第七章 n元实二次型

- n元实二次型的定义
- n元实二次型的标准形
- 正定二次型及其性质
- 用正交变换化二次型为标准形

§ 7.1 n元实二次型及其标准形

§ 7.1.1 n元实二次型的定义

定义1 n个实变元的实系数二次齐次函数

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&+ a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\
&+ \cdots \\
&+ a_{nn}x_n^2
\end{aligned} \qquad (1)
$$

称为实数域上的一个n元二次型，简称实二次型.

把变元交叉项 $2a_{ij}x_ix_j\ (i<j)$ 写成对称的两项之和 $a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i \quad (a_{ij}=a_{ji})$，于是有

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= \quad & a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
& +a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \qquad (2) \\
& +\cdots \\
& +a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\
& =\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

把(2)式的系数排成一个矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

称为实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵.

显然 A为(实)对称矩阵.

再记$X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$，对于上述对称矩阵$A$，有

$$X^T AX=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+\cdots+a_{n1}x_nx_1+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

于是得到： $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^T AX \qquad (3)$$

由此可见, 按照上述规则

任给一个二次型，可唯一确定一个对称矩阵；反之，任给一个对称矩阵，可唯一确定一个二次型.

即二次型与对称矩阵之间是1−1对应关系.

对称矩阵A称为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矩阵.

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为对称矩阵A的二次型.

A的秩就称为二次型f的秩.

例：二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3$$

的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

注意：

$$X^TBX=3x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

但是矩阵B并不是对称矩阵，也不是该二次型的矩阵。

以 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩阵二次型的为

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3$$

该二次型的秩为3.

对二次型进行坐标变换

定理 n元实二次型 X^TAX 可经坐标变换 $X=CY$ (C为可逆实矩阵)化为二次型 Y^TBY，其中 $B=C^TAC$.

定义2 设A, B是数域F上的n阶矩阵，若存在F上的可逆矩阵C，使得$B=C^TAC$成立，则称A与B是合同矩阵. (或简称A与B合同) (有的书上记为：$A \cong B$)

合同性质

1) 反身性(自反性)：任意矩阵 A都与自身合同.
2) 对称性：若A与B合同，则B与A合同.
3) 传递性：若A与B合同，B与C合同，则A与C合同.

非退化线性替换或者可逆线性变换/替换

设 $x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n$ 是两组文字，系数在数域 F 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \ , \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \ , \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由 $x_1,\cdots,x_n$ 到 $y_1,\cdots,y_n$ 的一个线性替换，或简称线性替换. 如果系数行列式 $|c_{ij}| \neq 0$，那么线性替换就称为非退化的.

【非退化线性替换】

若两个n元实二次型X^TAX与Y^TBY可经坐标变换相互转化，则称这两个二次型是等价的.

而前面定理又可表述为：

两个n元实二次型等价$\Leftrightarrow$它们的矩阵是合同矩阵.

另外，两个等价的n元实二次型必有相同的秩.

§ 7.1.2 二次型的标准形

只含变元平方项的二次型：

$$f = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2 \qquad (1)$$

称为二次型的标准形.

二次型(1)的矩阵是对角矩阵 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

它的秩等于D的主对角线上非零元的个数，即(1)中非零平方项的个数.

例1 化二次型为标准形并求所用的坐标变换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_1x_2+8x_2^2-2x_2x_3-5x_3^2$$

解:
$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1^2+6x_1x_2)+8x_2^2-2x_2x_3-5x_3^2\\&=(x_1+3x_2)^2-x_2^2-2x_2x_3-5x_3^2\\&=(x_1+3x_2)^2-(x_2^2+2x_2x_3)-5x_3^2\\&=(x_1+3x_2)^2-(x_2+x_3)^2-4x_3^2\end{aligned}$$

做坐标变换 $\begin{cases}y_1=x_1+3x_2\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=y_1-3y_2+3y_3\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$

可得二次型的标准形 $f=y_1^2-y_2^2-4y_3^2$

注意：坐标变换的矩阵一定为可逆矩阵.

引理 数域F上任何一个二次型都可经坐标变换化平方和形式.

证明：对变量个数n做数学归纳法.

对于n=1，二次型为$f(x_1)=a_{11}x_1^2$,已经是平方和形式.

现在假设对于$n-1$元二次型，定理结论成立，

再设n元二次型为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ji}=a_{ij})$$

分三种情况讨论：

1) a_{ii} (i=1,2,…,n)中有一个不为零，不妨设$a_{11}\neq 0$.

【否则$a_{11}=0$, $a_{ii}\neq 0$ ($i\neq 1$)，则可先令a_{ii}与a_{11}交换】

这时

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+\boxed{\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}x_ix_1}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=a_{11}x_1^2+\boxed{2\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=a_{11}x_1^2+\boxed{2x_1\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

当$a\neq 0$时, $ax^2+2bx=a\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)$

$$=a_{11}\left(x_1+\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\right)^2\underline{-\frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j}$$

令 $g(x_2,\cdots,x_n)=-\frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$,

则 g 为一个关于 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的$n-1$元二次型.

于是做坐标变换 $\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} a_{11}^{-1} a_{1j} x_j \\ y_2 = x_2 \\ \quad \vdots \\ y_n = x_n . \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{11}^{-1} a_{1j} y_j , \\ x_2 = y_2 , \\ \quad \vdots \\ x_n = y_n . \end{cases}$

它使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11} y_1^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j$

由归纳法假设，对于n−1元二次型 $\sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j$

有坐标变换 $\begin{cases} z_2 = c_{22} y_2 + c_{23} y_3 + \cdots + c_{2n} y_n \\ z_3 = c_{32} y_2 + c_{33} y_3 + \cdots + c_{3n} y_n \\ \quad \vdots \\ z_n = c_{n2} y_2 + c_{n3} y_3 + \cdots + c_{nn} y_n \end{cases}$

能使之化成平方和 $d_2 z_2^2 + d_3 z_3^2 + \cdots + d_n z_n^2$

于是，坐标变换
$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ \boxed{\begin{array}{l} z_2 = c_{22}y_2 + c_{23}y_3 + \cdots + c_{2n}y_n \\ z_3 = c_{32}y_2 + c_{33}y_3 + \cdots + c_{3n}y_n \\ \qquad\vdots \\ z_n = c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \cdots + c_{nn}y_n \end{array}} \end{cases}$$

就使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变成

$$a_{11}z_1^2 + d_2 z_2^2 + d_3 z_3^2 + \cdots + d_n z_n^2$$

为平方和形式. 根据归纳法假设，引理得证.

2) $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 但有一 $a_{1j} \neq 0, j \neq 1$.

不失普遍性，设 $a_{12} \neq 0$，令
$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \\ \quad\vdots \\ x_n = z_n \end{cases}$$

该坐标变换使

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \\ \quad\vdots \\ x_n = z_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 2a_{12}x_1x_2 + \cdots \\ &= 2a_{12}(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + \cdots \\ &= 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2 + \cdots \end{aligned}$$

右端为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的二次型, 且 z_1^2 前的系数不为零, 属第一种情况，引理得证.

3) $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $a_{1j} = 0, j = 1, 2, \cdots, n$. 由对称性, $a_{j1} = 0, j = 1, 2, \cdots, n$, 于是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 是$n-1$元二次型. 由归纳法假设，可用坐标变换化为平方和形式.

证毕.

拉格朗日配方法的步骤

1. 若二次型含有x_i的平方项，则先把含有x_i的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形；

2. 若不含有平方项，但是 $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$，则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \qquad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i,j) \\ x_k = y_k \end{cases}$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

定理1 秩为r的n元实二次型$f=X^TAX$必可经坐标变换$X=CY$化成标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2,\ (d_i\neq 0, i=1,2,\cdots,r)$$

例2 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形，并求所用坐标变换.

解:【属第二种情况】

做坐标变换 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

则

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1^2-y_2^2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2-2y_2^2+2y_1y_3+2y_2y_3-6y_1y_3+6y_2y_3 \\ &= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 \end{aligned}$$

【属第一种情况】

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$

则 $f = 2z_1^2 \boxed{-2z_2^2 + 8z_2z_3 - 2z_3^2}$ 【属第一种情况】

$$= 2z_1^2 - 2(z_2 - 2z_3)^2 + 8z_3^2 - 2z_3^2 = 2z_1^2 - 2(z_2 - 2z_3)^2 + 6z_3^2$$

令 $\begin{cases} w_1 = z_1 \\ w_2 = z_2 - 2z_3 \\ w_3 = z_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z_1 = w_1 \\ z_2 = w_2 + 2w_3 \\ z_3 = w_3 \end{cases}$

则 $f = 2w_1^2 - 2w_2^2 + 6w_3^2$

总的坐标变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

规范形：**系数为+1或−1的标准形**

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_t^2-z_{t+1}^2-z_{t+2}^2-\cdots-z_r^2 \qquad (※)$$

定理2 (惯性定理) 在秩为r的n元实二次型的标准形中，正平方项的个数t是唯一确定的，从而负平方项的个数 $r-t$ 也是唯一确定的.

【或说：二次型的规范形(※)是唯一确定的】

称t为正惯性指数，$r-t$为负惯性指数. 二者之差 $t-(r-t)=2t-r$ 为该二次型的符号差.

⇓

两个n元实二次型等价⇔它们有相同的秩和正惯性指数.

定理3　秩为r的n阶对称矩阵A必合同对角形矩阵，即存在满秩矩阵C，使得

$$C^T AC = diag(d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 不为零.

合同变换：

设F为初等矩阵，则变换$F^T BF$称为B的合同变换.

注：变换$F^T BF$可通过一对相同行与列的初等变换得到.

例:(1)互换单位矩阵E的i, j两行(列)得到初等矩阵E_{ij}，则

$$E_{ij}^T BE_{ij}$$

相当于将矩阵B的i, j 两行互换，再将i, j两列互换得到.

(2)用$\lambda(\lambda\neq 0)$ 乘E的第i行(列)得到初等矩阵$E_{ii}(\lambda)$，则

$$E_{ii}^T(\lambda)BE_{ii}(\lambda)$$

相当于将矩阵B的第i行乘以λ，再将第i列乘以λ得到.

再看定理3

由于可逆矩阵可以写成一系列初等矩阵的乘积：

$C = F_1F_2\cdots F_m$，其中$F_1,F_2,\ldots,F_m$为初等矩阵.

则有

$$C^TAC = F_m^T\cdots F_2^TF_1^TAF_1F_2\cdots F_m = diag(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0)$$

即：可以用一系列合同变换把A化为对角形.

同时又有 $$EF_1F_2\cdots F_m = C$$

用一系列合同变换把A化为对角形时，若同时只对单位矩阵E做同样顺序的列的变换，则E化为变换矩阵C.

合同变换法化二次型为标准形步骤：

(1) 写出二次型的矩阵A

(2) 构造$2n\times n$矩阵$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$，对$A$做合同变换的同时，只对$E$施行初等列变换，直到把$A$所在位置的子矩阵化为对角形矩阵.

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[EF_1F_2\cdots F_m]{F_m^T\cdots F_2^T F_1^T AF_1F_2\cdots F_m} \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & C & & \end{pmatrix}$$

则坐标变换 $X=CY$ 化二次型为标准形.

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$