第七章 一阶电路和二阶电路的时域分析

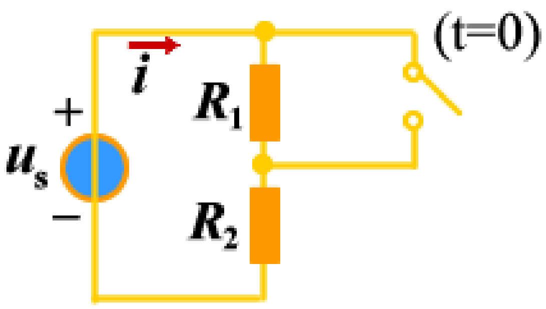
§7.1　动态电路的方程及其初始条件

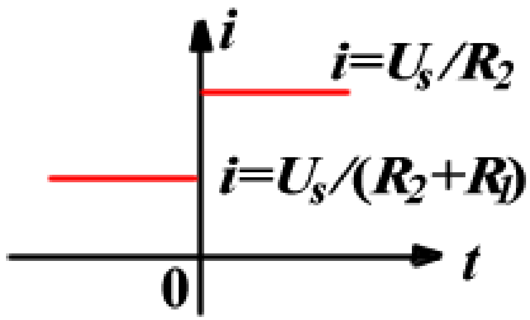
一、动态电路

含有动态元件电容和电感的电路称动态电路。由于动态元件是储能元件，其 **VCR** 是对时间变量 **t** 的微分和积分关系，因此动态电路的特点是：当电路状态发生改变时（换路）需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的过渡过程。

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

1、电阻电路





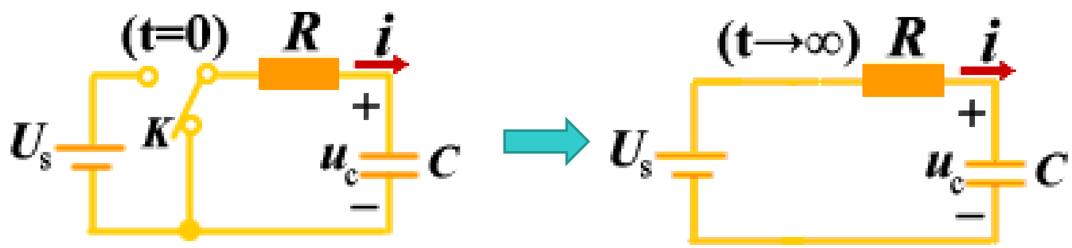
电流从**t**＜**0**时的稳定状态直接进入 $t>0$ 后的稳定状态。

说明纯电阻电路在换路时没有过渡期。

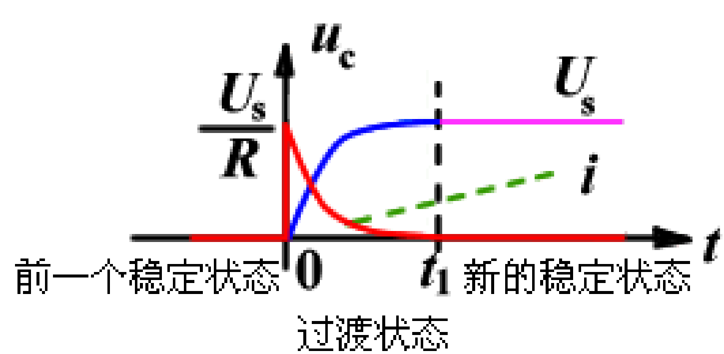
§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

2、电容电路

$i=0$
$u_C=0$



$i=0$
$u_C=U_S$

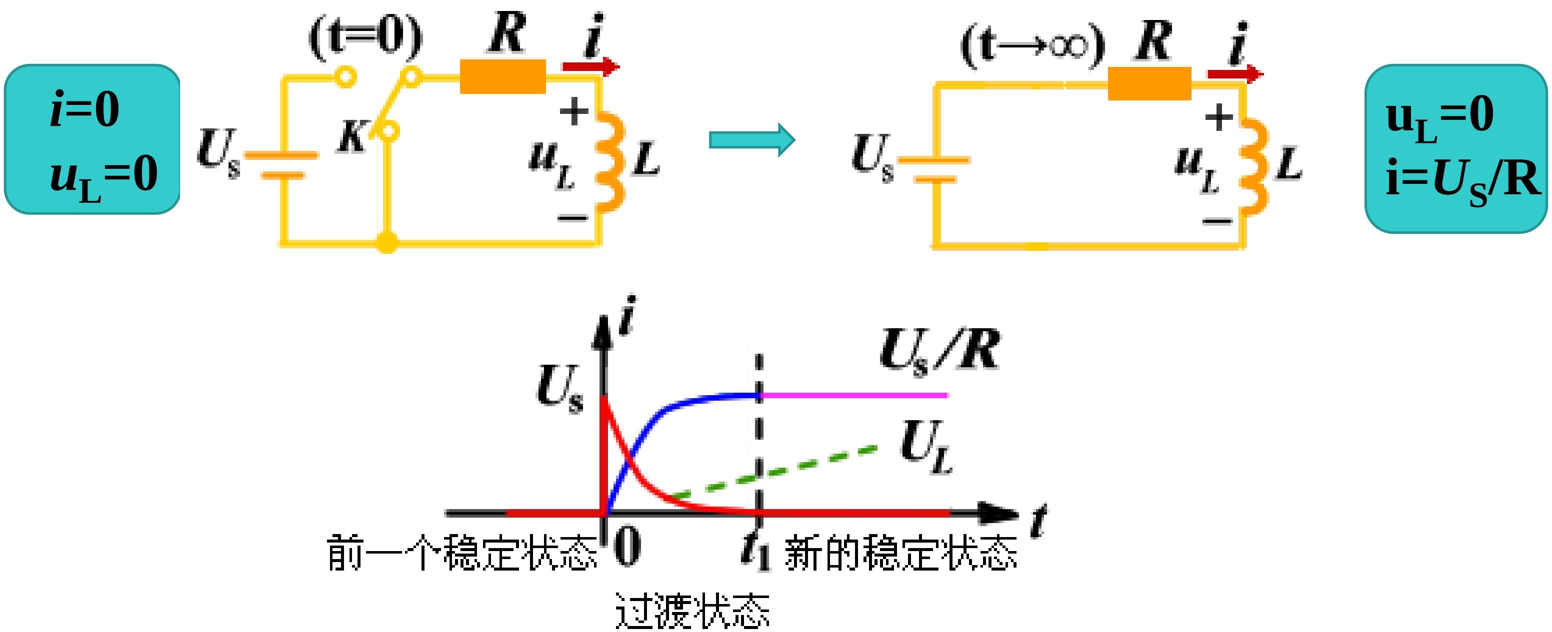


从t<0 时的稳定状态不是直接进入t>0后新的稳定状态。

说明含电容的电路在换路时需要一个过渡期。

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

3、电感电路



从**t**<**0**时的稳定状态不是直接进入**t**>**0**后新的稳定状态。说明含电感的电路在换路时需要一个过渡期。

§7.1　动态电路的方程及其初始条件

从以上分析需要明确的是：

1、换路是指电路结构、状态发生变化，即支路接入或断开或电路参数变化；

2、含有动态元件的电路换路时存在过渡过程，过渡过程产生的原因是由于储能元件***L***、***C*** ，在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放需要一定的时间来完成，即：

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t} \qquad 若 \quad \Delta t \to 0 \; 则 \quad p \to \infty$$

3. 动态电路分析就是研究换路后动态电路中电压、电流随时间的变化过程。

分析方法：

1）时域分析（经典法）

2）**s**域分析（运算法）

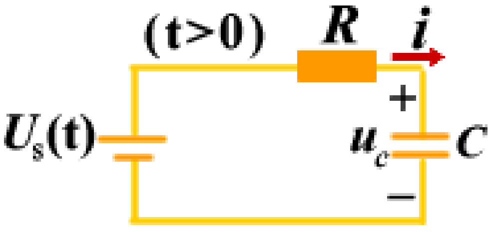
3）状态变量分析法

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

二、动态电路的方程

动态电路方程的建立包括两部分内容：一是应用基尔霍夫定律，二是应用电感和电容的微分或积分的基本特性关系式。

KVL　　$Ri + u_C = u_S(t)$



RC 电路

电容的 **VCR**　　$i = C\dfrac{du_C}{dt}$

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u_s(t)$$

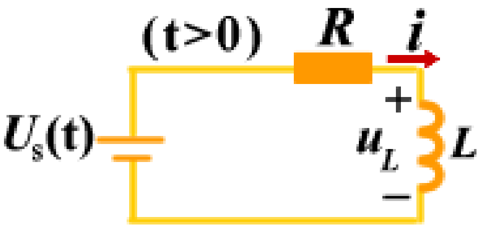
若以电流为变量　　$Ri + \dfrac{1}{C}\int i dt = u_S(t)$

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du_S(t)}{dt}$$

§7.1　动态电路的方程及其初始条件

KVL　$Ri + u_L = u_S(t)$

电感的 **VCR**　$u_L = L\dfrac{di}{dt}$



RL 电路

以电流为变量的电路方程：

$$Ri + L\frac{di}{dt} = u_S(t)$$

以电感电压为变量　$\dfrac{R}{L}\int u_L dt + u_L = u_S(t)$

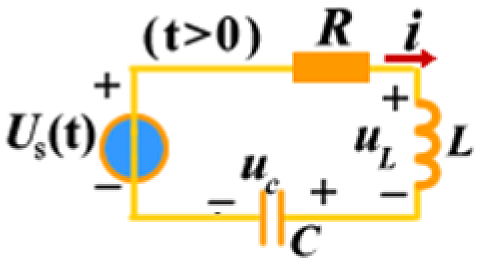
$$\frac{du_L}{dt} + \frac{R}{L}u_L = \frac{du_S(t)}{dt}$$

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

$$Ri + u_L + u_c = u_s(t)$$

$$i = C\frac{du_c}{dt}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$



RLC 电路

以电容电压为变量的二阶微分方程：

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u_S(t)$$

§7.1　动态电路的方程及其初始条件

结论：

（1）描述动态电路的电路方程为微分方程；

（2）动态电路方程的阶数等于电路中动态元件的个数，一般而言，若电路中含有 n 个独立的动态元件，那么描述该电路的微分方程是 n 阶的，称为 n 阶电路；

（3）描述动态电路的微分方程的一般形式为：

描述一阶电路的方程是一阶线性微分方程　$a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t)\qquad t\geq 0$

描述二阶电路的方程是二阶线性微分方程　$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t)\qquad t\geq 0$

高阶电路的方程是高阶微分方程：

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t)\qquad t\geq 0$$

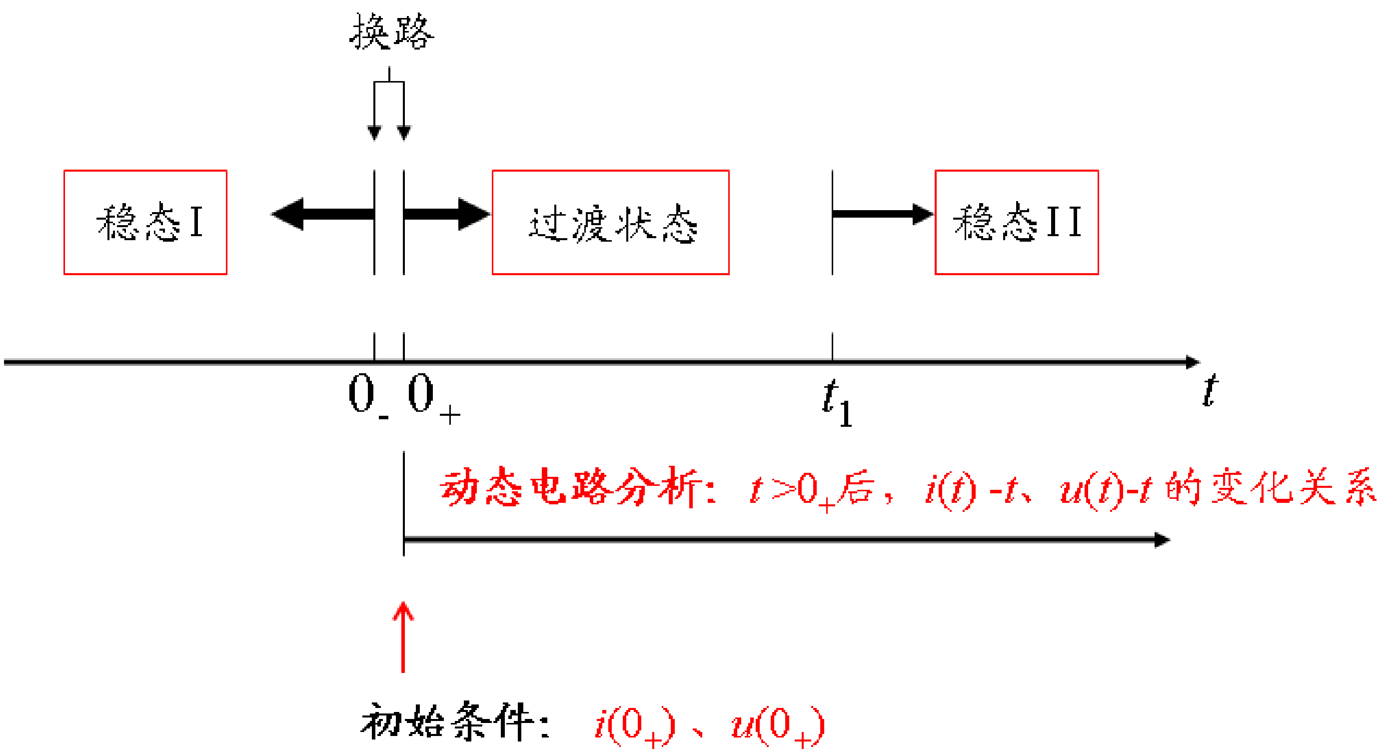
§7.1　动态电路的方程及其初始条件

三、电路初始条件的确定

求解微分方程时，解答中的常数需要根据初始条件来确定。由于电路中常以电容电压或电感电流作为变量，因此，相应的微分方程的初始条件为电容电压或电感电流的初始值。

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

若把电路发生换路的时刻记为 $t=0$ 时刻，换路前一瞬间记为0^-，换路后一瞬间记为0^+，则初始条件为 $t=0^+$ 时u，i 及其各阶导数的值。



§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

1、电容电压和电感电流的初始条件

初始条件为 $t=0^+$ 时 u，i 及其各阶导数的值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_)} i(\xi)d\xi$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u(\xi)d\xi$$

$$\boxed{\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}} \Leftarrow \begin{cases} q(0_+) = q(0_-) \\ \psi(0_+) = \psi(0_-) \end{cases}$$

§7.1　动态电路的方程及其初始条件

2、电路初始值的确定

根据换路定律可以由电路的$u_C(0^-)$和$i_L(0-)$确定u_C（0^+）和$i_L(0^+)$时刻的值，电路中其他电流和电压在t=0+时刻的值可以通过0+等效电路求得。求初始值的具体步骤是：

1）由换路前t=0^-时刻的电路（一般为稳定状态）求$u_C(0^-)$或$i_L(0^-)$；

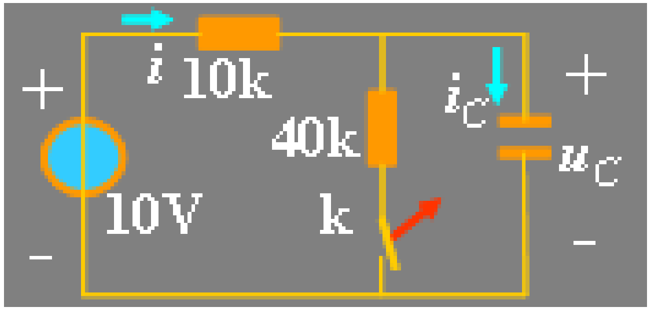
2）由换路定律得$u_C(0^+)$和$i_L(0^+)$；

3）画t=0^+时刻的等效电路：电容用电压源替代，电感用电流源替代（取0^+时刻值，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同）；

4）由0^+电路求所需各变量的0^+值。

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

例1、 图示电路在 t<0 时电路处于稳态，求开关打开瞬间电容电流 $i_C(0^+)$



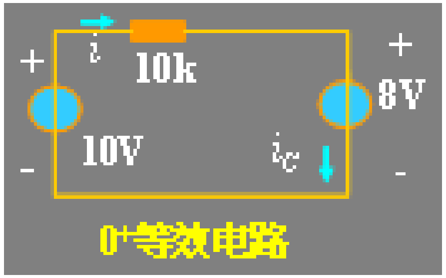
由 t=0⁻ 电路求得：

$$u_C(0^-) = 8V$$

由换路定律得：

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 8V$$

画出0⁺等效电路

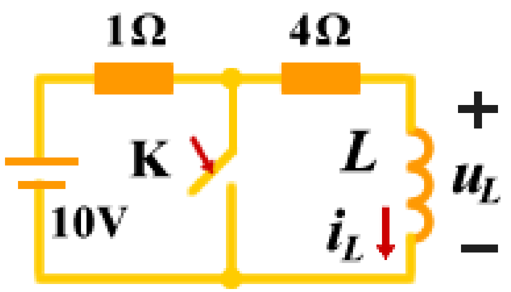


$$i_C(0+) = \frac{10-8}{10} = 0.2mA$$

电容电流在换路瞬间发生了跃变，即： $i_C(0-) = 0 \neq i_C(0+)$

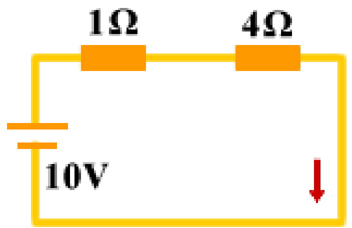
§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

例2、图示电路在 t<0 时电路处于稳态，t=0时闭合开关,求电感电压$u_L(0^+)$ 。



由t=0⁻电路求电感电流

$$i_L(0-)=\frac{10}{1+4}=2A$$

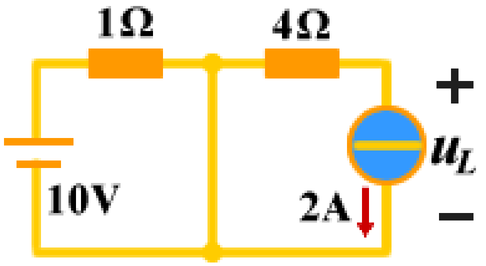


由换路定律得：

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=2A$$

画出0⁺等效电路

0⁺电路



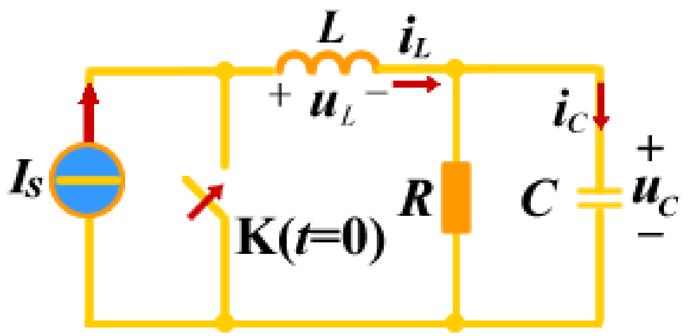
$$u_L(0^+)=-2\times4=-8V$$

电感电压在换路瞬间发生了跃变，即：

$$u_L(0-)=0\neq u_L(0+)$$

§7.1　动态电路的方程及其初始条件

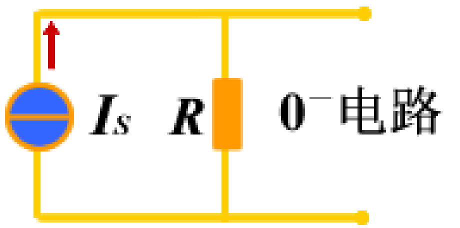
例3、 图示电路在t＜0时处于稳态，t=0时闭合开关,求电感电压$u_L(0^+)$和电容电流$i_C(0^+)$。



由 t=0⁻ 电路

$$i_L(0-) = i_L(0+) = I_S$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = I_S R$$

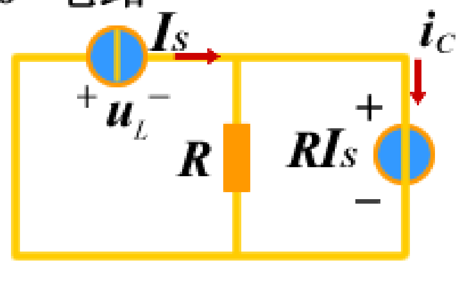


画出**0⁺** 等效电路

$$i_C(0^+) = I_s - \frac{RI_S}{R} = 0$$

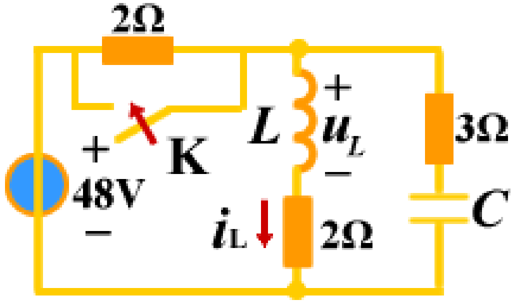
$$u_L(0_+) = -u_c(0_+) = -I_S R$$

0^+电路



§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

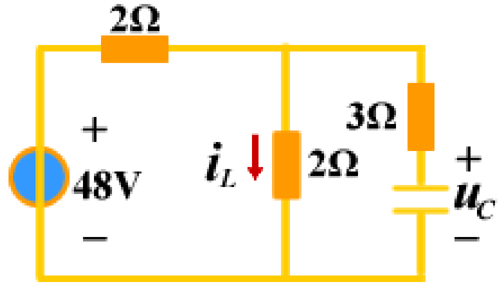
例4、 求图示电路在开关闭合瞬间各支路电流和电感电压。



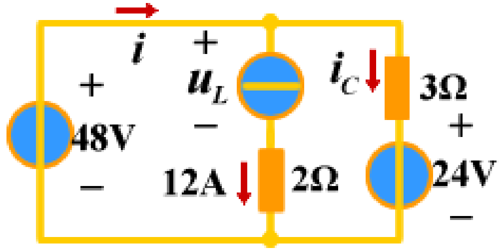
把 $t=0^-$ 电路中的电感短路，电容开路

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 48/4 = 12A$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = 2\times 12 = 24V$$



画出0^+等效电路



$$i_C(0+) = (48-24)/3 = 8A$$

$$i(0+) = 12+8 = 20A$$

$$u_L(0+) = 48-2\times 12 = 24V$$

§7.1　动态电路的方程及其初始条件

四、动态电路方程的解（微分方程的经典解）：

一阶电路的方程（一阶线性微分方程）的一般形式为，

$$a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

二阶电路的方程（二阶线性微分方程）的一般形式为，

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

高等数学学过，线性常系数微分方程的解由两部分组成：

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

即：非齐次方程解=齐次方程通解+非齐次方程特解

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

1、齐次方程的解——*自由响应*:

（1）对于一阶微分方程，其特征方程为

$$p + \alpha = 0$$

特征根为**p = -α**，故

$$y_h(t) = ke^{pt} = ke^{-\alpha t}$$

式中*k*为待定常数。

§7.1　动态电路的方程及其初始条件

（2）对于二阶微分方程，其特征方程为

$$p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

特征根为**p1**和**p2**，

当 $p_1 \neq p_2$ 时，

$$y_h(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}$$

当 $p_1 = p_2 = p$ 时，

$$y_h(t) = (k_1 + k_2 t) e^{pt}$$

式中待定常数k_1、k_2将在完全解中由初始条件确定。

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

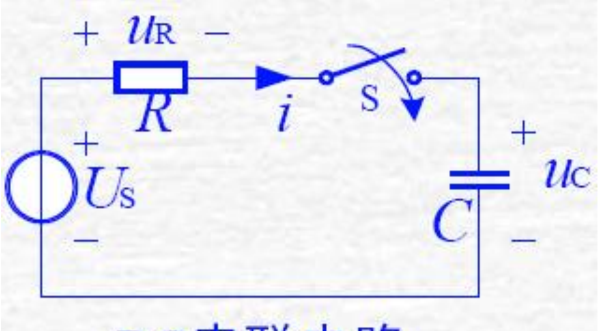
2、非齐次方程的解——*强迫响应*

特解具有与激励f(t)相同的函数形式。列表如下：

激励f(t)函数形式	特解$y_p(t)$
直流	常数A
t^m	$A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \ldots + A_1 t + A_0$
$e^{\alpha t}$	$Ae^{\alpha t}$　当α不是特征根时 $(A_1 t + A_0)e^{\alpha t}$　当α是特征单根时 $(A_2 t^2 + A_1 t + A_0)e^{\alpha t}$　当α是二重特征根时（二阶电路）
$\cos\beta t$ 或 $\sin\beta t$	$A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t$

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

例5、　如图RC电路，U_S为直流电压源。当t=0时闭合开关，电容的初始电压$u_C(0)=U_0$。求t≥0时的$u_C(t)$。



RC串联电路

$$\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{1}{RC}U_S$$

1、求通解$u_{Ch}(t)$

特征方程为　$p+1/(RC)=0$，其特征根　$p=-1/(RC)$

$$u_{ch}=ke^{Pt}=ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

2、求特解$u_{Cp}(t)$ ∵激励Us为常数，∴特解也是常数。

令$u_{Cp}(t)=A$，将它代入上面微分方程，得　$\frac{1}{RC}A=\frac{1}{RC}U_S$　　$u_{CP}(t)=A=U_S$

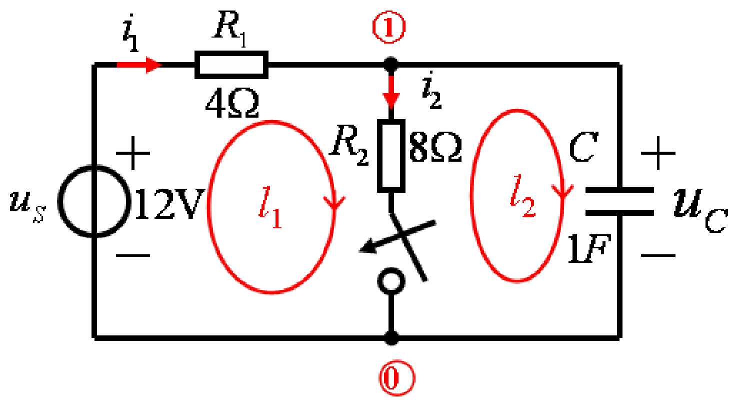
3、求完全解$u_C(t)$　$u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{CP}(t)=ke^{-\frac{1}{RC}t}+u_S$

常数k由初试条件$u_C(0)=U_0$确定　$u_C(0)=k+U_S=U_0$　　$k=U_0-U_S$

$$u_C(t)=(U_0-U_S)e^{-\frac{1}{RC}t}+U_S \qquad t\geq 0$$

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

例6、 在开关闭合前，电路已处于稳定。当t=0时开关闭合，求t>0时的u_C(t)。



解一：

n_1点KCL：　$i_1 - i_2 - i_C = 0$

KVL：　$R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_S$

$-R_2 i_2 + u_C = 0$

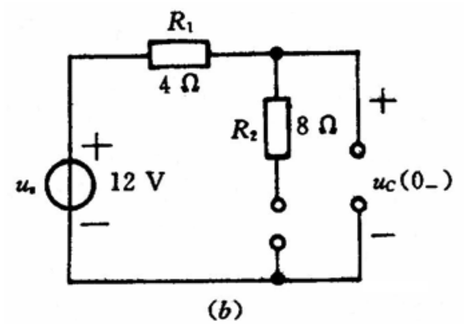
VCR　$i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$

整理上述方程，得

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}u_C = \frac{1}{R_1 C}u_S$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{3}{8}u_C = 3$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 12V$$



t=0-时刻电路

$$p + \frac{3}{8} = 0 \qquad p = -\frac{3}{8}$$

$$u_{ch}(t) = Ke^{-\frac{3}{8}t}$$

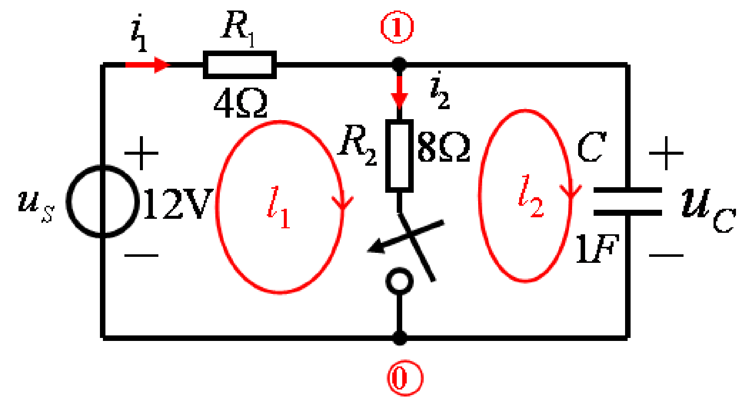
$$u_{cp}(t) = A \qquad A = 8$$

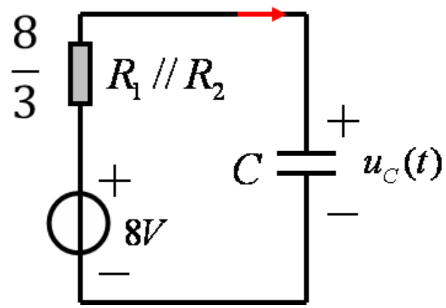
$$u_c(t) = Ke^{-\frac{3}{8}t} + 8 \qquad K = 4$$

$$u_c(t) = 4e^{-\frac{3}{8}t} + 8 \quad \text{V} \qquad (t \geq 0)$$

§ 7.1　动态电路的方程及其初始条件

解二：将动态元件C以外有源二端网络等效为戴维宁电路





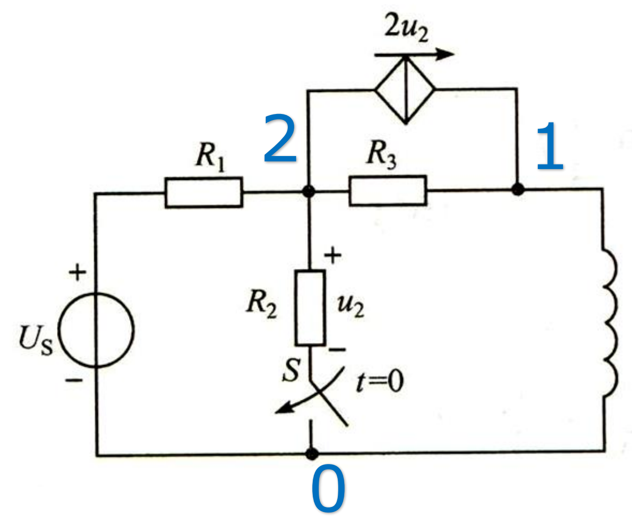
$$\boldsymbol{u_C(t) + (R_1//R_2)i_C(t) = 8}$$

$$u_C(t) + \frac{8}{3}\frac{du_C}{dt} = 8$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{3}{8}u_C = 3 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = 12 \end{cases} \Rightarrow u_C(t) = 4e^{-\frac{3}{8}t} + 8 \quad V$$

§ 7.1 动态电路的方程及其初始条件

例8、已知R_1=4Ω，R_2=2Ω，R_3=4Ω，U_S=6V，L=4H，t=0时开关S闭合。求$i_L(t)$和u_2(t)。



$$\begin{cases} \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 = 2u_2 - i_L \\ -\frac{1}{4}u_1 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})u_2 = \frac{6}{4} - 2u_2 \\ u_1 = 4\frac{di_L}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{di_L}{dt} + 4i_L = \frac{9}{2}$$

$$i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{U_S}{R_1 + R_3} = \frac{6}{8}$$

$$i_L(t) = -\frac{3}{8}e^{-4t} + \frac{9}{8} \quad A \qquad (t \geq 0)$$

$$p + 4 = 0 \qquad p = -4$$

$$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}u_1$$

$$i_L(t) = Ke^{-4t} + A$$

$$A = \frac{9}{8} \qquad K = -\frac{3}{8}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(\frac{3}{2}e^{-4t}) = 0.5(1 + e^{-4t})V$$

§7.1　动态电路的方程及其初始条件

小结：

（**1**）列写动态电路方程的简要步骤如下：

a)画出换路后($t>0$)电路，用支路电流法、回路法、或节点法列写KCL、KVL方程，动态元件L和C的VCR单独列写；

b)对列出的方程组消元（消元过程中需要对某些方程微分），得出所求变量的微分电路方程。

（**2**）求初始值的简要步骤如下：

a)由$t<0$时的电路，求出$u_C(0^-)$, $i_L(0^-)$，亦即$u_C(0^+)$, $i_L(0^+)$；

b)画出0^+等效电路；

c)由0^+等效电路，求出各电流、电压的初始值。

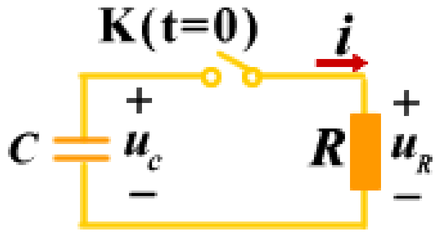
§7.2　一阶电路的零输入响应

定义：外加激励为零，仅由动态元件初始储能所产生的电流和电压，称为动态电路的零输入响应。这个物理过程即动态元件的放电过程。

§7.2　一阶电路的零输入响应

一、*RC* 电路的零输入响应

电容电压$u_C(0^-)= U_0$



开关闭合后

$$-u_R + u_C = 0$$

$$i = -C\frac{du_C}{dt}$$

得微分方程：

$$\begin{cases} RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0 \\ u_C(0+) = U_0 \end{cases}$$

§ 7.2　一阶电路的零输入响应

$$\begin{cases} RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0 \\ u_C(0+)=U_0 \end{cases}$$

特征根为：

$$p=-\frac{1}{RC}$$

方程的通解为：

$$u_C=Ae^{pt}=Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

代入初始值得：　**A = $u_C(0_+)$= U_0 ,**

$$u_c=u_C(0+)e^{-\frac{t}{RC}}=U_0e^{-\frac{t}{RC}}\quad t\geq 0$$

放电电流为：

$$i=\frac{u_C}{R}=\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\qquad t\geq 0$$

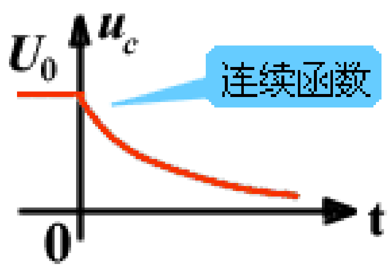
或根据电容的 **VCR** 计算：

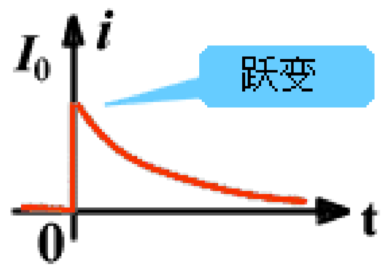
$$i=-C\frac{du_C}{dt}=-CU_0e^{-\frac{t}{RC}}(-\frac{1}{RC})=\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

§7.2　一阶电路的零输入响应

从以上各式可以得出：

1)电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数





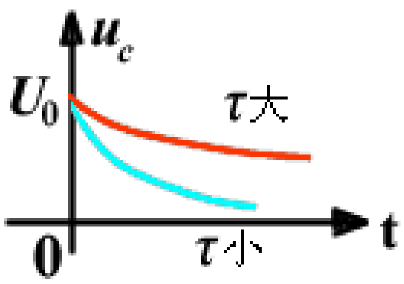
2)响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与 RC 有关。令**τ**= ***RC*** ，**τ**的量纲为：

$$[\tau]=[RC]=[欧][法]=[欧]\left[\frac{库}{伏}\right]=[欧]\left[\frac{安秒}{伏}\right]=[秒]$$

称**τ**为一阶**RC**电路的时间常数。

§7.2　一阶电路的零输入响应

τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短，即：τ大 → 过渡过程时间长，τ小 → 过渡过程时间短，



3）在放电过程中，电容释放的能量全部被电阻所消耗，即：

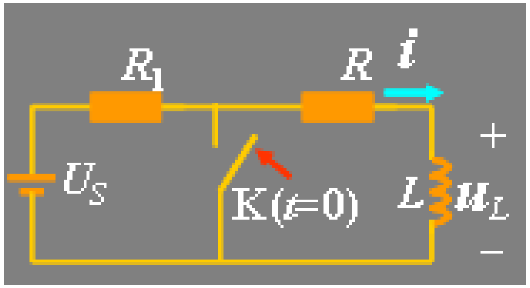
$$W_R=\int_0^{\infty} i^2 R dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R dt=\frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{2}CU_0^2$$

§ 7.2　一阶电路的零输入响应

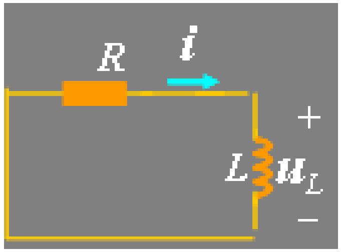
二、*RL* 电路的零输入响应

电感电流的初值为：

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{U_S}{R_1 + R} = I_0$$



开关闭合后



KVL：

$$u_R + u_L = 0$$

把 $u_L = L\dfrac{di}{dt}$　$u_R = Ri$ 代入上式得微分方程：

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad t \geq 0$$

§ 7.2　一阶电路的零输入响应

特征方程为： ***Lp+R*= 0** ， 特征根　$p=-\frac{R}{L}$　　$L\frac{di}{dt}+Ri=0 \quad t\geq 0$

则方程的通解为：　$i(t)=Ae^{pt}$

代入初始值得： **A= *i* (0⁺)= *I* ₀**

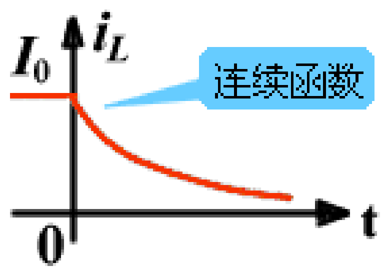
$$\boxed{i(t)=I_0e^{pt}=\frac{U_s}{R_1+R}e^{-\frac{t}{L/R}}} \qquad t\geq 0$$

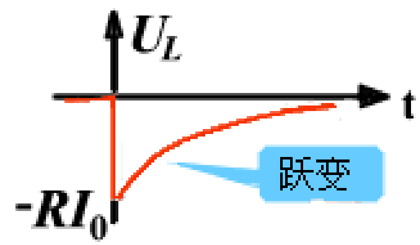
电感电压为：　$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=-RI_0e^{-\frac{t}{L/R}}$

§7.2　一阶电路的零输入响应

从以上各式可以得出：

(1) 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数。





（2）响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与 ***L*/ R** 有关。令 ***τ*= *L* / *R* ,** 称为一阶 ***RL*** 电路时间常数， 满足：

$$[\tau]=[\frac{L}{R}]=[\frac{亨}{欧}]=[\frac{韦}{安\cdot欧}]=[\frac{伏\cdot秒}{安\cdot欧}]=[秒]$$

（**3**）在过渡过程中，电感释放的能量被电阻全部消耗，即：

$$W_R=\int_0^\infty i^2 R dt=\int_0^\infty (I_0 e^{-\frac{t}{L/R}})^2 R dt=I_0^2 R(-\frac{L/R}{2}e^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}LI_0^2$$

§7.2　一阶电路的零输入响应

小结：

1）一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应，都是由初始值衰减为零的指数衰减函数，其一般表达式可以写为：

$$y(t)=y(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2）零输入响应的衰减快慢取决于时间常数τ，其中*RC* 电路时间常数 $\tau=RC$ ，*RL* 电路时间常数 $\tau=L/R$ ， *R 为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。*

3）同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

4）一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

§7.2　一阶电路的零输入响应

用经典法求解一阶电路零输入响应的步骤：

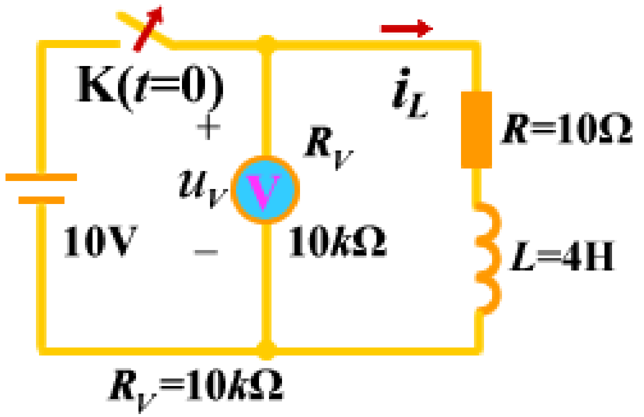
1) 根据基尔霍夫定律和元件特性列出换路后的电路微分方程，该方程为一阶线性齐次常微分方程；

2) 由特征方程求出特征根；

3) 根据初始值确定积分常数从而得方程的解。

§7.2　一阶电路的零输入响应

例1、 图示电路原本处于稳态，t=0 时，打开开关，求 t>0 后电压表的电压随时间变化的规律，已知电压表内阻为10kΩ，电压表量程为50V 。



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R+R_V} = \frac{4}{10000} = 4\times10^{-4}s$$

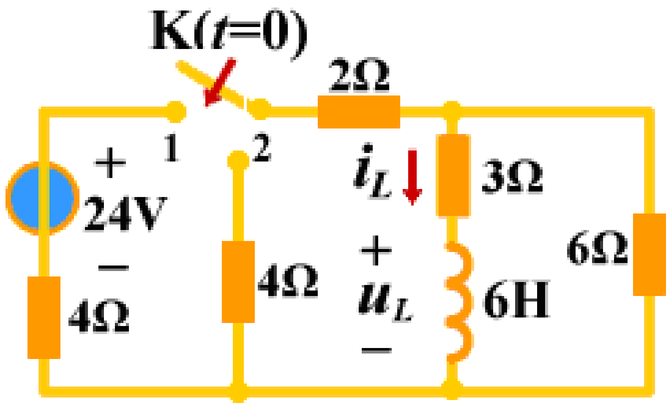
$$i_L = i_L(0+)e^{-t/\tau} \quad t \ge 0$$

$$u_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t} \quad t \ge 0$$

t =0⁺ 时　　$u_V(0+) = -10000V$

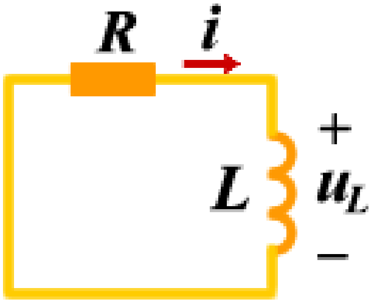
§ 7.2　一阶电路的零输入响应

例2、图示电路原本处于稳态，t =0 时，开关 K 由 1 → 2，求 t＞0 后的电感电压和电流及开关两端电压u_{12}。



$$i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{24}{4+2+3//6} \times \frac{6}{3+6} = 2A$$

$$R = 3 + (2+4)//6 = 6\Omega$$



$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{6}{6} = 1s$$

$$i_L = 2e^{-t} A$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = -12e^{-t}V$$

$$u_{12} = 24 + 4 \times \frac{i_L}{2} = 24 + 4e^{-t}V$$

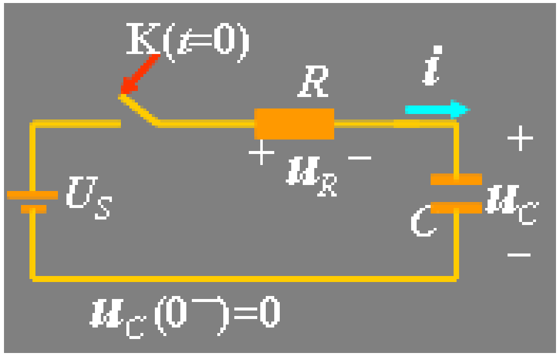
§7.3　　一阶电路的零状态响应

一阶电路的零状态响应是指动态元件初始能量为零，$t>0$ 后由电路中外加输入激励作用所产生的响应。 用经典法求零状态响应的步骤与求零输入响应的步骤相似，所不同的是零状态响应的方程是非齐次的。

§7.3　一阶电路的零状态响应

一、*RC* 电路的零状态响应

RC充电电路在开关闭合前处于零初始状态，即电容电压$u_C(0^-)=0$，



开关闭合后

KVL: $u_R + u_C = U_S$

把 $i = C\dfrac{du_C}{dt}$　$u_R = Ri$　代入上式得微分方程：

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

其解答形式为：

$$u_C = u_C' + u_C''$$

特解　$u_C'' = U_S$

§7.3　一阶电路的零状态响应

$u_C^{'}$ 为齐次方程的通解，也称自由分量或暂态分量。

方程 $RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0$ 　的通解为：　$u_C^{'}=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

因此

$$u_C(t)=u_C^{'}+u_C^{''}=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

由初始条件 $u_C(0^+)=0$ 得积分常数 **A= —*Us***

则

$$u_c=U_s-U_se^{-\frac{t}{RC}}=U_s(1-e^{-\frac{t}{RC}})\quad(t\geq 0)$$

从上式可以得出电流：

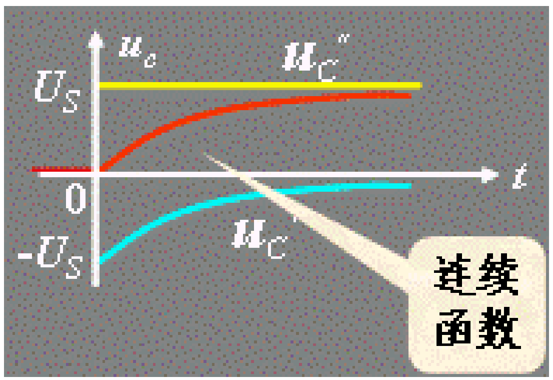
$$i=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_s}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

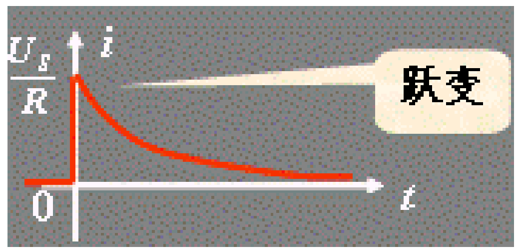
§7.3 一阶电路的零状态响应

从以上各式可以得出：

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数，电容电压由两部分构成：

稳态分量（强制分量） + 暂态分量（自由分量）

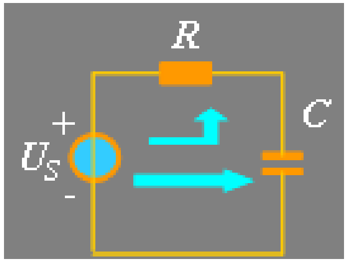




§7.3　一阶电路的零状态响应

（2）响应变化的快慢，由时间常数τ＝RC决定；τ大，充电慢，τ小充电快。

（3）响应与外加激励成线性关系；



（4）充电过程的能量关系为：

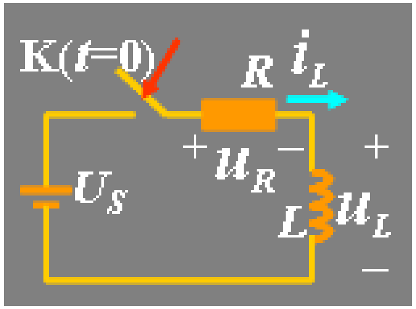
电容最终储存能量：$W_C = \frac{1}{2}CU_S^2$

电源提供的能量为：$W = \int_0^\infty U_S i dt = U_S q = CU_S^2$

电阻消耗的能量为：$W_R = \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty (\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}})^2 R dt$

§7.3　一阶电路的零状态响应

二、*RL* 电路的零状态响应



KVL: $$u_R + u_L = U_S$$

把 $u_L = L\dfrac{di}{dt}$　$u_R = Ri$　代入上式得微分方程：

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_S$$

其解答形式为：　$i_L = i_L' + i_L''$

令导数为零得稳态分量：　$i_L'' = \dfrac{U_S}{R}$

因此

$$i_L = \frac{U_S}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

§ 7.3 一阶电路的零状态响应

由初始条件 $i_L(0+)=0$ 得积分常数 $A=-\dfrac{U_S}{R}$

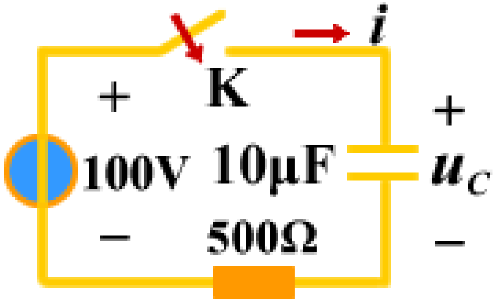
则

$$i_L=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=U_S e^{-\frac{R}{L}t}$$

§ 7.3　一阶电路的零状态响应

例1、图示电路在$t=0$ 时，闭合开关 K， 已知u_C（0^-）=0， 求：（1）电容电压和电流；（2）电容充电至u_C＝80V 时所花费的时间 t 。



$$\tau = RC = 500\times10^{-5} = 5\times10^{-3}s$$

$$u_c = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1\text{-}e^{-200t})V \quad (t\geq0)$$

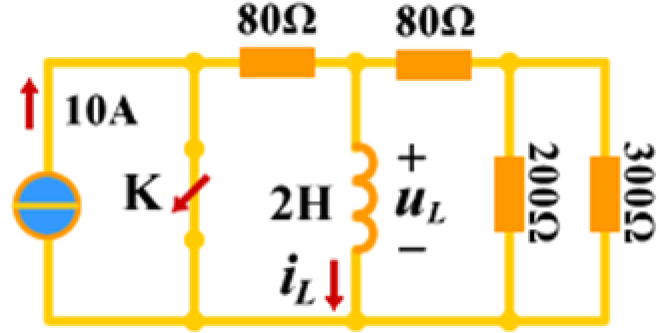
$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2e^{-200t}A$$

$$80 = 100(1-e^{-200t_1})$$

$$t_1 = 8.045ms$$

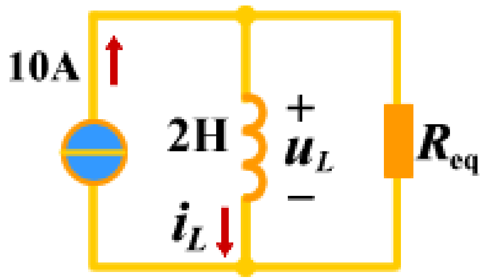
§ 7.3　一阶电路的零状态响应

例2、图示电路原本处于稳定状态，在t=0时打开开关K，求t＞0后i_L和u_L的变化规律。



$$R_{eq}=80+200//300=200\Omega$$

$$\tau=L/R_{eq}=2/200=0.01s$$



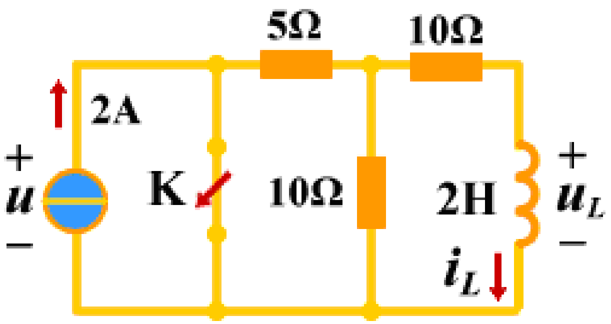
$$i_L(\infty)=10A$$

$$i_L(t)=10(1-e^{-100t})A$$

$$u_L(t)=2\frac{di_L}{dt}=2000e^{-100t}\,V\quad(t\geq 0)$$

§ 7.3　一阶电路的零状态响应

例3、图示电路原本处于稳定状态，在t=0时，打开开关K，求t＞0 后的电感电流i_L和电压u_L及电流源的端电压。



$$R_{eq} = 10 + 10 = 20\Omega$$

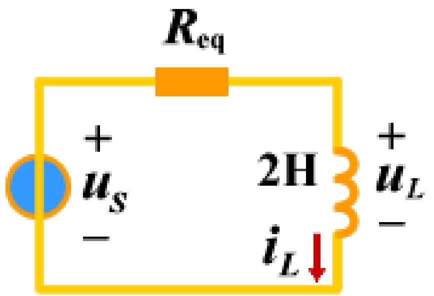
$$U_S = 2 \times 10 = 20V$$

$$\tau = L/R_{eq} = 2/20 = 0.1s$$

$$i_L(\infty) = U_S / R_{eq} = 1A$$

$$i_L(t) = (1 - e^{-10t})A$$

$$u_L(t) = 2\frac{di_L}{dt} = 20e^{-10t}\ V$$



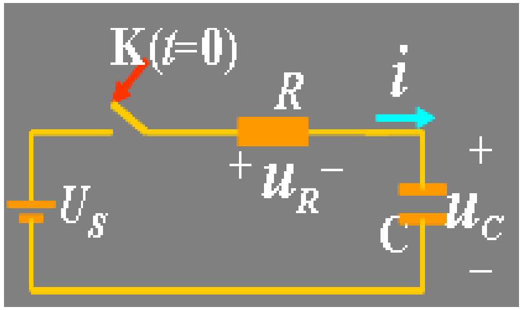
$$u = 5I_S + 10i_L + u_L = 20 + 10e^{-10t}V$$

§ 7.4　一阶电路的全响应

一、全响应

一阶电路的全响应是指换路后电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

以 **RC** 串联电路为例：



电路微分方程为： $RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=U_S$

方程的解为： $u_C(t)=u_C'+u_C''$

令微分方程的导数为零得稳态解： $u_C''=U_S$

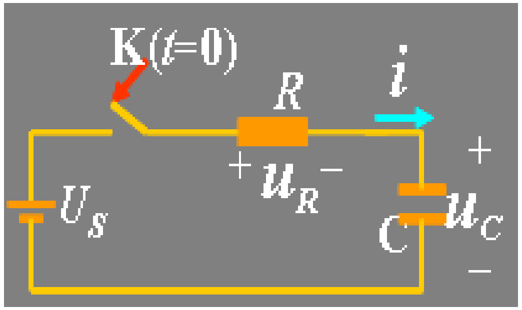
暂态解　$u_C'=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$　　其中 $\tau=RC$

因此　$u_C=U_S+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$　　$t\geq 0$

§ 7.4　　一阶电路的全响应

由初始值定常数A，设电容原本充有电压：$u_C(0^-)= u_C(0^+)=U_0$

代入上述方程得：$u_C(0^+)= A + U_S = U_0$



解得：$A = U_0 - U_S$

所以电路的全响应为：

$$u_C = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

§ 7.4　一阶电路的全响应

二、全响应的两种分解方式

$$u_C = U_s + Ae^{\frac{-t}{\tau}} = U_s + (U_0 - U_s)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

1、上式的第一项是电路的稳态解，第二项是电路的暂态解，因此一阶电路的全响应可以看成是稳态解加暂态解，即：

全响应 **=** 强制分量 **(** 稳态解 **)+** 自由分量 **(** 暂态解 **)**

2、把上式改写成：

$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

显然第一项是电路的零状态解，第二项是电路的零输入解，因此一阶电路的全响应也可以看成是零状态解加零输入解，即：

全响应 **=** 零状态响应 **+** 零输入响应

§7.4　一阶电路的全响应

三、三要素法分析一阶电路

一阶电路的数学模型是一阶微分方程： $a\frac{df}{dt}+bf=c$

其解答为稳态分量加暂态分量，即：

解的一般形式为： $f(t)=f(\infty)+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

t= 0⁺ 时有： $f(0+)=f(\infty)\big|_{0+}+A$

则积分常数： $A=f(0+)-f(\infty)\big|_{0+}$

代入方程得： $f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)\big|_{0^+}]e^{-\frac{t}{\tau}}$

以上式子表明分析一阶电路问题可以转为求解电路的初值 $f(0^+)$，稳态值 $f(\infty)$ 及时间常数 τ 的三个要素的问题。

§ 7.4　一阶电路的全响应

求解方法为：

f（∞）：用 t → ∞ 的稳态电路求解；

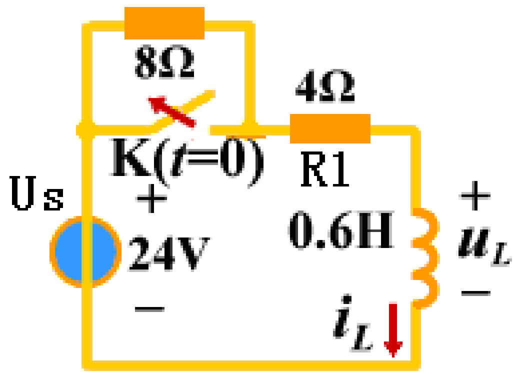
f（0^+）：用 0+ 等效电路求解；

时间常数τ：求出等效电阻，则电容电路有τ=RC，电感电路有:τ= L/R。

注意：时间常数中的R一般为戴维宁或诺顿等效电阻R_{eq}，即动态元件两端看出去的等效电阻。

§7.4　　一阶电路的全响应

例1、图示电路原本处于稳定状态，t=0时打开开关K，求t＞0后的电感电流i_L。



$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = U_S / R_1 = 6A$$

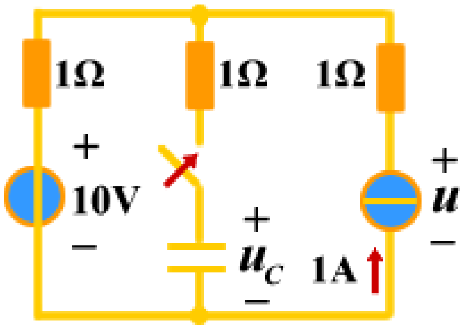
$$\tau = L / R = 0.6 / 12 = 1/20s$$

$$i_L(\infty) = 24/12 = 2A$$

$$i_L(t) = 2 + 4e^{-20t}A$$

§ 7.4　一阶电路的全响应

例2、图示电路原本处于稳定状态，t=0时开关K闭合，求t＞0后的电容电流i_C和电压u_C及电流源两端的电压。已知：



$$u_C(0^-) = 1V \quad ， \text{C}=1\text{F}$$

$$u_C(\infty) = 10 + 1 = 11V$$

$$\tau = RC = (1+1)\times 1 = 2s$$

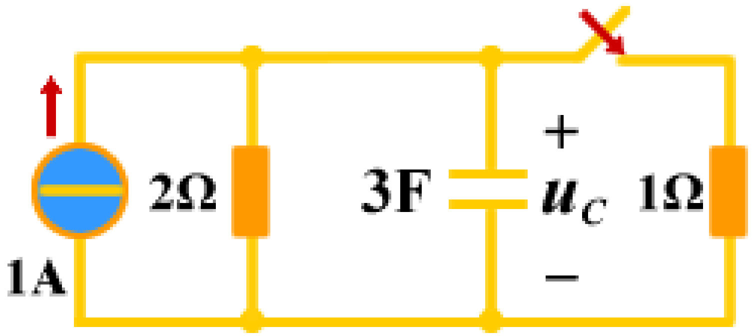
$$u_C(t) = 11 - 10e^{-0.5t}V$$

$$i_C(t) = \frac{du_C}{dt} = 5e^{-0.5t}A$$

$$u(t) = 1\times 1 + 1\times i_C + u_C = 12 - 5e^{-0.5t}V$$

§ 7.4　　一阶电路的全响应

例3、图示电路原本处于稳定状态，t=0时开关闭合，求t>0后的电容电压u_C并画出波形图。



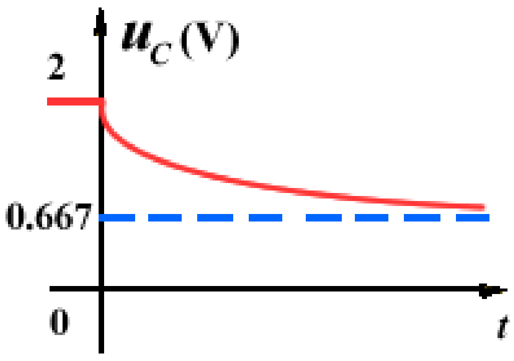
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2V$$

$$u_C(\infty) = (2//1) \times 1 = 0.667V$$

$$\tau = R_{eq}C = \frac{2}{3} \times 3 = 2s$$

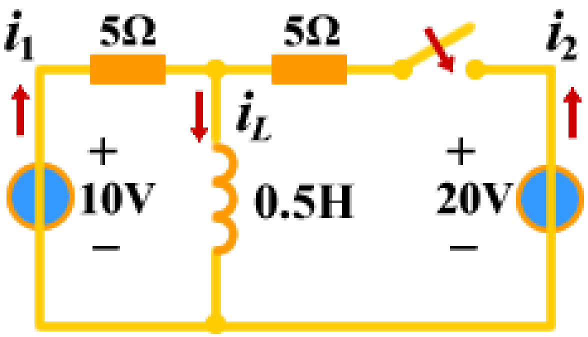
$$u_C = 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t}$$

$$= 0.667 + 1.33e^{-0.5t}$$



§ 7.4　　一阶电路的全响应

例4、图示电路原本处于稳定状态，t=0 时开关闭合，求t＞0 后各支路的电流。



$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 10/5 = 2A$$

$$i_L(\infty) = 10/5 + 20/5 = 6A$$

$$\tau = L/R = 0.5/(5//5) = 1/5\,S$$

$$i_L(t) = 6 + (2-6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t}$$

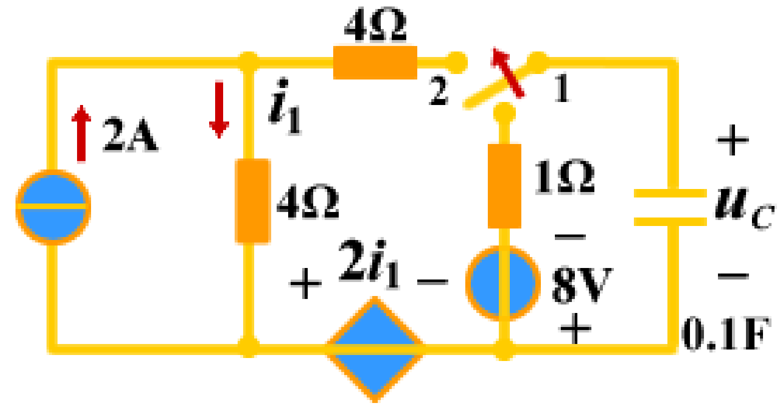
$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 0.5 \times (-4e^{-5t}) \times (-5) = 10e^{-5t}V$$

$$i_1(t) = (10 - u_L)/5 = 2 - 2e^{-5t}A$$

$$i_2(t) = (20 - u_L)/5 = 4 - 2e^{-5t}A$$

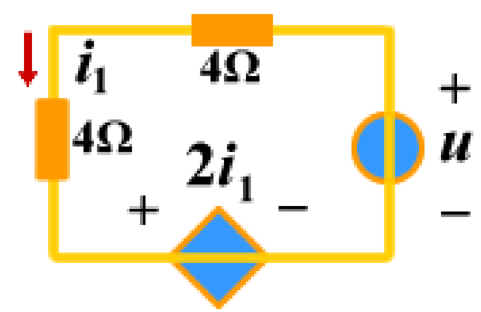
§ 7.4　一阶电路的全响应

例5、图示电路原本处于稳定状态，*t*=0时开关由1扳到2，求换路后的电容电压$u_C(t)$。



$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=-8V$$

$$u_C(\infty)=4i_1+2i_1=6i_1=12V$$



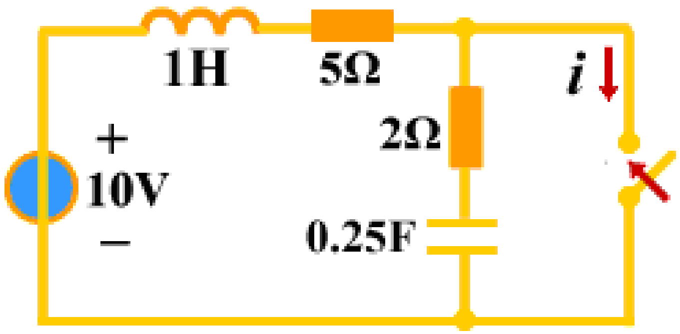
$$R_{eq}=\frac{U}{i_1}=\frac{10i_1}{i_1}=10\Omega$$

$$\tau=R_{eq}C=10\times0.1=1s$$

$$u_C(t)=12+\left[-8-12\right]e^{-t}=12-20e^{-t}V$$

§7.4　一阶电路的全响应

例6、图示电路原本处于稳定状态，*t*=0 时开关闭合，求换路后的电流*i*(*t*)。



开关闭合后电路分为两个一阶电路

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10V$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

$$u_C(\infty) = 0$$

$$i_L(\infty) = 10/5 = 2A$$

$$\tau_1 = R_{eq}C = 2\times 0.25 = 0.5s$$

$$\tau_2 = L/R_{eq} = 1/5 = 0.2s$$

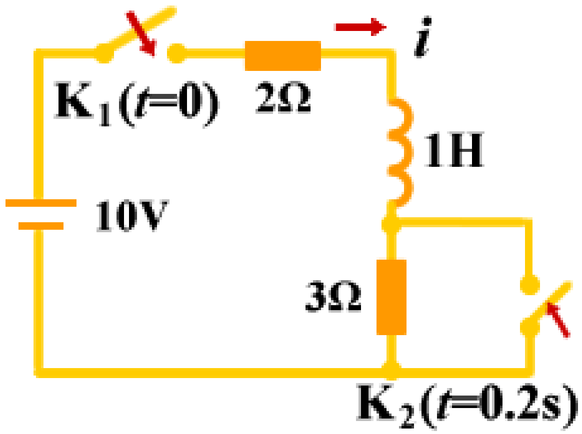
$$u_C(t) = u_C(\infty) + \left[u_C(0^+) - u_C(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-2t}V$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2(1-e^{-5t})A$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{u_C(t)}{2} = 2(1-e^{-5t}) + 5e^{-2t}A$$

§ 7.4　一阶电路的全响应

例7、 已知：电感无初始储能，t=0时闭合开关k_1, t=0.2s时闭合开关k_2，求两次换路后的电感电流$i(t)$ 。



（1） 当 0<t ≤0.2s 时有：

$$i(0^+)=i(0^-)=0 \qquad \tau_1=L/R=1/5=0.2\,s \qquad i(\infty)=10/5=2A$$

$$i(t)=2-2e^{-5t}\,A$$

（2）当t ≥0.2s 时

$$i(0.2^-)=2-2e^{-5\times0.2}=1.26 \qquad i(0.2^+)=1.26A$$

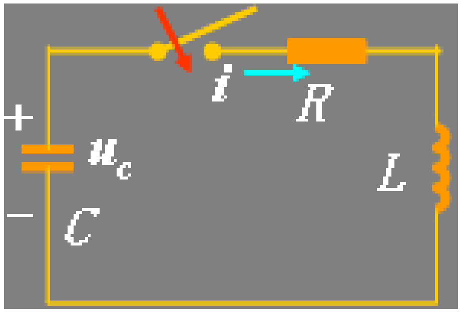
$$\tau_2=L/R=1/2=0.5 \qquad i(\infty)=10/2=5A$$

$$i(t)=5-3.74e^{-2\boxed{(t-0.2)}}A$$

§7.5　二阶电路的零输入响应

一、方程和初始条件

设电容原本充有电压 U_0



电路的**KVL**方程及元件的**VCR**为：

$$Ri + u_L - u_C = 0$$

$$i = -C\frac{du_C}{dt} \qquad u_L = L\frac{di}{dt}$$

以电容电压为变量得二阶齐次微分方程：

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

初始条件为：　$u_C(0^+) = U_0$，　$i(0^+)=0$　　或　$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{i(0^+)}{C} = 0$

§7.5　二阶电路的零输入响应

以电感电流为变量，则方程为：

$$LC\frac{d^2 i}{dt^2}+RC\frac{di}{dt}+i=0$$

初始条件为：**$i(0^+)=0$**

$$u_C(0^+)=u_L(0^+)=L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+}=U_0$$

§7.5 二阶电路的零输入响应

二、二阶微分方程的解及其物理意义

以电容电压为变量，电路方程为：

$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

特征方程：

$$LCP^2+RCP+1=0$$

特征根为：

$$P=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

§7.5　二阶电路的零输入响应

当R、L、C的参数不同，特征根为不同的形式。下面分三种情况讨论。

1、当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，特征根为两个不相等的负实根，电路处于过阻尼状态。

方程的解为： $u_C = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$

由初始条件： $u_C(0^+) = U_0$　　$\frac{du_C}{dt}\Big|_{(0^+)} = 0$

得： $\begin{cases} A_1 + A_2 = U_0 \\ P_1 A_1 + P_2 A_2 = 0 \end{cases}$

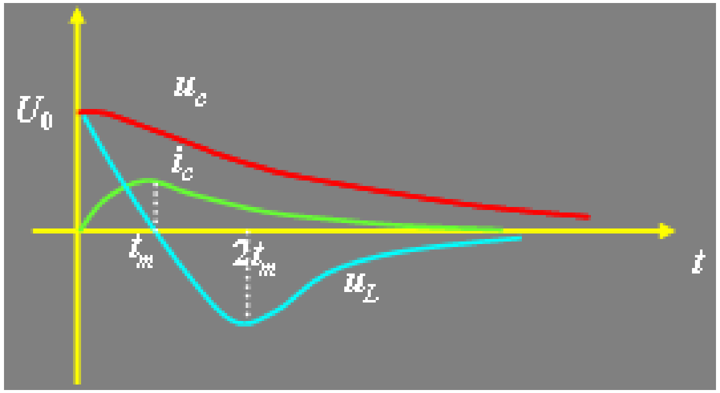
因此 $u_C = \frac{U_0}{P_2 - P_1}(P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$

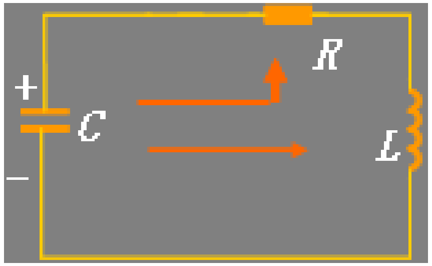
即： $\begin{cases} A_1 = \frac{P_2}{P_2 - P_1} U_0 \\ A_2 = \frac{-P_1}{P_2 - P_1} U_0 \end{cases}$

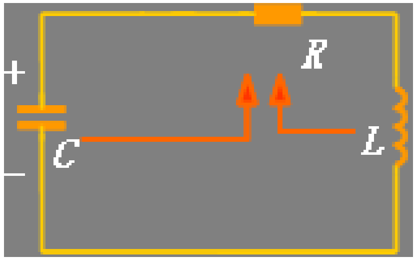
$$i = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{-U_0}{L(P_2 - P_1)}(e^{P_1 t} - e^{P_2 t})$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(P_2 - P_1)}(P_1 e^{P_1 t} - P_2 e^{P_2 t})$$

§ 7.5　二阶电路的零输入响应







§7.5　二阶电路的零输入响应

2、当 $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时，特征根为两个共轭复根，电路处于振荡放电状态。

令： $\delta = \dfrac{R}{2L}$　　$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$　　$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

特征根为： $P = -\delta \pm j\omega$

电容电压的 u_C 的通解形式为：

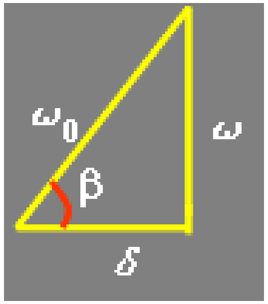
$$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{-\delta(t)}(A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$$

三角函数形式： $u_C = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$

ω 称为振荡频率

§ 7.5　二阶电路的零输入响应

通解中待定常数 ***A***， **b** 根据初始条件确定，即：



$$\begin{cases} u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A\sin\beta = U_0 \\ \dfrac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A(-\delta)\sin\beta + A\omega\cos\beta = 0 \end{cases}$$

联立求解以上方程得： $A = \dfrac{U_0}{\sin\beta}$　　$\beta = arctg\,\dfrac{\omega}{\delta}$

所以　$\sin\beta = \dfrac{\omega}{\omega_0}$　　$A = \dfrac{\omega_0}{\omega}U_0$

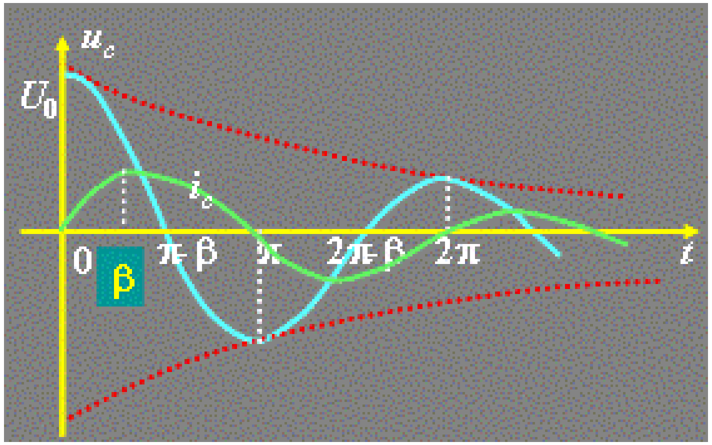
则

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega}U_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

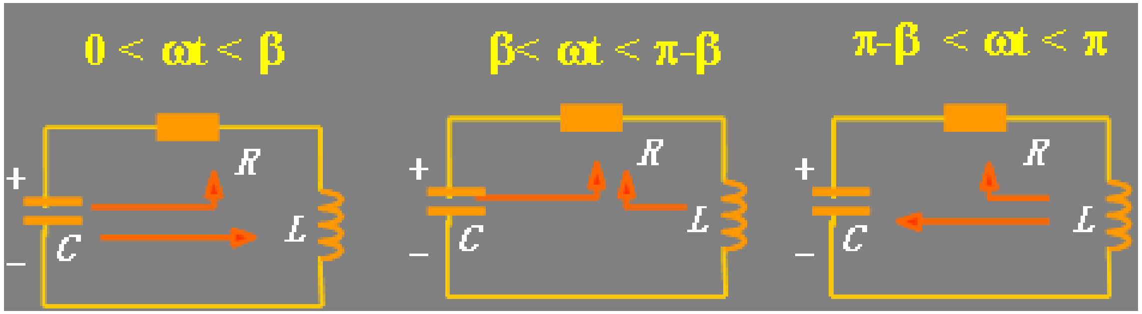
$$i_c = -C\frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{\omega L}e^{-\delta t}\sin\omega t$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = -\frac{\omega_0}{\omega}U_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t - \beta)$$

§ 7.5　二阶电路的零输入响应



　　波形呈衰减振荡的状态，在整个过渡过程中电容电压和电流周期性的改变方向，表明储能元件在周期性的交换能量，处于振荡放电。



§7.5 二阶电路的零输入响应

3、当 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，特征根为两相等的负实根，电路处于临界阻尼状态。

特征根为：$P_1=P_2=-\frac{R}{2L}=-\delta$

方程的通解为：$u_C=A_1e^{-\delta t}+A_2te^{-\delta t}$

根据初始条件得：
$$\begin{cases}u_C(0^+)=U_0\rightarrow A_1=U_0\\ \frac{du_C}{dt}(0^+)=0\rightarrow A_1(-\delta)+A_2=0\end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases}A_1=U_0\\ A_2=U_0\delta\end{cases}$$

$$u_c=U_0e^{-\delta t}(1+\delta t)$$

$$i_c=-c\frac{du_c}{dt}=\frac{U_0}{L}te^{-\delta t}$$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=U_0e^{-\delta t}(1-\delta t)$$

这种过程是振荡与非振荡过程的分界线，所以称为临界阻尼状态，这时的电阻称为临界电阻。

§7.5　二阶电路的零输入响应

总结以上分析过程得用经典法求解二阶电路零输入响应的步骤：

1)根据基尔霍夫定律和元件特性列出换路后的电路微分方程，该方程为二阶线性齐次常微分方程；

2)由特征方程求出特征根，并判断电路是处于衰减放电还是振荡放电还是临界放电状态，三种情况下微分方程解的形式分别为：

特征根为两个不相等的负实根，电路处于过阻尼状态：　$y(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}$

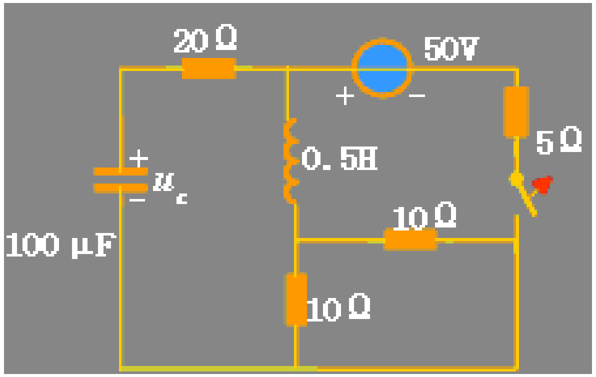
特征根为两个相等的负实根，电路处于临界阻尼状态：　$y(t)=A_1e^{-\delta t}+A_2te^{-\delta t}$

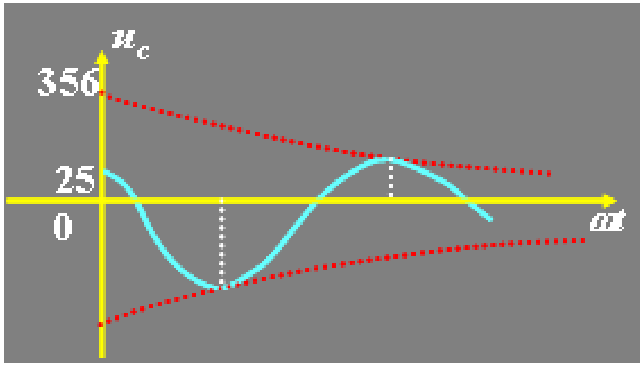
特征根为共轭复根，电路处于衰减振荡状态：　$y(t)=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\beta)$

3）根据初始值 $\begin{cases} y(0^+) \\ \dfrac{dy}{dt}(0^+) \end{cases}$ 确定积分常数从而得方程的解。

§7.5　二阶电路的零输入响应

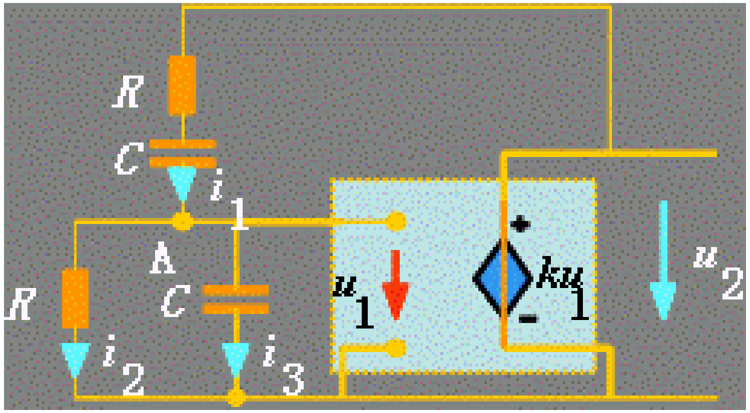
例**1**、图示电路在**t**<**0**时处于稳态，***t*=0**时打开开关, 求电容电压u_C并画出其变化曲线。





§7.5　二阶电路的零输入响应

例2、 图示电路为RC振荡电路，试讨论k取不同值时输出电压u_2的零输入响应情况。



§7.6 二阶电路的零状态响应和全响应

一、零状态响应

二阶电路的初始储能为零，仅由外施激励引起的响应称为二阶电路的零状态响应。

二阶电路零状态响应的求解方程一般为二阶线性非齐次方程，它的解答由特解和对应的齐次方程的通解组成。如果激励源为直流激励或正弦激励，则取稳态解为特解，而通解与零输入响应形式相同，再根据初始条件确定积分常数，从而得到全解。

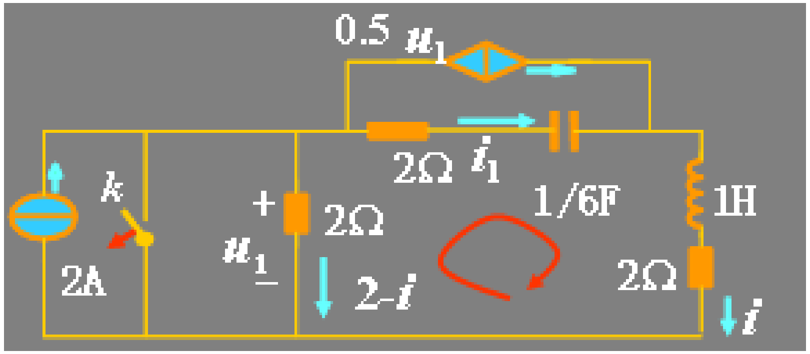
§7.6 二阶电路的零状态响应和全响应

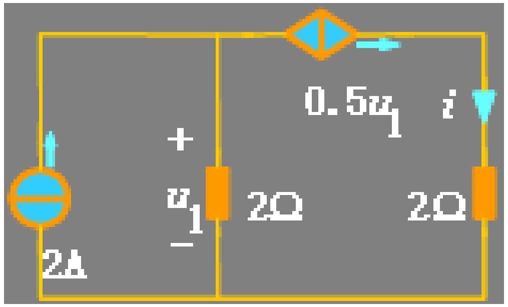
二、二阶电路的全响应

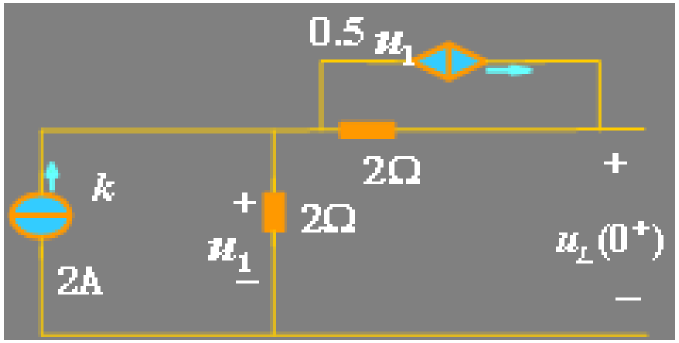
如果二阶电路具有初始储能，又接入外施激励，则电路的响应称为二阶电路的全响应。全响应是零状态响应和零输入响应的叠加，可以通过把零状态方程的解带入非零的初始条件求得全响应。

§ 7.6 二阶电路的零状态响应和全响应

例**1**、 图示电路在 $t<0$ 时处于稳态， $t=0$ 时打开开关，求电流 i 的零状态响应。

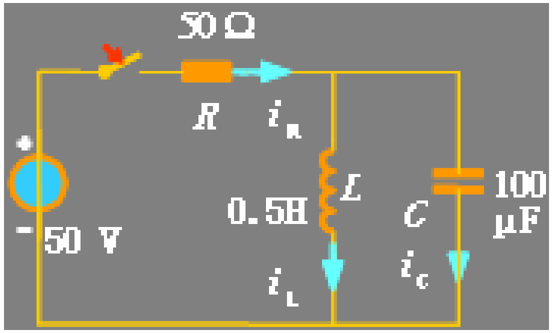






§7.6 二阶电路的零状态响应和全响应

例2、 图示电路在t<0时处于稳态，*t*=0时闭合开关,已知：$i_L(0^-)=2A$，$u_C(0^-)=0$，求电流i_L和i_R 。



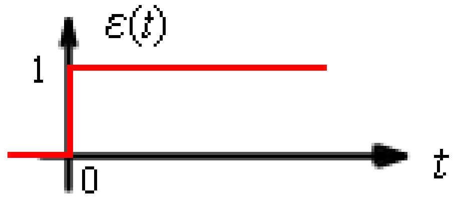
§ 7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

一、单位阶跃函数

1、单位阶跃函数的定义

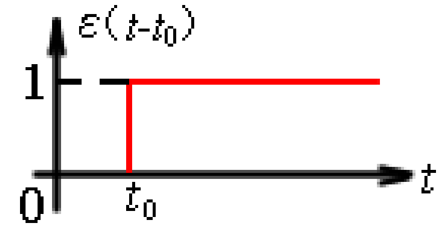
单位阶跃函数是一种奇异函数

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$



任一时刻 t_0 起始的阶跃函数

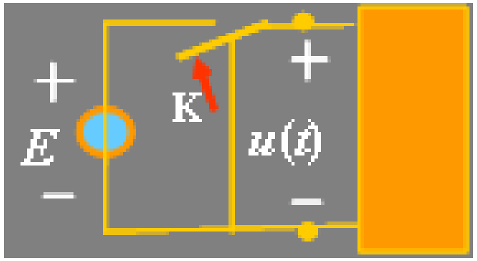
$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

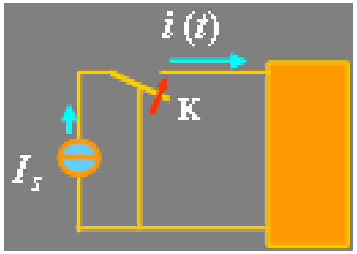


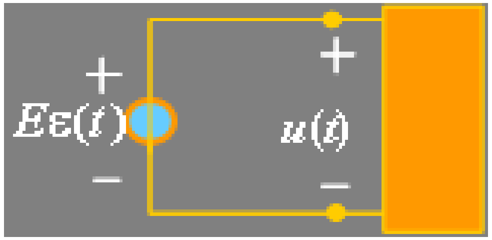
§ 7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

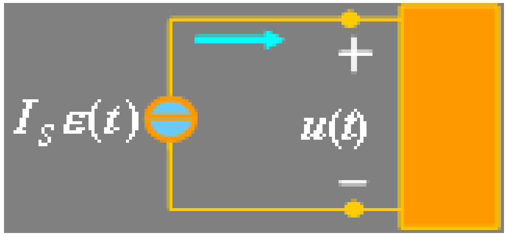
2、单位阶跃函数的作用

（1）可以用来描述开关动作







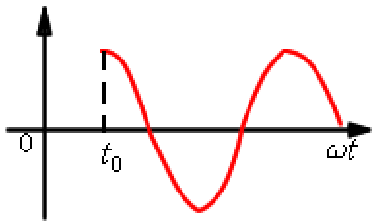


***t*=0** 时把电路接到直流电源

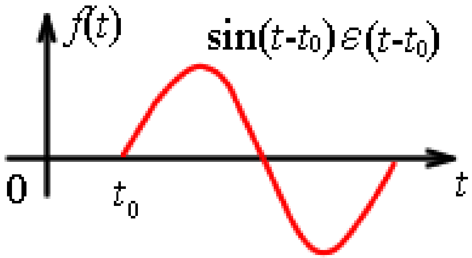
§7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

（2）可以用来起始一个任意函数

$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t\le t_0)\\ f(t) & (t\ge t_0)\end{cases}$$

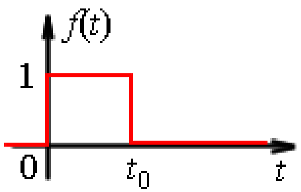


（3）可以用来延迟一个函数



（4）可以用来表示复杂的信号

$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

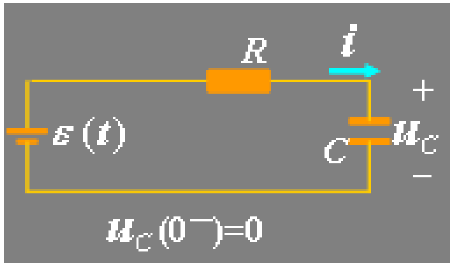


§ 7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

二、一阶电路的阶跃响应

阶跃响应是指激励为单位阶跃函数时，电路中产生的零状态响应。

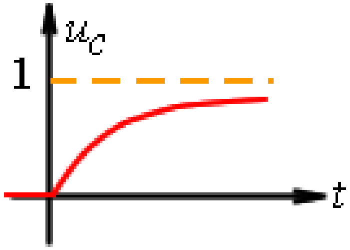
$u_C(0^-)=0$　　　$u_C(\infty)=1$

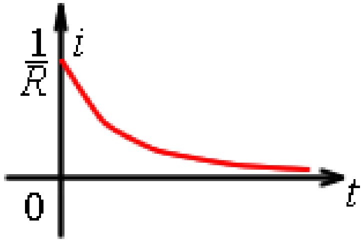


阶跃响应为：

$$u_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

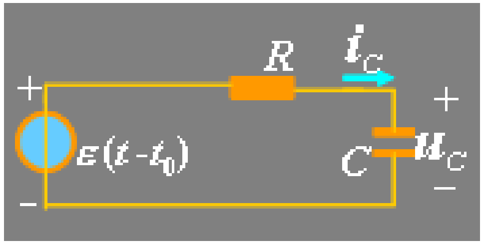




§7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

若上述激励在$t = t_0$时加入，则响应从$t = t_0$开始。即：

$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\varepsilon(t - t_0)$$



$$i_C = \frac{1}{R}e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\varepsilon(t - t_0)$$

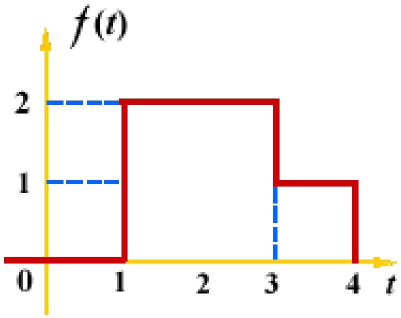
思考以下二式的区别？

$$i = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$ 初值为零

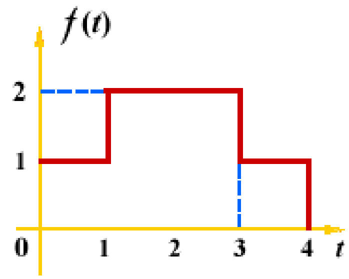
$$i = e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$ 初值可以不为零

§ 7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

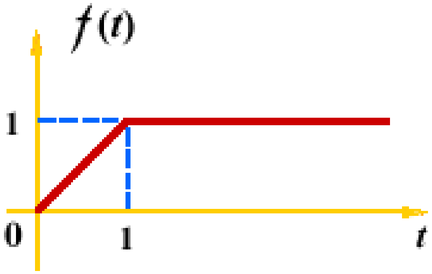
例1、用阶跃函数表示图示函数 ***f*（t）**。



（ **a** ）



（ **b** ）



（ **c** ）

（ **a** ）　$$f(t) = 2\varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-3) - \varepsilon(t-4)$$

（ **b** ）　$$f(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-3) - \varepsilon(t-4)$$

（ **c** ）　$$f(t) = t\left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)\right] + \varepsilon(t-1)$$

§ 7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

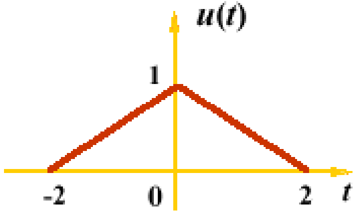
例2、已知电压***u*(t)**的波形如图，试画出下列电压的波形。

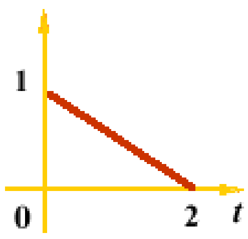
(1) $u(t)\varepsilon(t)$

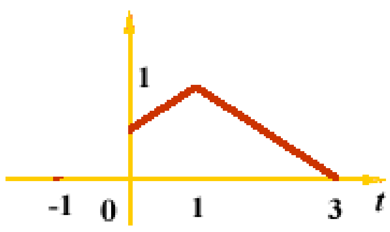
(2) $u(t-1)\varepsilon(t)$

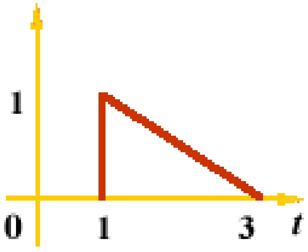
(3) $u(t-1)\varepsilon(t-1)$

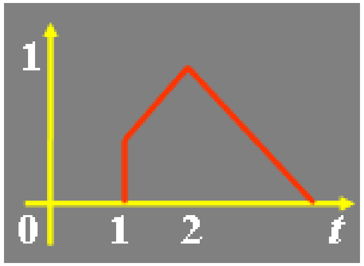
(4) $u(t-2)\varepsilon(t-1)$





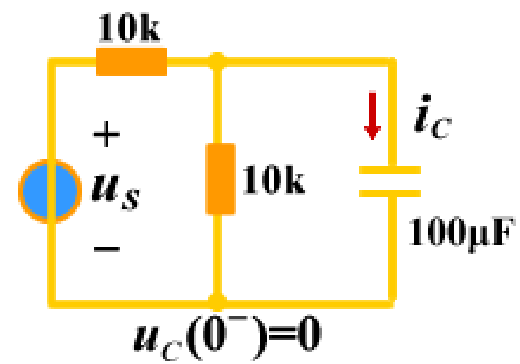




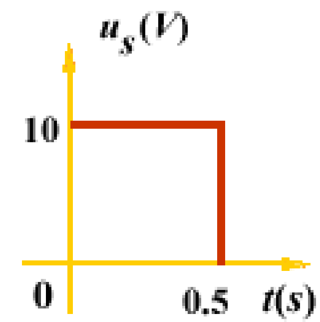


§ 7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

例3、求图（a）所示电路中电流$i_C(t)$，已知电压源波形如图（b）所示。



（a）



（b）

$$\tau = RC = 100\times10^{-6}\times5\times10^{3} = 0.5s$$

$$u_C(t) = (1-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$u_s(t) = 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$$

$$i_c = \frac{1}{5k}\left[5e^{-2t}\varepsilon(t) - 5e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\right]$$

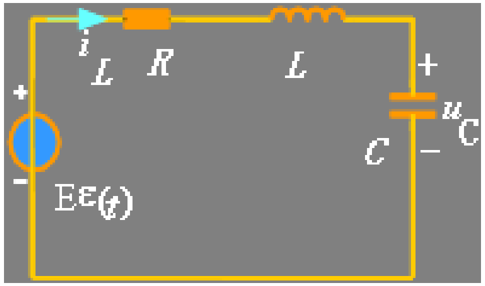
$$= e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5) \quad \text{mA}$$

§ 7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

三、二阶电路的阶跃响应

二阶电路在阶跃激励下的零状态响应成为二阶电路的阶跃响应。

电路的初始储能为:



$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$$

t>0 后

$$LC\frac{d^2u_c}{dt} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

特征方程为:

$$LCP^2 + RCP + 1 = 0$$

方程的通解求法与求零输入响应相同。

§ 7.7　一阶电路和二阶电路的阶跃响应

令方程中对时间的导数为零，得方程的特解： $u_C'' = E$

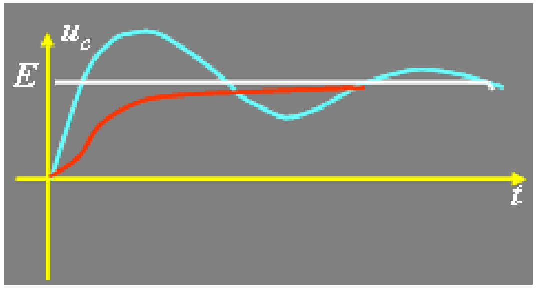
则$\boldsymbol{u_C}$的解答形式为：

$$u_c = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (p_1 \neq p_2)$$

$$u_c = E + A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t} \quad (P_1 = P_2 = -\delta)$$

$$u_c = E + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \quad (P_{1,2} = -\delta \pm j\omega)$$

由初值 $\begin{cases} u_C(0^+) = 0 \\ \dfrac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \end{cases}$ 确定常数



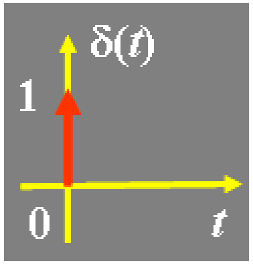
§7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

一、单位冲激函数

1、单位冲激函数的定义

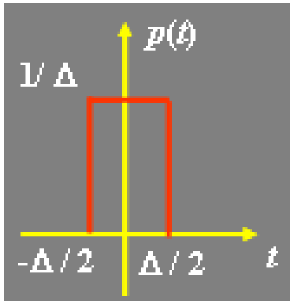
单位冲激函数也是一种奇异函数。函数在 **t=0** 处发生冲激，在其余处为零，可定义为：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{cases}$$



单位冲激函数可看作是单位脉冲函数的极限情况。

$$p(t) = \frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon(t+\frac{\Delta}{2}) - \varepsilon(t-\frac{\Delta}{2})\right]$$



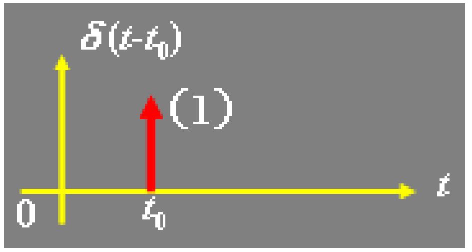
令：　$\Delta \to 0$　　$\frac{1}{\Delta} \to \infty$

则　$$\lim_{\Delta \to 0} p(t) = \delta(t)$$

§7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

在任一时刻t_0发生冲击的函数称为延迟的单位冲激函数，可定义为：

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$



§7.8 一阶电路和二阶电路的冲激响应

2、冲激函数的性质

（**1**）单位冲激函数对时间的积分等于单位阶跃函数，即

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & t<0^-\\ 1 & t>0^+\end{cases}=\varepsilon(t)$$

反之单位阶跃函数对时间的一阶导数等于冲激函数，即：

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=\delta(t)$$

（**2**）单位冲激函数的筛分性质

对任意在时间**t=0**连续的函数***f***（**t**），将有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$$

同理，对任意在时间**t=t$_0$**连续的函数***f***（**t**），将有：

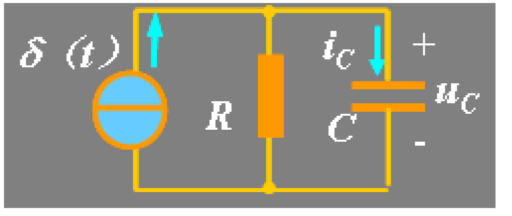
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$$

§7.8 一阶电路和二阶电路的冲激响应

二、 一阶电路的冲激响应

一阶电路的冲激响应是指激励为单位冲激函数时，电路中产生的零状态响应。

1、RC电路冲激响应



$u_C(0^-)=0$ $\qquad$ $u_C(\infty)=0$

（1）t 在 $0^- \to 0^+$ 区间

$$C\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{R}=\delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}C\frac{du_C}{dt}dt+\int_{0^-}^{0^+}\frac{u_C}{R}dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

$$C\left[u_C(0^+)-u_C(0^-)\right]=1$$

$$u_C(0^+)=\frac{1}{C}\neq u_C(0^-)$$

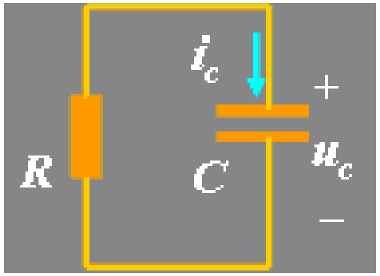
电容上的冲激电流使电容电压发生跃变。

§ 7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

（2）***t*>0⁺** 后冲击电源为零，电路为一阶 ***RC*** 零输入响应问题。

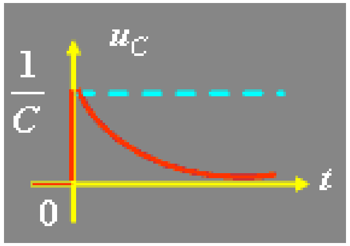
$$u_c = u_C(0+)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0^+$$

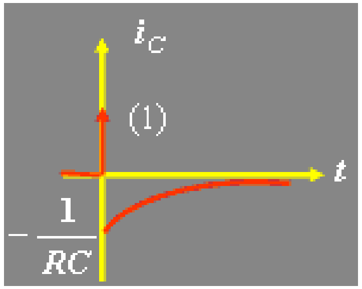
$$i_c = -\frac{u_c}{R} = -\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0^+$$



上式也可以表示成：

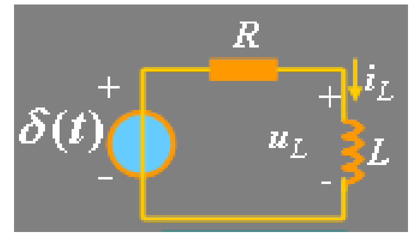
$$u_c = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \qquad i_c = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$





§ 7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

2、RL电路冲激响应



$i_L(0^-) = 0$　　　　$i_L(\infty) = 0$

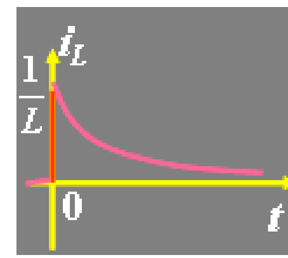
（1） t 在 0—→ 0^+ 区间

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = \delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} Ri_L dt + \int_{0^-}^{0^+} L\frac{di_L}{dt}dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

$$L[i_L(0^+) - i_L(0^-)] = 1$$

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L} \neq i_L(0^-)$$



（2） $t > 0^+$

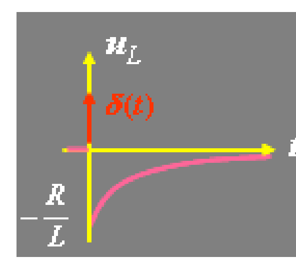
$$i_L = i_L(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0^+$$

$$u_L = -i_L R = -\frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0^+$$

也可以表示成：

$$i_L = \frac{1}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

$$u_L = \delta(t) - \frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$



§ 7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

三、单位阶跃响应和单位冲激响应关系

由于单位冲击函数与单位阶跃函数之间满足关系： $\delta(t) = \dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$

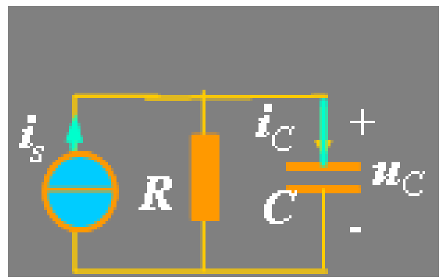
因此线性电路中，单位阶跃响应与单位冲激响应之间满足关系：

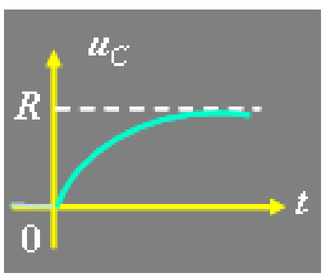
$$h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

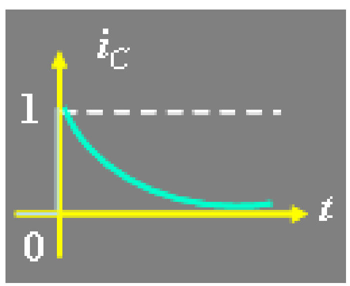
式中 $s(t)$ 为单位阶跃响应，$h(t)$ 为单位冲激响应。

§7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

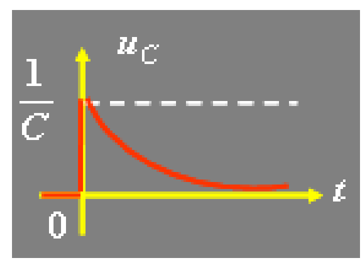
例**1**、电路如图所示，求：电源***is*(*t*)**为单位冲激时的电路响应***u_C***(*t*)**和***i_C***(*t*)**。

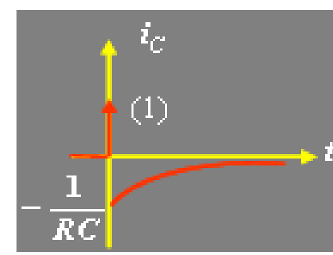






阶跃响应

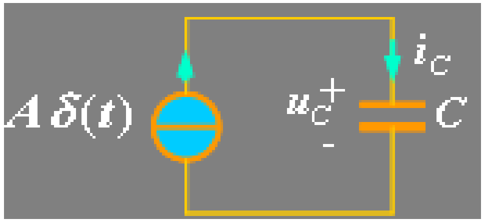


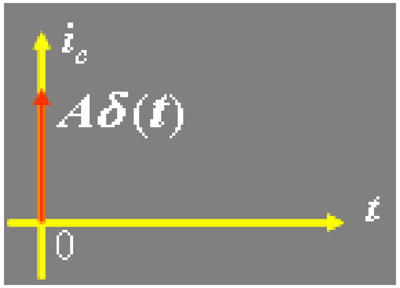


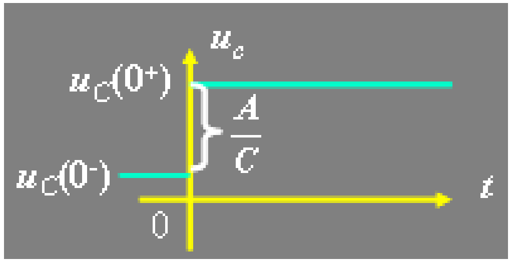
冲激响应

§7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

例**2**、 求图示电路电容加冲击激励后的电压。

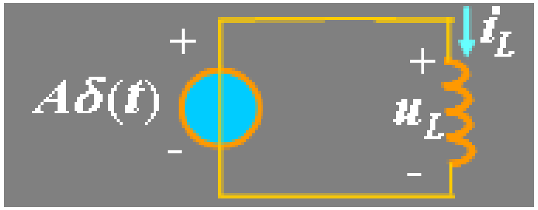


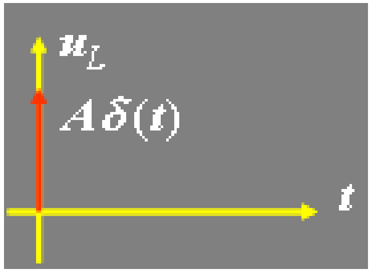


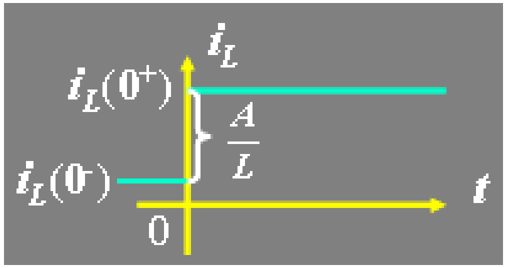


§ 7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

例3、 求图示电路电感加冲击激励后的电流。





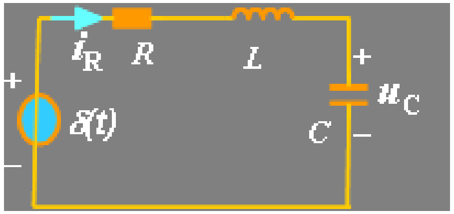


§ 7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

四、二阶电路的冲激响应

零状态的二阶电路在冲激函数激励下的响应称为二阶电路的冲激响应。注意电路在冲激激励下初始值发生了跃变。

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=\delta(t)$$



t=0⁻到0⁺

$$\int_{0^-}^{0^+}LC\frac{d^2u_c}{dt^2}dt+\int_{0^-}^{0^+}RC\frac{du_c}{dt}dt+\int_{0^-}^{0^+}u_c dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

$$LC\frac{du_C}{dt}(0^+)-LC\frac{du_C}{dt}(0^-)=1$$

$$\int_{0^-}^{0^+}LC\frac{d^2u_C}{dt^2}dt=1$$

$$LC\frac{du_C}{dt}(0^+)=1\quad\rightarrow\quad i_L(0^+)=i_C(0^+)=\frac{1}{L}$$

§7.8　一阶电路和二阶电路的冲激响应

$t>0^+$ 后

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

$$u_c=A_1e^{P_1t}+A_2e^{P_2t}$$

带入初始条件得：

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ A_1P_1+A_2P_2=\dfrac{1}{LC} \end{cases}$$

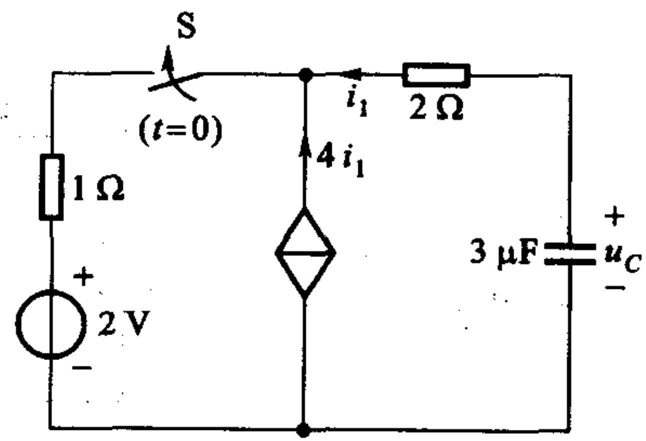
解得：

$$A_2=-A_1=\frac{\frac{1}{LC}}{P_2-P_1}$$

$$u_C=\frac{-1}{LC(P_2-P_1)}(e^{P_1t}-e^{P_2t})\varepsilon(t)$$

第七章作业

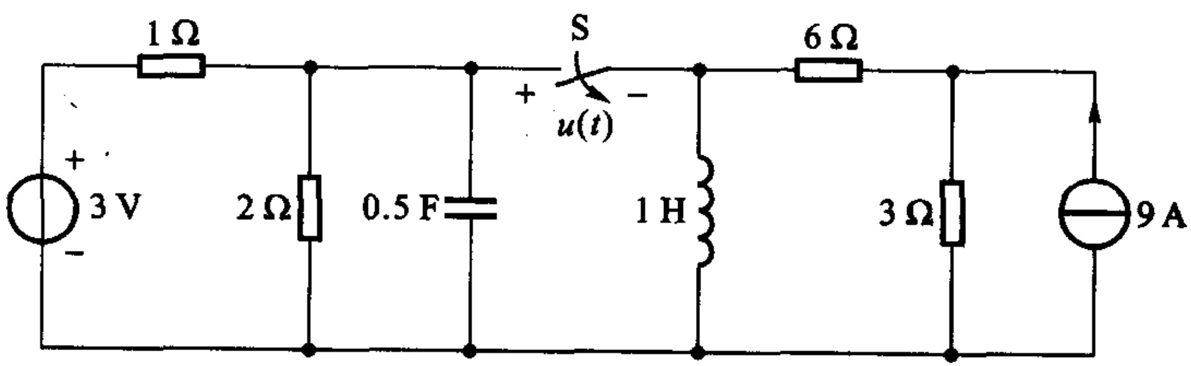
7-12 题 7-12 图所示电路中开关闭合前电容无初始储能，$t=0$ 时开关 S 闭合，求 $t\geqslant0$时的电容电压 $u_C(t)$。



题 7-12 图

第七章作业

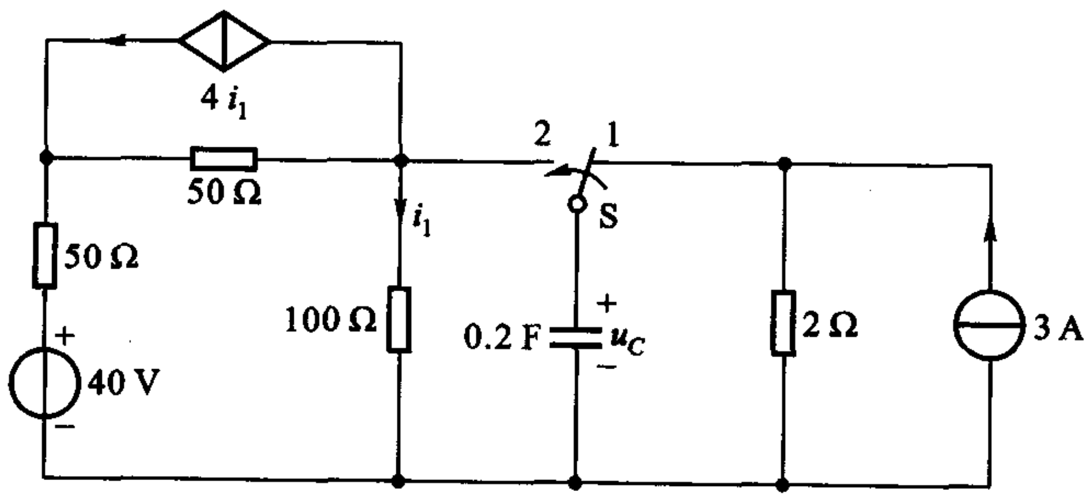
7－18 题 7－18 图所示电路中各参数已给定，开关 S 打开前电路为稳态。$t=0$ 时开关 S 打开，求开关打开后电压 $u(t)$。



题 7－18 图

第七章作业

7－19 题7－19图所示电路开关原合在位置1，已达稳态。$t=0$ 时开关由位置1合向位置2，求 $t\geq0$ 时电容电压 $u_C(t)$。



题7－19图