第四章 线性空间

复习

线性空间的定义

定义1. 设V是一个非空集合，F是一个数域，在集合V中定义元(元素)之间的**加法**运算，使得任意$\alpha,\beta\in V$，都有$\alpha+\beta\in V$；在F与V的元之间定义一个**数量乘法**运算，使得任意$k\in F$及$\alpha\in V$，都有$k\alpha\in V$。并且加法和数量乘法满足下列运算规律，则称**V为数域F上的线性空间**。【按所定义的线性运算构成数域F上的线性空间（或者**向量空间**）】简称**V是F上的线性空间**，V的元称为**向量**.

设 α、β、$\gamma \in V$，λ、$\mu \in F$

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\exists 0 \in V$，对$\forall \alpha \in V$，都有$\alpha+0=\alpha$

(4) $\forall \alpha \in V$，$\exists \beta \in V$，都有$\alpha+\beta=0$,

β称为α的负元，记做$-\alpha$。

(5) $1 \cdot \alpha=\alpha$

(6) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$

(7) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$

(8) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$

实数域R上的线性空间简称为实空间，复数域C上的线性空间简称为复空间.

说明:

- 凡满足以上八条规律的加法及乘数运算，称为线性运算.
- 向量空间中的向量不一定是有序数组.
- 要点：给定非空集合V和数域F，定义两种运算“+”和“·”，且满足运算规律(1)－(8).
- 线性空间中的加法“+”与数量乘法“·”可以与通常的“+”和“·”不同.
- 要证明某非空集合V对于给定的两种运算能构成数域F上的线性空间，需逐条验证“+”和“·”的封闭性及运算规律(1)—(8)成立；要否定某非空集合V对于给定的两种运算不能构成数域F上的线性空间，只须说明加法或数乘运算不封闭，或(1)—(8)中有一条不满足即可.
- 给定V及F，一般可用多种不同的方法定义出不同的线性空间.

线性空间V具有的性质

1. 零元素是唯一的.

2. 负元素是唯一的.

3. 存在加法的逆运算——减法，而且

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

4. 等式 $0\alpha=0$; $(-1)\alpha = -\alpha$; $\lambda 0=0$ 成立

5. 如果$\lambda\alpha = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$.

§4.1.2 子空间

定义2 设V是F上的一个线性空间，L是V的一个非空子集，如果L对于V中所定义的加法和乘数两种运算也构成F上的一个线性空间，则称L为V的子空间.

例1 在线性空间中，由单个的零向量所组成的子集合$\{0\}$是一个线性子空间，它叫做零子空间.

例2 线性空间V本身也是V的一个子空间.

叫做V的平凡子空间

其它的线性子空间叫做非平凡子空间.

定理：若L是线性空间V的非空子集且关于V的线性运算是封闭的（即若 $\alpha,\beta\in L,\ k\in F$，则 $\alpha+\beta\in L,$ $k\alpha\in L$），则L是V的子空间。

§ 4.2.2 基底变换与坐标变换

例1　在n维线性空间$P_{n-1}[x]$中，求多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

在基底 $[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]$ 和基底 $[1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}]$

下的坐标（a为常数）.

解：$f(x)$在基底$[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]$下坐标为$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$

由泰勒公式，把 $f(x)$在$x=a$处展开得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}$$

$$f^{(n)}=0,\ f^{(n+1)}=0,\cdots$$

因此，在基底 $[1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}]$ 下的坐标为

$$\left(f(a),f'(a),\frac{1}{2!}f''(a),\cdots,\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right)$$

同一个向量在不同基下的坐标一般是不同的.

? 随着基底的改变，向量的坐标是怎样变化？

为表达方便，先看一种形式的记法：

借助于矩阵乘法规则，把表示向量、基底和坐标的关系式表记为：

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]X$$

其中 $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 是向量 α 在基底 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ 下的坐标列向量.

注意：这里$[\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n]$不是矩阵，上式也并非真正的矩阵乘法，这仅仅是一种约定记法，在形式上利用了矩阵乘法规则，在运算规律上符合矩阵的运算规则.

过渡矩阵的定义

设n维线性空间V中两组不同的基底$\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right]$和$\left[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right]$.

设每个η_i在基底$\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right]$下的坐标为$X_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

利用前面的记法，有
$$\begin{cases} \eta_1=\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right]X_1 \\ \eta_2=\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right]X_2 \\ \vdots \\ \eta_n=\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right]X_n \end{cases}$$

再利用前面的记法写成矩阵形式

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n](X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M$$

其中，$M=(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

称为由基底$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$到基底$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$的过渡矩阵

(或演化矩阵). 显然，由于M的第j列是η_i在基底

$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$下的坐标，由于$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$线性无关知

线性无关知M为满秩矩阵.

过渡矩阵的应用

设V中向量α在基底$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$和$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$

下的坐标分别为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

即 $\alpha=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]X$

$\alpha=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]Y$

设由基底$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$到基底$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$的过渡矩阵

为M，利用矩阵形式写法得

$$\alpha=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]X=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]Y$$
$$=\big([\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M\big)Y=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n](MY)$$

由于α在基底$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$下的坐标是唯一的，因此有

$$X=MY$$

也即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

因为M可逆，又有 $Y=M^{-1}X$

于是，我们在已知过渡矩阵M以及X或Y之一时，可求出另外一个.

定理 设 $\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right]$和 $\left[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right]$是$n$维线性空间$V$的两个基底，向量在上式二基底下的坐标分别为$X$和$Y$，则当基底变换为

$$\left[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right]=\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right]M$$

时，坐标变换公式为

$$X = MY \quad \text{或} \quad Y = M^{-1}X$$

例　次数不超过n的多项式的全体, 即

$$P[x]_n=\{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,\cdots,a_1,a_0\in R\}$$

对于通常的多项式加法和数乘多项式的乘法构成向量空间.

证　通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算满足线性运算规律. 且

$$(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)+(b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0)$$
$$=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in P[x]_n$$

$$\lambda(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)$$
$$=(\lambda a_n)x^n+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in P[x]_n$$

所以$P[x]_n$构成线性空间.

例　n次多项式的全体

$$Q[x]_n = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in R, a_n \neq 0\}$$

对于通常的多项式加法和乘数运算不构成向量空间. 这是因为

对　$p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in Q[x]_n$

$$0p = 0x^n + \cdots + 0x + 0 \notin Q[x]_n$$

所以　$Q[x]_n$对运算不封闭.

例 对数函数的集合

$$S[x]=\{s=A\ln x \mid A\in R\}.$$

对于通常的函数加法及数乘函数的乘法构成线性空间.

因为 $s_1=A_1\ln x\in S[x],\ s_2=A_2\ln x\in S[x]$

则

$$s_1+s_2=A_1\ln x+A_2\ln x$$

$$=(A_1+A_2)\ln x=A\ln x\in S[x].$$

$$\lambda s_1=\lambda A_1\ln x=(\lambda A_1)\ln x\in S[x]$$

所以 $S[x]$ 是一个线性空间.

例 正实数的全体, 记作 R^+, 在其中定义加法及数乘运算为

$$a \oplus b = ab,\ \lambda \circ a = a^{\lambda}, \left(\lambda \in R, a, b \in R^+\right).$$

验证 R^+ 对上述加法与乘数运算构成线性空间.

证明　先证运算的封闭性

$$\forall a, b \in R^+ \Rightarrow a \oplus b = ab \in R^+;$$

$$\forall \lambda \in R, a \in R^+ \Rightarrow \lambda \circ a = a^{\lambda} \in R^+.$$

所以对定义的加法与数乘运算封闭.

下面一一验证八条线性运算规律:

(1) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a;$

(2) $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c$

$$= a(bc) = a \oplus (b \oplus c);$$

(3) R^+中存在零元素 1,对任何$a \in R^+$,有

$$a \oplus 1 = a \cdot 1 = a;$$

(4) $\forall a \in R^+$,有负元素$a^{-1} \in R^+$,使

$$a \oplus a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1;$$

$$(5)\ 1\circ a = a^1 = a;$$

$$(6)\ \lambda\circ(\mu\circ a) = \lambda\circ a^\mu = \left(a^\mu\right)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu)\circ a;$$

$$(7)\ (\lambda+\mu)\circ a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = a^\lambda \oplus a^\mu$$

$$= \lambda\circ a \oplus \mu\circ a;$$

$$(8)\ \lambda\circ(a\oplus b) = \lambda\circ(ab) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda$$

$$= a^\lambda \oplus b^\lambda = \lambda\circ a \oplus \lambda\circ b.$$

所以 R^+ 对所定义的运算构成线性空间.

例 n个有序实数组成的数组的全体

$$S^n = \left\{ (\vec{x} = x_1, x_2, \cdots, x_n) \middle| x_1, x_2, \cdots, x_n \in R \right\}$$

对于通常的有序数组的加法及如下定义的乘法

$$\lambda \circ (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots, 0)$$

不构成线性空间.

S^n 对运算封闭;

但 $1 \circ \vec{x} = \vec{0}$, 不满足第五条运算规律.

由于所定义的运算不是线性运算,所以S^n不是线性空间.

例 证明：$N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$

对矩阵加法及数乘运算构成 M_2 的一个子空间.

证明：因为 $N_2 \subset M_2$，又设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_2, \beta = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_2,$$

则有 $\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_2;$

$$\lambda\alpha = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_2$$（λ为实数）.

所以 N_2是 M_2 的一个子空间.

例1 在$P[x]_3$中取两个基

$$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x, \qquad \alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1,$$

$$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad \alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1,$$

及 $$\beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1, \qquad \beta_2 = x^2 + 2x + 2,$$

$$\beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2, \qquad \beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2,$$

求坐标变换公式.

解 将$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$表示.

因为 $$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (x^3, x^2, x, 1)A,$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (x^3, x^2, x, 1)B,$$

其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix},$

得 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B.$

故坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\\ x_4'\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}.$$

用初等变换计算$B^{-1}A$.

$$(B \mid A)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(E \mid B^{-1}A\right)$$

所以 $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

例2 坐标变换的几何意义.

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

及 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}$

为线性空间$V=R^2$的两个基.

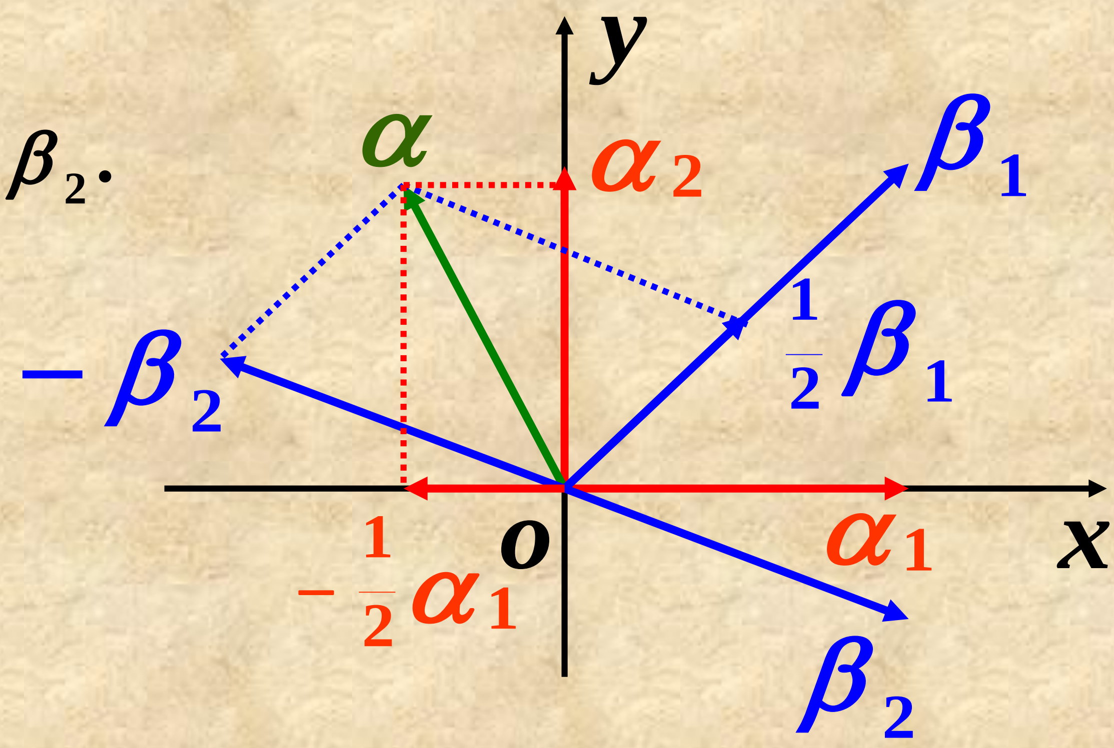
又设$\alpha=-\dfrac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2$, 则$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2$下的坐标为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}$$

由坐标变换公式可知，α在基β_1, β_2下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

即 $\alpha = \frac{1}{2}\beta_1 - \beta_2.$



小 结

- 线性空间的定义，维数确定
- 知道一些特殊的线性空间，如零空间，$\boldsymbol{R}^{m\times n}$, 等
- 知道一些概念：基、坐标、过渡矩阵
- 会计算坐标、过渡矩阵（重点），用坐标研究$\boldsymbol{n}$维线性空间的一些问题
- 基底变换与坐标变换公式（重点）