第七章 *n*元实二次型

§7.2 正定二次型

定义1：若对任意 $X\neq 0$，恒有$X^TAX>0$，则实二次型 X^TAX称为正定二次型.

正定二次型的矩阵A称为正定矩阵. 记为$A>0$.

已知：n元二次型的标准形为

$$X^TAX=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

仅当所有n个系数 $d_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$时，它才是正定的.

* 坐标变换(非退化线性替换)保持二次型的正定性不变.

非标准形的二次型是否正定的判定方法

定理1　n元实二次型正定 $\Leftrightarrow$ 它的正惯性指数等于n.

例如　$f(x,y,z)=x^2+4y^2+16z^2$ 为正定二次型.

推论1 n元实二次型正定的必要条件是 $|A|>0$.

推论2 n阶实对称矩阵$A>0 \Leftrightarrow A$与n阶单位矩阵E合同.

推论3 n阶实对称矩阵$A>0 \Leftrightarrow$ 存在可逆实矩阵C使得 $A=C^TC$.

定义2 矩阵 $A=(a_{ij})_n$的子阵

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为A的顺序主子阵.

$|A_1|, |A_2|,\ldots, |A_n|$称为$A$的顺序主子式.

定理2 n元实二次型正定 $\Leftrightarrow$ 它的矩阵$A=(a_{ij})$的顺序主子式都大于零.

证明：必要性　设 $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)=X^TAX$正定, 则$|A|>0$.

考察A的(对称)顺序主子阵$A_k(k=1,2,\ldots,n-1)$对应的二次型

$$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=(x_1,x_2,\cdots,x_k)A_k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j$$

$$=f(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$$

对任意$(x_1, x_2,\ldots, x_k)\neq 0$时必有$(x_1, x_2,\ldots, x_k ,0\ldots,0) \neq 0$, 而 $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)=X^TAX$正定，因此

$$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=f(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)>0$$

即$f_k(x_1, x_2,\ldots, x_k)$ 正定, 从而其矩阵的行列式 $|A_k|>0$.

复习行列式性质：

- 行列互换（转置）值不变（性质1）
- 两行互换，反号（性质2）
- 一行的公因子可以提出（性质3）
- 某行元为两项和，则等于两行列式和（性质4）
- 某行为零、两行相同或成比例，值为零（性质5）
- 某行倍数加到另一行，值不变（性质6）

充分性　对n用数学归纳法.

> 根据性质6：设A为对称矩阵，E_1为同阶的第三类初等矩阵(单位矩阵某行倍数加到另一行上得到)，则合同变换得到的矩阵$B=E_1^TAE_1$与A有相同的行列式值.

当$n=1$时，二次型为$a_{11}x_1^2$，显然当$a_{11}>0$时正定.

设对$n-1$定理结论成立，对于n，由于$a_{11}>0$，故将A的第一列的 $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$ 倍加到第j列上，同时将第一行的 $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}=-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ 倍加到第j行($j=2,3,\ldots,n$)上得到

$$P^T AP = P^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则坐标变换 $X=PY$ 化二次型

$$f = X^T AX = Y^T (P^T AP)Y = a_{11}y_1^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}y_i y_j$$
$$= a_{11}y_1^2 + g(y_2, y_3, \cdots, y_n)$$

则$g(y_2, y_3,\ldots, y_n)$的各阶顺序主子式为

$$|B_{j-1}| = \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j2} & \cdots & b_{jj} \end{vmatrix}, \ (j = 2,3,\cdots,n)$$

由于对于 $j=2,3,\ldots,n$

$$|A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{j2} & \cdots & b_{jj} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j2} & \cdots & b_{jj} \end{vmatrix}$$

而$a_{11}>0$，$|A_j|>0$, 因此二次型g的各阶顺序主子式大于0.

由归纳法假设, $g(y_2, y_3,\ldots, y_n)$正定.

对于任意的$X\neq 0$显然有$Y\neq 0$, 则$y_1 \neq 0$, $(y_2, y_3,\ldots, y_n) \neq 0$ 至少有一个成立, 因此恒有 $f=a_{11}y_1^2+g(y_2, y_3,\ldots, y_n)>0$，即 $f=X^TAX$ 为正定二次型.

例1 判别下面二次型是否正定.

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

解：$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

它的顺序主子式

$$5>0,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1>0.$$

故上述二次型是正定的.

定义3: 若对任意$X\neq 0$，恒有$X^TAX<0$，则实二次型 X^TAX称为负定二次型.

负定二次型的矩阵A称为负定矩阵. 记为$A<0$.

* 坐标变换(非退化线性替换)保持二次型的负定性不变.

非标准形的二次型是否负定的判定方法

○ n元实二次型负定

⇔它的负惯性指数等于n.

⇔ $-A>0$.

⇔ $A=(a_{ij})$ 的奇数阶顺序主子式为负，而偶数阶顺序主子式为正，即

$$(-1)^i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

霍尔维茨定理

○ n元实二次型负定的必要条件是 $(-1)^n|A|>0$.

例3 判定下面二次型是正定二次型还是负定二次型.

$$f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$$

解：

f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

$$a_{11}=-5<0,\qquad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,$$

$$|A|=-80<0$$

因此 f 为负定二次型.

补充(了解知识)

定义：对于实二次型X^TAX，若对任意$X\neq 0$，恒有$X^TAX\geq 0$ ($X^TAX\leq 0$)，则实二次型X^TAX称为**半正(负)定二次型**. 它对应的矩阵称为**半正(负)定矩阵**，记为$A\geq 0$ ($A\leq 0$).

定义：若二次型X^TAX既不是半正定的，也不是半负定的，则X^TAX 称为**不定**的.

A的主子式定义:

$A=(a_{ij})_n$的k阶主子式指形为

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

$$(1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n)$$

的k阶子式.

正定、半正定充要条件列举

二次型 $f=X^TAX$正定的充要条件:	二次型 $f=X^TAX$半正定的充要条件:
对任意$X\neq 0$, 恒有$X^TAX>0$	对任意$X\neq 0$,恒有$X^TAX\geq 0$
$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数等于n	$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数等于r_A, 或A的负惯性指数等于0
$\Leftrightarrow$ A合同于单位矩阵E	
$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵C使得 $A=C^TC$	$\Leftrightarrow$ 存在矩阵P使得$A=P^TP$;
$\Leftrightarrow$ A的顺序主子式全大于零	$\Leftrightarrow$ A的主子式全大于或等于零
$\Leftrightarrow$ A的特征值全大于零	$\Leftrightarrow$ A的特征值全大于或等于零

小结

- 正定二次型和正定矩阵的定义
- 判定二次型(实对称矩阵)正定的判定方法和相关结论(重点)
- 负定二次型和负定矩阵及其充要条件
- 了解半正定、半负定、不定二次型的概念

思考题

设A, B分别为m阶,n阶正定矩阵,试判定分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

思考题解答

解　C是正定的.

因为,设$z^T=(x^T,y^T)$为$m+n$维向量,其中x,y分别是m维和n维列向量,若$z\neq O$,则x,y不同时为零向量,于是

$$z^TCz=(x^T,y^T)\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=x^TAx+y^TBy>0,$$

且C是实对称阵,故C为正定矩阵.