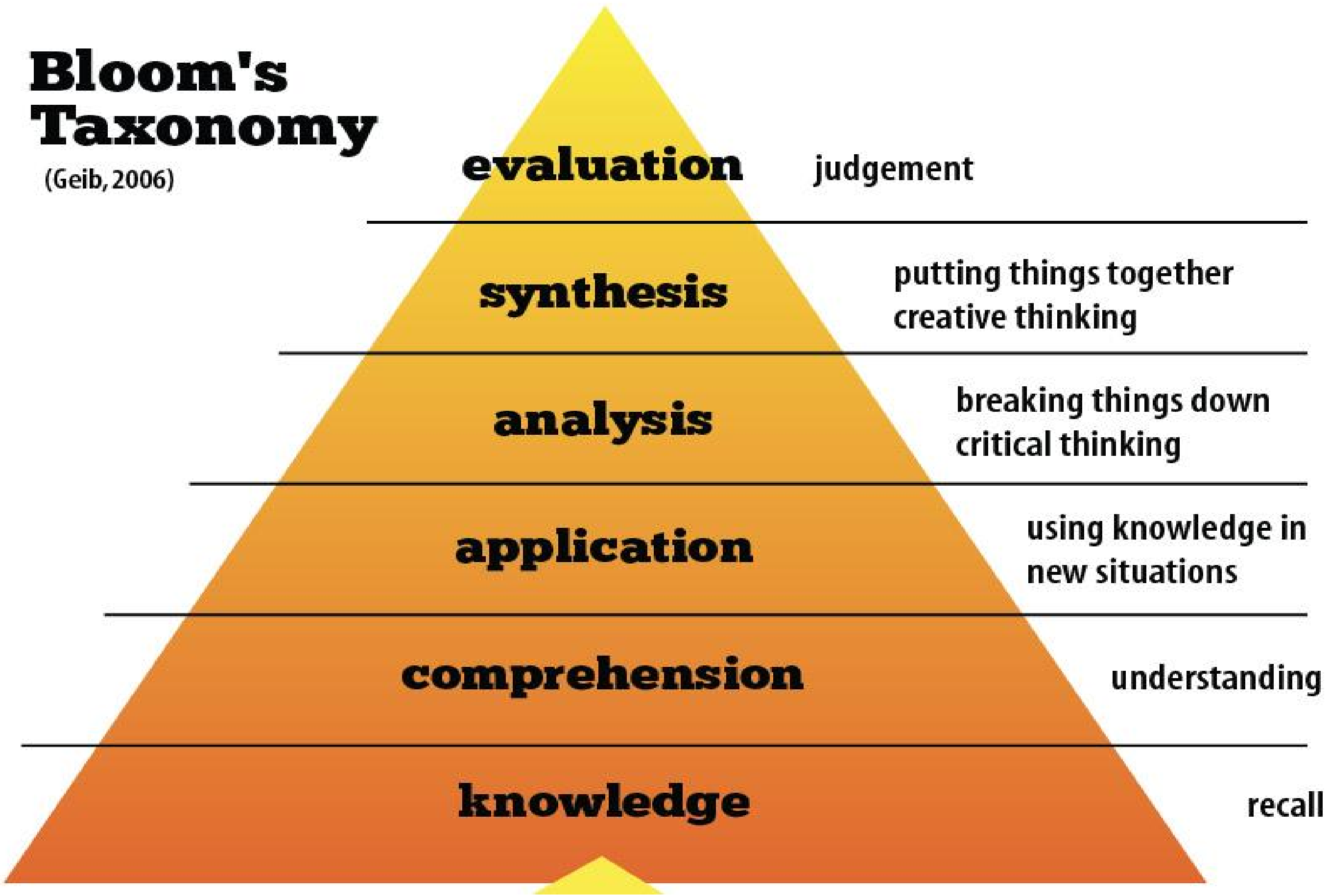
+考研科目

1.1.3 How to Study



Source: National Training Laboratories, Bethel, Maine

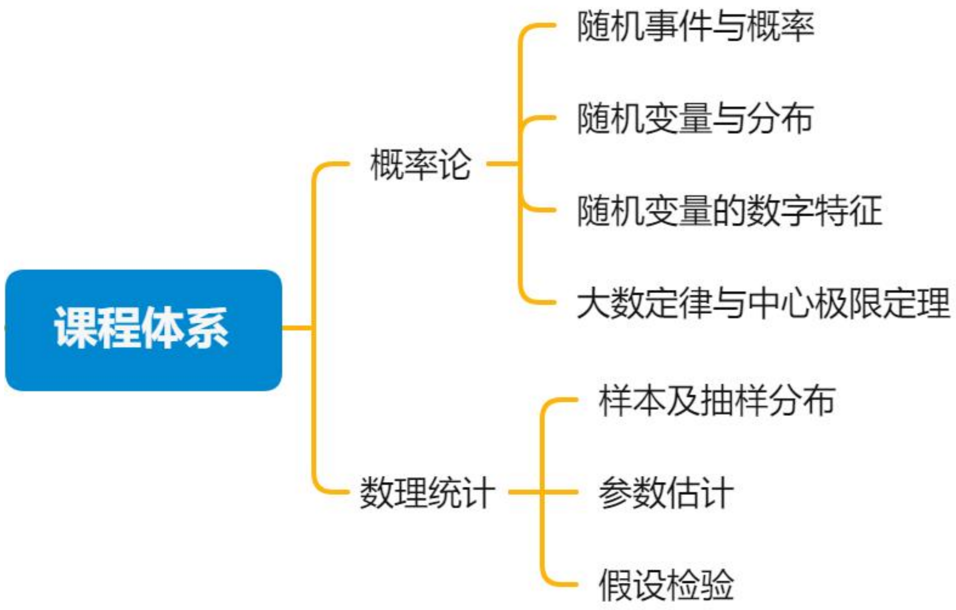
1.1.3 How to Study



1.1.3 How to Study

概率论：研究如何定量地描述随机现象及其规律

数理统计：以数据为唯一研究对象，包括数据的收集、整理、分析和建模，从而给出数据现象的某些规律进行预测或决策。



1.1.3 How to Study

学得好不好的两条“自测”标准：

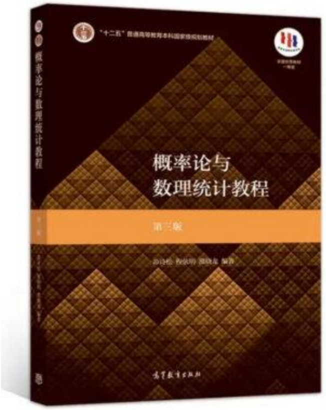
- **对“随机”有足够认识**，即能随时随地用“随机”的观点去观察、看待、处理周围的事物。如：用随机的方法来处理学科中的问题。
- **对“数据”有兴趣、有感觉**，即要善于发现、利用、处理周围的数据。如：从网购数据、超市零售数据、银行客户资料发现有价值的关联。

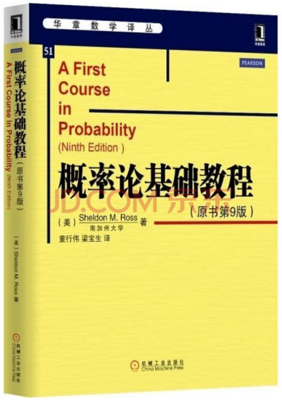
1.1.3 How to Study

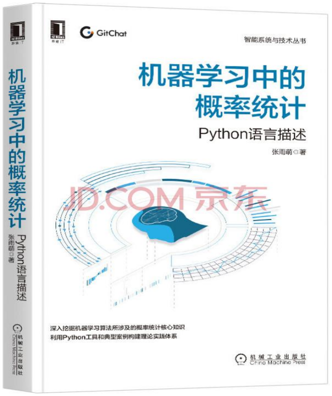
平时：30%，包括课后作业、课堂测试及互动等
期末：70%，包括选择题，填空题，计算证明题

教学平台：雨课堂　　助教：郭星月

教材：







茆诗松，程依明，濮晓龙

1.2.1 随机试验

可以用试验来研究随机现象。试验总是有条件、有结果的。

[定义1.1] 随机试验用来描述条件相同时出现不同结果的试验。

随机试验满足三点:

[1] 可以在相同的条件下重复;

[2] 每次试验的可能的结果不止一个，所有可能的结果是可以事先确切描述的;

[3] 每次试验的结果事前是不能确定的。

Example 1.2.1 抛硬币

E1: 抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况；

E2: 将一枚硬币三次，观察正面H、反面T出现的情况；

1.2.2 样本空间

[定义1.2]: 把随机试验所有结果组成的集合S称为随机试验的样本空间。样本空间中的元素，即每个可能的试验结果，称为样本点。

Example 1.2.1 抛硬币：将一枚硬币抛三次，观察出现正面H、反面T的情况；

S＝{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT }

Example 1.2.2 摸球：一只袋子中装有3只白球、2只红球，从袋子中取球两次，每次取一只

有放回试验 $S=\{W_1R_1,\ W_1R_2,\ W_1W_1,\ W_1W_2,\ W_1W_3,$
$W_2R_1,\ W_2R_2,\ W_2W_1,\ W_2W_2,\ W_2W_3,$
$W_3R_1,\ W_3R_2,\ W_3W_1,\ W_3W_2,\ W_3W_3,$
$R_1R_1,\ R_1R_2,\ R_1W_1,\ R_1W_2,\ R_1W_3,$
$R_2R_1,\ R_2R_2,\ R_2W_1,\ R_2W_2,\ R_2W_3\}$

不放回试验 $S=\{W_1R_1,\ W_1R_2,\ W_1W_2,\ W_1W_3,$
$W_2R_1,\ W_2R_2,\ W_2W_1,\ W_2W_3,$
$W_3R_1,\ W_3R_2,\ W_3W_1,\ W_3W_2,$
$R_1R_2,\ R_1W_1,\ R_1W_2,\ R_1W_3,$
$R_2R_1,\ R_2W_1,\ R_2W_2,\ R_2W_3\}$

写出下列随机试验的样本空间：

- 选择一个车站，观察该车站等车的人数 [填空1]
- 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命 [填空2]

作答

1.2.3 随机事件

在实际中，我们往往关心满足某种条件的样本点的集合。例如，若规定寿命小于500小时的灯泡为次品，那我们关心的是灯泡的寿命是否有$t \geq 500$.

随机事件（事件）—— S的子集

事件发生——这一子集中的一个样本点出现

基本事件——样本空间中单个样本点

必然事件—— S本身

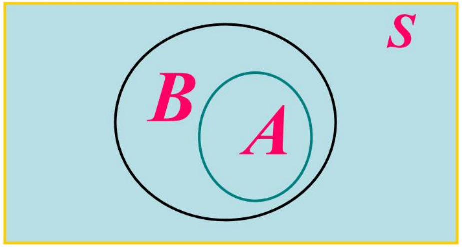
不可能事件 ——空集Φ

你能举出更多随机事件的例子吗？

1.2.4 事件的关系与运算

事件是可以关联的，事件之间的各种关联构成新的事件。

- $A \subset B$： x∈A ⇒ x∈B 事件A发生一定导致B发生



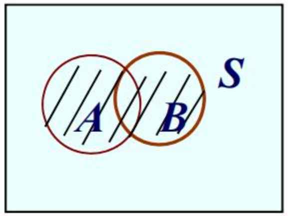
- $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$

例：$A=\{明天天晴\}$
$B=\{明天无雨\}$

一枚硬币抛两次，
$A=\{第一次是正面\}$，
$B=\{至少有一次正面\}$

- 和（并）事件：A∪B＝{x| x∈A 或 x∈B} 事件A和事件B中至少一个发生

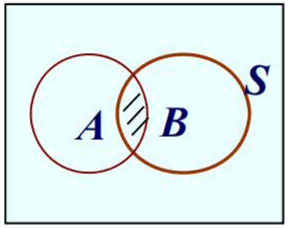
n个事件的和 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 事件$A_1, A_2, \ldots$，A_n中至少一个发生



可列（可数事件）和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

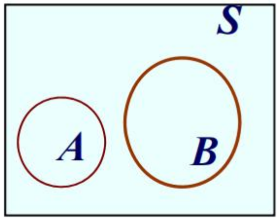
1.2.4 事件的关系与运算

- 交（积）事件：$AB=A\cap B=\{x|\ x\in A$ 且 $x\in B\}$ 事件A和事件B都发生

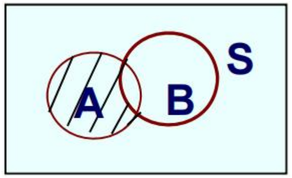


  n个事件的交 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$都发生

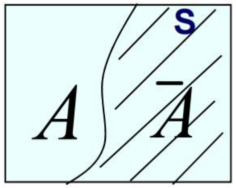
  可列（可数事件）交 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$



- 互不相容(互斥): $A\cap B=\emptyset$

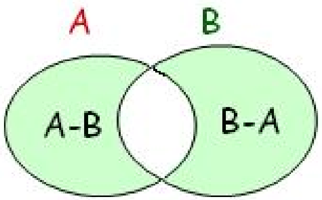


- 差事件: $A-B=\{x|\ x\in A \text{ and } x\notin B\}$



- 逆事件(对立事件): $A\cup B=S, A\cap B=\Phi$

  A的逆事件记为 $\overline{A}=S-A$



- 对称差: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

1.2.4 事件的关系与运算

交换律：$A\cup B=B\cup A$ ，$A\cap B=B\cap A$;

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$， $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

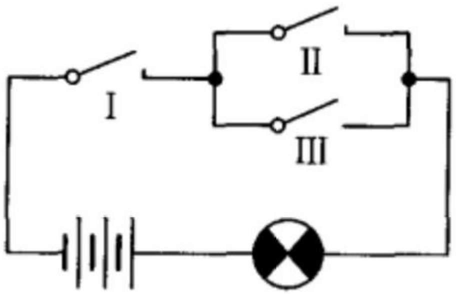
对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; (德·摩根定律)

对偶律推广：$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n$;

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n.$$

7

例题：
A:信号灯亮
B：继电器I闭合
C：继电器II闭合
D：继电器III闭合
请用BCD来表示A



例题：事件A,B,C，表示以下事件
1. A,B,C中恰有一个发生
2. A,B,C中至少两个发生
3. A,B,C中至少一个不发生

1.3 频率与概率

问题：如何定量地表示某个随机事件A在一次试验中发生的可能性大小？

自然的想法：

做若干次随机试验，记录下$\boxed{\text{随机事件A发生的次数}}$，用$\boxed{\dfrac{\text{随机事件}A\text{发生的次数}}{\text{试验总次数}}}$表示随机事件A发生的可能性大小。

频数n_A　　　　频率$f_n(A)$

频率越大，事件A发生得越频繁，意味着事件A在一次实验中发生的可能性就越大。

这种做法是否正确？

1.3 频率与概率

对“掷硬币”进行模拟实验的结果

试验序号	n =5		n =50		n =500	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

当试验次数逐渐增大时，频率逐渐稳定于某个常数。我们称这一统计规律为“**频率稳定性**”。

理论上合适，
实际上不可行

- 某特定航班发生空难的概率
- 某球星得到MVP的概率

1.3 频率与概率

概率的公理化定义：

随机试验E，它的样本空间为S，P(·)是S上的一个函数，它对任何一个事件A，都赋予一个实数，记为P(A)。如果函数P(·)满足下列三条公理：

1.非负性： 对于每个事件A，都有$P(A) \geq 0$

2.规范性：对于必然事件S，有$P(S) = 1$

3.可列可加性：设A1, A2, …是两两互不相容的事件，则有

$$P(A1 \cup A2 \cup \ldots) = P(A1) + P(A2) + \ldots$$

则称P(A)为事件A的概率。

概率：定义在样本空间上、满足三条公理的函数

1.3 频率与概率

例：对于掷硬币的实验，样本空间={正面朝上、反面朝上}

- 定义函数$P(\cdot)$为

$$P(\{\text{正面朝上}\})=\frac{1}{2},\quad P(\{\text{反面朝上}\})=\frac{1}{2}$$

不难看出，$P(\cdot)$是一个概率函数，对应的是硬币质地均匀的情形。

- 定义函数$\widetilde{P}(\cdot)$为

$$\widetilde{P}(\{\text{正面朝上}\})=\frac{2}{3},\quad \widetilde{P}(\{\text{反面朝上}\})=\frac{1}{3}$$

不难看出，$\widetilde{P}(\cdot)$是一个概率函数，对应的是硬币质地不均匀的情形。

1.3 频率与概率

✓频率 vs 概率

第5章大数定理：随着试验次数的不断增大，事件A发生的频率以概率1趋近于P(A)

✓ 概率的公理化定义是现代概率论的数学基础

1.3 频率与概率

[1] 不可能事件概率为零：$P(\Phi)=0$

[2] 有限可加性：

$A_1, A_2, \ldots, A_k$是两两互不相容的事件则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)$$

[3] 可减性：

$A \subset B$，则$P(B-A)=P(B)-P(A)$

特别地$P(\bar{A})=1-P(A)$　　一般情况下，**$P(B-A)?=P(B)-P(A)$**

[4] 不降性：

$A \subset B$，$P(A) \le P(B)$;

$\forall$事件A, $P(A) \le 1$

填空题 2分

设置

设甲、乙两人向同一目标进行射击,已知甲击中的概率为0.7, 乙击中目标的概率为0.6,两人同时击中目标的概率为0.4

(1)目标被击中的概率为 [填空1]

(2)甲击中目标而乙未击中的概率 [填空2]

作答

主观题 10分

设置

一般情况下，$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = ?$

作答