

## 2012--2013 学年第 1 学期《概率论与数理统计》期末考试答案 (A)

一、填空:

1. 10;      2. 0.5;      3.  $\frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4$

4. 0;      5. (4.412, 5.588);      6.  $F(x; \frac{1}{2}) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$

二、单项选择:

1. C      2. D,      3. D,      4. B,      5. D,      6. D

三、1. 解: 设  $A = \{\text{邮件发生延迟}\}$

$$\begin{aligned} (1) P(A) &= P(A|E_1) P(E_1) + P(A|E_2) P(E_2) + P(A|E_3) P(E_3) \\ &= 0.02 \times 0.4 + 0.01 \times 0.5 + 0.05 \times 0.1 \\ &= 0.018 \end{aligned}$$

$$(2) P(E_1|A) = P(A|E_1) P(E_1) / P(A) = 0.02 \times 0.4 / 0.018 = 0.008$$

$$(3) P(E_3|A) = P(A|E_3) P(E_3) / P(A) = 0.05 \times 0.1 / 0.018 = 5/18$$

四、解: 解: (1) 边缘分布乘积不等于联合分布, 不独立

(2)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1-y, & 0 \leq y < 1 \\ 1+y, & -1 < y < 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P(X > \frac{1}{2} | Y > 0) = \frac{P(X > \frac{1}{2}, Y > 0)}{P(Y > 0)} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 (\int_0^x dy) dx}{\int_0^1 (1-y) dy} = \frac{3}{4}$$

$$(3) f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} 1-z/2, & z \in (0, 2) \\ 0, & z \notin (0, 2) \end{cases}$$

五、解: 设  $X_i$  表示公司从第  $i$  个投保者身上所得的收益,  $i=1 \sim 1000$ 。

$$\text{则 } X_i \sim \begin{pmatrix} 100 & 100-a \\ 0.98 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

由  $E(X_i) = 100 \times 0.98 + (100-a) \times 0.02 = 100 - 0.02a > 0$ , 得  $100 < a < 5000$ 。

故公司每笔赔偿小于 5000 元, 能使公司获益。

$$\text{公司期望总收益为: } E\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{1000} E(X_i) = 100000 - 20a。$$

若公司每笔赔偿 3000 元, 能使公司期望总获益 40000 元。

六、解: 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的一个样本, 由

$$X \sim \pi(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \text{-----} \quad (2 \text{ 分})$$

故似然函数为  $(k_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n)$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \pi(k_i; \lambda) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n k_i}}{\prod_{i=1}^n (k_i!)} \text{-----} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{故} \quad \ln L(\lambda) = -n\lambda + \left( \sum_{i=1}^n k_i \right) \ln \lambda - \ln \left( \prod_{i=1}^n (k_i!) \right)$$

$$\text{即} \quad \frac{d(\ln L(\lambda))}{d\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{\lambda} = 0 \text{-----} \quad (6 \text{ 分})$$

从而  $\lambda$  的极大似然估计量为

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \frac{100(1+100)}{200} = 50.50 \text{---} \quad (8 \text{ 分})$$

七、解:  $\bar{x} = 87.1, s^2 = 0.08,$

$$(1) \quad H_0: \mu = 87.4; \quad H_1: \mu \neq 87.4,$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域  $W = (-\infty, -4.0322] \cup [4.0322, +\infty)$

$$T_0 = \frac{87.4 - 87.1}{0.283/\sqrt{5}} = 2.37 \notin W,$$

接受  $H_0$ 。

$$(2) \quad H_0: \sigma^2 = 0.04; \quad H_1: \sigma^2 > 0.04$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

拒绝域

$$W = [15.086, +\infty)$$

$$\chi_0^2 = \frac{5 \times 0.08}{0.04} = 10 \notin W, \quad \text{接受 } H_0。$$