第九章　正弦稳态电路的分析

§9—1　阻抗和导纳

一、阻抗

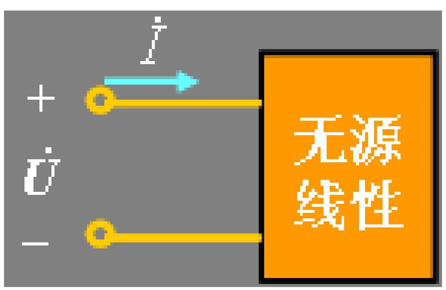
1、阻抗的定义

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U}{I}\angle\varphi_u-\varphi_i=|Z|\angle\varphi_z$$

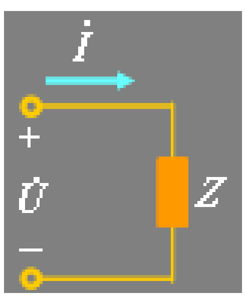
单位：Ω

阻抗模　$|Z|=\frac{U}{I}$

阻抗角　$\varphi_Z=\varphi_u-\varphi_i$



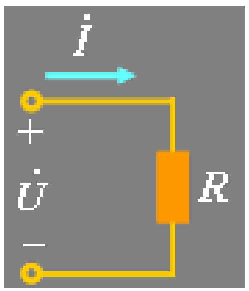
无源线性一端口网络

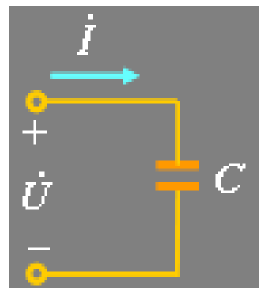


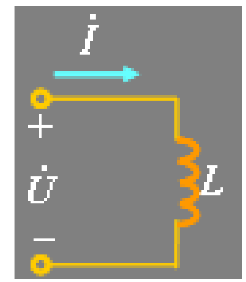
等效电路

§9—1　阻抗和导纳

2、单个元件的阻抗







电阻　　电容　　电感

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R$$

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=-j\frac{1}{\omega C}=-jX_C$$

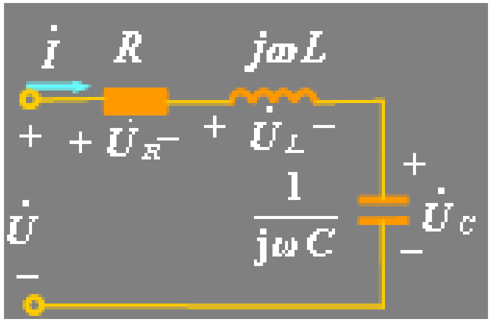
$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=j\omega L=jX_L$$

§9—1　阻抗和导纳

3、 RLC 串联电路的阻抗

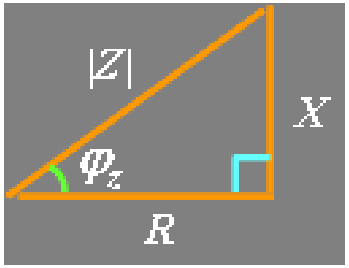
$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$

$$=[R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})]\dot{I}=[R+j(X_L+X_C)]\dot{I}$$



$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}=R+jX=|Z|\angle\varphi_z$$

$$\begin{cases}|Z|=\sqrt{R^2+X^2}\\ \varphi_z=\operatorname{arctg}\dfrac{X}{R}\end{cases}\quad \text{或} \quad \begin{cases}R=|Z|\cos\varphi_z\\ X=|Z|\sin\varphi_z\end{cases}$$

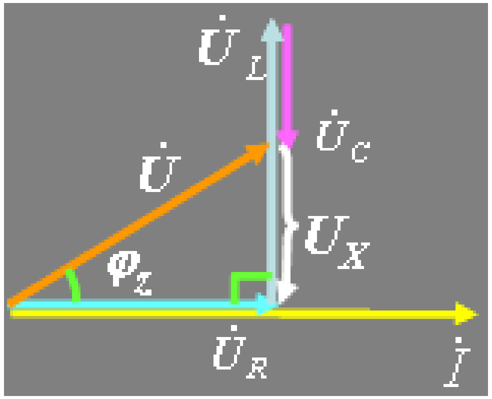


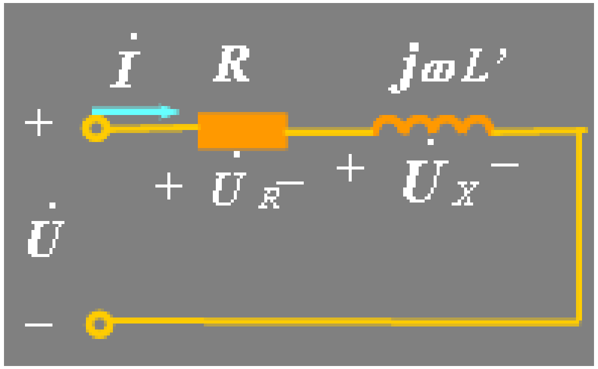
***R*——等效电阻 (阻抗的实部)；*X*——等效电抗(阻抗的虚部)**

§9—1　阻抗和导纳

对于 RLC 串联电路：

（1） 当$\omega L > 1/\omega C$时

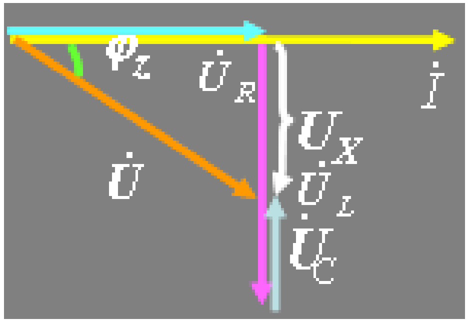


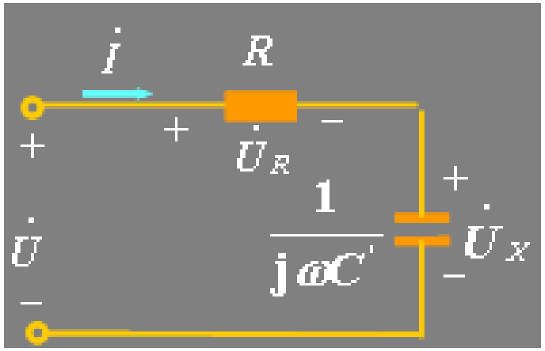


$X > 0$， $\varphi_z > 0$，表现为电压领先电流，称电路为感性电路。

§9—1　阻抗和导纳

（2）当$\omega L < 1/\omega C$时

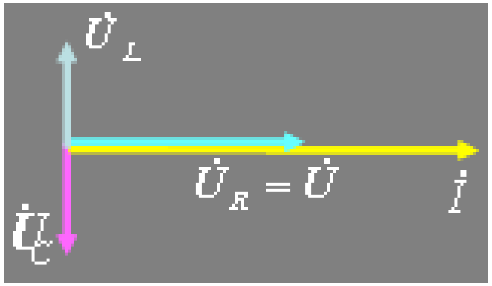


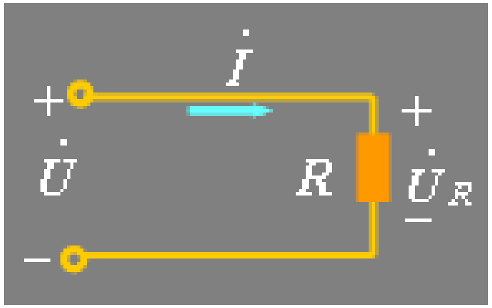


$X < 0$，$\varphi_z < 0$，表现为电流领先电压，称电路为容性电路。

§9—1　阻抗和导纳

（3） 当$\omega L = 1/\omega C$ 时





$X = 0$， $\varphi_z = 0$，表现为电压和电流同相位，此时电路发生了串联谐振，电路呈现电阻性。

§9—1　阻抗和导纳

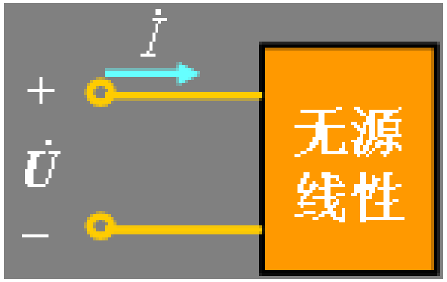
二、导纳

1、导纳的定义

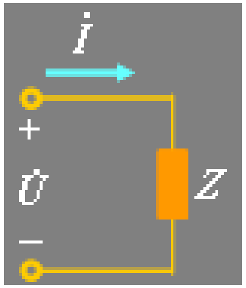
$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{I}{U}\angle\varphi_i-\varphi_u=|Y|\angle\varphi_Y$$

单位：S

导纳模 $|Y|=\dfrac{I}{U}$　　　导纳角 $\varphi_Y=\varphi_i-\varphi_u$



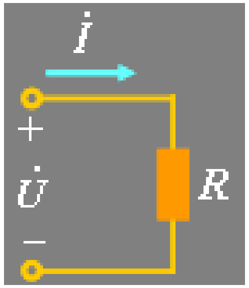
无源线性一端口网络



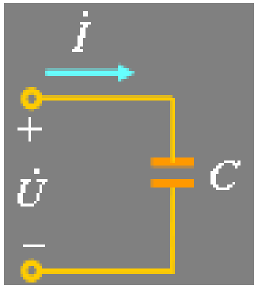
等效电路

§9—1　阻抗和导纳

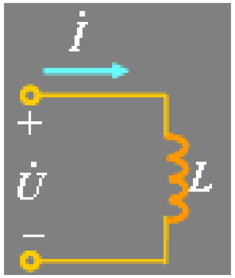
2、单个元件的导纳



电阻



电容



电感

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{1}{R}=G$$

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=j\omega C=jB_C$$

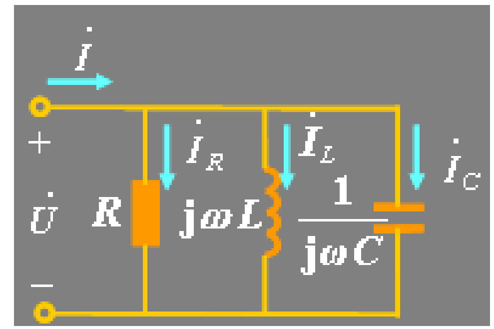
$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=1/j\omega L=-jB_L$$

§9—1　阻抗和导纳

3、 RLC 并联电路的导纳

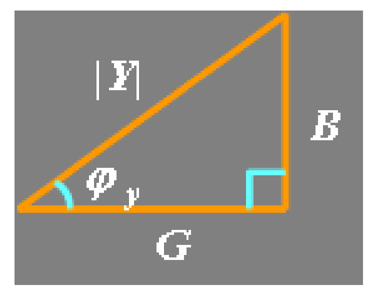
$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = G\dot{U} - j\frac{1}{\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U}$$

$$= (G - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C)\dot{U} = [G + j(B_L + B_C)\dot{U} = (G + jB)\dot{U}$$



$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = G + jB = |Y|\angle\varphi_y$$

$$\begin{cases} |Y| = \sqrt{G^2 + B^2} \\ \varphi_y = \mathrm{arctg}\dfrac{B}{G} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} G = |Y|\cos\varphi_z \\ B = |Y|\sin\varphi_z \end{cases}$$

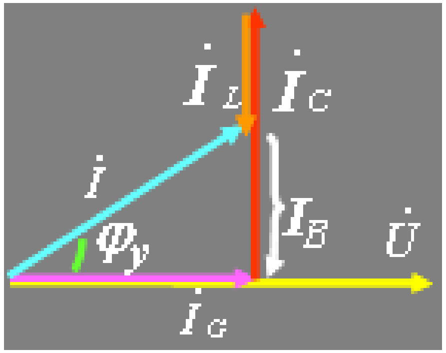


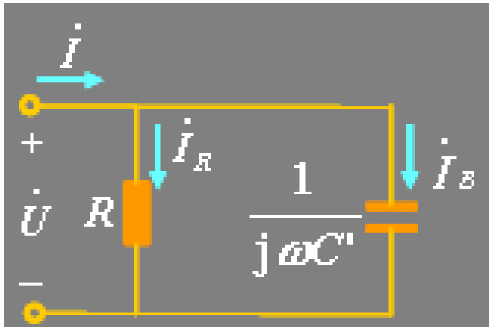
G——等效电导(导纳的实部)；　*B*——等效电纳(导纳的虚部)

§9—1　阻抗和导纳

对于 RLC 并联电路：

（1） 当 $\omega C > 1/\omega L$ 时

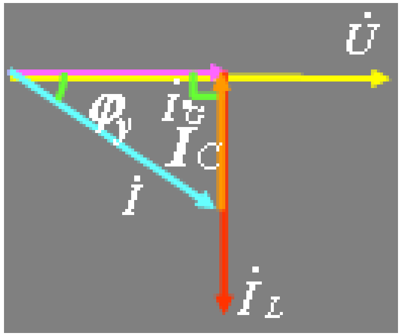


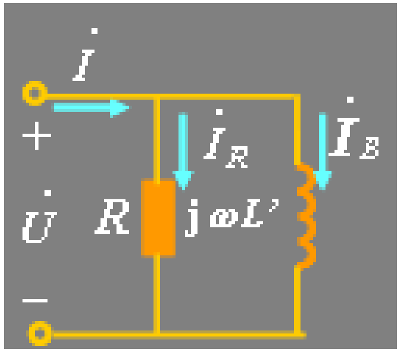


$B > 0$， $\varphi_Y > 0$，表现为电流超前电压，称电路为容性电路。

§9—1　阻抗和导纳

（2）当 $\omega C < 1/\omega L$ 时

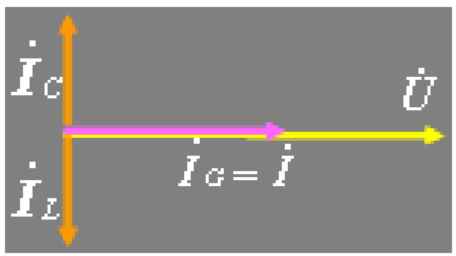


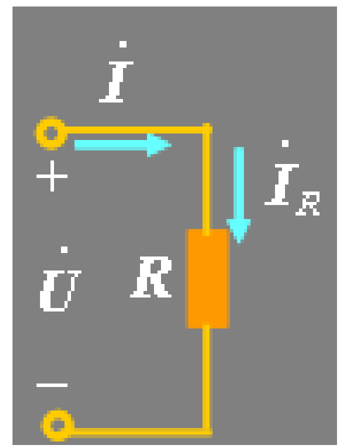


$B<0$， $\varphi_Y<0$，表现为电压超前电流，称电路为感性电路。

§9—1　阻抗和导纳

（3） 当$\omega L = 1/\omega C$ 时





B＝0， φ_Y＝0，表现为电压和电流同相位，此时电路发生了并联谐振，电路呈现电阻性。

§9—1　阻抗和导纳

三、复阻抗和复导纳的等效互换

同一个两端口电路阻抗和导纳可以互换，互换的条件为：

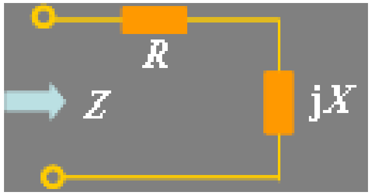
$$Z = \frac{1}{Y}$$

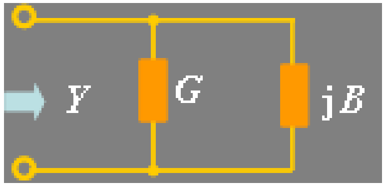
即：

$$|Z||Y| = 1, \ \varphi_z = -\varphi_y$$

§9—1　阻抗和导纳

串联电路和其等效的并联电路





它的阻抗为：　　$Z = R + jX = |Z| \angle \varphi_z$

其等效并联电路的导纳为：　　$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = G + jB$

即等效电导和电纳为：　　$G = \frac{R}{R^2+X^2}$，　$B = \frac{-X}{R^2+X^2}$

§9—1　阻抗和导纳

同理，对并联电路，它的导纳为

$$Y = G + \mathrm{j}B = |Y| \angle \varphi_y$$

其等效串联电路的阻抗为：

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G+\mathrm{j}B} = \frac{G-\mathrm{j}B}{G^2+B^2} = R + \mathrm{j}X$$

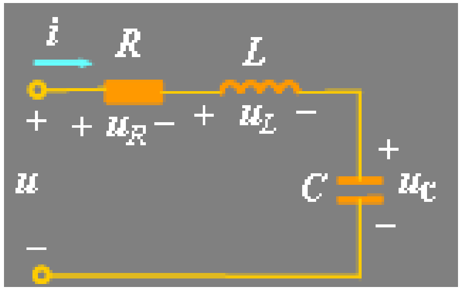
即等效电阻和电抗为：

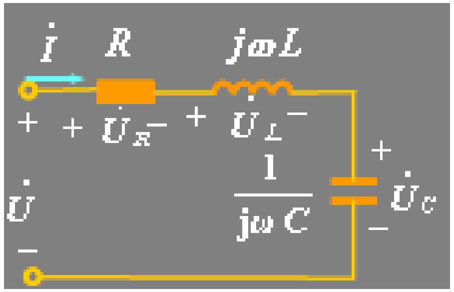
$$R = \frac{G}{G^2+B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2+B^2}$$

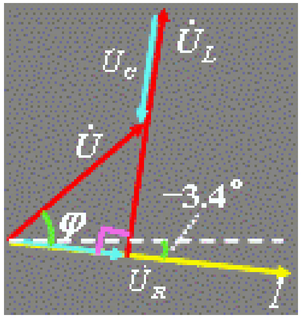
§9—1　阻抗和导纳

例9-1电路如图(a)所示，已知：R=15Ω，L=0.3mH,，C=0.2μF,

$u = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)$ ， $f = 3\times10^4\,Hz$ 。求 i ,u_R ,u_L ,u_C 。







解：电路的相量模型如图（b）所示，其中：

$$\dot{U} = 5\angle 60^\circ V$$

$$j\omega L = j2\pi\times3\times10^4\times0.3\times10^{-3} = j56.5\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{2\pi\times3\times10^4\times0.2\times10^{-6}} = -j26.5\Omega$$

§9—1　阻抗和导纳

因此总阻抗为　$Z = R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C} = 15 + j56.5 - j26.5 = 33.54\angle 63.4^\circ\ \Omega$

总电流为　$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{Z} = \dfrac{5\angle 60^\circ}{33.54\angle 63.4^\circ} = 0.149\angle -3.4^\circ\ A$

电感电压为　$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = 56.5\angle 90^\circ \times 0.149\angle -3.4^\circ = 8.42\angle 86.4^\circ V$

电阻电压为　$\dot{U}_R = R\dot{I} = 15\times 0.149\angle -3.4^\circ = 2.235\angle -3.4^\circ V$

电容电压为　$\dot{U}_C = -j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I} = 26.5\angle -90^\circ \times 0.149\angle -3.4^\circ = 3.95\angle -93.4^\circ V$

相量图如图（c）所示，
各量的瞬时式为：

$$i = 0.149\sqrt{2}\sin(\omega t - 3.4^\circ)\ A$$

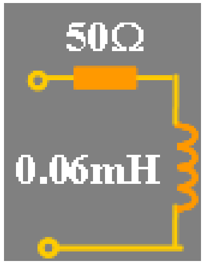
$$u_R = 2.235\sqrt{2}\sin(\omega t - 3.4^\circ)\ V$$

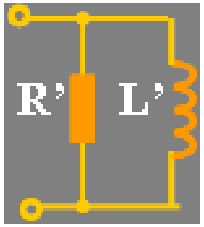
$$u_L = 8.42\sqrt{2}\sin(\omega t + 86.6^\circ)\ V$$

$$u_C = 3.95\sqrt{2}\sin(\omega t - 93.4^\circ)\ V$$

§9—1　阻抗和导纳

例9-2 ***RL*** 串联电路如左图所示，求在ω＝10⁶rad/s 时的等效并联电路。





解：***RL*** 串联电路的阻抗为：

$$X_L = \omega L = 10^6 \times 0.06 \times 10^{-3} = 60\Omega$$

$$Z = R + jX_L = 50 + j60 = 78.1\angle 50.2^0\ \Omega$$

导纳为：$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{78.1\angle 50.2^0} = 0.0128\angle -50.2^0 = 0.0082 - j0.0098\ S$$

得等效并联电路的参数

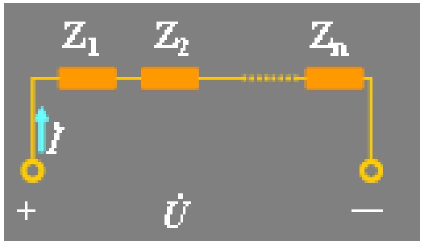
$$R' = \frac{1}{G'} = \frac{1}{0.0082} = 122\Omega$$

$$L' = \frac{1}{0.0098\omega} = 0.102mH$$

§9—2　阻抗(导纳)的串联和并联

一、阻抗的串联

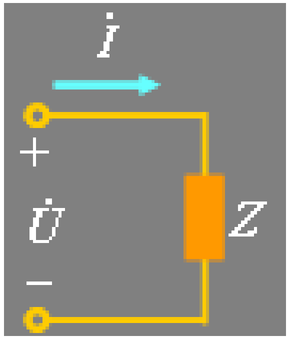
n 个阻抗串联的电路，根据 **KVL** 得：



$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_n = \dot{I}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = \dot{I}Z$$

$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} (R_k + jX_k)$$

串联电路中各个阻抗的电压分配为：



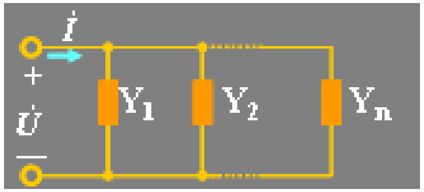
$$\dot{U}_k = \frac{Z_k}{Z}\dot{U}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

其中 为总电压， 为第 **k** 个阻抗的电压。

§9—2　阻抗(导纳)的串联和并联

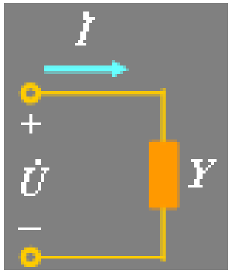
二、导纳的并联

n 个阻抗并联的电路，根据 KCL 得：



$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\cdots+\dot{I}_n=\dot{U}(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)=\dot{U}Y$$

$$Y=\sum_{k=1}^{n}Y_k=\sum_{k=1}^{n}(G_k+jB_k)$$



并联电路中各个阻抗的电流分配为：

$$\dot{I}_k=\frac{Y_k}{Y}\dot{I},\qquad k=1,2,\cdots,n$$

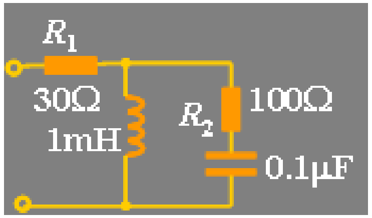
其中 为总电流， 为第 k 个导纳的电流。

两个阻抗 Z_1 、 Z_2 的并联等效阻抗为：

$$Z=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$

§9—2 阻抗(导纳)的串联和并联

例9-3、求图示电路的等效阻抗，已知ω= 10^5 rad/s 。



解：感抗和容抗为：

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^5 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 100\Omega$$

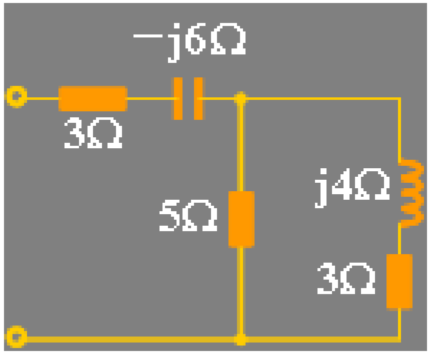
$$X_L = \omega L = 10^5 \times 1 \times 10^{-3} = 100\Omega$$

所以电路的等效阻抗为

$$Z = R_1 + \frac{jX_L(R_2 - jX_C)}{jX_L + R_2 - jX_C} = 30 + \frac{j100 \times (100 - j100)}{100} = 130 + j100\Omega$$

§9—2　阻抗(导纳)的串联和并联

例9-4、图示电路对外呈现感性还是容性？



解：　图示电路的等效阻抗为：

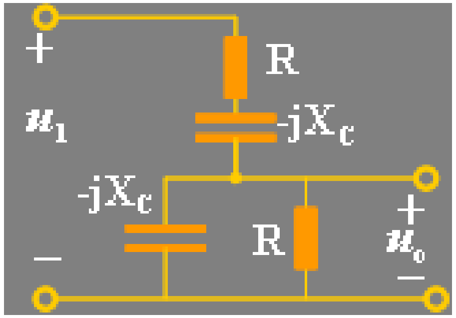
$$Z = 3 - j6 + \frac{5(3+j4)}{5+(3+j4)} = 3 - j6 + \frac{25\angle 53.1^{0}}{8+j4} = 5.5 - j4.75\Omega$$

电路对外呈现容性。

§9—2　阻抗(导纳)的串联和并联

例9-5、 图示为 **RC** 选频网络，试求 u_1 和 u_0 同相位的条件及 $\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_0}=?$

解：设 $Z_1 = R - jX_C \qquad Z_2 = R // jX_C$



输出电压 $\dot{U}_0 = \dfrac{\dot{U}_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

输出电压和输入电压的比值 $\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_0} = \dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = 1 + \dfrac{Z_1}{Z_2}$

因为 $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{R - jX_C}{-jRX_C/(R - jX_C)} = \dfrac{(R - jX_C)^2}{-jRX_C} = \dfrac{R^2 - X_C^2 - j2RX_C}{-jRX_C} = 2 + j\dfrac{R^2 - X_C^2}{RX_C}$

当 $R = X_C$，上式比值为实数，则 u_1 和 u_0 同相位，此时有

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_0} = 1 + 2 = 3$$

§9—3　正弦稳态电路的分析

电阻电路与正弦电流电路的分析比较

对于电阻电路：

$$\begin{cases} \text{KCL:} \quad \sum i = 0 \\ \text{KVL:} \quad \sum u = 0 \\ \text{元件约束关系:} \quad u = Ri \\ \qquad\qquad \text{或} \quad i = Gu \end{cases}$$

对于正弦电路：

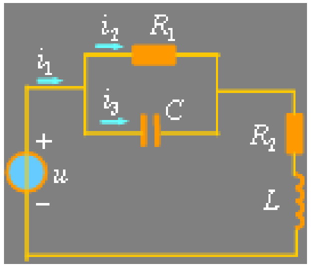
$$\begin{cases} \text{KCL:} \quad \sum \dot{I} = 0 \\ \text{KVL:} \quad \sum \dot{U} = 0 \\ \text{元件约束关系:} \quad \dot{U} = Z\dot{I} \\ \qquad\qquad \text{或} \quad \dot{I} = Y\dot{U} \end{cases}$$

§9—3　正弦稳态电路的分析

例9-6求图 (a) 电路中各支路的电流。已知电路参数为:

$R_1 = 1000\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L = 500mH$, $C = 10\mu F$, $U = 100V$, $\omega = 314rad/s$

解:
$$Z_1 = \frac{R_1(-j\,{}^1\!/_{\omega C})}{R_1 - j\,{}^1\!/_{\omega C}} = \frac{1000\times(-j318.47)}{1000 - j318.47} = 92.11 - j289.13\Omega$$



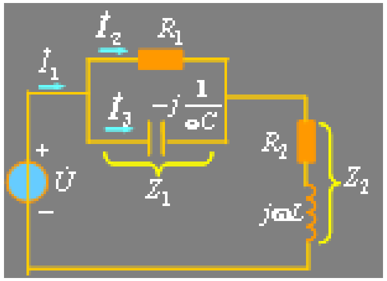
$$Z_2 = R_2 + j\omega L = 10 + j157\ \Omega$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = 102.11 - j132.13 = 166.99\angle -52.3^\circ\ \Omega$$

各支路电流为

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ}{166.99\angle -52.3^\circ} = 0.6\angle 52.3^\circ\ A$$

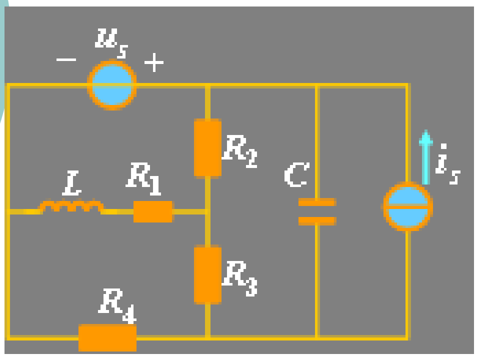
$$\dot{I}_2 = \frac{-j\,{}^1\!/_{\omega C}}{R_1 - j\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = \frac{-j318.47}{1049.5\angle -17.7^\circ}\times 0.6\angle 52.3^\circ = 0.181\angle -20^\circ\ A$$

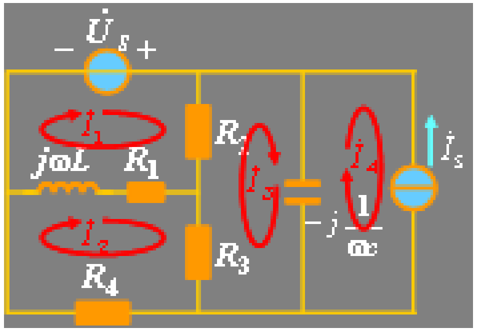


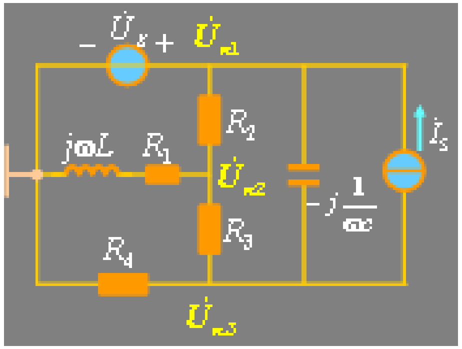
$$\dot{I}_3 = \frac{R_1}{R_1 - j\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = \frac{1000}{1049.5\angle -17.7^\circ}\times 0.6\angle 52.3^\circ = 0.57\angle 70^\circ\ A$$

§9—3　正弦稳态电路的分析

例9-7、列写图示电路的回路电流方程和节点电压方程







$$(R_1+R_2+j\omega L)\dot{I}_1-(R_1+j\omega L)\dot{I}_2-R_2\dot{I}_3=\dot{U}_S$$

$$-(R_1+j\omega L)\dot{I}_1+(R_1+R_3+R_4+j\omega L)\dot{I}_2-R_3\dot{I}_3=0$$

$$-R_2\dot{I}_1-R_3\dot{I}_2+(R_2+R_3-j\frac{1}{\omega C})\dot{I}_3+j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_4=0$$

$$\dot{I}_4=-\dot{I}_S$$

$$\dot{U}_{n1}=\dot{U}_S$$

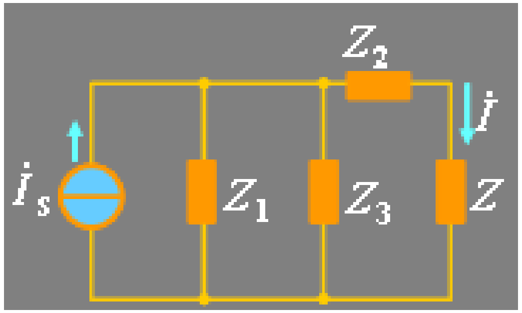
$$-\frac{1}{R_2}\dot{U}_{n1}+(\frac{1}{R_1+j\omega L}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})\dot{U}_{n2}-\frac{1}{R_3}\dot{U}_{n3}=0$$

$$-j\omega C\dot{U}_{n1}-\frac{1}{R_3}\dot{U}_{n2}+(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+j\omega C)\dot{U}_{n3}=-\dot{I}_S$$

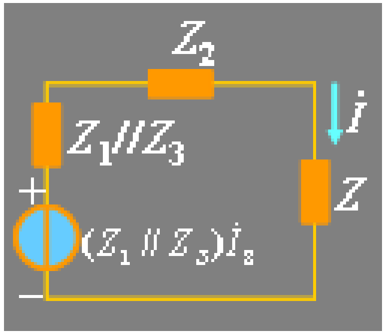
§9—3　正弦稳态电路的分析

例9-8、求图（a）电路中的电流 $\dot{I}$ 。已知：

$\dot{I}_S = 4\angle 90^o A$，$Z_1 = Z_2 = -j30\,\Omega$，$Z_3 = 30\,\Omega$，$Z = 45\,\Omega$



方法一：应用电源等效变换方法得等效电路如下图所示

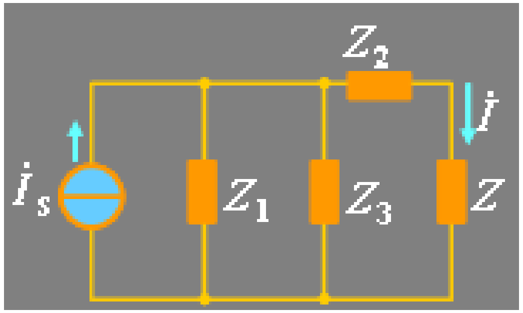


$$Z_1 // Z_3 = \frac{30(-j30)}{30-j30} = 15-j15\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_S(Z_1//Z_3)}{Z_1//Z_3+Z_2+Z} = \frac{j4(15-j15)}{15-j15-j30+45} = \frac{5.657\angle 45^o}{5\angle -36.9^o} = 1.13\angle 81.9^o A$$

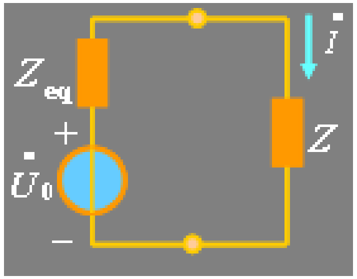
§9—3　正弦稳态电路的分析

$\dot{I}_S = 4\angle 90^\circ A$, $Z_1 = Z_2 = -j30\,\Omega$, $Z_3 = 30\,\Omega$, $Z = 45\,\Omega$



方法二：　应用戴维宁等效变换

$$\dot{U}_0 = \dot{I}_S (Z_1 // Z_3) = 84.86\angle 45^\circ V$$

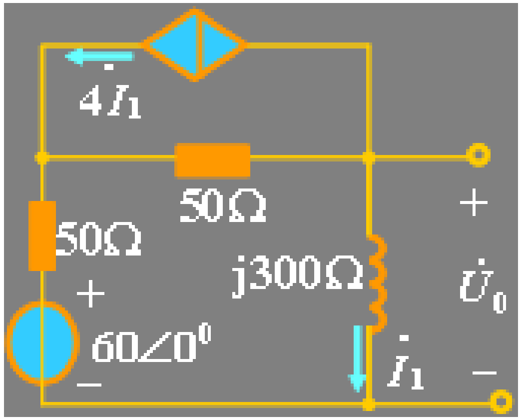


$$Z_{eq} = Z_1 // Z_3 + Z_2 = 15 - j45\,\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_0}{Z_0 + Z} = \frac{84.86\angle 45^\circ}{15 - j45 + 45} = 1.13\angle 81.9^\circ A$$

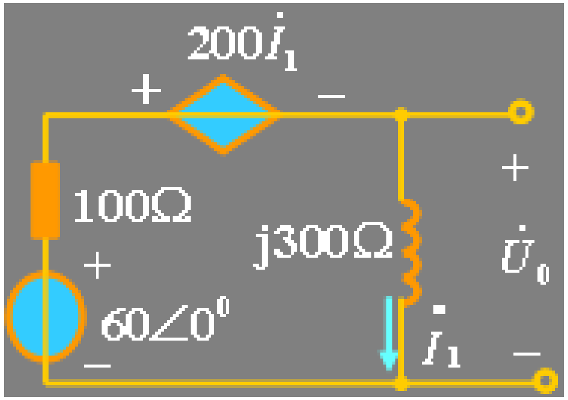
§9—3　正弦稳态电路的分析

例9-9、求上图所示电路的戴维宁等效电路。



$$\dot{U}_o=-200\dot{I}_1-100\dot{I}_1+60=-300\dot{I}_1+60=-300\frac{\dot{U}_0}{j300}+60$$

$$\dot{U}_0=\frac{60}{1-j}=30\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

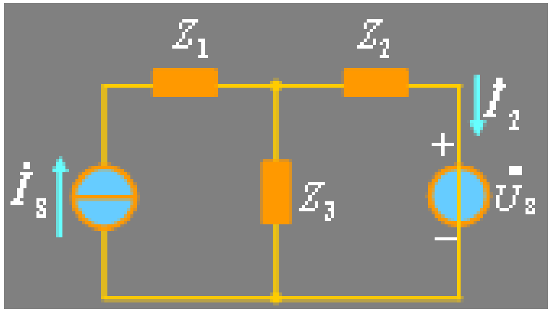


$$\dot{I}_{sc}=60/100=0.6\angle 0^0$$

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_{sc}}=\frac{30\sqrt{2}\angle 45^0}{0.6}=50\sqrt{2}\angle 45^0$$

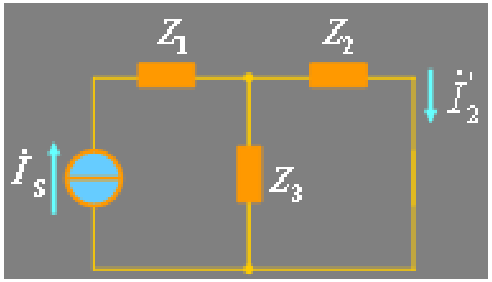
§9—3 正弦稳态电路的分析

例9-10、用叠加定理计算图中电路的电流 $\dot{I}_2$



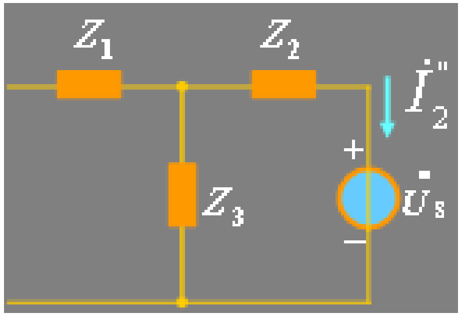
已知 $\dot{U}_S = 100\angle 45^\circ$

$\dot{I}_S = 4\angle 0^\circ A, Z_1 = Z_3 = 50\angle 30^\circ \Omega, Z_2 = 50\angle -30^\circ \Omega$



$$\dot{I}_2' = \dot{I}_S \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 4\angle 0^\circ \times \frac{50\angle 30^\circ}{50\angle -30^\circ + 50\angle 30^\circ}$$

$$= \frac{200\angle 30^\circ}{50\sqrt{3}} = 2.31\angle 30^\circ A$$

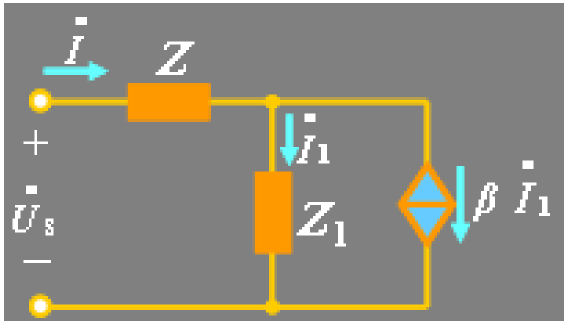


$$\dot{I}_2'' = -\frac{\dot{U}_S}{Z_2 + Z_3} = \frac{-100\angle 45^\circ}{50\sqrt{3}} = 1.155\angle -135^\circ A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2'' = 2.31\angle 30^\circ + 1.155\angle -135 = 1.23\angle -15.9^\circ A$$

§9—3　正弦稳态电路的分析

例9-11、已知图示电路：$Z=10+j50\Omega, Z_1=400+j1000\Omega$，问：β等于多少时，$\dot{I}_1$ 和 $\dot{U}_S$ 相位差90°？



$$\dot{U}_S = Z\dot{I} + Z_1\dot{I}_1 = Z(1+\beta)\dot{I}_1 + Z_1\dot{I}_1$$

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = (1+\beta)Z + Z_1 = 410 + 10\beta + j(50 + 50\beta + 1000)$$

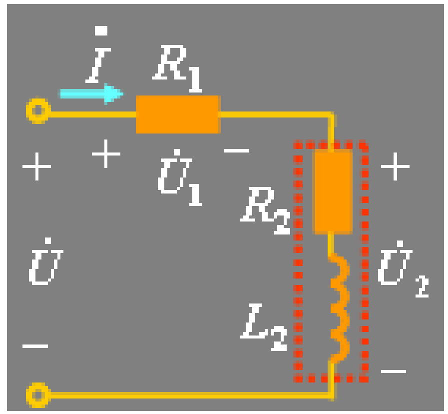
$$410 + 10\beta = 0 \rightarrow \beta = -41$$

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = -j1000$$

§9—3 正弦稳态电路的分析

例9-12、已知上图所示电路中，$U=115\text{V}$，$U_1=55.4\text{V}$，$U_2=80\text{V}$，$R_1=32\Omega$，$f=50\text{Hz}$， 求： 电感线圈的电阻 R_2 和电感 L_2 。

方法一：画相量图分析。



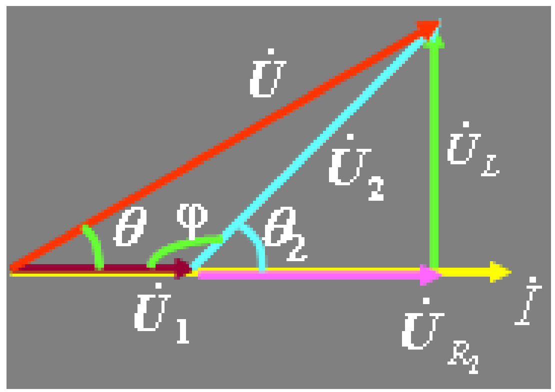
$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=\dot{U}_1+\dot{U}_R+\dot{U}_L$$

$$U^2=U_1^2+U_2^2-2U_1U_2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi=-0.4237 \qquad \therefore\varphi=115.1^\circ$$

$$\theta_2=180^\circ-\varphi=64.9^\circ$$

$$I={U_1}/{R_1}={55.4}/{32}=1.73A$$



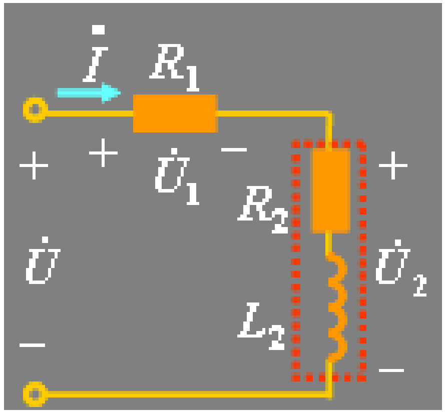
$$|Z_2|=U_2/I=80/1.73=46.2\Omega \qquad R_2=|Z_2|\cos\theta_2=19.6\Omega$$

$$X_2=|Z_2|\sin\theta_2=41.8\Omega \qquad L=X_2/(2\pi f)=0.133H$$

§9—3　正弦稳态电路的分析

例9-12、已知图（a）所示电路中，U =115V , U_1=55.4V , U_2= 80V , R_1=32Ω , f=50Hz，　求：　电感线圈的电阻 R_2 和电感 L_2 。

方法二：列方程求解



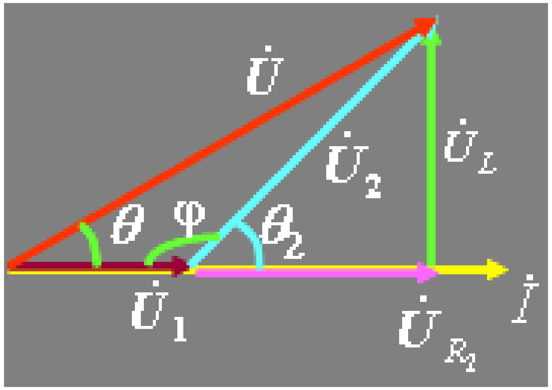
$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 55.4\angle 0^0 + 80\angle\theta_2 = 115\angle\theta$$

$$55.4 + 80\cos\theta_2 = 115\cos\theta$$

$$80\sin\theta_2 = 115\sin\theta$$

$$\cos\theta_2 = 0.424$$

$$\theta_2 = 64.93^\circ$$



§9—4　正弦稳态电路的功率

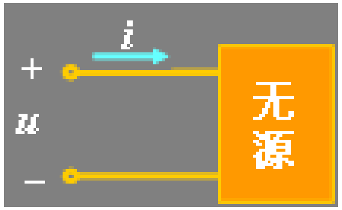
一、瞬时功率

设无源一端口网络，在正弦稳态情况下，端口电压和电流为：

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos\omega t \qquad i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t - \varphi)$$

式中φ是电压和电流的相位差，对无源网络，为其等效阻抗的阻抗角。

则一端口网络吸收的瞬时功率为：



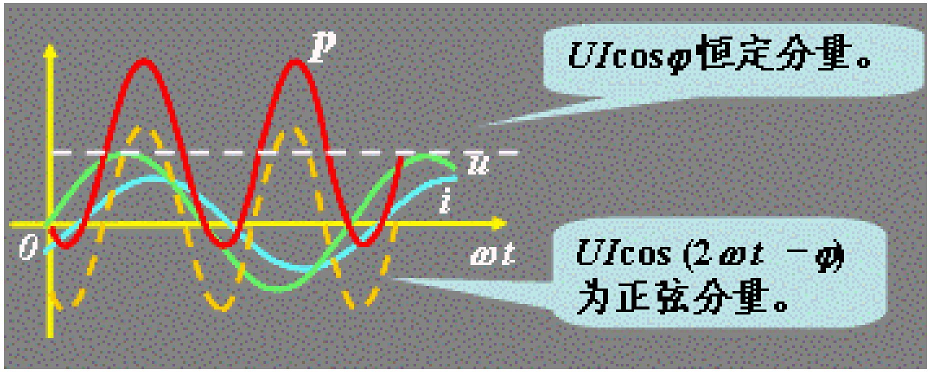
$$p(t) = ui = \sqrt{2}U\cos\omega t \cdot \sqrt{2}I\cos(\omega t - \varphi)$$

§9—4 正弦稳态电路的功率

上式可以分解为：

$$p(t)=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

从上式可以看出瞬时功率有两个分量，一个为恒定量，一个为两倍电压或电流频率的正弦量 。

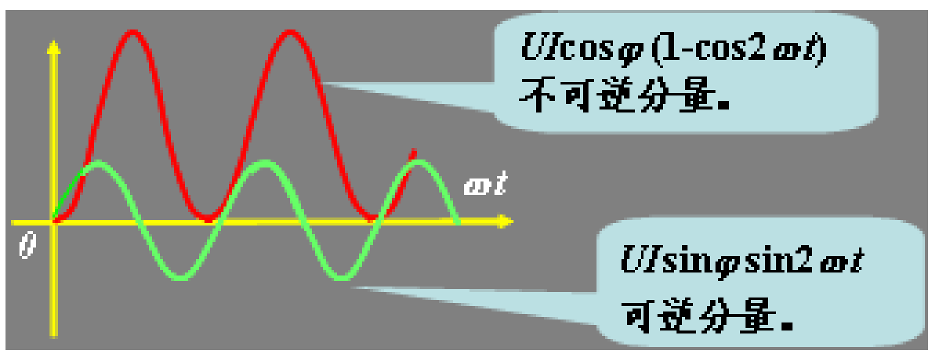


§9—4　正弦稳态电路的功率

瞬时功率还可以写为：

$$p(t) = ui = UI\cos\varphi(1+\cos 2\omega t) + UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

上式中第一项始终大于零，为瞬时功率的不可逆部分，第二项为两倍电压或电流频率的正弦量，是瞬时功率的可逆部分，代表电源和一端口之间来回交换的能量。



§9—4　正弦稳态电路的功率

二、平均功率 *P*

为了便于测量，通常引入平均功率的概念。平均功率为瞬时功率在一个周期内的平均值，即：

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_o^T \left[UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t - \varphi)\right]dt = UI\cos\varphi$$

P **的单位是 W（瓦）**

当 **cos*φ* =1,** 表示一端口网络的等效阻抗为纯电阻，平均功率达到最大。

当 **cos*φ* =0**，表示一端口网络的等效阻抗为纯电抗，平均功率为零。

平均功率亦称为有功功率

cos*φ*称为*功率因数*

§9—4　正弦稳态电路的功率

三、无功功率 Q

工程中还引入无功功率的概念，其定义为：

$$Q \overset{def}{=} UI\sin\varphi$$

单位： **var (乏)** 。

当 $Q > 0$，认为网络吸收无功功率；
$Q < 0$，认为网络发出无功功率。

当 $\cos\varphi = 1$, 有 $\sin\varphi = 0$，纯电阻网络的无功功率为零。

当 $\cos\varphi = 0$，有 $\sin\varphi = 1$，表示纯电抗网络无功功率最大。

§9—4　正弦稳态电路的功率

四、视在功率 *S*

定义视在功率为电压和电流有效值的乘积，即：

$$S \overset{def}{=} UI$$

单位： **VA (伏安)**

视在功率反映电气设备的容量。

§9—4　正弦稳态电路的功率

有功功率，无功功率和视在功率满足下图所示的功率三角形关系：

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$

$$\begin{cases} P=S\cos\varphi \\ Q=S\sin\varphi \end{cases} \qquad \varphi=\arctan\left(\frac{Q}{P}\right)$$

§9—4　正弦稳态电路的功率

五、任意阻抗的功率计算

$$P_z = UI\cos\varphi = |Z|I^2\cos\varphi = RI^2$$

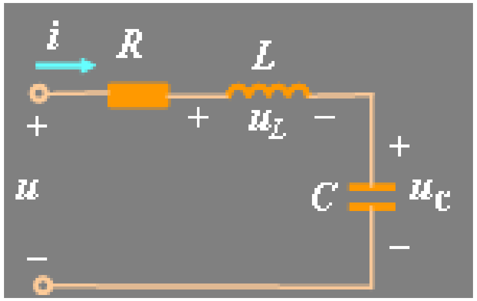
$$Q_Z = UI\sin\varphi = |Z|I^2\sin\varphi = XI^2 = I^2(X_L - X_C)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = I^2\sqrt{R^2 + X^2} = I^2|Z|$$

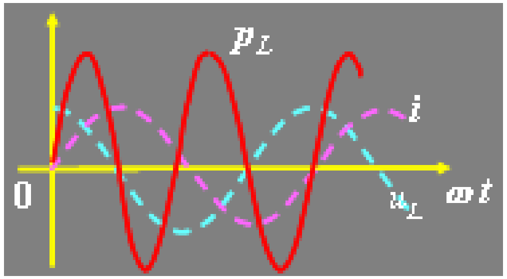
以上式子说明功率三角形与阻抗三角形是相似三角形。

§9—4　正弦稳态电路的功率

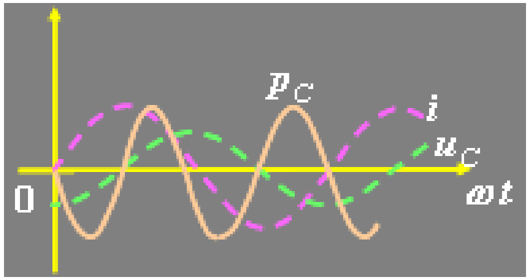
图（b）和（c）为图（a）所示的 **RLC** 串联电路中电感和电容的瞬时功率的波形，从中可以看出，当 ***L*** 发出功率时，***C*** 刚好吸收功率，当 ***C*** 发出功率时，***L*** 刚好吸收功率，说明电感、电容的无功具有互相补偿的作用。



（a）



（b）



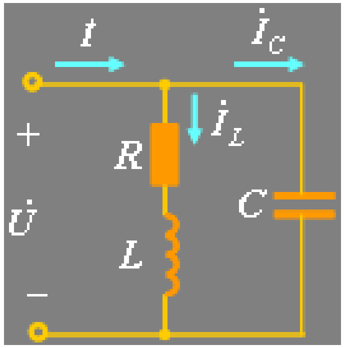
（c）

§9—4　正弦稳态电路的功率

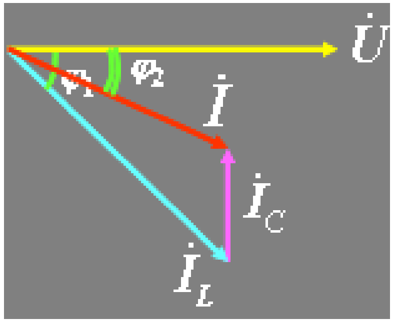
六、功率因数的提高

有功功率的表达式说明当功率一定时，若提高电压 ***U*** 和功率因数 **cos*φ***，可以减小线路中的电流，从而减小线路上的损耗，提高传输效率。

下图（**a**）给出了电感性负载与电容的并联电路，图（**b**）为其相量图，显然并联电容后，原负载的电压和电流不变，吸收的有功功率和无功功率不变，即：负载的工作状态不变。但电路的功率因数提高了。



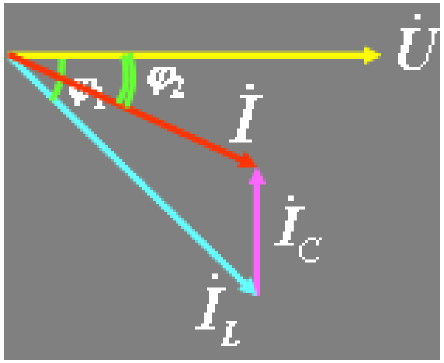
（ a ）



（ b ）

§9—4　正弦稳态电路的功率

根据相量图可以确定并联电容的值，由图可知：



$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$$

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi_2}\ ,\quad I_L = \frac{P}{U\cos\varphi_1}$$

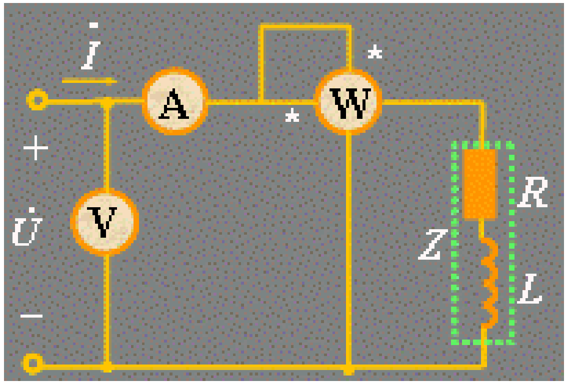
因此
$$I_C = \omega CU = \frac{P}{U}(tg\varphi_1 - tg\varphi_2)$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(tg\varphi_1 - tg\varphi_2)$$

并联电容后，电源向负载输送的有功功率$UI_L\cos\varphi_1 = UI\cos\varphi_2$不变，但是电源向负载输送的无功$UI\sin\varphi_2 < UI_L\sin\varphi_1$减少了，减少的这部分无功就由电容“产生”的无功来补偿，从而使感性负载吸收的无功不变，而功率因数得到改善。

§9—4　正弦稳态电路的功率

例9-13、图示电路是用三表法测线圈参数。已知 f=50Hz，且测得 U = 50V，I =1A，P =30W ,求线圈参数。



方法一：

$$S = UI = 50\times 1 = 50VA$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\,\text{var}$$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1} = 30\Omega$$

$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{40}{1} = 40\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{40}{100\pi} = 0.127H$$

§9—4　正弦稳态电路的功率

U = 50V， I =1A， P =30W

方法二：

$$P = I^2 R \rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1} = 30\Omega$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\Omega \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{|Z|^2 - R^2} = \frac{1}{314}\sqrt{50^2 - 30^2} = \frac{40}{314} = 0.127H$$

方法三：

$$P = UI\cos\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{30}{50 \times 1} = 0.6$$

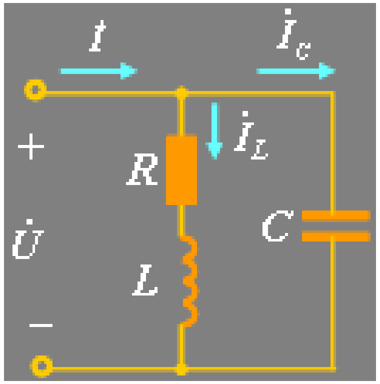
$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\Omega$$

$$R = |Z|\cos\varphi = 50 \times 0.6 = 30\Omega$$

$$X_L = |Z|\sin\varphi = 50 \times 0.8 = 40\Omega$$

§9—4　正弦稳态电路的功率

例9-14、图示电路，已知：f =50Hz, U =220V, P =10kW, 线圈的功率因数 cosφ=0.6，采用并联电容方法提高功率因数，问要使功率因数提高到0.9, 应并联多大的电容C，并联前后电路的总电流各为多大？



$\cos\varphi_1 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 53.13^\circ \qquad\qquad \cos\varphi_2 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 25.84^\circ$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\tan 53.13^\circ - \tan 25.84^\circ) = 557\mu F$$

$$I = I_L = \frac{P}{U\cos\varphi_1} = \frac{10\times10^3}{220\times0.6} = 75.8A \qquad I = \frac{P}{U\cos\varphi_2} = \frac{10\times10^3}{220\times0.9} = 50.5A$$

§9—5 复功率

设一端口网络的电压相量和电流相量为 $\dot{U}$、$\dot{I}$ ，定义复功率 $\bar{S}$

为：

$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^*$$

单位：**VA**

因此

$$\bar{S} = UI\angle(\Psi_u - \Psi_i) = UI\angle\varphi = S\angle\varphi = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

复功率也可表示为：

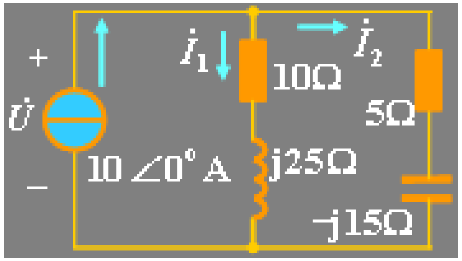
$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Z\dot{I}\cdot\dot{I}^* = ZI^2 = (R + jX)I^2 = RI^2 + jXI^2$$

或

$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \dot{U}(\dot{U}Y)^* = \dot{U}\cdot\dot{U}^*Y^* = U^2Y^*$$

§9—5　　复功率

例9-15、电路如图所示，求各支路的复功率。



解：　输入阻抗

$$Z=(10+j25)//(5-j15)$$

电压

$$\dot{U}=10\angle 0^\circ \times Z=236\angle(-37.1^\circ)V$$

电源发出的复功率

$$\overline{S}_{发}=236\angle(-37.1^\circ)\times 10\angle 0^\circ=1882-j1424VA$$

支路的复功率为

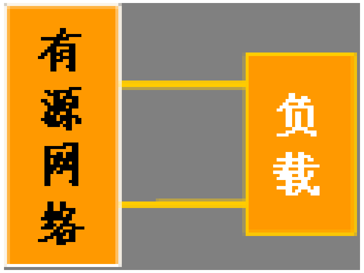
$$\overline{S}_{1吸}=U^2Y_1^*=236^2(\frac{1}{10+j25})^*=768+j1920\quad VA$$

$$\overline{S}_{2吸}=U^2Y_2^*=1113-j3345\quad VA$$

$$\overline{S}_{1吸}+\overline{S}_{2吸}=\overline{S}_{发}$$

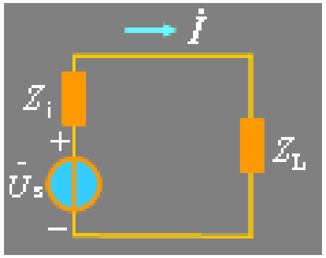
§9—6　　最大传输功率

设 $Z_i = R_i + jX_i$， $Z_L = R_L + jX_L$，则负载电流为：



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_i + Z_L}, \quad I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}}$$

负载吸收的有功功率为



$$P = R_L I^2 = \frac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$$

§9—6　最大传输功率

若$Z_L=R_L+jX_L$可任意改变，先设R_L不变，X_L改变，显然，当$X_i+X_L=0$，即$X_L=-X_i$时，有功功率P获得最大值，这时

$$P=\frac{R_L U_s^2}{(R_i+R_L)^2}$$

再改变R_L使P获得最大值。把上式对R_L求导，并使之为零，得$R_L=R_i$时，P获得最大值。

综合以上结果，可得负载上获得最大功率的条件是：

$$R_L=R_i \qquad X_L=-X_i$$

即

$$Z_L = Z_i^*$$

此时有最大功率　$P_{max}=\dfrac{U_s^2}{4R_i}$

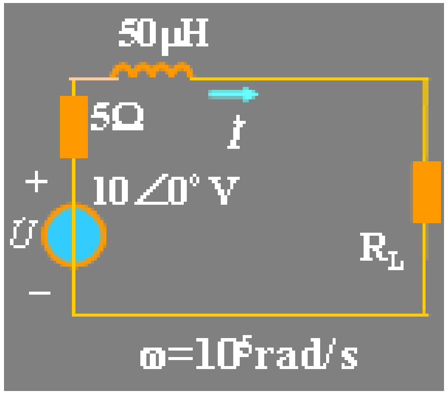
§9—6　最大传输功率

例9-16、电路如图（a）所示，求

（1）R_L =5Ω 时其消耗的功率；

（2）R_L =? 能获得最大功率，并求最大功率；

（3）在 R_L 两端并联一电容，问 R_L 和 C 为多大时能与内阻抗最佳匹配，并求匹配功率。



（1）

$$Z_i = R + jX_L = 5 + j10^5 \times 50 \times 10^{-6} = 5 + j5 \ \ \Omega$$

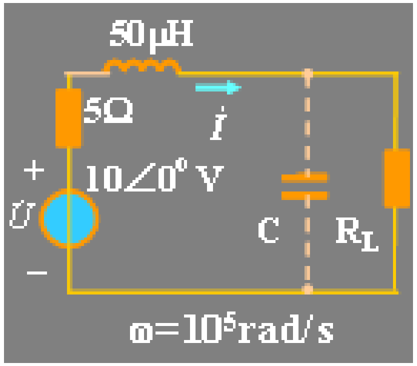
$$\dot{I} = \frac{10\angle 0^\circ}{5 + j5 + 5} = 0.89\angle(-26.6^\circ)A$$

$$P_L = I^2 R_L = 0.89^2 \times 5 = 4W$$

§9—6　　最大传输功率

（2）

$$P=\frac{R_L U_S^2}{(R_i+R_L)^2+X_i^2}$$



$$\frac{dP}{dR_L}=0 \qquad R_L=\sqrt{R_i^2+X_i^2}=\sqrt{5^2+5^2}=7.07\Omega$$

$$\dot{I}=\frac{10\angle 0^\circ}{5+j5+7.07}=0.766\angle(-22.5^\circ)A$$

$$P_L=I^2R_L=0.766^2\times 7.07=4.15W$$

（3）

$$Y=\frac{1}{R_L}+j\omega C \qquad Z_L=\frac{1}{Y}=\frac{R_L}{1+j\omega CR_L}=\frac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}-j\frac{\omega CR_L^2}{1+(\omega CR_L)^2}$$

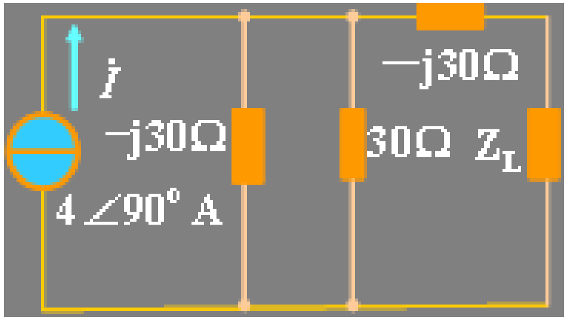
$$\begin{cases}\dfrac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}=5\\[2ex]\dfrac{\omega CR_L^2}{1+(\omega CR_L)^2}=5\end{cases} \qquad \begin{cases}R_L=10\Omega\\C=1\mu F\end{cases}$$

$$\dot{I}=\frac{10\angle 0^\circ}{10}=1A$$

$$P_{\max}=I^2R_i=1\times 5=5W$$

§9—6　　最大传输功率

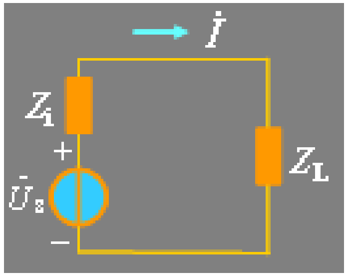
例9-17、电路如图（a）所示，求 Z_L =? 时能获得最大功率，并求最大功率。



$$Z_i = -j30 + (-j30 // 30) = 15 - j45\Omega$$

$$\dot{U}_S = j4 \times (-j30 // 30) = 60\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$$Z_L = Z_i^* = 15 + j45\Omega$$



$$P_{\max} = \frac{(60\sqrt{2})^2}{4\times 15} = 120W$$

§9—7　串联电路的谐振

一、谐振的定义

含有 R、*L*、*C* 的一端口电路，外施正弦激励，在特定条件下出现端口电压、电流同相位的现象时，称电路发生了谐振。

因此谐振电路的端口电压、电流满足：

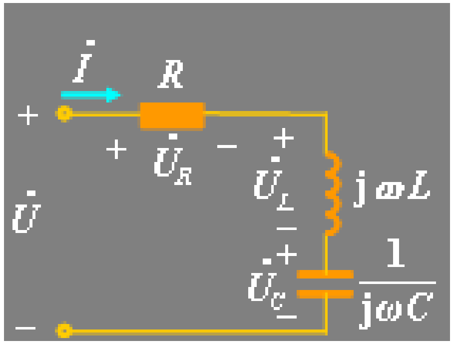
$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z = R$$

§9—7　　串联电路的谐振

二、串联谐振的条件

电路的输入阻抗为：

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j(X_L + X_C) = R + jX$$



R、*L*、*C* 串联电路的谐振条件是

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

谐振角频率为：

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

谐振频率为：

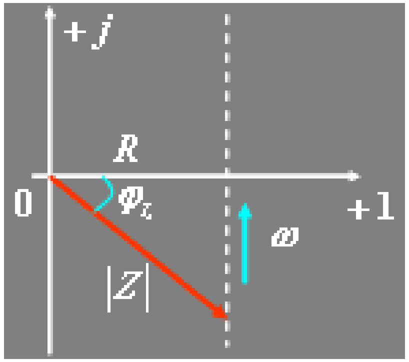
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

§9—7　　串联电路的谐振

三、 *R*、*L*、*C* 串联电路谐振时的特点

1、谐振时电路端口电压 $\dot{U}$ 和端口电流 $\dot{I}$ 同相位；

2、谐振时入端阻抗 $Z = R$ 为纯电阻，下图为复平面上表示的$|Z|$随ω 变化的图形，可以看出谐振时抗值 $|Z|$ 最小，因此电路中的电流达到最大。



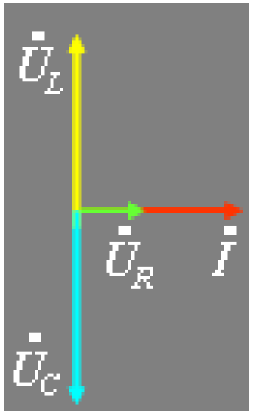
§9—7 串联电路的谐振

3、谐振时电感电压和电容电压分别为：

$$\dot{U}_L = j\omega_0 L\dot{I} = j\omega_0 L\frac{\dot{U}}{R} = jQ\dot{U}$$

$$\dot{U}_C = -j\frac{\dot{I}}{\omega_0 C} = -j\omega_0 L\frac{\dot{U}}{R} = -jQ\dot{U}$$

串联谐振也称电压谐振



4、谐振时出现过电压现象

Q 称为*品质因数*，有 $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$

其中ρ为*特征阻抗*，有 $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$

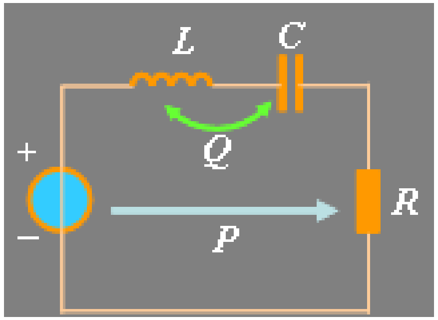
如果Q＞1，则有 $U_L = U_C > U$

当Q ＞＞1时，电感和电容两端出现大大高于电源电压 U 的高电压，称为过电压现象。

§9—7　　串联电路的谐振

5、谐振时的功率

有功功率为： $\boldsymbol{P = UI\cos\varphi = UI}$



无功功率为： $Q = UI\sin\varphi = Q_L + Q_C = 0$

其中

$$Q_L = \omega_0 L I_0^2$$

$$Q_C = -\frac{1}{\omega_0 C} I_0^2 = -\omega_0 L I_0^2$$

§9—7　　串联电路的谐振

6、谐振时的能量关系

设电源电压　$u = U_m \sin \omega_0 t$

则电流　$i = \dfrac{U_m}{R} \sin \omega_0 t = I_m \sin \omega_0 t$

电容电压　$u_C = \dfrac{I_m}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t - 90^\circ) = -\sqrt{\dfrac{L}{C}} I_m \cos \omega_0 t$

电容储能　$w_C = \dfrac{1}{2} C u_C^2 = \dfrac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega_0 t$

电感储能　$w_L \dfrac{1}{2} L i^2 = \dfrac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega_0 t$

§9—7　　串联电路的谐振

1）电感和电容能量按正弦规律变化，且最大值相等，即 $W_{Lm}=W_{Cm}$。L、C 的电场能量和磁场能量作周期振荡性的能量交换，而不与电源进行能量交换。

2）总能量是常量，不随时间变化，正好等于最大值，即

$$w_{总}=w_L+w_C=\frac{1}{2}LI_m^2=\frac{1}{2}CU_{Cm}^2=LI^2$$

电感、电容储能的总值与品质因数的关系为：

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\omega_0\cdot\frac{LI_0^2}{RI_0^2}=2\pi\cdot\frac{LI_0^2}{RI_0^2T_0}=2\pi\frac{\text{谐振时电路中电磁场的总储能}}{\text{谐振时一周期内电路消耗的能量}}$$

品质因数 Q 是反映谐振回路中电磁振荡程度的量，品质因数越大，总的能量就越大，维持一定量的振荡所消耗的能量愈小，振荡程度就越剧烈。则振荡电路的“品质”愈好。一般应用于谐振状态的电路希望尽可能提高 Q 值。

§9—7　　串联电路的谐振

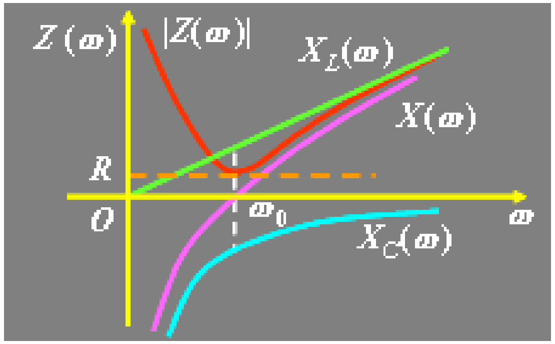
四、*RLC* 串联谐振电路的谐振曲线和选择性

1、阻抗的频率特性

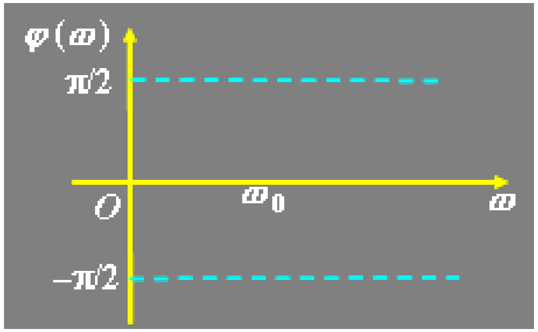
串联阻抗　$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = |Z(\omega)| \angle \varphi(\omega)$

阻抗幅频特性　$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$

阻抗相频特性　$\varphi(\omega) = \mathrm{tg}^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \mathrm{tg}^{-1} \frac{X_L + X_C}{R} = \mathrm{tg}^{-1} \frac{X}{R}$



幅频特性曲线



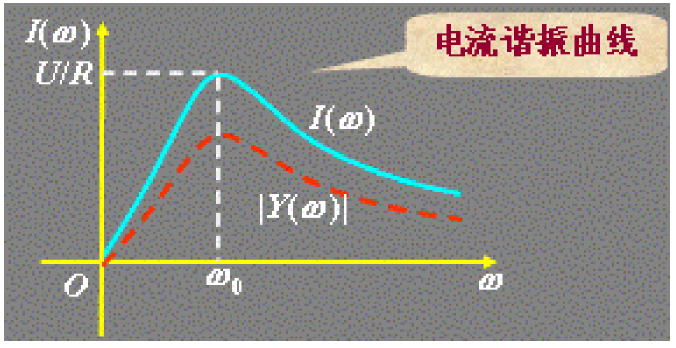
相频特性曲线

§9—7　　串联电路的谐振

2、电流谐振曲线

电流幅值与频率的关系为：

$$I(\omega)=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}=|Y(\omega)|U$$



§9—7　　串联电路的谐振

为了不同谐振回路之间进行比较，把电流谐振曲线的横、纵坐标分别除以ω_0和$I(\omega_0)$，即

$$\omega \to \frac{\omega}{\omega_0} = \eta, \quad I(\omega) \to \frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \frac{I(\eta)}{I_0}$$

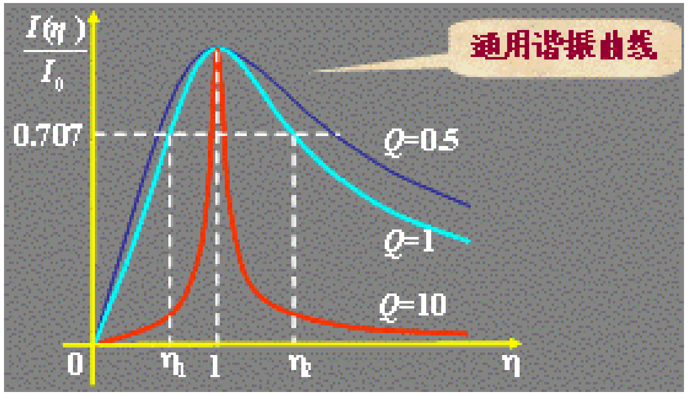
得

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \frac{U/|Z|}{U/R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0 L}{R} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 RC} \cdot \frac{\omega_0}{\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (Q \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - Q \cdot \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

$$\frac{I(\eta)}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\eta - \frac{1}{\eta})^2}}$$

Q 越大，谐振曲线越尖，选择性越好。



§9—7 串联电路的谐振

在通用谐振曲线 $I/I_0 = 1/\sqrt{2} = 0.707$ 处作一水平线，

与每一谐振曲线交于两点，对应横坐标分别为 η_1、η_2

称半功率点。

有 $\eta_1 = \dfrac{\omega_1}{\omega_0}, \quad \eta_2 = \dfrac{\omega_2}{\omega_0}, \quad \omega_2 > \omega_1.$

把 $\omega_2 - \omega_1$ 称为*通频带*。

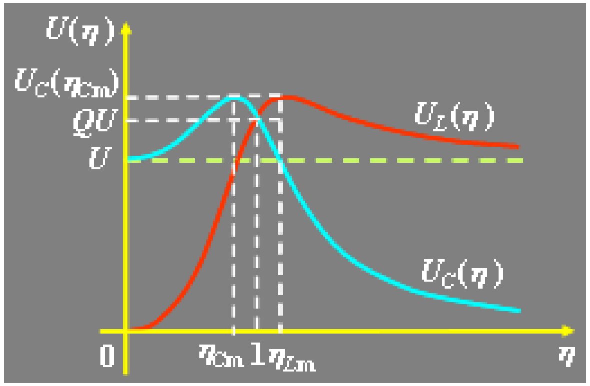
$$Q = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

§9—7　　串联电路的谐振

3、$U_L(\omega)$ 与 $U_C(\omega)$ 的频率特性

$$U_L(\omega)=\omega LI=\omega L\cdot\frac{U}{|Z|}=\frac{\omega LU}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}=\frac{QU}{\sqrt{\frac{1}{\eta^2}+Q^2(1-\frac{1}{\eta^2})^2}}$$

$$U_C(\omega)=\frac{I}{\omega C}=\frac{U}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}=\frac{QU}{\sqrt{\eta^2+Q^2(\eta^2-1)^2}}$$

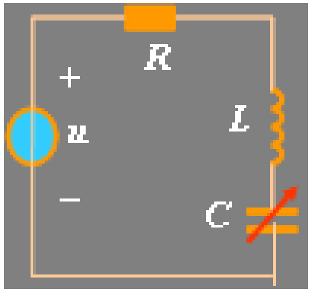


Q **越高，峰值频率越靠近谐振频率。**

§9—7　　串联电路的谐振

例9-18、某收音机的输入回路如图所示，L =0.3mH ，R =10Ω，为收到中央电台 560kHz 信号，求
（1）调谐电容 C 值；
（2）如输入电压为 1.5 mV ，求谐振电流和此时的电容电压。

解：（1）由串联谐振的条件得：



$$C=\frac{1}{(2\pi f)^2 L}=269pF$$

(2)

$$I_0=\frac{U}{R}=\frac{1.5m}{10}=0.15mA$$

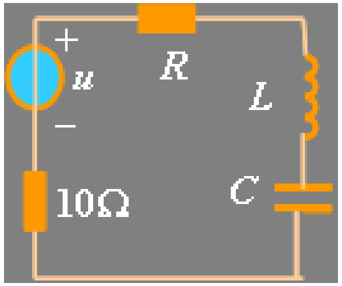
$$U_C=I_0X_C=158.5mV>>1.5mV$$

或

$$U_C=QU=\frac{\omega_0 L}{R}U$$

§9—7　　串联电路的谐振

例9-19、一信号源与 R 、L、C 电路串联如图所示，要求谐振频率 f_0 =10^4Hz， 频带宽$\triangle f$ =100Hz， R=15Ω， 请设计一个线性电路。



解：电路的品质因数

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{f_0}{\Delta f}=\frac{10^4}{100}=100$$

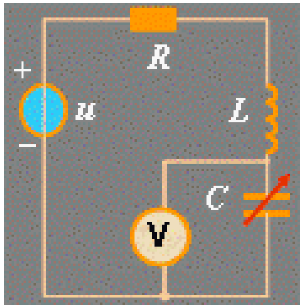
所以

$$L=\frac{RQ}{\omega_0}=\frac{100\times 15}{2\pi\times 10^4}=39.8mH$$

$$C=\frac{1}{\omega_0^2 L}=6360pF$$

§9—7　　串联电路的谐振

例9-20、一接收器的电路如图所示，参数为：U =10V，$\omega=5\times10^3$rad/s, 调C使电路中的电流达到最大值I_{max} =200mA，测得电容电压为600V，求R、L、C及Q 。



解：电路中电流达到最大时发生串联谐振，因此有：

$$R=\frac{U}{I_{\max}}=\frac{10}{200\times10^{-3}}=50\Omega$$

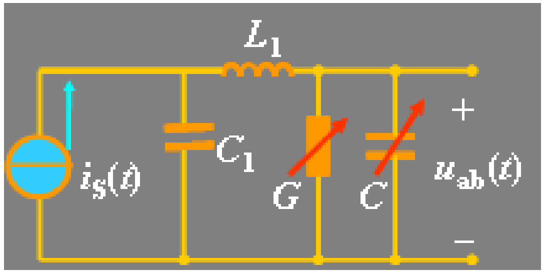
$$U_C=QU\Rightarrow Q=\frac{U_C}{U}=\frac{600}{10}=60$$

$$L=\frac{RQ}{\omega_0}=\frac{50\times60}{5\times10^3}=0.6H$$

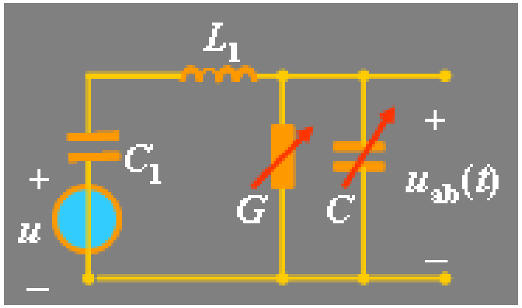
$$C=\frac{1}{\omega_0^2L}=0.067\mu F=67nF$$

§9—7　　串联电路的谐振

例9-21、图（a）所示电路，电源角频率为ω，问在什么条件下输出电压 u_{ab} 不受 G 和 C 变化的影响。



解：应用电源等效变换，把图（a）电路变换为图（b）电路，显然当 L_1、C_1 发生串联谐振时，输出电压 u_{ab} 不受 G 和 C 变化的影响。因此有：



$$\dot{U} = -j\frac{\dot{I}_S}{\omega C_1}$$

令

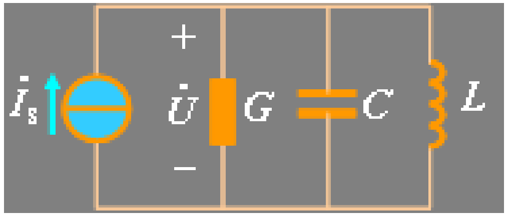
$$\omega C_1 = \frac{1}{\omega L_1} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U} = -j\frac{\dot{I}_S}{\omega C_1}$$

§9—8　并联电路的谐振

一、G、C、L 并联电路

当右图所示的 G、C、L 并联电路发生谐振时称并联谐振（即电流电压同相位），并联电路的入端导纳为：



$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

谐振时应满足　$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$

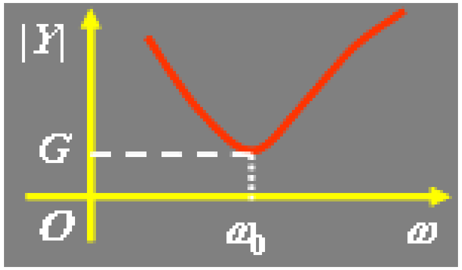
谐振角频率　$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

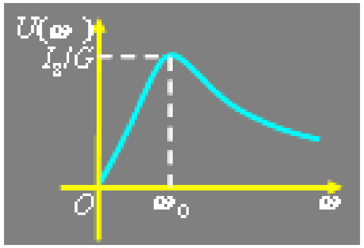
§9—8　　并联电路的谐振

并联谐振电路的特点为：

1、谐振时电路端口电压 $\dot{U}$ 和端口电流 $\dot{I}$ 同相位；

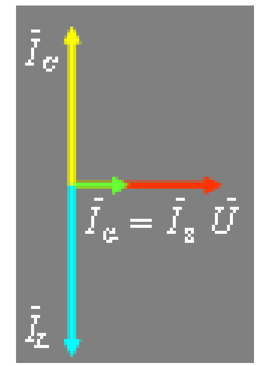
2、谐振时入端导纳 $Y = G$ 为纯电导，导纳 $|Y|$ 最小，因此电路中的电压达到最大。





§9—8　　并联电路的谐振

3、谐振时电感电流和电容电流分别为：



$$\dot{I}_L = -j\frac{\dot{U}}{\omega_0 L} = --j\frac{1}{\omega_0 LG}\dot{I}_S = -jQ\dot{I}_S$$

$$\dot{I}_C = -j\,\omega_0 C\dot{U} = j\frac{\omega_0 C}{G}\dot{I}_S = jQ\dot{I}_S$$

4、谐振时出现过电流现象

Q 称为并联电路的*品质因数*，有

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

如果 ***Q*** **>1**，则有　　$I_L = I_C > I$

当 ***Q*** **>>1** 时， 电感和电容中出现大大高于电源电流的大电流，称为<u>过电流现象</u>。

§9—8　　并联电路的谐振

5、谐振时的功率

有功功率为：　$P = UI = U^2/G$

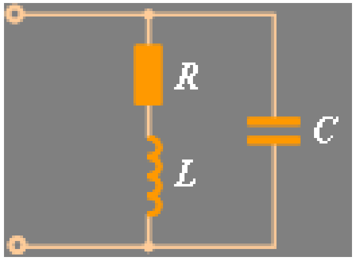
无功功率为：　$Q = UI\sin\varphi = Q_L + Q_C = 0$

$$|Q_L| = |Q_C| = \omega_0 C U^2 = \frac{U^2}{\omega_0 L}$$

§9—8　　并联电路的谐振

二、电感线圈与电容器的并联谐振

实际的电感线圈总是存在电阻，因此当电感线圈与电容并联时，电路如图所示。



§9—8　并联电路的谐振

1、谐振条件

电路的入端导纳为：

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}) = G + jB$$

谐振时 $B=0$，即

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0$$

谐振角频率

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{L})^2}$$

§9—8　并联电路的谐振

上式说明该电路发生谐振是有条件的，在电路参数一定时，必须满足

$$\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2>0,\ \text{即}\ R<\sqrt{\frac{L}{C}}\text{时，可以发生谐振}$$

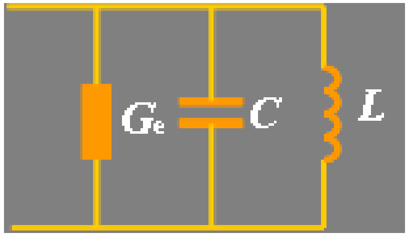
考虑到一般线圈电阻 **R<<ωL**，则等效导纳近似为：

$$Y=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}\left(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right)\approx\frac{R}{(\omega L)^2}+\mathrm{j}\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$$

§9—8 并联电路的谐振

谐振角频率近似为

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



电路的等效电阻为：

$$R_e = \frac{1}{G_e} \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$

电路的品质因数为：

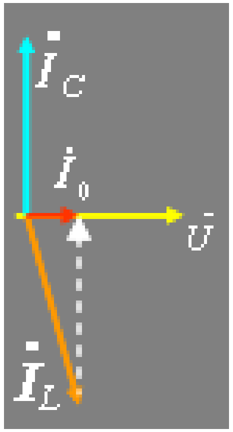
$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\omega_0 C}{R/(\omega_0 L)^2} = \frac{\omega_0^3 C L^2}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

§9—8　　并联电路的谐振

2、谐振特点

1）电路发生谐振时，输入阻抗很大

$$Z(\omega_0)=R_0=\frac{R^2+(\omega_0L)^2}{R}\approx\frac{(\omega_0L)^2}{R}=\frac{L}{RC}$$



2) 电流一定时，总电压较高

$$U_0=I_0Z=I_0\frac{L}{RC}$$

3）支路电流是总电流的 Q 倍，相量图如图所示。

设R<<ωL

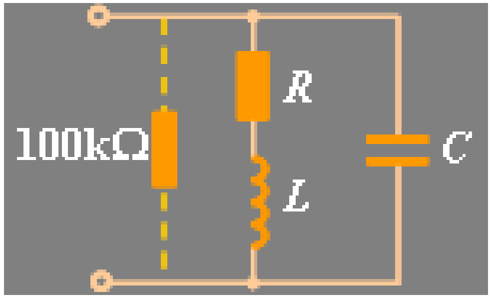
$$I_L\approx I_C\approx\frac{U}{\omega_0L}=U\omega_0C$$

$$\frac{I_L}{I_0}=\frac{I_C}{I_0}=\frac{U/\omega_0L}{U/(RC/L)}=\frac{1}{\omega_0RC}=\frac{\omega_0L}{R}=Q$$

$$I_L\approx I_C=QI_0>>I_0$$

§ 9—8　　并联电路的谐振

例9-22、电阻 **R=10Ω** 和品质因数 **Q_L=100** 的线圈与电容接成并联谐振电路，如图（a）所示，如再并联上一个 **100kΩ** 的电阻，求电路的品质因数 **Q** 。



解：因为

$$Q_L = 100 = \frac{\omega_0 L}{R}$$

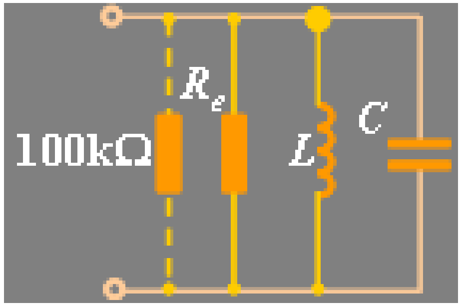
所以

$$\omega_0 L = RQ_L = 1000\Omega >> R$$

则

$$R_e \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{10^6}{10} = 100k\Omega$$

把图（a）电路等效为图（b）电路，得：



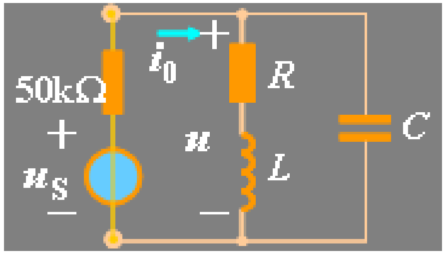
$$R_{eq} = 100 // 100 = 50k\Omega$$

因此

$$Q = \frac{R_{eq}}{\omega_0 L} = \frac{50 \times 10^3}{1000} = 50$$

§9—8　　并联电路的谐振

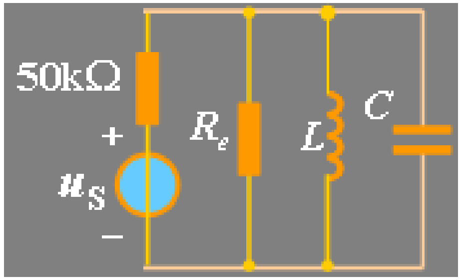
例9-23、电路如图所示，已知： R_S =50kΩ， U_S=100V ， $\omega_0=10^6$ rad/s，Q=100 ，谐振时线圈获取最大功率，求：L、C、R 及谐振时 I_0 、U 和功率 P 。



解： 线圈的品质因数 $Q_L=\dfrac{\omega_0 L}{R}=100$　　$\omega_0\approx\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

把 图（a）电路等效为图（b）电路，考虑到谐振时线圈获取最大功率得：

$$R_e=\frac{(\omega_0 L)^2}{R}=R_S=50k\Omega$$



联立求解以上三式得：

$$\begin{cases} R=5\Omega \\ L=0.5mH \\ C=0.002\mu F \end{cases}$$

谐振时总电流

$$I_0=\frac{U_S}{2R_S}=\frac{100}{2\times50\times10^3}=1mA$$

线圈两端的电压

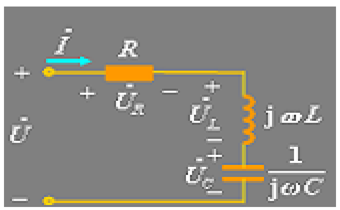
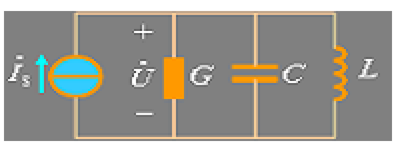
$$U=\frac{U_S}{2}=50V$$

功率

$$P=UI_0=0.05W$$

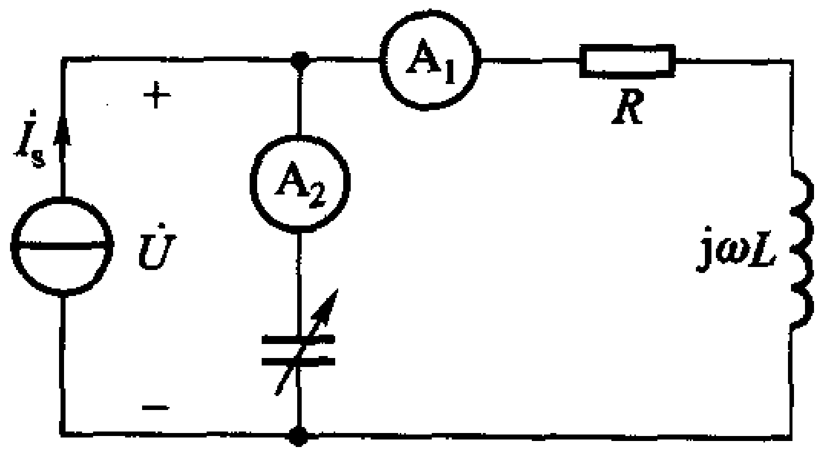
串、并联谐振的特性比较

∵串、并联对偶，电感电容对偶 ∴串、并联谐振电路各参数基本相同

电路形式		频率	特性阻抗	品质因数	特点	频率特性	通频带	源
串联谐振		$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\rho=\omega_0L$ $=\frac{1}{\omega_0C}$ $=\sqrt{L/C}$	$Q=\frac{\omega_0L}{R}$ $=\frac{1}{\omega_0CR}$ $=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	X=0 Z=R $I=\frac{U_S}{R}=GU_S$ $U_L=U_C=QU_S$ $\begin{cases}\dot{U}_L=jQ\dot{U}_S\\ \dot{U}_C=-jQ\dot{U}_S\end{cases}$	$\frac{I_R(\eta)}{I}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\eta-\frac{1}{\eta})^2}}$ $\eta=\omega/\omega_0$	ω_0/Q	电压
并联谐振		$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\rho=\omega_0L$ $=\frac{1}{\omega_0C}$ $=\sqrt{L/C}$	$Q=\frac{1}{\omega_0LG}$ $=\frac{\omega_0C}{G}$ $=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$	B=0 Y=G $U=\frac{I_S}{G}=RI_S$ $I_C=I_L=QI_S$ $\begin{cases}\dot{I}_L=-jQ\dot{I}_S\\ \dot{I}_C=jQ\dot{I}_S\end{cases}$	$\frac{U_R(\eta)}{U}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\eta-\frac{1}{\eta})^2}}$	ω_0/Q	电流

作业

9－6 题 9－6 图中 $i_S = 14\sqrt{2}\cos(\omega t+\phi)$ mA，调节电容，使电压 $\dot{U} = U\angle\phi$，电流表 A_1 的读数为 50 mA。求电流表 A_2 的读数。



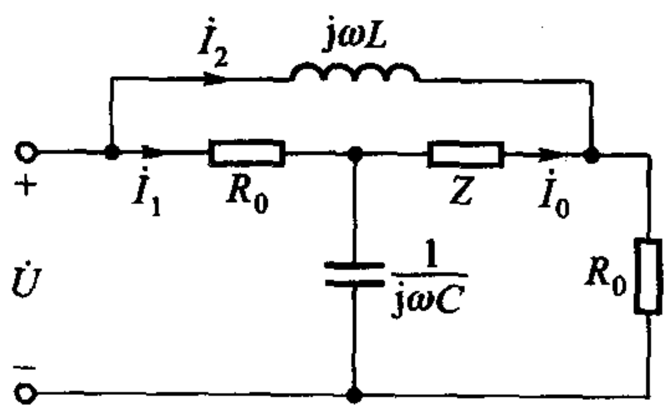
题 9－6 图

作业

9－14 已知题 9－14 图所示电路中的电压源为正弦量，$L=1\ \mathrm{mH}$，$R_0=1\ \mathrm{k\Omega}$，$Z=(3+\mathrm{j}5)\ \Omega$。试求：

(1) 当 $\dot{I}_0=0$ 时，C 值为多少？

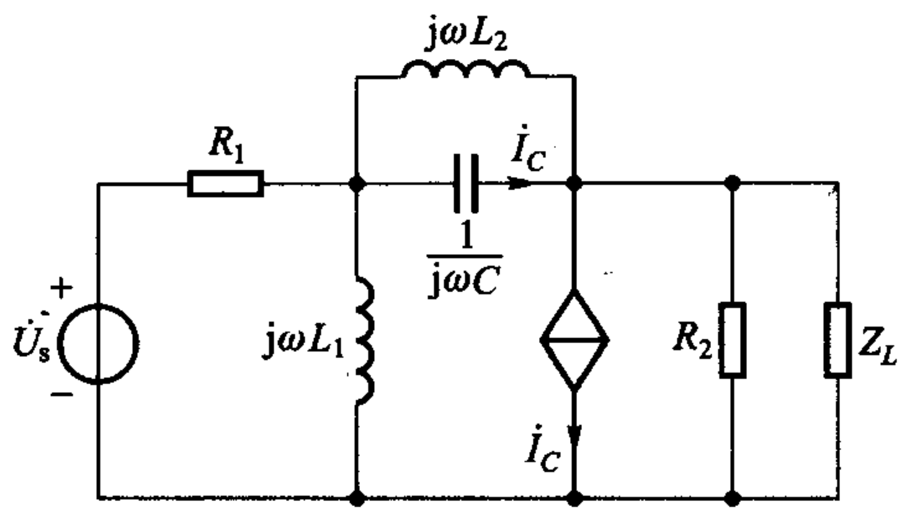
(2) 当条件(1)满足时，试证明输入阻抗为 R_0。



题 9－14 图

作业

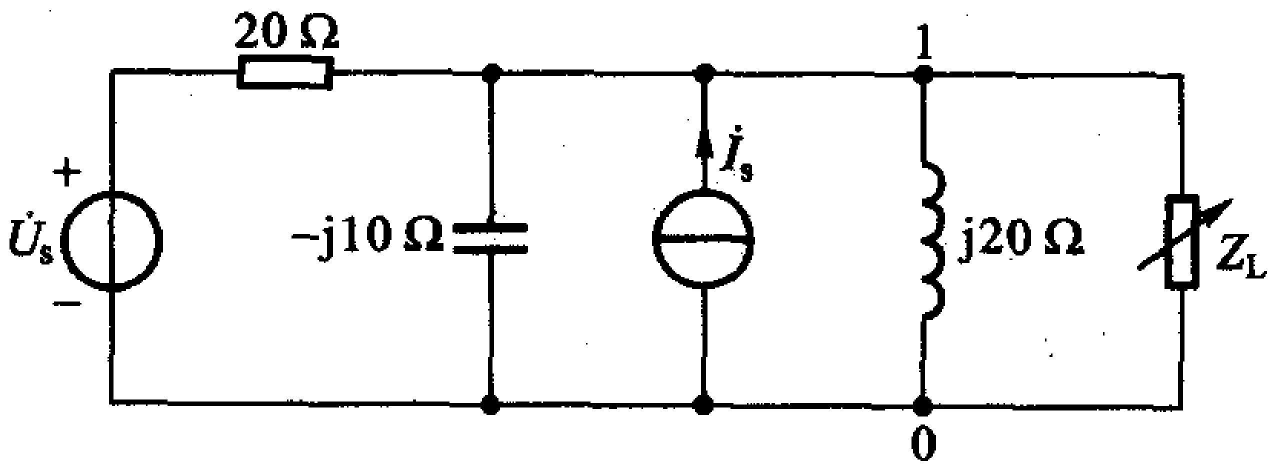
9-23 题 9－23 图中 $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$，$L_1 = L_2 = 1\ \text{H}$，$C = 100\ \mu\text{F}$，$\dot{U}_s = 100\angle 0^\circ\ \text{V}$，$\omega = 100\ \text{rad/s}$。求 Z_L 能获得的最大功率。



题 9－23 图

作业

9-27 已知题 9-27 图中 $\dot{U}_s = 100\angle 90^\circ$ V，$\dot{I}_s = 5\angle 0^\circ$ A。求当 Z_L 获最大功率时各独立源发出的复功率。



题 9-27 图