2011--2012 学年第 1 学期《概率论与数理统计》期末考试答案（A）

一、填空：

1. 0.2； 2. 5/7； 3. 7 ； 4. 10； 5. 1/5； 6. $4t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1).\dfrac{\sigma^2}{n}$

二、单项选择：

1、C 2. C， 3. A， 4. C， 5. A， 6. C

三、解：(1) 设 A_i（i=1,2,3）表示有 i 个人击中飞机，

A, B, C 分别表示甲、乙、丙击中飞机,D 表示飞机被击落；

则 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，$P(C)=0.7$，

由于 $A_1=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$

所以
$$
\begin{aligned}
P(A_1)&=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)\\
&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7\\
&=0.36
\end{aligned}
$$

（2） 因为 $A_2=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

所以
$$
\begin{aligned}
P(A_2)&=P(AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)\\
&=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)\\
&=0.41
\end{aligned}
$$

由于 $A_3=ABC$

所以 $P(A_3)=P(ABC)==P(A)P(B)P(C)=0.14$

因而,由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$
\begin{aligned}
P(D)&=P(D\mid A_1)P(A_1)+P(D\mid A_2)P(A_2)+P(D\mid A_3)P(A_3)\\
&=0.2\times0.36+0.6\times0.41+1\times0.14\\
&=0.458
\end{aligned}
$$

（3）由贝叶斯公式：

$$P(A_2\mid D)=\frac{P(D\mid A_2)P(A_2)}{P(D)}=\frac{0.6\times0.41}{0.458}=0.537$$

四、**解：**（I） 关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}dy, 0<x<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}dx, 0<y<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, 0<y<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

（II） 令 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}$，

1） 当 $z<0$ 时， $F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=0$；

2） 当 $0\le z<2$ 时， $F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}$

$$=z-\frac{1}{4}z^2;$$

3) 当 $z\ge 2$ 时， $F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=1.$

即分布函数为： $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\dfrac{1}{4}z^2, & 0\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$

故所求的概率密度为： $f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}z, 0<z<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

（III） $P\{Y\le \frac{1}{2}\Big| X\le \frac{1}{2}\}=\dfrac{P\{X\le \frac{1}{2}, Y\le \frac{1}{2}\}}{P\{X\le \frac{1}{2}\}}=\dfrac{3/16}{1/4}=\dfrac{3}{4}.$

五、解：似然函数为

$$L(\theta,\mu)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x_i-\mu)/\theta}, & x_i\ge\mu \quad i=1,2,\dots,n\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}, & \min x_i\ge\mu\\ 0, & 其它\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta,\mu)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

对 θ,μ 分别求偏导并令其为 0,

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta,\mu)}{\partial \mu} = \frac{n}{\theta}$$

得 $\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu$

$$L(\theta,\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}, & \min x_i \ge \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对 $\mu \le \min x_i, L(\theta,\mu) > 0,$ 且是 μ 的增函数

故使 $L(\theta,\mu)$ 达到最大的 μ，即 μ 的 MLE，

$$\hat{\mu} = \min_{1 \le i \le n} x_i$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \min_{1 \le i \le n} x_i$$

六、解：已知 $\overline{X} = 101, n = 10, S = 2, \alpha = 0.05$

（1）由题意需检验 $H_0: \mu = 100, H_1: \mu \ne 100$.

拒绝域 $|t| = \frac{|\overline{X} - 100|}{S/\sqrt{n}} \ge t_{\alpha/2}(9)$， $t_{\alpha/2}(9) = 2.2622$

$$|t| = \frac{|\overline{X} - 100|}{S/\sqrt{n}} = 1.5811 < 2.2622$$

接受 H_0，即认为 $\mu = 100$.

（2）由题意需检验 $H_0: \sigma^2 \le 4, H_1: \sigma^2 > 4$

统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，拒绝域 $(\chi_\alpha^2(n-1), \infty)$

$$\chi_\alpha^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(9) = 16.919,\ \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = 9 < 16.919$$

接受 H_0，即认为 $\sigma^2 \le 4$

由（1）、（2）的证明可知，机器工作正常。

七、解： $\mu_X(t)=E\left[X(t)\right]$

$$=E(e^{-At})=\int_0^a e^{-ut}\times\frac{1}{a}du=\frac{1}{at}(1-e^{-at}),\quad t>0$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E(e^{-At_1}\bullet e^{-At_2})=E[e^{-A(t_1+t_2)}]$$

$$=\int_0^a e^{-u(t_1+t_2)}\times\frac{1}{a}du=\frac{1}{a(t_1+t_2)}[1-e^{-a(t_1+t_2)}],\quad t_1,t_1>0$$