第七章 n元实二次型

§7.3 用正交变换化二次型为标准形

正交变换复习

定理：设T是欧氏空间V的一个线性变换，则下述条件等价

1） T 是正交变换；

2）T保持向量的内积不变；

3）T把标准正交基变为标准正交基；

4）T在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

正交矩阵满足$A^TA=E$，则 $A^T=A^{-1}$.

用正交变换 $X=CY$ 化二次型X^TAX为标准形问题，等价于

求正交矩阵C，使得

$$C^TAC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

条件：

- A的特征根都是实数；
- A有n个实特征向量构成的标准正交向量组，使A化为对角形.

一、对称矩阵的性质

说明：本节所提到的对称矩阵，除非特别说明，均指实对称矩阵.

复习：复数 $z=a+bi\ (a,b\in R)$, 若$b=0$, 则 z 就是一个实数.

复平面中向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫做复数z的模(或绝对值)，记做 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{z}=a-bi$ 称为z的共轭复数；$z\cdot\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$

设复向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 则 $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$

称为向量X的共轭向量.

定理1　对称矩阵的特征根必为实数.

证明：设复数λ为对称矩阵A的特征值，X为对应特征向量，则

$$AX=\lambda X,\ X\neq O.$$

于是

$$A\overline{X}=\overline{A}\,\overline{X}=\overline{(AX)}=\overline{(\lambda X)}=\overline{\lambda}\,\overline{X}.$$

因此

$$\overline{X}^T AX=\left(\overline{X}^T A^T\right)X=(A\overline{X})^T X=(\overline{\lambda}\overline{X})^T X=\overline{\lambda}\,\overline{X}^T X \quad (1)$$

又

$$\overline{X}^T AX=\overline{X}^T\left(AX\right)=\overline{X}^T\lambda X=\lambda\overline{X}^T X \quad (2)$$

(2)-(1)，得

$$\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)\overline{X}^T X=0.$$

但因为 $X \neq 0,$

所以 $\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0, \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda}) = 0,$

即 $\lambda = \overline{\lambda},$ 由此可得λ是实数.

定理1的意义

由于对称矩阵A的特征根λ_i为实数，所以齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)X = 0 \qquad (※)$$

是实系数方程组，由 $|\lambda_i E - A| = 0$ 知(※)必有实的基础解系，从而对应的特征向量可以取实向量.

定理2 设λ_0是n阶对称阵A的k重特征根，则A的对应于λ_0的特征子空间V_{λ_0}的维数恰为k，即齐次线性方程组

$$(\lambda_0 E - A)X = 0$$

的基础解系恰有k个解向量.

由定理1，2可知：n阶对称矩阵A一定有n个线性无关的实特征向量，从而它必相似于实对角矩阵.

定理3 设λ_1与λ_2是对称矩阵A的互异特征根，X_1，X_2分别是A的属于它们的特征向量，则X_1，X_2正交.（即$X_1{}^T X_2=0$）

证明 $\lambda_1 X_1 = AX_1$, $\lambda_2 X_2 = AX_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$\because A$对称, $A = A^T$,

$\therefore \lambda_1 X_1^T = (\lambda_1 X_1)^T = (AX_1)^T = X_1^T A^T = X_1^T A$,

于是

$$\lambda_1 X_1^T X_2 = X_1^T A X_2 = X_1^T(\lambda_2 X_2) = \lambda_2 X_1^T X_2,$$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) X_1^T X_2 = 0.$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$,

$\therefore X_1^T X_2 = 0.$ 即X_1与X_2正交.

定理4 对n阶矩阵A，一定存在正交矩阵C，使得

$$C^T AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A的全部特征根.

证明： 设A的互不相等的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,

它们的重数依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_s$

$$(r_1+r_2+\cdots+r_s=n).$$

根据定理1（对称矩阵的特征值为实数）和定理2（k重特征根对应解空间维数恰为k）可得：

A对应特征根 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 恰有r_i个线性无关的实特征向量，把它们正交化、单位化(对于单根只单位化)，即得A的对应于λ_i的r_i个单位正交的特征向量．于是共s个得到 r_i 个标准正交组，且向量总数恰为n.

由定理3知对应于不同特征根的特征向量正交，故这n个单位特征向量两两正交，从而构成一个标准正交组．以它们为列向量(按对应特征根顺序)构成正交矩阵C，则

$$C^{-1}AC=C^{T}AC=\Lambda$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&\lambda_1&&&&&&\\&&&\lambda_2&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&\lambda_2&&&\\&&&&&&\lambda_s&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&\lambda_s\end{pmatrix}\begin{array}{l}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}r_1\text{个}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}r_2\text{个}\\ \quad\vdots\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}r_s\text{个}\end{array}$$

注：该题的证明过程也是将一个对称矩阵用正交矩阵化为对角形的方法.

小 结

1. 对称矩阵的性质：（重点）

(1) 特征值为实数；

(2) 属于不同特征值的特征向量正交；

(3) 特征值的重数和与之对应的线性无关的特征向量的个数相等；

(4) 必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值.

2. 利用正交矩阵将对称阵化为对角阵的步骤：（重点）

(1)求特征值；(2)找特征向量；(3)将特征向量(按特征根分组)正交化；(4)最后单位化.

二、用正交矩阵将对称矩阵对角化的方法

定理5 任一个n元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=X^TAX,\quad (A^T=A)$$

必存在正交变换 $X=CY\ (C^T=C^{-1})$ 使 f 化为标准形

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=Y^T\Lambda Y$$

其中 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)$, $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 是对称矩阵 A 的全部特征根.

二次型X^TAX为正定二次型 $\Leftrightarrow$ A的特征根全大于零.

根据上述结论，利用正交变换将实二次型化为标准形的步骤为：

(1)写出实二次型 $f=X^TAX$ 对应的对称矩阵 A；

(2)求矩阵 A 的全部特征根；

(3)对 A 的每个特征根 λ_i 求齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)X=0$ 的基础解系——即求其线性无关特征向量，并将它们正交化、单位化；

(4)用这些单位化后的向量作为列项量顺次构成矩阵 C，则 C 为正交矩阵，且 $C^TAC=C^{-1}AC=\Lambda$ 为对角形矩阵.

例1 将下面的二次型通过正交变换$X=PY$化为标准形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

解：(1)写出二次型对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

(2)求其特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-18)^2$$

从而得特征值 $\lambda_1=9,\ \lambda_2=\lambda_3=18.$

(3) 求特征向量并将其单位化、正交化

将$\lambda_1 = 9$代入$(\lambda E - A)X = 0$,得基础解系

$$\xi_1 = (1/2,1,1)^T.$$

将$\lambda_2 = \lambda_3 = 18$代入$(\lambda E - A)X = 0$,得基础解系

$$\xi_2 = (-2,1,0)^T,\ \xi_3 = (-2,0,1)^T.$$

将特征向量正交化（注：此时分为两组）

取 $\alpha_1 = \xi_1,\quad \alpha_2 = \xi_2,\quad \alpha_3 = \xi_3 - \dfrac{\langle \alpha_2, \xi_3 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle}\alpha_2,$

得正交向量组

$$\alpha_1 = (1/2,1,1)^T,\quad \alpha_2 = (-2,1,0)^T,\quad \alpha_3 = (-2/5,-4/5,1)^T$$

将正交向量组单位化

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad (i=1,2,3),$

得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

(4) 构成矩阵P

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

于是所求正交变换为 $X = PY$

化二次型为标准型 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$

例： 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$， 求正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

解： $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-8)=0$$

先求矩阵的特征值

$$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=8.$$

(1) 当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，齐次线性方程组为 $(A+E)X=0$

$$(A+E)=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore x_2=-2x_1-2x_3 \qquad \text{令} \begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$

再求矩阵的特征向量
（对应特征值的）

先正交化：令 $\beta_1 = p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，

$$\beta_2 = p_2 - \frac{(p_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

再单位化：令

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

特征向量正交化、单位化

(2) 当 $\lambda_3 = 8$ 时，齐次线性方程组为 $(A-8E)X=0$

$$(A-8E)=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}\rightarrow$$

求矩阵的特征向量

（对应特征值的）

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3 \end{cases}$$ 令 $x_3 = 1$ 得基础解系 $p_3=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$,

单位化得 $\eta_3 = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$,

特征向量正交化、单位化

得正交矩阵

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

故有

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 8\end{pmatrix}$$

例3 求一个正交变换$x = Py$,把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

化为标准形.

解

二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

它的特征多项式为

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

计算特征多项式：把二,三,四列都加到第一列上,有

$$|A-\lambda E| = (-\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

把二,三,四行分别减去第一行,有

$$\left|A-\lambda E\right| = (-\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -\lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+1)^2\begin{vmatrix} -\lambda-1 & -2 \\ -2 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda-3) = (\lambda+3)(\lambda-1)^3.$$

于是A的特征值为$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$

当$\lambda_1 = -3$时,解方程$(A+3E)x = 0,$

得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化即得 $p_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 时, 解方程 $(A - E)x = 0$,

可得正交的基础解系

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

单位化即得 $p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, p_4=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2\\-1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2\\-1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2\\1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

且有 $\qquad f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2.$

例题：209页例1，210页例2

- 注：解题过程必须掌握，非常重要。

思考：三种化二次型为标准形的方法有何异同？

- 配方法
- 合同变换法
- 正交变换法

将一个二次型化为标准形，三种方法都可以，采用的方法取决于问题要求.

若要求找出一个正交矩阵，应使用正交变换法；若只需要找出一个可逆的线性变换，则各种方法都可使用.

正交变换法的好处是有固定的步骤，但计算量通常较大；通常情况合同变换法方法计算量较小，过程也相对简单明确；但如果二次型中变量个数较少，使用拉格朗日配方法反而比较简单.

需要注意的是，使用不同的方法，所得到的标准形可能不相同，但标准形中含有的项数必定相同，项数等于所给二次型的秩；同时正惯性指数和负惯性指数相同.

小 结

- 用正交矩阵将对称矩阵对角化的方法 (重点)