第五章 线性变换

第三节 矩阵的对角化

从上一节分析知道：同一线性变换在不同基底下的矩阵一般不同，但它们**相似**.

问题：是否存在一组基底，使得线性变换T在该基底下的矩阵**最简单**?(**对角形**矩阵)

或者说，对于n阶矩阵A是否存在可逆矩阵M，使$M^{-1}AM$是一个**对角矩阵**？

预备知识

§ 5.3.1 矩阵的特征根与特征向量

一、定义与求法

定义1 设A是n阶方阵，若数λ和n维非零(列)向量X满足

$$AX=\lambda X$$

则称λ为A的特征根(特征值)，X称为A的对应于(属于)特征根λ的特征向量.

说明：

1) 特征向量是对方阵而言的，且特征向量非零.

2) 若X为A的对应于特征根λ的特征向量，则kX ($k\neq 0$) 也为A的对应于特征根λ的特征向量.

3) 一个特征向量只能属于一个特征值.

怎样来求解一个方阵的特征值和特征向量呢？

把$AX=\lambda X$写成

$$(\lambda E-A)X=O \qquad (※)$$

这是一个齐次线性方程组，由于$X\neq O$，因此λ是矩阵A的特征根.

$\Leftrightarrow$ 使得齐次线性方程组(※)有非零解.

而(※)的任意非零解都是矩阵A的对应于特征根的特征向量.

再由方程组理论，我们得到如下定理

定理1 设$A=(a_{ij})$为n阶矩阵，则λ是A的特征根
$\Leftrightarrow$ $|\lambda E-A|=0$.

定义2 $A=(a_{ij})$为n阶矩阵，方程$|\lambda E-A|=0$ 称为A的特征方程，多项式

$$\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

称为矩阵A的特征多项式，这是数域F上的一个n次多项式.

因此，也可以说A的特征根就是A的特征方程的根.

现在来看特征多项式$\varphi_A(\lambda)$，它是λ的n次多项式，在复数范围内有n个根. 设为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则$\lambda_i$就是$A$的特征值.

$$\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$$= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \qquad (a)$$

又

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| \qquad (b)$$

比较(a)和(b)的$n-1$次项和常数项得到

1) A的全体特征根的**和为A的迹**, 即

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

2) A的全体特征根的**积为$|A|$**，即：$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$

求矩阵A的特征根与特征向量的步骤

1. 计算A的特征多项式 $|\lambda E-A|$;

2. 求特征方程 $|\lambda E-A|=0$的全部根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 也就是$A$的全部特征值;

3. 对于特征值λ_i, 求齐次方程组$(\lambda_i E-A)x=0$的非零解, 也就是对应于λ_i的特征向量.

[求一组基础解系，即为对应于λ_i的线性无关特征向量，其所有非零线性组合即为属于该λ_i的全部特征向量.]

例1 求矩阵A的特征根与特征向量

$$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

解：由于

$$\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-1 & 2\\ 3 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -3+(\lambda-1)(\lambda-3) & 2\lambda-8\\ -1 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 3\lambda-2 & \lambda+6\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2 - 4\lambda & 2\lambda - 8 \\ 3\lambda - 2 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 3\lambda - 2 & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda^2 + 4)$$

所以A的特征根为 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$

对于$\lambda_1 = 4$, $(\lambda E - A)X = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 4-3 & -3 & -2 \\ -1 & 4-1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

解得基础解系$\eta_1 = (-1,-1,1)$，所以A的对应于特征根 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量为

$k_1\eta_1 = k_1(-1,-1,1)$ ，其中 $k_1 \neq 0$.

对于 $\lambda_2 = 2i$，$(\lambda E - A)X = 0$ 为

$$\begin{pmatrix} 2i-3 & -3 & -2 \\ -1 & 2i-1 & 2 \\ 3 & 1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

解得基础解系 $\eta_2 = (-i, i, 1)$，所以A的对应于特征根 $\lambda_2 = 2i$ 的全部特征向量

为 $k_2\eta_2 = k_2(-i, i, 1)$，其中$k_2 \neq 0$.

对于$\lambda_3 = -2i$，解

$$\begin{pmatrix} -2i-3 & -3 & -2 \\ -1 & -2i-1 & 2 \\ 3 & 1 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

得基础解系 $\eta_3 = (i, -i, 1)$，所以A的对应于特征根 $\lambda_3 = -2i$ 的全部特征向量为

$k_3\eta_3$，其中$k_3 \neq 0$.

例2 求矩阵A的特征根与特征向量. $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

解:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}\underset{c_1+c_2+c_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-5&-2&-2\\\lambda-5&\lambda-1&-2\\\lambda-5&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

所以,A的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=5$

(或$\lambda_1=-1$(二重),$\lambda_2=5$)

对于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$,代入 $(\lambda E-A)X=0$ 得

$$\begin{pmatrix}-1-1&-2&-2\\-2&-1-1&-2\\-2&-2&-2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \quad \text{或} \begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

解得基础解系 $\eta_1=(1,0,-1)^T$，$\eta_2=(0,1,-1)^T$

（作为行、列向量都可以）

因此，A的对应于特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的特征向量为

$k_1\eta_1+k_2\eta_2$ ，其中 k_1,k_2为不同时为零的任意数.

对于$\lambda_3=5$ ，代入$(\lambda E-A)X=0$ 得

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

解得基础解系 $\eta_3=(1,1,1)^T$，故A的对应于特征根

$\lambda_3=5$ 的特征向量为

$k_3\eta_3$ ，其中k_3为不为零任意数.

例3 在线性空间$P_{n-1}[x]$中，微商变换定义为

$$Df(x)=f'(x)$$

取一组基底为 $\left[1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$，求微商变换$D$的矩阵$A$和矩阵$A$的特征根、特征向量.

解：

$$D\left[1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]=\left[0,1,\frac{x}{1!},\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right]$$

$$=\left[1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\left[1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]A$$

故在该基底下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^n$$

故A的特征根为 $\lambda=0$ (n重)

把$\lambda=0$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$ 得基础解系$\xi_1=(1,0,\cdots,0)^T$

因此，A的属于特征根$\lambda=0$的特征向量为

$k\xi_1$ ，k为不为零任意数.

例4 已知实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ x & y & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，的特征根为1，3，5，求$x$，$y$，$z$的值。

解：利用A的所有特征根的和为A的迹，积为A的行列式，有

$$\begin{cases}1+y+1=1+3+5\\ |A|=y-2x=1\cdot 3\cdot 5\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=-4\\ y=7\\ z\in R\end{cases}$$

【z取任意值，验证：当z取任意值时，A的特征根都是1，3，5】

例5　设$A^2=A$，证明矩阵A的特征根只可能为1或0.

证：设λ是A的特征根，X是A的对应于特征根λ的特征向量，那么有

$$AX=\lambda X$$

于是　$AX=A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda(AX)$

$$=\lambda(\lambda X)=\lambda^2X$$

故有 $\lambda X=\lambda^2X$，　即 $(\lambda-\lambda^2)X=O$.

由于 $X\neq O$，　故只能　$\lambda=0$ 或　$\lambda=1$.

例6 设A是n阶矩阵，λ是A的特征根，证明$1+\lambda$是$E+A$的特征根.

证：设X是A的对应于特征根λ的特征向量，则

$$AX=\lambda X$$

于是 $(E+A)X=EX+AX=X+\lambda X=(1+\lambda)X$

故$1+\lambda$是$E+A$的特征根.

例7 试证：n阶矩阵A是奇异矩阵⇔A有一个特征根为零.

证：设A的特征根为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则有

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$$

因此 A是奇异矩阵

⇔$|A|=0$ ⇔ A有一个特征根为零.

二、特征根与特征向量的性质

设n阶矩阵$A \sim B$，即存在可逆矩阵M，使得$B=M^{-1}AM$

那么我们得到

$$\begin{aligned}\varphi_B(\lambda) &= |\lambda E - B| = |\lambda E - M^{-1}AM| \\ &= |\lambda M^{-1}EM - M^{-1}AM| \\ &= |M^{-1}(\lambda E - A)M| \\ &= |M^{-1}|\cdot|(\lambda E - A)|\cdot|M| \\ &= |(\lambda E - A)| \\ &= \varphi_A(\lambda)\end{aligned}$$

这说明：A，B有相同的特征多项式，也就是有相同的特征根.

定理2　相似矩阵有相同的特征根和特征多项式.

注意：定理2的逆是不成立的，如矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

的特征多项式都为 $(\lambda-1)^2$，但是A与B不相似.

同时：如$A\sim diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是A的全部特征根.

定理3 设矩阵A为分块对角形矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，

则$A_1, A_2, \cdots, A_s$ 的所有特征根就是A的全部特征根.

定理4 属于不同特征根的特征向量是线性无关的.

即：设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是矩阵$A$的$m$个互不相同的特征根，$p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是A的分别对应于这m个特征根的特征向量，则 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

证明：(法1)对m做数学归纳法 (见课本160页).

法2 设有常数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 使

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_m p_m = 0.$$

则 $A(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_m p_m) = 0$，即

$$\lambda_1 x_1 p_1 + \lambda_2 x_2 p_2 + \cdots + \lambda_m x_m p_m = 0,$$

类推之，有 $\lambda_1^k x_1 p_1 + \lambda_2^k x_2 p_2 + \cdots + \lambda_m^k x_m p_m = 0.$

$$(k = 1, 2, \cdots, m-1)$$

把上列各式合写成矩阵形式，得

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \cdots, 0)$$

由于矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

的行列式$|B|$为范得蒙行列式，由λ_i互不相等知$|B|\neq 0$，因此B为可逆矩阵．于是得到

$$(x_1p_1, x_2p_2, \cdots, x_mp_m)=(0,0,\cdots,0),$$

即$x_jp_j=0\,(j=1,2,\cdots,m)$.

但 $p_j\neq 0$, 故 $x_j=0\,(j=1,2,\cdots,m)$.

所以向量组 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

定理4的推广：

定理5 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是n阶矩阵A的k个互异的特征根.

又 $X_{j1},X_{j2},\cdots,X_{jr_j}$ 是A对应于特征根 $\lambda_j\ (j=1,2,\cdots,k)$ 的 r_j 个线性无关的特征向量，则向量组

$$X_{11},X_{12},\cdots,X_{1r_1},X_{21},X_{22},\cdots,X_{2r_2},\cdots,X_{k1},X_{k2},\cdots,X_{kr_k}$$

(共 $r_1+r_2+\cdots+r_k$ 个向量)必线性无关.

定理6 设 λ_0 是n阶矩阵A的k重特征根，则A对应于 λ_0 的特征子空间的维数不超过k.

即：当λ_0 是n阶矩阵A的k重特征根时，齐次线性方程组$(\lambda_0 E-A)X=0$ 的基础解系所含向量的个数不多于k.

例1 n阶数量矩阵 kE $(k\neq 0)$的特征方程为$|\lambda E-kE|=(\lambda-k)^n$.

因为$\lambda=k$为kE的n重特征根, 代入$(\lambda E-kE)X=O$得

$OX=O$. 其系数矩阵为零矩阵, 故任意n个线性无关

的向量都是它的基础解系. 而每个非零向量都是它

的特征向量，基础解系所含向量个数不大于重数n.

例2 设A为n阶矩阵, X_1,X_2分别是A对应于两个不同特征根λ_1, λ_2的特征向量. 证明 X_1+X_2不是A的特征向量.

证：用反证法，假设X_1+X_2是A的对应于特征根λ的特征向量，则有

$$A(X_1+X_2)=\lambda(X_1+X_2)$$

又由已知条件知 $AX_1=\lambda_1X_1, AX_2=\lambda_2X_2$，故又得到

$$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2$$

于是有

$$\lambda(X_1+X_2)=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2$$

即 $$(\lambda-\lambda_1)X_1+(\lambda-\lambda_2)X_2=0$$

因为 X_1,X_2对应于不同特征根，故它们线性无关，

于是得到 $\lambda-\lambda_1=0,\ \lambda-\lambda_2=0$

得到 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$.这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾.

所以X_1+X_2不是A的特征向量.

小 结

- 求矩阵特征值与特征向量的步骤(重点)
- 特征根与特征向量的性质(重点)
  (定理2——定理6)
- 用反证法来证明一些问题

§ 5.3.2 矩阵的对角化

先看一个矩阵若可以对角化，应满足什么条件

设n阶矩阵$A=(a_{ij})$与对角形矩阵 $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

相似，即存在可逆矩阵M使得

$D=M^{-1}AM$. 于是，有$AM=MD$.

将M按列分块为$M=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$并代入$AM=MD$得

$$A(X_1,X_2,\cdots,X_n)=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即有

$$AX_j=\lambda_j X_j$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

而由M可逆知它的列向量$X_1, X_2, \ldots, X_n$都不为零且线性无关. 这说明A有n个线性无关的特征向量.

定理1 n阶复矩阵A与对角形矩阵相似的充要条件是 A 有n个线性无关的特征向量.

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是A的n个线性无关的特征向量，且$AX_j= \lambda_j X_j$，令$M=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，则有$M^{-1}AM=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (可相同)是A的全部特征根.

注：

(1)与A相似的对角形矩阵，其主对角线上的元除排列顺序外，是唯一的.

(2)$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的顺序应和$M$中的$X_1, X_2, \cdots, X_n$顺序对应.

(3)M不唯一.

定理2 n阶复矩阵A的特征根都是单根，则A必相似于对角形矩阵。

定理3 n阶复矩阵A相似于对角形矩阵的充要条件是，对每个$k_i(1\le k_i\le n)$重特征根λ_i，矩阵$\lambda_i E-A$的秩为$n-k_i$。

对于上述三个定理，若限定在数域F上讨论A的对角化问题，则只需在定理1－3中将“n阶复矩阵”该为“F上的n阶矩阵”，并在假设条件中补充“A的全部特征根都是数域F中的数”。

例1　判断下列实矩阵能否化为对角化？

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}\qquad(2)A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

解(1)

$$由\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$$

得　$\lambda_1=0,\quad\lambda_2=9,\quad\lambda_3=-1$

因为A有三个不同的特征值，所以由定理2知A可对角化。

解(2)

$$由\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=\left(\lambda+1\right)^3$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$

把$\lambda=-1$代入$\left(\lambda E-A\right)x=0$, 解之得基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

故A不能化为对角矩阵.

例2 将实矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ 对角化.

解：(1)求A的特征根

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ \lambda-2 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

得A的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-4$

或$\lambda_1=2$(二重),$\lambda_2=-4$

(2) 对每个特征根，求对应特征向量的极大线性无关组，即求$(\lambda E-A)X=0$的基础解系.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 解方程组 $(2E-A)X=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$

得基础解系 $X_1=(-2,1,0)^T$，$X_2=(1,0,1)^T$

对 $\lambda_3=-4$，解方程组

$$(-4E-A)X=\begin{pmatrix}-7 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & -6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

得基础解系 $X_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)^T$ 或$X_3=\left(1,-2,3\right)^T$

(3) 构造矩阵M化A为对角形

令

$$M=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1/3\\ 1 & 0 & -2/3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

则 $M^{-1}AM=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -4\end{pmatrix}$ 为对角形.

注意：由于求方程组基础解系可有多种结果，故会得到不同的M，均可将A化成对角形. 同时，M构造顺序不同，得到的最终对角形矩阵也不同.

例如，取 $M=(X_1,X_3,X_2)$ ，则

$$M^{-1}AM=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

例求上面矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ 的100次幂，即 A^{100}。

解：若A相似于对角形矩阵 $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，即存在可逆矩阵$M$，使得$D=M^{-1}AM$，即 $A=MDM^{-1}$ ，则

$$A^k=(MDM^{-1})^k=MDM^{-1}\cdot MDM^{-1}\cdot\cdots\cdot MDM^{-1}=MD^kM^{-1}$$

前面例子我们已经知道存在矩阵 $M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1/3 \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，使得

$$M^{-1}AM=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{pmatrix}=D$$

为对角形，故先求出 M^{-1} 后，再由

$$[diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)]^k=diag(\lambda^k{}_1,\lambda^k{}_2,\cdots,\lambda^k{}_n)$$

即可求出 A^k。

小结

- 方矩可对角化的充要条件(重点).
- 方阵对角化的过程(重点).