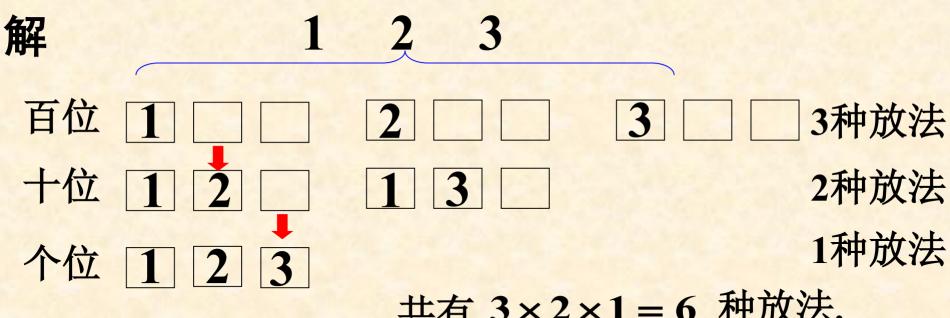


# 第一章行列式

§ 1.1.2 排列

#### 排列概念的复习

用1、2、3三个数字,可以组成多少个没 有重复数字的三位数?



共有 3×2×1=6 种放法.

定义 把 n个不同元素排成一列,叫做这 n个元素的全排列(或排列).

n个不同元素所有排列的种数,通常用  $P_n^n$ 或 $(A_n^n)$  表示.

$$P_n^n(\vec{\boxtimes}A_n^n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

注:本书主要研究由n个不同自然数(可不必是前n个自然数)构成的排列,以后凡提到排列除非特殊说明都是指这种排列。

定义 在一个排列中,若一对数中前面的大于后面的,则称它们构成一个反序(逆序),否则称它们构成 一个顺序。

#### 二、排列的反序数

- 定义1 排列中若某个数字右边有r个比它小的数字,则称该数字在此排列中有r个反序。
  - 一个排列中反序的总数称该排列的反序数(逆序数)。

排列  $j_1j_2\cdots j_n$  的逆序数记为  $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ ,它可由该排列中所有数字的反序之和求得。

另外,可通过找出所有反序得到排列的反序数。

例: 
$$\tau(31254) = 2 + 0 + 0 + 1 + 0 = 3$$
  

$$\tau(n,(n-1),\cdots 2,1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

由n个不同自然数构成的所有排列共有 n!个。 唯一一个反序数等于零的排列是按自然数由小到大的 排列,该排列称为标准排列(自然顺序排列)。

例  $\tau(1,2,\dots,(n-1),n)=0+0+\dots+0=0$  为一个标准排列。

## 三、排列的奇偶性与互换

定义2 反序数为偶数的排列称为偶排列; 反序数为奇数的排列称为奇排列。

#### 排列的操作——互换

把一个排列中某两个数位置互换,其余数字不动,就得到另一个排列。这一过程称为一次互换 (对换)。 例:  $2431 \xrightarrow{1,25} 1432 \xrightarrow{2,15} 2431$ 

 $\tau(2431) = 1 + 2 + 1 = 4$   $\tau(1432) = 0 + 2 + 1 = 3$ 

偶排列

奇排列

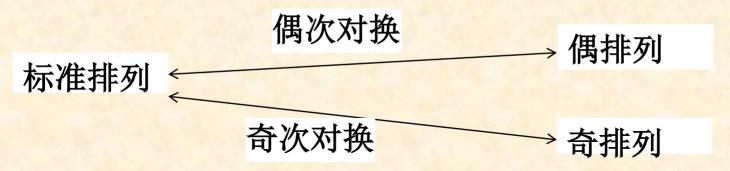
偶排列

一般性结论

引理排列经过一次互换改变其奇偶性。

即,经一次互换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列。证:先证明一种特殊情况(简单易处理),以此为基础证明一般情况。

定理 n (n≥2)个不同自然数的任一排列必可经若干次 互换变成标准排列,并且互换次数与该排列的 奇偶性一致。 即:



证明: (第一) 数学归纳法

例1: 已知排列①:  $i_1i_2\cdots i_n$  的反序数为s,求排列②:  $i_ni_{n-1}\cdots i_1$  的反序数(这里n>2)。

例2: 证明由  $n(n \ge 2)$ 个不同自然数构成的所有排列中, 奇偶排列各占一半儿。

### 小结

- >会计算一个排列的反序数;
- >排列具有奇偶性;
- ▶排列经过一次互换改变其奇偶性,任意排列可经若干次互换成标准排列;
- 》了解并熟悉由特殊到一般的证明方法和用 数学归纳法证明问题的方法。
- >了解前面例2证明问题的方法。