第一章 行列式

§1.1 n阶行列式的定义

§1.1.1 二、三阶行列式

行列式起源于解线性方程组

对于标准二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (a) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (b) \end{cases} \tag{1}$$

采用中学的消元法：

$(a)\times a_{22} - (b)\times a_{12}$ 消去 x_2 得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

类似可得 $$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为便于记忆和表达，用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，并称之为一个二阶（级）行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \text{(对角线法则)} \tag{2}$$

记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为方程组(1)的系数行列式。

按照二阶行列式的定义，可表示出 x_1, x_2 的分子

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = D_1, \qquad b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = D_2$$

则方程组(1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

这样看起来还有点儿不好记忆，我们再来分析：

将(2)中的第一列元素 a_{11}， a_{21} 换成方程组的常数项 b_1， b_2 则恰为 x_1 的分子；

将(2)中的第二列元素 a_{11}， a_{21} 换成方程组的常数项 b_1， b_2 则恰为 x_2 的分子。

这样就很容易写出并记住方程组的解了。

类似解高元线性方程组时会遇到类似的问题，并可相应定义高阶行列式。

例如：三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

a_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ 表示位于第 i 行、第 j 列处的数，并称为行列式的**元（元素）**，i 称为**行标（行指标）**，j 称为**列标（列指标）**。

分析三阶行列式，有特点：

(1) 三阶行列式是 3!＝6 个项的代数和；
(2) 它的每项都是行列式中三个元的乘积，这三个元恰好是每行每列各一个；
(3) 每项都带有确定的符号。

但是，每一项前面的符号是如何确定呢？三阶行列式还比较简单，还有一定规律来看出并记忆，但是对 n 阶行列式又是由多少项相加得到？每项前的符号又怎样确定呢？在解决这个问题之前，我们需要先引入新的知识。

小结

(1) 二阶和三阶行列式是由解二元和三元线性方程组引入的。
(2) 二阶与三阶行列式的计算——对角线法则（至少会熟练计算二阶行列式）

§ 1.1.2 排列

定义 1 n 个不同的自然数（可不必是前 n 个自然数）组成的一个有序数组称为一个**(n 级)排列**。

例如：2431 是一个 4 级排列，56912 是一个 5 级排列。

N 个不同自然数构成排列的总数是 $P_n^n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

定义 2 在一个排列中，若一对数中前面的大于后面的，则就称它们构成一个**反序(逆序)**。

【在一个排列中，若一对数中前面的小于后面的，则就称它们构成一个**顺序**】

例如：排列 2431 中，21，43，41，31 构成逆序。

定义 3 若某个数字的右边有 r 个比它小的数字，则说该数字在此排列中有 r 个反序。一个排列中反序的总数称为该排列的**反序数（逆序数）**。

排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$，它可由该排列中所有数字的反序之和求得。

【另外，可以找出全部的反序】

例： $\tau(31254) = 2+0+0+1+0 = 3$

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

显然，对于任何一个排列，最右边的一个数的反序都是零，以后可以不用计算。

由 n 个不同自然数构成的所有排列中共有 $n!$个，唯一一个反序数等于零的排列是按自然数由小到大的排列，这个排列成为**标准排列（自然顺序排列）**。

例 $\tau(12\cdots(n-1)n) = 0+0+\cdots+0 = 0$ 为一个标准排列。

一个排列的反序数可以是奇数也可以是偶数，据此我们将排列分为两类：

定义 4 反序数为偶数的排列称为**偶排列**；反序数为奇数的排列称为**奇排列**。

我们常对排列进行以下操作：

互换：把一个排列中某两个数的位置互换，其余的数字不动，就得到另一个排列。这一过程就称为一次**互换（对换）**。

例： $2431 \xrightarrow{1,2\text{互换}} 1432 \xrightarrow{2,1\text{互换}} 2431$

$\tau(2431) = 1+2+1 = 4$ $\tau(1432) = 0+2+1 = 3$

偶排列 奇排列 偶排列

显然，如果连续施行两次相同的互换，则排列就还原了。

一般性结论

引理 排列经过一次互换改变其奇偶性。

—〉即，经过一次互换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

证 「「先证明一种特殊情况（简单易处理），以此为基础证明一般情况」」

[1] 特殊情况——互换的两个数在排列中是相邻的 【相邻对换】

$$\cdots jk\cdots \qquad (1)$$

$$\downarrow \quad j, k \text{ 互换}$$

$$\cdots kj\cdots \qquad (2)$$

考虑排列(1)与(2)的反序数：排列(1)中 k, j 与其它数构成反序则在(2)中仍构成反序。

→ 若 k, j 为反序，则(2)的反序数比(1)多 1
→ 若 k, j 不为反序，则(2)的反序数比(1)少 1

总之，排列的奇偶性变了。

∴对于特殊情况，定理成立。

[2] 一般情况

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots \qquad (3)$$

$$\downarrow \quad j, k \text{ 互换}$$

$$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots \qquad (4)$$

这样一个互换可以看作一系列相邻数的互换来实现：

从(3)出发，把 k 与 i_s 互换，再与 i_{s-1} 互换，…… → 即把 k 一位一位左移，经 s+1 次互换得到

$$\cdots kji_1i_2\cdots i_s\cdots \qquad (5)$$

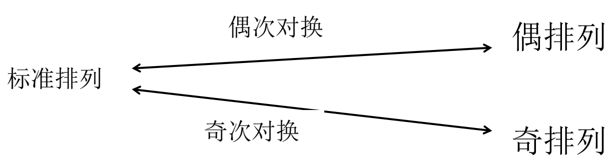
从(5)出发，再把 j 一位一位右移，经 s 次相邻位置数的互换得到排列(4)

故，j, k 互换可通过 $2s$+1 次相邻位置互换实现。
而相邻位置互换改变排列的奇偶性，$2s$+1 是奇数
∴奇数次这样的互换最终改变奇偶性。

证毕。【学会从特殊到一般的证明过程】

定理 n ($n\geqslant 2$)个不同自然数的任一排列必可经若干次互换变成标准排列，并且互换次数与该排列的奇偶性一致。

即：



证明：[[（第一）数学归纳法]]

2 级排列有 2 个，结论显然成立。

假设结论对 n-1 级排列已经成立。

设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 n 级排列，n 个数中最大数为 a。

(i) 若 $j_n = a$，则 n-1 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 可以经过一系列互换变成标准排列，这一系列变换同时也将 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 变成标准排列

特殊

(ii) 若 $j_n \neq a$，先做 j_n, a 互换，变成 $j_1' \cdots j_{n-1}' a$，又归结为上述情形。

一般

∴结论普遍成立。

又标准排列为偶排列，且根据引理知：排列经一次互换改变奇偶性，故：

$$\begin{tikzcd} & \text{偶排列} \\ \text{偶排列} \arrow[ur, leftrightarrow, "\text{偶次对换}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{奇次对换}"'] & \\ & \text{奇排列} \end{tikzcd}$$

∴所作互换个数与排列 $j_1 j_1 \cdots j_n$ 有相同的奇偶性。

例 1：已知排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的反序数，求排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的反序数。

解：任取 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中两个数 j_1, j_2，若它们在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中构成反序，则必在排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 中构成顺序，反之亦然。而这两个排列的反序数之和恰为这 n 个数构成的所有反序共有 $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 个，所以：

$$\tau(i_n i_{n-1} \cdots i_1) = \frac{n(n-1)}{2} - \tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$$

例 2：证明由 $n(n \geq 2)$ 个不同自然数构成的所有排列中，奇偶排列各占一半儿。

证明：设 $n(n \geq 2)$ 个不同自然数构成排列中有 s 个不同的奇排列，t 个不同的偶排列。

把 s 个奇排列最左边的两个数互换，则得到 s 个不同的偶排列。

∴ $s \leq t$

类似，$t \leq s$

∴ $s = t$

证毕。

小结

- **会计算一个排列的反序数；**
- **排列具有奇偶性；**
- **排列经过一次互换改变其奇偶性，任意排列可经若干次互换成标准排列；**
- **了解并熟悉由特殊到一般的证明方法和用数学归纳法证明问题的方法。**

本部分知识点：

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

基本概念：排列，反序，反序数，互换

结论：互换改变排列的奇偶性

任意排列可经若干次互换成标准排列。