Chpt.3 Multi-Dimensional Random Variables and Their Distributions

第三章 多维随机变量及其分布

上节回顾

- 向量的独立性

$(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若对于所有的$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有：　$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$

则称$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立的。

离散

$(X_1,\ldots,X_n)$的分布律为$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若对于所有的$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有：　$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$

则称$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立的。

连续

$(X_1,\ldots,X_n)$的概率密度为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若对于$x_1,\cdots,x_n$，几乎处处有：　$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$

则称$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立的。

- 条件分布

二元离散型与连续型随机变量分布比较

二元离散型随机变量	二元连续型随机变量
(X,Y)联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}, i,j=1,2,\ldots$	(X,Y)联合概率密度 $f(x,y),\quad (x,y)\in D$
X的边际分布律 $P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}, i=1,2,\ldots$	X的边际概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$
$X=x_i$时Y的条件分布律 $P(Y=y_j \mid X=x_i)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, j=1,2,\ldots$	$X=x$时Y的条件概率密度 $f_{Y\mid X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad y\in D_x$

二元正态分布

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

联合密度函数为:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

边缘密度函数为:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

条件密度函数为:

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

Example 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求条件密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

解

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\dfrac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]+\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

$$\sigma=\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2$$

$$\mu=\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

前面求得条件密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

它表明:

已知X= x条件下，二维正态分布的对于Y的条件分布是正态分布

$$N\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\quad \left(\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2\right)^2\right)$$

其中第一参数 $\mu_2+\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)$是$x$的线性函数，第二参数与$x$无关.

此结论在一些统计问题中很重要.

思考题

设有一件工作需要甲乙两人接力完成，完成时间不能超过30分钟。设甲先干了X分钟，再由乙完成，加起来共用Y分钟。若

$X \sim U(0, 30)$，在$X=x$条件下，$Y \sim U(x, 30)$。

(1) 求(X, Y)的联合概率密度及条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$;

(2) 当已知两人共花了25分钟完成工作时，求甲的工作时间不超过10分钟的概率。

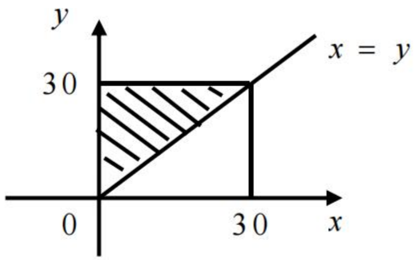
9

解: (1) 已知 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 0<x<30\\ 0, & 其它\end{cases}$

当x为(0,30)上一固定值时, $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30-x}, & x<y<30\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30(30-x)}, & 0<x<y<30\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$



$$=\begin{cases}\int_0^y \frac{1}{30(30-x)}dx=\frac{1}{30}\ln\frac{30}{(30-y)}, & 0<y<30\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$0<y<30$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(30-x)\ln\frac{30}{(30-y)}}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) 已得：当$0 < y < 30$时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(30-x)\ln\frac{30}{(30-y)}}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$P(X \le 10|Y = 25) = \int_0^{10} f_{X|Y}(x|25)dx$$

$$= \int_0^{10} \frac{1}{(30-x)\ln 6}dx = \frac{\ln 30 - \ln 20}{\ln 6} \approx 0.2263$$

3.5 随机变量的函数的分布-II

3.5.1 基本概念

n维随机变量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数 $F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

定义随机变量 $Y_i=g_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)(i=1,2,\cdots m)$。

记随机向量 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 的分布函数$F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)$

$$C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le y_i,i=1,2,\cdots m\}$$

则

$$\begin{aligned}F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)&=P\left(Y_1\le y_1,\cdots,Y_m\le y_m\right)\\&=P\left(g_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le y_1,\cdots,g_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le y_m\right)\\&=P\left((X_1,\cdots,X_n)\in C\right)\end{aligned}$$

如果X有联合概率密度$f_X(x_1,\cdots,x_n)$，则

$$F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)=\int\cdots_C\int f_X(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n=\int\cdots_C\int f_X(x_1,\cdots,x_n)dc$$

这就归结为求解一类曲面积分的n重积分的问题。

下面就一些具体的函数形式求解。

[一]　Z＝X＋Y

[二]　Z＝X/Y

[三]　$Z=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

3.5.2 几个具体的随机变量的函数

[一]　Z=X+Y 讨论连续型

设（X,Y）的联合概率密度为f(x,y)。

思路：先求Z的分布函数$F_Z(z)$, 再求概率密度$f_Z(z)$。

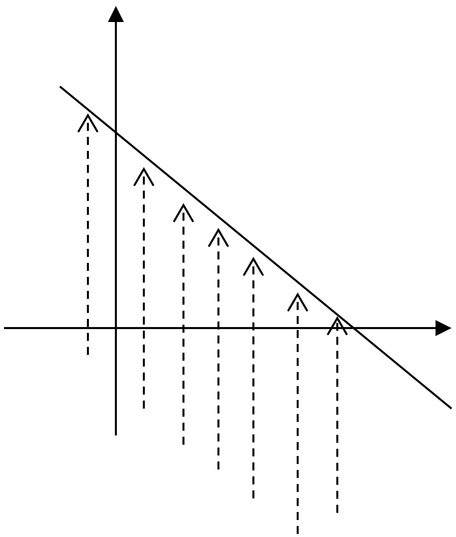
$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy$$

$$z = y + x$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx\right]dz$$



[一] Z=X+Y的分布函数

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy$$

当(X,Y)相互独立时， $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

这两个公式称为卷积公式(convolution)

卷积的概念非常重要，例如卷积神经网络CNN，傅里叶变换的卷积定理等

[定义] 函数f(x)和g(x)的卷积定义为

$$(f*g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(z-t)dt$$

[结论] 当X,Y相互独立时，X+Y的密度函数就是X的密度函数与Y的密度函数的卷积。

[一] Z=X+Y的分布函数

$$Z = X + Y \qquad f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)dy$$

$$Z = X - Y \qquad f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x - z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z + y, y)dy$$

Example X,Y独立同分布，都服从N (0,1)，求 Z＝X+Y 的密度函数.

解：用卷积公式，对任意 $z\in\mathbf{R}$

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_x(x)\cdot f_y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2+2x^2-2xz}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2/2+2\left(x-z/2\right)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-z/2\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$t=x-\frac{z}{2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}$$

Z=X+Y～N (0, 2)

[定理]若 X_1 X_2 相互独立, $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

则 $X_1+X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

可知正态分布对两个参数都有再生性.

更一般的结论:

n个独立的正态变量的线性组合仍服从正态分布，即:

若$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $i=1,2,\cdots n$，且它们相互独立, 则其线性组合:

$$c_0+c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n \sim N(\mu,\sigma^2)$$

其中$c_1,c_2\cdots c_n$是不全为0的常数, 两个参数(可由期望及方差得到)为:

$$\mu=c_0+c_1\mu_1+\cdots+c_n\mu_n, \qquad \sigma^2=c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+\cdots+c_n^2\sigma_n^2$$

离散型随机变量的可加性

1. $X_1, X_2, \cdots X_n$独立且均服从$B(1,p)$,则$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim B(n,p)$

2. $X \sim B(n_1,p), Y \sim B(n_2,p)$,两者独立， 则 $X+Y \sim B(n_1+n_2,p)$

3. $X \sim \pi(\lambda_1), Y \sim \pi(\lambda_2)$,两者独立， 则 $X+Y \sim \pi(\lambda_1+\lambda_2)$

证:3. $P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \times \frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

10

[二] Z=X/Y 讨论连续型

思路：先求分布函数$F_z(z)$, 再求概率密度$f_z(z)$

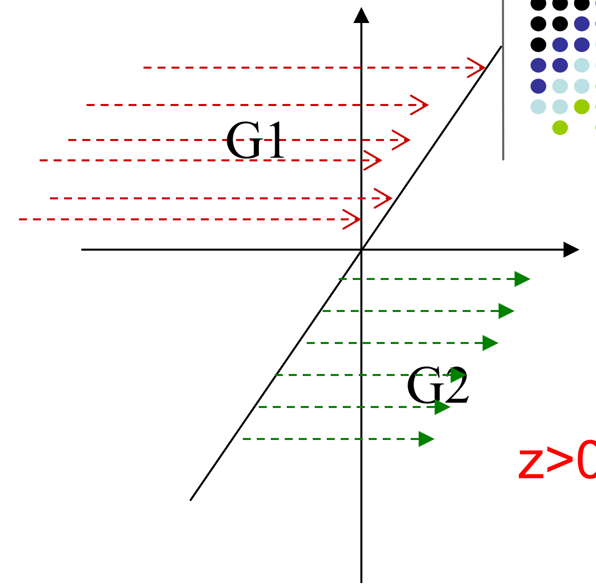
$$F_z(z) = P\left(\frac{X}{Y} \le z\right)$$

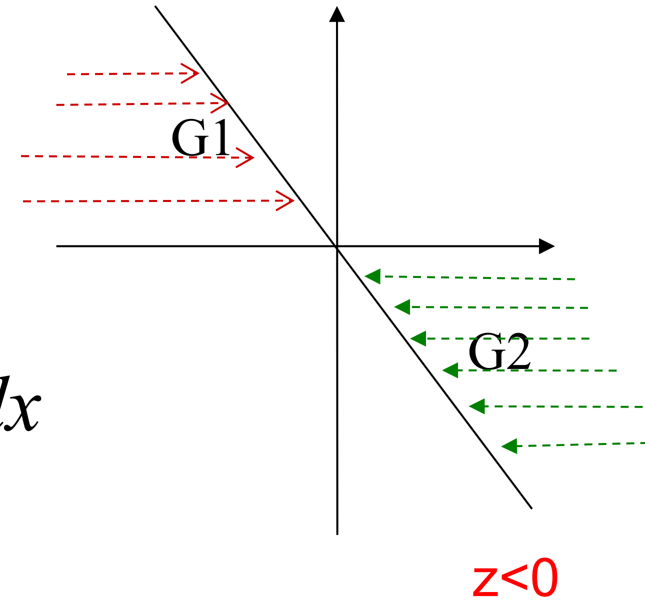
$$= \iint_{\frac{x}{y} \le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint_{G_2} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$u = x/y$$





[二] Z=X/Y

$$F_z(z)=\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{zy}f(x,y)dx+\int_{-\infty}^{0}dy\int_{zy}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$u=x/y$

交换dx与dy的顺序，为了凑z为积分上限的定义

$$=\int_{-\infty}^{z}du\int_{0}^{+\infty}yf(yu,y)dy+\int_{z}^{-\infty}du\int_{-\infty}^{0}yf(yu,y)dy$$

第二部分y ＜0

$$=\int_{-\infty}^{z}du\int_{0}^{+\infty}yf(yu,y)dy-\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{0}yf(yu,y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yu,y)dy$$

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy$$

注意：密度函数不为负

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) \mathrm{d}x,$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) \mathrm{d}x.$$

[三] 次序量的分布（极值分布*）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，联合分布函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$.

把 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 每取一组值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都按大小次序排列，所得随机变量 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$ 称为次序统计量 (order statistic), 它们满足

$$X_1^* \le X_2^* \le \cdots \le X_n^*$$

因此

$$X_1^* = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$
$$X_n^* = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

$$Z = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$F_z(z) = P\left(\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le z\right)$$ 有序序列

$$= P\left(X_1 \le z, X_2 \le z, \cdots, X_n \le z\right)$$ 无序序列

$$= F(z, z, \cdots, z)$$

如 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，则有

$$F_z(z) = F_{x_1}(z) \cdots F_{x_n}(z)$$

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，分布函数为 $F_x(x)$

$$F_z(z) = \left[F_x(z)\right]^n$$

$$Z = \min(X_1, \cdots, X_n)$$

$$F_z(z) = P\left(\min(X_1, \cdots, X_n) \le z\right)$$

$$= 1 - P\left(\min(X_1, \cdots, X_n) \ge z\right)$$

$$= 1 - P\left(X_1 \ge z, \cdots, X_n \ge z\right)$$

如果 $X_1, \cdots, X_n$ 独立，则有

$$F_z(z) = 1 - P\left(X_1 \ge z\right)P\left(X_2 \ge z\right)\cdots P\left(X_n \ge z\right)$$

$$= 1 - [1 - P\left(X_1 \le z\right)]\cdots[1 - P\left(X_n \le z\right)]$$

$$= 1 - [1 - F_{X_1}(z)]\cdots[1 - F_{X_n}(z)]$$

对于多个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 如有独立同分布$F_X(x)$，则

$$F_z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n$$

Example (pp.100, 例4)

设系统 L 由两个相互独立的子系统L_1, L_2链接而成，连接的方式分别为（1）串联；（2）并联；（3）备用（当系统之一损坏时，另一个开始工作）。设L_1，L_2的寿命分别为X,Y，已知他们的概率密度分别服从指数分布

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

其中α>0，β>0。

求: 三种情况下，系统寿命L的概率分布。

解:

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

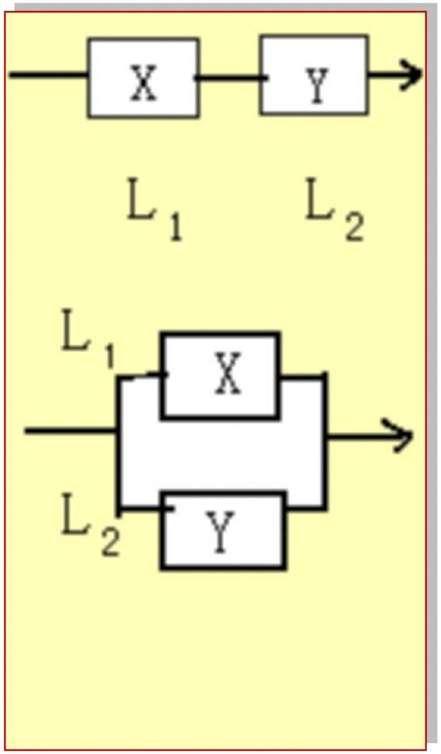
[1] 串联情况

$$Z = \min(X, Y)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_x(z)][1 - F_y(z)]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$



[2] 并联情况

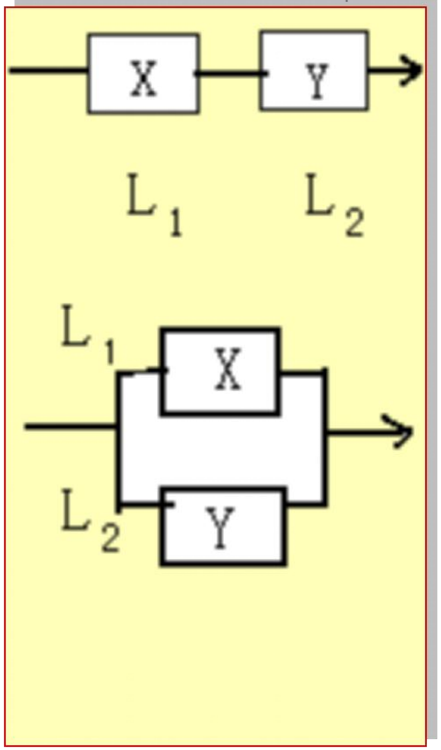
$$Z=\max(X,Y)$$

$$F_{\max}(z)=P(Z\le z)=P(\max(X,Y)\le z)$$

$$=P(X\le z,Y\le z)$$

$$=F_x(z)F_y(z)$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$



$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

[3] 备用情况 $Z = X + Y$

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y) f_y(y) dy$$

$$= \int_0^z f_x(z-y) f_y(y) dy$$

$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy$$

$$= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right]$$

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right] & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

3.5.3 数理统计中几个重要分布

1. Γ分布

对于(α>0, β>0)，如果随机变量X的概率密度满足下式，则称X服从参数α,β的伽玛分布，记作X~Γ(α, β)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du$$

[定理]（Γ分布的可加性）**Γ 分布 Γ(α, β) 对第一个参数具有可加性：若X_1, X_2相互独立，X_1～$\Gamma(\alpha_1, \beta)$，X_2～$\Gamma(\alpha_2, \beta)$, 则 X_1+X_2～$\Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$**

证 由卷积公式求$Z=X+Y$的密度：当$z<0$时, $f_z(z)=0$； 当 $z>0$ 时,

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,dx$$

$$=\int_0^z \frac{1}{\beta^{\alpha_1}\Gamma(a_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta} \frac{1}{\beta^{\alpha_2}\Gamma(a_2)} (z-x)^{\alpha_2-1} e^{-(z-x)/\beta}\,dx$$

$$=\frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}\,dx$$

$$\Big\Downarrow\ \boxed{x=zt}$$

$$=\frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^1 z^{\alpha_1-1} t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1} z^{\alpha_2-1} z\,dt$$

$$=\frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,dt$$

$$= \frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$$

贝塔函数的定义及性质 $B(P,Q) = \int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{Q-1}dx$

$$B(P,Q) = \frac{\Gamma(P)\Gamma(Q)}{\Gamma(P+Q)}$$

$$= \frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} B(\alpha_1,\alpha_2)$$

$$= \frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1+a_2)}$$

所以$X_1+X_2 \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$

几种特殊情况

[1] 当 a=1时，Γ(1, β)为指数分布.

此时 $$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} u^{1-1}e^{-u}du=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}=\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

[2] 另一特殊情况是 $\Gamma\left(\dfrac{n}{2},2\right)$

称 $\Gamma\left(\dfrac{n}{2},2\right)$ **为参数为n的χ^2分布，记为X~χ^2(n)**

2. χ^2分布

称 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ 为χ^2(n)分布，其中称n为它的自由度(DOF, degree of freedom). 它的密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

[定理] **χ^2分布具有可加性，也就是说，设$X_1\sim\chi^2(n_1)$, $X_2\sim\chi^2(n_2)$，则$X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$**

χ^2分布是特殊的 Γ 分布，第二个参数相同（都为2），由Γ分布对第一参数的可加性即得χ^2分布的可加性.

[定理] 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，都服从$N(0,1)$，则

$$Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

证 记 $Y_i = X_i^2 (i = 1,2,\cdots,n)$，由 $\{X_i\}$ 相互独立，可知 $\{Y_i\}$ 相互独立. 直接算得Y_i 的密度，

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du \overset{t=\sqrt{2u}}{=\!=\!=\!=\!=} \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\pi}$$

$$f_{Y_i}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

故 $Y_i \sim \Gamma(\frac{1}{2},\ 2) \sim \chi^2(1)$

再由$\chi^2(1)$分布的可加性质，知道 $X_1^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi^2(n)$

上述定理显示了χ^2分布的本质属性，χ^2分布中的自由度 n 即是 $X_1^2+\cdots+X_n^2$ 中独立正态变量X_i的个数.