第一章 行列式

第四节(补) 行列式的计算与证明

目的：利用定义、性质、展开等对行列式计算或证明。

方法：首先观察和分析行列式特点，然后试一试化简，行不通再试别的方法。

已学过的方法：

- **对角线法**：二阶采用。
- **三角型法**：用性质处理化简成三角形行列式。
- **展开降阶法**：处理使某一行(列)有较多零，再展开。
- **拆项法**：把某一行(列)元素都拆成两(多)项，再分解。
- **化为箭形行列式**
- **归纳法**：例如*Vandermonde*行列式的证明过程。
- **转化为*Vandermonde*行列式。**

例1 计算$n+2$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

特点：

(1) 有好多0，可考虑按照某行(列)展开或者*Laplace*定理.

(2) 每行有两个非0元且和相等，可考虑各列都加到第1列.

解：法1 按照某行(列)展开

（按照第一行展开）

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

原式$= a \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & & & 1 \\ & a & & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a \end{vmatrix}_{n+1}$

$$+(-1)^{1+n+2} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= a \times a^{n+1} + (-1)^{n+3} \times (-1)^{n+1+1} \times \begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}_n$$

$$= a^{n+2} + (-1)^{2n+5} \cdot a^n$$

$$= a^n(a^2 - 1)$$

解：法2 利用*Laplace*定理按照第1、$n+2$行展开

$$\begin{vmatrix} \boxed{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{a} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} (-1)^{(1+n+2)+(1+n+2)} \begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}_n = a^n(a^2-1)$$

解：法3 利用各行和相等，各列都加到第1列上去

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1+a & a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1+a & 0 & a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+a & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1+a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (1+a)a\cdots a(a-1) = a^n(a^2-1)$$

例2 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

解：有这么多0，可以按照第一列展开得到

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}_{n-1}+a_n\times(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=xD_{n-1}+a_n$$

故 $D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-1}$ **，而** $D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_1+x \end{vmatrix}=a_2+a_1x+x^2$

因此由递推关系可得 $D_n=a_n+\sum_{i=1}^{n-1}a_{n-i}x^i+x^n$

递推法

法2　第2列乘以 x 加到第1列，第3列乘以x^2加到第1列，…，第n列乘以x^{n-1}加到第1列

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}x^i + x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}$$

$$= (a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}x^i + x^n) \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n-1}$$

$$= a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}x^i + x^n$$

另外，(1)第n列x倍加到第$n-1$列，然后第$n-1$列x倍加到第$n-2$列……

(2)按照第n行展开计算（比较麻烦）

例3 计算

$$|D_n|=\begin{vmatrix} \underline{a_1}+b_1 & \underline{a_2} & \cdots & \underline{a_n} \\ \underline{a_1} & \underline{a_2}+b_2 & \cdots & \underline{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_1} & \underline{a_2} & \cdots & \underline{a_n}+b_n \end{vmatrix} \qquad (b_i \neq 0)$$

解：第2, 3, …, *n*行都减去第1行得到

$$|D_n|=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ -b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & 0 & b_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -b_1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1+b_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{b_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1+b_1+b_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{b_i})b_2b_3\cdots b_n$$

$$= (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i})b_1b_2\cdots b_n$$

注：也可以第1, …, *n*-1行减去第*n*行

法2 采用加边法（升级法）

$$|D_n| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

另一种加边方式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= b_1 b_2 \cdots b_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

例4 计算*n*阶行列式

$$|D_n| = \begin{vmatrix} a & c & c & \cdots & c \\ b & a & c & \cdots & c \\ b & b & a & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解： 若$b=c$则容易计算出 $|D_n| = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$

若$b \neq c$，从第1到n-1行，每行减去其后面一行，得到

$$|D_n| = \begin{vmatrix} a-b & c-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

再按第一列展开得:

$$|D_n| = (a-b)\begin{vmatrix} a-b & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}_{n-1} + b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} c-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a-b & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (a-b)|D_{n-1}| + b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1}$$

$$= (a-b)|D_{n-1}| + b(a-c)^{n-1} \qquad (*)$$

这是关于 $|D_n|$ 的递推公式， 又 $|D_2| = a^2 - bc$，我们利用递推公式不难算出 $|D_n|$ 的值。

对于本题，由于 $|D_n^T|$与 $|D_n|$ **形状完全相同，**只是 ***b*与*c*的位置互换了，** 于是将(*)式中的*b*与*c*互换得到

$$\left|D\right| = (a-b)\,|D_{n-1}| + b(a-c)^{n-1} \qquad (*)$$

$$\left|D\right| = |D_n^T| = (a-c)\,|D_{n-1}| + c(a-b)^{n-1} \qquad (**)$$

由(*)和(**)消去$|D_{n-1}|$得到

$$\left|D_n\right| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}, \quad (b \neq c)$$

小结

- 一般行列式都有多种解法，要首先观察和分析行列式的特点，然后试一试化简；
- 在化简过程中，看是否和已知典型行列式相像，若是则可仿照该种行列式处理方法；
- 化简行列式常见方法：

对角线法、三角型法、展开降阶法、拆项法、化为箭形行列式、归纳法、转化为*Vandermonde*行列式、递推法、加边法（升级法）。

练习

1. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

解：将第1行分别加到第2,…,n行得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$= n!$

2.计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：（各行和相等）

将第2到n+1列加到第1列，并从第1列提出公因子

$$D=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

多种方法，如：第2到n+1行都减去第1行；第2到n+1列都减去第1列的合适倍数等。本例采取第二种。

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

3.证明

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2y^2$$

证：有多种方法，如第2，4两行分别减去第1，3两行得：

$$原式 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & -y & -y \end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2y^2$$

4.计算$n(n>2)$阶行列式

$$|D|=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n^2 & \cdots & n^n\end{vmatrix}$$

解：各行的公因子提出之后为范德蒙行列式

$$|D|=n!\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1}\\ 1 & 3 & \cdots & 3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & n & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=n!\prod_{1\le j<i\le n}(i-j)$$

$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!$$

法2 加边后为范德蒙行列式

$$|D|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\prod_{0\le j<i\le n}(i-j)$$

$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!$$

思考题

1. 设*a*，*b*，*c*是方程 $x^3+px+q=0$ **的三个根，证明**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0$$

证明： 由于 $x^3+px+q=0$ 的三个根为***a*，*b*，*c*，**故有

$$x^3+px+q=(x-a)(x-b)(x-c)$$

即

$$x^3+px+q=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

比较系数得

$$\begin{cases} -(a+b+c)=0 \\ (ab+bc+ca)=p \\ -abc=q \end{cases}$$

于是

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = 0$$

2. 计算$n(n>2)$阶行列式——循环行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解：第2,…,n列加到第1列并提出公因子

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

第i行的−1倍加到$i+1$行，$i=n-1, n-2,\dots,1$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

很熟悉了！

第2,…,n-1列加到第1列

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\left[(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)(-n)^{n-2}\right]=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}
$$