练习

(第3章)

1. 已知向量组A:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$与向量组B:
$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_l\}$ 有相同的秩

证明：向量组A与向量组B等价.

2. 设有向量组A:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 及向量组B:

$$\{\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\cdots,$$

$$\beta_s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}\}\quad(s>1)$$

证明：向量组A与B有相同的秩.

3. 设向量组 $A:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$； $B:\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$；
$C:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$的秩分别为$r_1$, r_2, r_3.

证明：

$$\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$$

课本第17题

课本第24题

课本第25题

答 案

1. 已知向量组A:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 与向量组B: $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_l\}$ 有相同的秩

证明：向量组A与向量组B等价.

证明：分析，A是B的部分组，所以A可由B线性表示，

需证明B可以由A线性表示即可.

设R(A)=R(B)=r，向量组A和B的极大无关组有r个向量，

不妨设A的极大无关组为 A1:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$,

由于向量组A1也是B的线性无关部分组，

且R(B)=r，所以它也是B的一个极大无关组.

所以B可以由向量组A1线性表示.

因此B可以由A线性表示.

所以，向量组A与向量组B等价.

2. 设有向量组A：$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$

$$\{\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\cdots,$$
$$\beta_s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}\}\ (s>1)$$

证明：向量组A与B有相同的秩.

证明：构造矩阵 $D_1=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)\xrightarrow[c_1+c_i(i=2,3,\cdots,s)]{}$

$$((s-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s),\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

$$\xrightarrow[\substack{c_1/(s-1)\\ c_i-c_1(i=2,\cdots s)}]{}((\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s),-\alpha_2,\cdots,-\alpha_s)$$

$$\xrightarrow[\substack{c_1+c_i(i=2,\cdots s)\\ (-1)\times c_i(i=2,\cdots s)}]{}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\mathrm{D}_2$$

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，所以$R(D_1)=R(D_2)$

故向量组A与B有相同的秩.

另证：显然 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示.

又 $\sum_{i=1}^{s}\beta_i=(s-1)\sum_{i=1}^{s}\alpha_i$

故 $\alpha_i=\frac{1}{s-1}\sum_{i=1}^{s}\beta_i-\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,s)$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性表示.

从而这两个向量组等价。再证明等价的向量组有相同的秩即可。

3. 设向量组 $A:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$; $B:\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$;
$C:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 的秩分别为r_1, r_2, r_3.

证明： $\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$

证明：设向量组A，B，C的极大无关组依次为向量组A1, B1,C1， 则它们依次含有r_1, r_2, r_3个向量.

由于向量组A1中向量也是C中向量，且线性无关向量组A1可由向量组C的极大无关组C1线性表出，

因此$r_1\le r_3$，同理$r_2\le r_3$.

C1中向量若是A中向量，则可由A1线性表出，否则是B中向量，则可由B1线性表出，且线性无关向量组C1可由向量组{A1,B1} 线性表出，因此$r_3\le r_1+r_2$

$$\therefore \max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$$

总结关于矩阵秩的几个结论

(1) $R(A) \le R(A,b)$, $R(A) \le R\begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix}$

(2) $R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \le R(A) + R(B)$

根据上面例题可得

$R(A,B) \le R(A) + R(B)$

特别的 $R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = R(A) + R(B)$

原因：设A的列向量某极大无关组为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{rA}$

设B的列向量某极大无关组为$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{rB}$

则 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_{r_A} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{r_B} \end{pmatrix}$

线性无关，且 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 中每个列向量都可被它们线性表出.

（3） $R\left(A+B\right)\le R(A)+R(B)$

仿照上面例题可证

另外证法：设A, B为$m\times n$矩阵则

$$A+B=\left(A,B\right)\begin{pmatrix} E_n \\ E_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore R\left(A+B\right)\le R\left(A,B\right)\le R(A)+R(B)$$

(4) 设矩阵$A_{m\times n}$与$B_{n\times p}$满足$AB=O$,证明$R(A)+R(B)\le n$.

【课本习题26，课上已证】

课本第17题证明

设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

系数矩阵A的秩与矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$$

的秩相等，证明该线性方程组有解.

证：设增广矩阵为$B=(A,b)$，则有

$$R(A) \le R(A,b) \le R\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$R(A) \le R(B) \le R(M)$$

而 $R(A)=R(M)$

因而$R(A)=R(B)=R(M)$

故 该线性方程组有解.

课本习题24证明

设$R_A=R_B=r$，如果向量$X_1, X_2, \dots, X_{n-r+1}$ 是非齐次线性方程组$AX=b$ 的 $n-r+1$个线性无关的解, 证明它的任一解可表为 $k_1X_1+k_2X_2+\dots+k_{n-r+1}X_{n-r+1}$.

(其中$k_1+k_2+\dots+k_{n-r+1}=1$).

证：设

$$\eta_1 = X_2 - X_1,\quad \eta_2 = X_3 - X_1 \quad ,\cdots,\quad \eta_{n-r} = X_{n-r+1} - X_1$$

则$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$是其导出组的解. 设有一组数$h_1, h_2, \dots, h_{n-r}$使得下式成立

$$h_1\eta_1 + h_2\eta_2 + \cdots + h_{n-r}\eta_{n-r} = 0$$

即 $$h_1(X_2 - X_1) + h_2(X_3 - X_1) + \cdots + h_{n-r}(X_{n-r+1} - X_1) = 0$$

即 $$h_1X_2 + h_2X_3 + \cdots + h_{n-r}X_{n-r+1} - \sum_{i=1}^{n-r} h_iX_1 = 0$$

由向量组 $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r+1}$ 线性无关可得

$$h_1=h_2=\ldots=h_{n-r}=0$$

因此$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$线性无关， 而$R_A=r$, 从而得到

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$是导出组的基础解系. 于是$Ax=b$的任一解可表示为

$$X=X_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

$$=X_1+k_2(X_2-X_1)+k_3(X_3-X_1)+\cdots+k_{n-r+1}(X_{n-r+1}-X_1)$$

$$=(1-k_2-\cdots-k_{n-r+1})X_1+k_2X_2+k_3X_3+\cdots+k_{n-r+1}X_{n-r+1}$$

令$k_1=1-k_2-\ldots-k_{n-r+1}$ 则有任一解可表为

$$X=k_1X_1+k_2X_2+\ldots+k_{n-r+1}X_{n-r+1}.$$

(其中$k_1+k_2+\ldots+k_{n-r+1}=1$).

证：设增广矩阵为$B=(A,b)$，则有

$$R(A) \le R(A,b) \le R\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$R(A) \le R(B) \le R(M)$$

而 $R(A)=R(M)$

因而$R(A)=R(B)=R(M)$

故 该线性方程组有解.

课本第25题证明

设有两个方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

和

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_m = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

证明方程组(1)有解⇔方程组(2)无解.

证明：设方程组(1)的系数矩阵为A，增广矩阵为(A,b)

则方程组(2)的系数矩阵为 $A_1=\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}$,增广矩阵为

$$B_1=\begin{pmatrix} A^T & O \\ b^T & 1 \end{pmatrix}$$

必要性：由方程组(1)有解得$R(A)=R(A,b)$,于是可得b可由A的列向量组线性表出，从而矩阵 $\begin{pmatrix} A^T & O \\ b^T & 1 \end{pmatrix}$ 必可经初等行变换化为$\begin{pmatrix} A^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$，从而 $R(A_1)\neq R(B_1)$.

即：方程组(2)无解.

充分性 若方程组(2)无解，则有

$$R(B_1)=R(A_1)+1=R(B^T)+1=R(B)+1$$

又 $B_1=\begin{pmatrix} A^T & O \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} A^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$

故 $R(B_1)=R\begin{pmatrix} A^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} A^T \\ O \end{pmatrix}+R\begin{pmatrix} O \\ 1 \end{pmatrix}$

$$=R(A)+1$$

所以 $R(B)+1=R(A)+1$

于是得 $R(B)=R(A)$，因此方程组(1)有解.

本次作业

第四章习题

- 2.
- 4. (1) (2)
- 6.
- 7.
- 9. (1)
- 11.(1)