Chpt.7 Statistical Inference: Parameter Estimation

第七章 参数估计

总结1：三大分布

- χ^2分布

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, i.i.d. $\sim N(0,1)$，则

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$E(\chi^2)=n，D(\chi^2)=2n$$

的分布为具有自由度 n 的 χ^2 分布,记作 $\xi \sim \chi^2(n)$ 或 $\xi \sim \chi_n^2$

- t分布

设 $X \sim N(0,1), K \sim \chi^2(n)$ 且二者独立，则

$$T = \frac{X}{\sqrt{K/n}}$$

的分布称为自由度为 n 的 t 分布，记作 $T \sim t(n)$ 或 $T \sim t_n$.

- F分布

设 $K_1 \sim \chi^2(m), K_2 \sim \chi^2(n)$ 且二者独立，则

$$F = \frac{K_1/m}{K_2/n}$$

的分布称为具有自由度 (m,n)（或第一自由度为 m，第二自由度为 n）的 F 分布，记为

$F \sim F(m,n)$ 或 $F \sim F_{m,n}$

总结2：几类重要的抽样分布

前提：设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体的n 个简单随机样本

- 正态分布 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$ $\qquad \overline{X}$ 与 S^2 是独立的
- χ^2分布 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$ $\qquad \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- T分布 $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

总结2：几类重要的抽样分布

前提：设$X_1,X_2,...,X_{n_1}$是总体$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$的$n_1$个简单随机样本

$Y_1,Y_2,...,Y_{n_2}$是总体$X \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

n_2个简单随机样本

- 正态分布

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

当σ$_1$=σ$_2$=σ时

- T分布

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2) \qquad S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

- F分布

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}=\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$

总结2：几类重要的抽样分布

前提：设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体的n 个简单随机样本

- 正态分布 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$ $\bar{X}$ 与 S^2 是独立的

- χ^2分布 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

- T分布 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

对于单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，得到了$\bar{X}$，S^2的分布，用于对μ,σ^2进行推断（区间估计，假设检验）.

总结2：几类重要的抽样分布

前提：设$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$是总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$的$n_1$个简单随机样本

$\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_{n_2}$是总体$X \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

n_2个简单随机样本

- **正态分布**

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

当σ$_1$=σ$_2$=σ时

- **T分布**

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2) \qquad S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

- ***F*分布**

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2}$$

对于两个独立正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，得到了$\bar{X}-\bar{Y}, S_1^2/S_2^2$的分布，用于对$\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$进行推断.

例题4：设X_1, X_2, X_3, X_4是来自总体N(0,4)的样本，

(1) 求常数C，使得Y=C$[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2]$服从$\chi^2$分布，并指出自由度是多少？

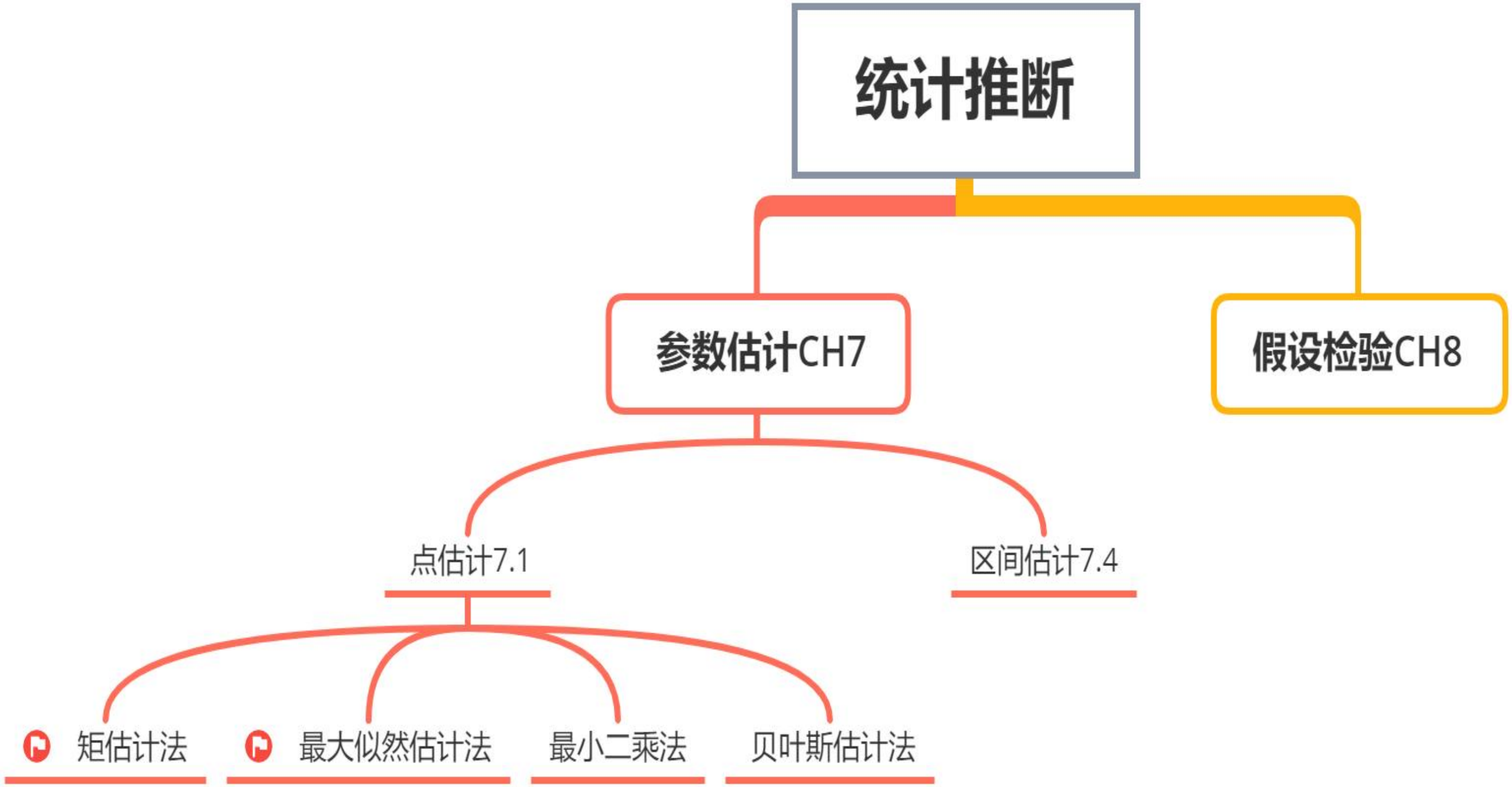
(2)证明$Z = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_3 + X_4)^2}$服从F(1,1)

例题5：设总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，从两个总体中分别抽样得到$n_1 = 8,\ S_1^2 = 8.75; n_2 = 10,\ S_2^2 = 2.66$。求概率$P\{\sigma_1^2 > \sigma_2^2\}$

例题6：设在总体$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$中抽样一容量为16的样本，这里$\mu, \sigma^2$均为未知。

（1）求概率$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.041\right\}$,其中$S^2$为样本方差；（2）求$D(S^2)$

统计推断


统计推断
参数估计CH7
假设检验CH8
点估计7.1
区间估计7.4
矩估计法
最大似然估计法
最小二乘法
贝叶斯估计法

7.1 参数的点估计

现象：

很多随机变量/总体的分布是有几个参数完全决定的。

正态分布$N(\mu，\sigma^2)$

Poisson分布$\pi(\lambda)$

假定分布形式已知，知道了参数就可以确定分布

问题：

设总体X的分布函数的形式已知，但它的一个或多个参数未知。

借助总体X的样本来估计总体分布中的未知参数θ问题，称为参数的点估计问题。

概念：

设总体X的分布函数F(X,θ) 的形式为已知，θ是待估参数。

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是X的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应的一个样本观测值。

估计问题就是构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ ，用它的观测值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 作为未知参数θ的近似值。

我们称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为θ的估计量，$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为θ的估计值。

$\hat{\theta}(X) \to \theta$ 数学保证；$\hat{\theta}(x) \approx \theta$ 工程计算

[方法1] 矩估计法

考虑连续的情形（离散的情形类似）

设X为连续随机变量，其概率密度为$f(x;\theta_1,\theta_1,\ldots,\theta_k)$ ，其中

$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为待估参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X的样本。

假设总体 $\boldsymbol{X}$ 的前 k 阶矩 μ_l 存在：

$$\mu_l = E(X^l) = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x;\theta_1,\theta_1,\ldots,\theta_k)dx = \mu_l(\theta_1,\theta_1,\ldots,\theta_k)$$

$$l = 1,2,\cdots,k$$

其中 μ_l 是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数。由此可以求解得到：

[方法1] 矩估计法

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1, \cdots, \mu_k) \\ \quad\vdots \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1, \cdots, \mu_k) \end{cases}$$

反解前一页的方程组，得到各个参数的解析表达

操作中：k 阶矩 μ_l 不能得到，用样本矩 $A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ (l=1,2,…,k), 代替 μ_l，形成对θ_l的估计：

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1, \cdots, A_k) \\ \quad\vdots \\ \hat{\theta}_k = \theta_k(A_1, \cdots, A_k) \end{cases}$$

这样的估计量称为矩估计量，得到的值称为矩估计值。

[方法1] 矩估计法

统计思想:以样本矩估计总体矩,以样本矩的函数估计总体矩的函数.

理论根据:辛钦大数定律和依概率收敛的性质

假设$\mu_j = E(X^j)$存在,$j = 1,\ldots,k.$

则 $\boxed{\begin{array}{l}\hat{\mu}_j = A_j = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j,\ j=1,\ldots,k, \\ \hat{h}(\mu_1,\cdots,\mu_k) = h(A_1,\cdots,A_k)\end{array}}$ $\begin{array}{l}\xrightarrow{P} \mu_j,\ j=1,\cdots,\mu_k \\ \xrightarrow{P} h(\mu_1,\cdots,\mu_k)\end{array}$

[例1] 设总体X的均值μ方差σ^2都存在但未知，设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体X的样本，求μ与σ^2的矩估计。

2个参数，需计算二阶矩

解：

$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \mu \\ \mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{cases}$$

注意：要在参数上边加上“^”，表示参数的估计量，它是统计量。

代替μ_1， μ_2得到，

$$\begin{cases} \hat{\mu} = A_1 = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \end{cases}$$

这说明均值、方差的矩估计表达式不因分布的不同而不同。

例2：设$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是取自总体X的简单样本, X 有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}, & x \ge \mu, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2个参数，需计算二阶矩

其中 θ, μ 为未知参数， $\theta > 0$。求 θ, μ 的矩估计。

解：先求总体的一阶原点矩（均值）和二阶原点矩。

$$E(X)=\int_{\mu}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta} \,\mathrm{d}\, x$$

令$y=(x-\mu)/\theta$

$$=\int_{0}^{\infty} (\theta\, y+\mu) e^{-y} \,\mathrm{d}\, y$$

$$=\theta+\mu .$$

$$E(X^2) = \int_{\mu}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta} \, \mathrm{d}\, x$$

令$y=(x-\mu)/\theta$

$$= \int_0^{\infty} (\theta\, y + \mu)^2 e^{-y} \, \mathrm{d}\, y$$

$$= \int_0^{\infty} (\theta^2\, y^2 + 2\theta\mu\, y + \mu^2) e^{-y} \, \mathrm{d}\, y$$

$$= \cdots$$

$$= 2\theta^2 + 2\theta\mu + \mu^2$$

$$= \theta^2 + (\theta + \mu)^2,$$

$$\begin{cases}\theta = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} \\ \mu = E(X) - \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}\end{cases}$$

分别以一二阶样本矩代替E(X)，E(X^2)得到，

$$\begin{cases}\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}, \\ \hat{\mu} = \overline{X} - \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}.\end{cases}$$

关于对于μ和σ^2的估计及讨论

1. μ 和σ^2 通常表示 期望和方差，但不是必须的，如前文中的例子， μ 就不是期望。更有甚者，μ 和σ^2在分布表达式中都不会出现，此时参数估计的是表达式中出现的特定参数。

2 矩估计求出的参数μ 和σ^2，属于参数估计，但是不足以充分表示某一个特定分布，可能还要继续求出相关的 其他参数。

3. 对于正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，参数估计的全部目标就是讨论μ 和σ^2，这是个特例。

例3：若总体 $X\sim$ U(a, b)，求a, b的矩估计。

解

$$\mu_1 = E(X) = (a+b)/2,$$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$
$$= (b-a)^2/12 + (a+b)^2/4.$$

即
$$\begin{cases} a+b = 2\mu_1, \\ b-a = \sqrt{12(\mu_2-\mu_1^2)}. \end{cases}$$

解这一方程组得

$$a = \mu_1 - \sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}, \quad b = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

分别以 A_1, A_2 代替 μ_1, μ_2，得到 a, b 的矩估计量分别为（注意到 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$）：

$$\hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2-A_1^2)} = \overline{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2},$$

$$\hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2-A_1^2)} = \overline{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

□

[方法2] 极大似然法

[1] 思想方法

极大似然法的想法是，一随机试验，已知有若干个结果

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ ,A_i,\ \cdots$$

如果在一次试验中A_i发生了，则可认为当时的条件最有利于A_i发生，故应选择分布的参数，使发生A_i的概率最大。

[方法2] 极大似然法

[例4] 已知甲乙两射手命中靶心的概率分别为$p_1=0.8$和$p_2=0.5$， 今有一张靶纸上表明10枪6中靶心，又知靶子肯定是甲乙之一射的，问究竟是谁所射的可能性最大？

[解] 设事件$A=\{10枪6中靶心\}$

若是甲所射，则A发生的概率为,

$$P_1(A)=C_{10}^{6}(0.8)^6(0.2)^4=0.088$$

若是乙所射，则A发生的概率为,

$$P_2(A)=C_{10}^{6}(0.5)^6(0.5)^4=0.21$$

显然，$P_1(A)<P_2(A)$，故可认为乙所射的可能性较大.

[方法2] 极大似然法

[2] 似然函数（likelihood）

含参数θ的总体X的样本 $X_1,\cdots,X_n$，设 $x_1,\cdots,x_n$为样本的观测值.

- 当X是离散型时, 设其概率分布为 $P\{X=x\}=p(x,\theta)$, 令

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)$$

$L(\theta)$ 称为似然函数，其实质就是样本观测值出现的概率.

- 当X是连续型时，设其概率密度为$f(x,\theta)$，类似得到似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

[方法2] 极大似然法

[3] 参数的估计

参数的取值应使所抽到的样本值以最大的概率出现. 换言之, 应使似然函数$L(\theta)$达到最大值.

最大相似然估计与样本观测值$x_1,\cdots,x_n$直接相关，它是使得似然函数 $L(\theta)$达到最大值的估计值：

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$$

$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为<u>最大似然估计值</u>

相应的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为<u>最大似然估计量</u>

Maximum Likelihood Estimate, MLE

[方法2] 极大似然法

Remark 1：在很多情况下 $p(x,\theta)$、$f(x,\theta)$ 关于θ 可微，这时最大似然估计值$\hat{\theta}$可从方程 $\frac{d}{d\theta}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=0$ 求得。

Remark 2：常用似然函数的对数--对数似然函数来代替它。因为lnL是L的单增函数，lnL与L在同一θ处取到极值，因此最大似然估计值$\hat{\theta}$也可用

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=0$$

Remark 3：与MLE相对应的，是基于Bayes概率（统计学）的最大后验估计，称之为MAP （Maximum *aposteriori* estimation）该部分内容我们会在讲完区间估计后稍作拓展

[方法2] 极大似然法

例4： 设总体X服从泊松分布 P(λ)，求参数λ的极大似然估计。

解： 由X的概率为

$$p(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\cdots,$$

得λ的似然函数

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!},$$

[方法2] 极大似然法

对数似然函数为

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + (\ln \lambda)\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!),$$

似然方程为

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

其解为

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

[方法2] 极大似然法

因 $$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln L(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0,$$

知 $\bar{x}$ 是 $\ln L(\lambda)$ 的唯一极大值点。所以，它又是最大值点。λ**的最大似然估计**值为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

λ 的极大似然估计量为

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

[方法2] 极大似然法

例5：设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自总体 $X\sim B(1, p)$ 的一个样本，求参数 p 的极大似然估计。

解：X的概率分布律为：

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1$$

似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i, p)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$=p^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i},$$

[方法2] 极大似然法

对数似然函数为：

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln(p)+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p),$$

对p求导，并令其等于零，得

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)=0.$$

$n\bar{x}$

上式等价于

$$\frac{\bar{x}}{p}=\frac{1-\bar{x}}{1-p}.$$

[方法2] 极大似然法

$$\frac{\bar{x}}{p} = \frac{1-\bar{x}}{1-p}.$$

解上述方程，得 $p = \bar{x}$.

p的极大似然估计值为 $\hat{p} = \bar{x}$

p的极大似然估计量 $\hat{p} = \bar{X}$

正态分布的参数的极大似然估计

例6：设总体X服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，其中参数 μ,σ^2 未知，求它们的极大似然估计值.

解 设为 $x_1,\cdots,x_n$ 其样本观察值，则似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$\ln L=-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-n\ln\sigma-\frac{n}{2}\ln 2\pi$$

正态分布的参数的极大似然估

令

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} = 0$$

解得

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

正态分布的极大似然估计与矩估计一致

回46 回53

例题7：关于矩估计和MLE估计的对比

设 X 的概率密度为

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中$\alpha>-1$为未知参数，$(X_1,\dots,X_n)$是取自总体 X 的样本，试求α的矩阵估计量与最大似然估计量。

解：$EX=\int_0^1 x(\alpha+1)x^{\alpha}dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$

$$\alpha=\frac{2EX-1}{1-EX},\quad \hat{\alpha}_{ME}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$$

似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}(\alpha)x_i^{\alpha}=(\alpha+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\alpha}$$

$$Ln\,L=nln(\alpha+1)+\alpha\sum_{i=1}^{n}lnx_i$$

似然方程

$$\frac{dLn\,L}{d\alpha}=\frac{n}{\alpha+1}+\sum_{i=1}^{n}lnx_i=0$$

解得

$$\hat{\alpha}_{MLE}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}lnx_i}$$

回46 回53

矩估计和极大似然估计的数值比较

我们假设进行了5次统计采样，采样数据为{0.5,0.3,0.5,0.2,0.4}，那么对于矩估计，样本经验估计值为

$$\hat{\alpha} = \frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}} \qquad \hat{\alpha}_{ME} = \frac{2\cdot 0.38-1}{1-0.38} = -0.3871$$

对于极大似然估计

$$\hat{\alpha}_{MLE} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} lnx_i} \qquad \hat{\alpha}_{MLE} = -1 - \frac{5}{-5.116} = -0.027$$

核心区别：统计量不一样。

设置

设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geqslant \theta \\ 0, & x<\theta \end{cases}$$

$(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自总体X的样本，则参数θ的矩估计量为 ______

作答

主观题 10分

设置

设射手的命中率为p，在向同一目标的80次射击中，命中75次，则p的最大似然估计值为____

注意：这里的总体是什么。

作答

主观题 10分

设置

设总体X的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中$0<\theta<\frac{1}{2}$是未知参数，利用总体X的如下样本值3,1,3,0,3,1,2,3求θ的矩估计值和最大似然估计值。

作答