第四章 数值积分方法

- 在科学与工程计算中，常常会遇到积分值的计算。
- 本章主要讨论一元函数的积分：

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

- 在大多数情况下，f的原函数不易求出，而且在一些计算问题中，$f(x)$的值是通过列表给出的。在这些情况下，积分的近似数值计算有很重要的意义。

青春万岁 韶华不负

- 容易想到，利用一个函数序列$\{f_1, f_2, \ldots\}$逼近f，再把

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x)dx$$

作为$I(f)$的一个近似值。误差为：

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx$$

可以作出一般的估计：

$$|E_n(f)| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \le (b-a)\|f - f_n\|_\infty$$

f_n常常取为f的插值多项式或分段插值函数。

青春万岁　韶华不负

- 现设$[a,b]$上节点x_0，$x_1, \ldots, x_n$，　f_n是这些节点上f的某种形式的插值多项式，则通过积分可以得到

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

称x_j为求积节点，A_j为求积系数。

- 计算积分近似值的公式，都有共同的形式，就是用$f(x_0)$、$f(x_1)$、…、$f(x_n)$的某种线性组合作为积分$\int_a^b f(x)dx$的近似值。

几个简单的公式

- 设$[a,b]$上有节点$a=x_0< x_1< \ldots < x_n=b$，节点把$[a,b]$分成n个子区间$[x_{j-1},x_j]$（j=1,2,…,n)。每个子区间上积分用$f(x_{j-1})(x_j-x_{j-1})$近似，有：

$$I(f) \approx I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1})$$

这称为复合的左矩形公式。

当每个子区间长度趋于零时，有$I_n(f) \to I(f)$

类似地，也可以构造复合的中矩形公式：

$$I(f) \approx I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} (x - x_{j-1}) f\left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right)$$

也可以有复合的右矩形公式。

青春万岁 韶华不负

第一节 梯形公式与Simpson公式

1 梯形公式

要计算积分$I(f)$，一个简单的方法是用$[a,b]$上线性插值函数近似f。设插值节点为a和 b ，可得到f的线性插值函数：

$$f_1(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

对$f_1(x)$积分，得：

$$I_1(f)=\int_a^b f_1(x)dx=\frac{b-a}{2}f(a)+\frac{b-a}{2}f(b)$$

————梯形公式

用$I_1(f)$近似$I(f)$的几何意义：用梯形面积近似曲面梯形面积。

青春万岁 韶华不负

误差

- 线性插值的误差为：

$$f(x)-f_1(x)=f[x,a,b](x-a)(x-b)$$

现设$f\in C^2[a,b]$，则积分误差

$$E_1(f)=I(f)-I_1(f)=\int_a^b[f(x)-f_1(x)]dx$$

$$=\int_a^b f[x,a,b](x-a)(x-b)dx$$

青春万岁 韶华不负

积分的预备知识：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad g(x)\text{不变号且可积}$$

再看：$\int_a^b f[x,a,b](x-a)(x-b)dx$，$(x-a)(x-b)$在$[a,b]$上总是非正的（不变号），则存在$\xi \in [a,b]$，使

$$E_1(f) = f[\xi,a,b]\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

由均差的性质3，$f[\xi,a,b] = \frac{f''(\eta)}{2}$　　其中$\eta \in [a,b]$

则得到：$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}\frac{f''(\eta)}{2}$　　其中$\eta \in [a,b]$

青春万岁　韶华不负

青春万岁

韶华不负

2 Simpson公式

用二次插值多项式逼近f，插值节点为：$x=a,b$和$c=(a+b)/2$，得

$$f_2(\mathrm{x})=\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)$$

对$f_2(\mathrm{x})$积分，得

$$I_2(f)=\int_a^b f_2(x)dx=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)]$$

——————Simpson积分公式/抛物线公式

青春万岁　韶华不负

- 讨论抛物线公式的误差：

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = \int_a^b f[x, a, c, b](x-a)(x-c)(x-b)dx$$

现设$f \in C^4[a,b]$，则可得出Simpson公式的误差表达式为：

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880}\frac{f^{(4)}(\eta)}{2} \qquad 其中\eta \in [a,b]$$

- 例，设$[a,b]=[0,2]$，则梯形公式和Simpson公式分别为

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0)+f(2)$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)]$$

选择几个初等函数进行计算，见下表：

f(x)	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
积分准确值	2	2	2.67	4	6.4	6.389
梯形公式	2	2	4	8	16	8.389
Simpson公式	2	2	2.67	4	6.67	6.421

- 梯形公式对$f(x)=1$和$f(x)=x$都是精确的，由此可得到梯形公式对所有不超过一次的多项式 $p_1(x)=a_1x+a_0$都是精确成立的。

- 也可以从误差公式：$E_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}\frac{f''(\eta)}{2}$得到，一次多项式的二阶导数为零。

- Simpson公式对所有不超过三次的多项式$p_3(x)$都是精确的，其中：

$$p_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$E_2(p_3)=0$$

- 使近似求积公式准确成立的多项式的次数，可在一定意义下成为求积公式精确程度的一种衡量标准。

- 定义：如果（ ）$= \sigma_{j=}^{n} A_j f(x_j)$式对所有不超过m次的多项式$p_m(x)$准确成立，即$E(p_m) = 0$，而对某一次数为m+1次的多项式$p_{m+1}(x)$有$E(p_{m+1}) \neq 0$，则称近似求积公式$I(f)$具有m次代数精度。

- 要验证某一求积公式代数精度为m，只要验证$E\left(x^k\right) = 0$，k=0,1,...,m，且$E\left(x^{m+1}\right) \neq 0$。

青春万岁 韶华不负

- 例，有近似公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Af(-1)+Bf(0)+Cf(1)$$

试确定系数A、B、C，使该公式具有最高的代数精度。

解：分别令$f(x)=1,x,x^2$，使求积公式准确成立，得

$$\begin{cases} A+B+c=2 \\ -A+C=0 \\ A+C=\frac{2}{3} \end{cases} \quad 得 \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ \mathrm{B}=\frac{4}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

- 求积公式为：$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 1/3f(-1)+4/3f(0)+1/3f(1)$
- 再验证$f(x)=x^3$，它也是准确成立的，而对$f(x)=x^4$，不准确成立，故公式具有三次代数精度。

青春万岁　韶华不负

第二节 插值型求积公式及其截断误差

- 在区间$[a,b]$内给定求积节点$x_k(k=0,1,\dots,n)$，并且$a\le x_0< x_1< \dots< x_n\le b$，以所给求积节点为插值节点，构造函数$f(x)$的拉格朗日插值多项式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f(x_k)$$

其中，$l_k(x)$是拉格朗日插值基函数，

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

用$P_n(x)$近似代替$f(x)$，在区间$[a,b]$上作定积分，得到近似等式

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f(x_k)\quad 其中\quad \lambda_k=\int_a^b l_k(x)dx\quad k=0,1,\dots,n$$

由此得到的求积公式称为插值型求积公式。

青春万岁 韶华不负

- 设$f(x)$在区间$[a,b]$上足够光滑，则有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\,f(x_k)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\qquad \xi\in(a,b)\text{且依赖于}x$$

其截断误差为：

$$R(x)=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f(x_k)=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,dx$$

青春万岁 韶华不负

- 例，验证求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$$

是插值型求积公式。

解：从求积公式看出，求积节点为$x_0 = -1/\sqrt{3}$， $x_1 = 1/\sqrt{3}$，

求积系数是$\lambda_0 = \lambda_1$ =1，而

$$\int_{-1}^{1} l_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} dx = -\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx = 1 = \lambda_0$$

$$\int_{-1}^{1} l_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x-x_0}{x_1-x_0} dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx = 1 = \lambda_1$$

故，所给求积公式是插值型求积公式。

青春万岁 韶华不负

- 例，给定求积节点$x_0 = 1/4$， $x_1 = 3/4$，试推出计算积分$\int_0^1 f(x)dx$的插值型求积公式，并写出它的截断误差

- 解：由已知公式，有

$$\lambda_0 = \int_0^1 l_0(x)dx = \int_0^1 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (4x-3)dx = 1/2$$

$$\lambda_1 = \int_0^1 l_1(x)dx = \int_0^1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (4x-1)dx = 1/2$$

故求积公式为：$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

截断误差为：$R_1(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} f''(\xi)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx \quad \xi\in(0, 1)$

青春万岁
韶华不负

青春万岁　韶华不负

- 定理1：n+1个节点的插值型求积公式至少具有n次代数精度。
- 证明：当$f(x)$为任何次数不高于n的多项式时， $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$，由截断误差公式$R_n(x) = 0$，因而等式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

成立，其中 $\lambda_k = \int_a^b l_k(x)dx \quad k = 0,1, \dots, n$

根据代数精度的定义，定理得证。

- 推论：对于n+1个节点的插值型求积公式的求积系数$\lambda_k(k = 0,1,\ldots,n)$，必满足：

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = b - a$$，其中a和b分别是积分下限和上限。

（提示：对$f(x)$ =1恒成立）

- 定理2：n+1个节点的求积公式，如果具有n次或大于n次的代数精度，则它是插值型求积公式。

青春万岁　韶华不负

第三节 等距节点积分公式

- 设，将$[a,b]$ n等分，$h=(b-a)/n$，取等距节点为$x_i=a+ih$，$i=0,1,\ldots,n$，其中n为大于0的整数，利用这些节点作f的拉格朗日插值多项式，得到

$$L_n(\mathrm{x})=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$$

$$l_i(\mathrm{x})=\prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

对$L_n(\mathrm{x})$积分，得到

$$\int_a^b f(x)dx\approx I\ (f)=\int_a^b L\ (\mathrm{x})dx=\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中，$A\ =\int_a^b l\ (x)dx$

青春万岁 韶华不负

- 进一步，令$t=(x-a)/h$，可得

$$I_n=(b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$$

其中，$C_i=\frac{A_i}{b-a}=\frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{t-j}{i-j}dt$

- 闭型Newton-Cotes积分公式，C_i称为N-C系数，给定n，可计算C_i。

n	C_i				
1	1/2	1/2			梯形公式
2	1/6	2/3	1/6		Simpson公式
3	1/8	3/8	3/8	1/8	

- 很少使用n≥8的情形。

青春万岁 韶华不负

第四节 复合的数值积分公式

- 当基于插值公式计算数值积分时，一般来说，n增大，可能提高公式的代数精度，但提高插值公式次数来逼近f的效果并不佳。所以可以预料到当n→∞时，$I_n(f)$不一定收敛到$I(f)$。
- 即使对收敛的情形，n很大时，Newton-Cotes系数也不容易求出。因此一般不使用n≥8的公式。为了提高近似积分值的准确度，可以将$[a, b]$划分为若干个子区间，在每个子区间上使用低阶的Newton-Cotes公式，即复合公式。

青春万岁
韶华不负

1 复合梯形公式

设$f \in C^2[a,b]$，将$[a,b]$等分为n个子区间$[x_{i-1},x_i]$，$i = 1,2,\dots,n$，其长度为$h = (b-a)/n$，节点为$x_i = a + ih$，$i = 0,1,\dots,n$。

在每个子区间上，用梯形公式及误差公式，得：

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\{\frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i)\} \qquad \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$= I_n(f) + E_n(f)$$

$$I_n(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

——————复合梯形公式

其误差为：

$$E_n(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta\ )$$

由f''的连续性，可知存在$\eta\in[a,b]$，使

$$f''(\eta) = \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)/n$$

故：$E\ (f) = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta) \quad \eta\in[a,b]$

——————误差公式

青春万岁 韶华不负

青春万岁 韶华不负

2 复合Simpson公式

设$f \in C^4[a,b]$，对整数n≥1，设$h=(b-a)/(2n)$，$x_i=a+ih$，$i=0,1,2,\dots,n$，将$[a,b]$等分为n个子区间$[x_{2i-2},x_{2i}]$，$i=1,2,\dots,n$。子区间长度为$2h$，其中有三个节点x_{2i-2},x_{2i-1},x_{2i}。

在每个子区间上，用Simpson公式及误差公式，得

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] - \frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\eta_i)\right\}$$

$$= I_n(f) + E_n(f)$$

$$I_n(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})\right]$$

————复合Simpson公式

误差为：

$$E(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\eta) = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

————误差公式

第五节 外推技术与Romberg积分法

1 外推技术

设有一个常数F^*，由一个依赖于h的算法$F(h)(h>0)$去逼近，其中F^*与h无关，并已知$F(h)$逼近F^*的截断误差为：

$$F^* - F(h) = a_1 h^{p1} + a_2 h^{p2} + \cdots + a_k h^{pk} + \cdots \qquad (*)$$

其中$a_k(k=1,2,\dots)$是与h无关的常数，且

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{k-1} < p_k < \cdots$$

也就是说，$F(h)$逼近F^*的误差阶是h^{p1}。

- 现在提出问题：能否利用$F(h)$构造出一个新的算法$F_1(h)$，使$F_1(h)$逼近F^*的误差阶比h^{p1}更高，例如h^{p2}

  ？ 取一正数q， $q \neq 1$，据(*)式，有

$$F^* - F(qh) = a_1(qh)^{p1} + a_2(qh)^{p2} + \cdots + a_k(qh)^{pk} + \cdots$$

用q^{p1}同乘(*)式两边，得到

$$q^{p1}[F^* - F(h)] = q^{p1}(a_1 h^{p1} + a_2 h^{p2} + \cdots + a_k h^{pk} + \cdots)$$

将红色两式相减，得

$$(1 - q^{p1})F^* - [F(qh) - q^{p1}F(h)] =$$

$$a_2(q^{p2} - q^{p1})h^{p2} + a_3(q^{p3} - q^{p1})h^{p3} + \cdots + a_k(q^{pk} - q^{p1})h^{pk} + \cdots$$

青春万岁　韶华不负

- 整理得：

$$F^* - \frac{F(qh) - q^{p1}F(h)}{1 - q^{p1}} =$$

$$a_2 \frac{q^{p2} - q^{p1}}{1 - q^{p1}} h^{p2} + a_3 \frac{q^{p3} - q^{p1}}{1 - q^{p1}} h^{p3} + \cdots + a_k \frac{q^{pk} - q^{p1}}{1 - q^{p1}} h^{pk} + \cdots$$

$$= a_2^{(1)} h^{p2} + a_3^{(1)} h^{p3} + \cdots + a_k^{(1)} h^{pk} + \cdots \qquad (**)$$

其中，$a_2^{(1)} = a_2 \frac{q^{p2} - q^{p1}}{1 - q^{p1}}$ … $a_k^{(1)} = a_k \frac{q^{pk} - q^{p1}}{1 - q^{p1}}$ 都是与h无关的常数。

青春万岁 韶华不负

令：

$$F_1(h) = \frac{F(qh) - q^{p_1} F(h)}{1 - q^{p_1}}$$

则， $F_1(h)$逼近F^*的误差阶已提高到h^{p_2}。

类似地，令

$$F_2(h) = \frac{F_1(qh) - q^{p_2} F_1(h)}{1 - q^{p_2}}$$

则， $F_2(h)$逼近F^*的误差阶提高到h^{p_3}。

- 定义： $F_j(h)$ 为

$$F_0(h) = F(h)$$

$$F_j(h) = \frac{F_{j-1}(qh) - q^{pj}F_{j-1}(h)}{1-q^{pj}} \quad j = 1,2, \ldots \qquad (***)$$

则， $F_j(h)$逼近F^*的截断误差由下面的定理指明。

- 定理：若$F(h)$逼近F^*的截断误差由式(*)给出，那么，由式(***)定义的

$F_j(h)$逼近F^*的截断误差为

$$F^* - F(h) = a_{j+1}^{(j)} h^{pj+1} + a_{j+2}^{(j)} h^{pj+2} + \cdots + a_k^{(j)} h^{pk} + \cdots$$

其中$a_k^{(j)}(k \geq j+1)$都是与h无关的常数。

证明：使用归纳法。略

青春万岁 韶华不负

- 上述技术称为Richardson外推技术，也称为外推算法。

由已知的序列：

$$F(h)、F(qh)、F(q^2h)、F(q^3h)\cdots\cdots$$

通过(***)式，得到第二个序列

$$F_1(h)、F_1(qh)、F_1(q^2h)、F_1(q^3h)\cdots\cdots$$

再通过(***)式，得到第三个序列

$$F_2(h)、F_2(qh)、F_2(q^2h)、F_2(q^3h)\cdots\cdots$$

- 定义：设复化求积公式为$\int_a^b f(x)dx \approx I$，其中n是区间$[a,b]$的等分数，如果

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(n\to\infty)}} \frac{\int_a^b f(x)dx - I_n}{h^p} = c$$

其中c是一个非零常数，p是一个正实数，则称I_n是p阶收敛的。

针对利用外推技术得到的各个序列，若序列$\{F(q^m h)\}$收敛于F^*，并且是p_1阶收敛的，则序列$\{F_1(q^m h)\}$也收敛于F^*，并且是p_2阶收敛的，序列$\{F_2(q^m h)\}$是p_3阶收敛的，…。

青春万岁 韶华不负

- Richardson外推技术的计算步骤可按下表执行：

$F_0(h)$①				
$F_0(qh)$②	$F_1(h)$③			
$F_0(q^2h)$④	$F_1(qh)$⑤	$F_2(h)$⑥		
$F_0(q^3h)$⑦	$F_1(q^2h)$⑧	$F_2(qh)$⑨	$F_3(h)$⑩	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

青春万岁 韶华不负

Romberg积分法

青春万岁 韶华不负

- 使用复化求积公式计算积分近似值，节点数目越多，截断误差越小。但是，节点多，计算量就大。而事先定下节点数显然又是不现实的。有效的方法是让节点数目从少到多地变化，即步长可变。
- 逐次将积分区间分半，用T_m表示积分区间$[a,b]$被分为$n=2^m$等分后所形成的梯形值，此时步长$h_m=(b-a)/2^m$

$$T_0=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$T_1=\frac{h_1}{2}[f(a)+f(b)\ +2f(a+h_1)]$$

$$=\frac{1}{2}T_0+h_1f(a+h_1)$$

$$T_2 = \frac{h_2}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{3} f(a + kh_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}T_1 + h_2\sum_{i=1}^{2} f(a + (2i-1)h_2)$$

$$T_3 = \frac{h_3}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{7} f(a + kh_3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}T_2 + h_3\sum_{i=1}^{4} f(a + (2i-1)h_3)$$

一般地，若T_{m-1}已算出，则

$$T_m = \frac{1}{2}T_{m-1} + h_m\sum_{i=1}^{2^{m-1}} f(a + (2i-1)h_m)$$

青春万岁 韶华不负

- $\{T_m\}$称为梯形值序列。

T_{m-1}是把区间$[a,b]$分为2^{m-1}个子区间所得的复化梯形值，在此基础上，再取各个子区间的中点作为新的节点，就可计算T_m。这种方法称为区间逐次分半法。

梯形值序列$\{T_m\}$收敛于积分值$\int_a^b f(x)dx$，设$f(x)$在区间$[a,b]$上足够光滑，把T_m记为$T_m^{(0)}$，它是步长为$h_m = (b-a)/2^m$的复化梯形值，取$q = \frac{1}{2}, h = b - a$， $F_0(q^m h) = T_m^{(0)}$ $m = 0,1, \ldots$

青春万岁 韶华不负

- 由复化梯形公式的截断误差表达式，有

$\int_a^b f(x)dx - T_0^{(0)} = a_1h^2 + a_2h^4 + \cdots + a_kh^{2k} + \cdots$ 其中$a_k(k = 1,2,\ldots)$是与h无关的常数。

利用Richardson外推算法，得到如下的求积方法：

$$T_0^{(0)} = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

对于$m = 0,1,\ldots$，依次计算

(1) $h_m = (b-a)/2^m$

(2) $T_m^{(0)} = \frac{1}{2}T_{m-1}^{(0)} + h_m \sum_{i=1}^{2^{m-1}} f(a + (2i-1)h_m)$

(3) $T_{m-j}^{(j)} = \frac{T_{m-j+1}^{(j-1)} - (\frac{1}{2})^{2j} T_{m-j}^{(j-1)}}{1-(\frac{1}{2})^{2j}} = \frac{4^j T_{m-j+1}^{(j-1)} - T_{m-j}^{(j-1)}}{4^j - 1} \quad (j = 1,2,\ldots,m)$

——————Romber积分

- Romberg积分顺序表：

$T_0^{(0)}$①			
$T_1^{(0)}$②	$T_0^{(1)}$③		
$T_2^{(0)}$④	$T_1^{(1)}$⑤	$T_0^{(2)}$⑥	
$T_3^{(0)}$⑦	$T_2^{(1)}$⑧	$T_1^{(2)}$⑨	$T_0^{(3)}$⑩
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

梯形值序列 二阶收敛	Simpson值序列 四阶收敛	Cotes值序列 六阶收敛	Romberg值序列 八阶收敛

- 一般地，第j列$\{T_m^{(j-1)}\}$是2j阶收敛的。

- Romberg积分法是一个迭代过程，控制迭代结束的条件是：

$$|T_0^{(m)} - T_0^{(m-1)}| < \varepsilon$$

或是：

$$\frac{|T_0^{(m)} - T_0^{(m-1)}|}{|T_0^{(m)}|} < \varepsilon$$

ε是预先给定的正数。

当满足结束条件时，结束迭代，$T_0^{(m)}$就是所求的积分近似值 。

第六节 Gauss求积方法

- 考虑带权的积分式：

$$I(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

其中，$\rho(x)$为权函数，希望找到一个$I(f)$的近似式：

$$I_n(f)=\sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

使$I(f)\approx I_n(f)$，并且使其代数精确度尽量高，其中求积节点

$$x_j\in[a,b]\quad j=0,1,\ldots,n$$

- 如果希望上式有更高的代数精确度，显然不能再采用等距节点。

青春万岁 韶华不负

- 在$[a,b]$内取n个互异的节点$x_1, x_2,\ldots, x_n$，对$f(x)$进行拉格朗日插值，得

$$f(x) = \sigma_{i=1}\, l_i(x)f(x_i) + \frac{f^{(n)}(\ )}{n\,!}\omega_n(x)$$

当$x \in [a,b]$时，ξ∈(a, b)，其中

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

$$l\ (\text{x}) = \varsigma^{n}_{\substack{j\neq i\\ j=1}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

青春万岁　韶华不负

- 由此得到求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \qquad (1)$$

其中 $A = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega_n(x)}{(x-x\ )\omega_n'(x\ )}dx \quad i = 0,1,\dots,n \qquad (2)$

截断误差为

$$R(x) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\rho(x)\omega\ (x)dx \qquad (3)$$

青春万岁 韶华不负

- 分析：由截断误差公式(3)可知，无论求积节点x_i在$[a,b]$内如何选择，A_i由公式(2)确定的求积公式(1)对任何次数不高于n-1的多项式$f(x)$必成为精确等式，即它的代数精确度至少是n-1。
- 现在提出问题：能否选取适当的节点$x_1, x_2, \ldots, x_n$，使A_i由公式(2)确定的求积公式(1)对$f(x)$分别为x^n、x^n、x^{n+1}、...、x^{2n-1}也成为精确等式，即它的代数精确度能否提高到2n-1？
- 由于从n-1到2n-1提高了n次，而节点的选择又有n个自由度，所以求积公式(1)的代数精确度有可能达到2n-1。

- 另一方面，不存在这样的节点 $x_i \in [a,b](i=1,2,\ldots,n)$和求积系数$A_i\ (i=1,2,\ldots,n)$，使求积公式(1)的代数精确度达到2n。

事实上，只要令

$$\varphi(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2$$

其中，互异的x_1，x_2，…，x_n在$[a,b]$内任取，有

$$\int_a^b \rho(x)\varphi(x)dx>0$$

但对任意的求积系数$A_i\ (i=1,2,\ldots,n)$，恒有

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\varphi(x_i)=0$$

可见，求积公式(1)对2n次多项式$\varphi(x)$不能成为精确等式。

青春万岁

韶华不负

- 定义：对于求积公式(1)，其中A_i由(2)确定，如果对于任何次数不 高于2n-1的多项式$f(x)$，式(1)成为精确等式，则称式(1)为Gauss 型求积公式。
- 根据 前面的讨论，Gauss型求积公式是具有最高代数精确度的求积公式，n个节点的Gauss型求积公式的代数精确度是2n-1。

青春万岁 韶华不负

- Gauss-Legendre求积公式
- 给定权函数$\rho(x) \equiv 1$，积分区间$[-1,1]$，求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$A_i = \int_{-1}^{1} \frac{L_n(x)}{(x-x_i)L_n'(x_i)}dx = \frac{2}{(1-x^2)[L_n'(x_i)]^2} \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^n-1)^n]$$

截断误差为：

$$R(x) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\frac{2^{2n}(n!)^4}{[(2n)!]^2}\frac{2}{2n+1} \qquad \eta\in[-1,1]$$

青春万岁

韶华不负

- 节点和系数列表：

n	x_i	A_i
0	0	2
1	±0.5773503	1
2	±0.7745967 0	0.5555556 0.8888889
3	±0.8611363 ±0.3399810	0.3478548 0.6521452
4	±0.9061798 ±0.5384693 0	0.2369269 0.4786287 0.5688889

青春万岁 韶华不负

- 两点式Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- 三点式Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

青春万岁 韶华不负

- 如果积分区间是$[a, b]$，则变量置换

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt$$

青春万岁 韶华不负

- 例，用四点G-L求积公式计算积分$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx$

解：令$x = \frac{1}{2}(t+3)$

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\frac{2}{t+3}} dt$$

记$\varphi(t) = e^{\frac{2}{t+3}}$，则有

$$\varphi(t_1) = \varphi(-0.8611363) = 2.547406932$$

$$\varphi(t_2) = \varphi(-0.3399810) = 2.120971718$$

$$\varphi(t_3) = \varphi(0.3399810) = 1.819944113$$

$$\varphi(t_4) = \varphi(0.8611363) = 1.678637128$$

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx \approx \frac{1}{2}\left[0.3478548\big(\varphi(t_1) + \varphi(t_4)\big) + 0.6521452\big(\varphi(t_2) + \varphi(t_3)\big)\right] = 2.020049534$$

青春万岁 韶华不负

青春万岁　韶华不负

- Gauss-Laguerre求积公式
- 给定权函数$\rho(x) = e^{-x}$，积分区间$[0, \infty)$，求积公式

$$A \;= \frac{(n!)^2}{x_i[U'(x_i)]^2} \qquad i = 1,2, \dots, n$$

$$U\;(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

截断误差为：

$$R(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta)$$

- Gauss型求积公式特点：
- 使用的求积节点少，而结果的精度高
- 可计算广义积分
- 计算需查表，前面的结果（节点少）对后面的计算（节点多）无帮助
- 收敛快