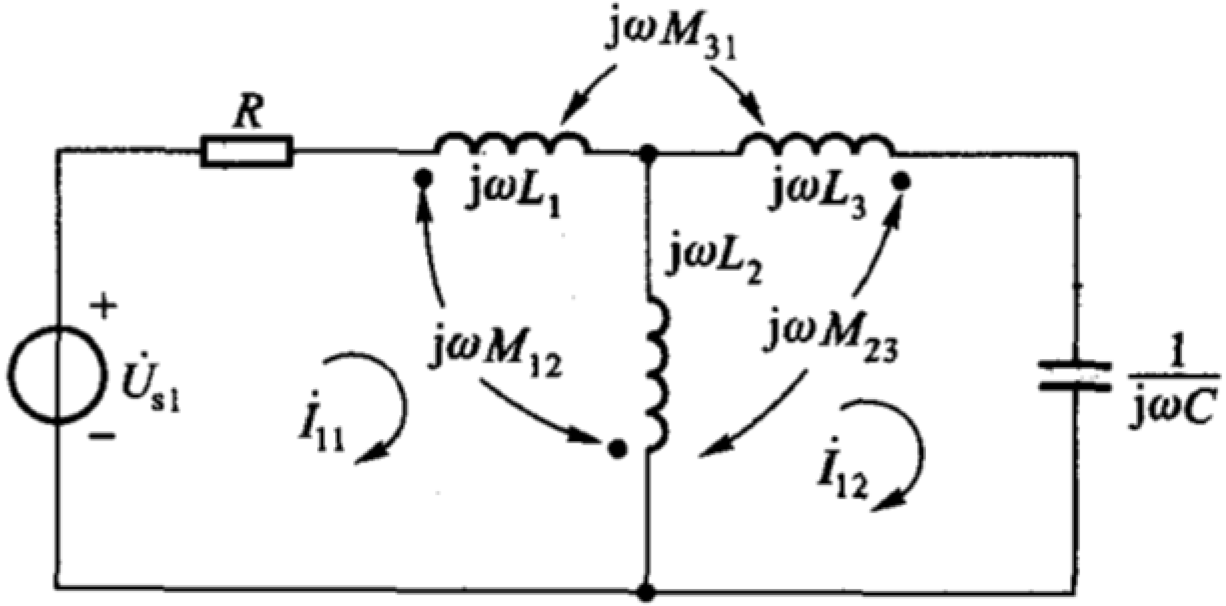


10-15

①

L1 互感.

$$(R_1+j\omega L_1+j\omega L_2)\dot{I}_1-j\omega L_2\dot{I}_2+j\omega M_{12}(\dot{I}_2-\dot{I}_1)-j\omega M_{31}\dot{I}_2$$

L2 互感

$$-j\omega M_{12}\dot{I}_1+j\omega M_{23}\dot{I}_2=\dot{U}_{S1}$$

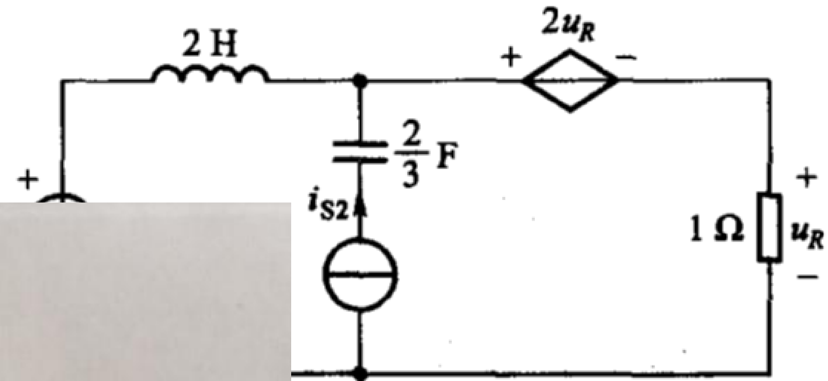
L2 互感

② $$-j\omega L_2\dot{I}_1+\left(j\omega L_2+j\omega L_3+\frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2+j\omega M_{12}\dot{I}_1-j\omega M_{23}\dot{I}_2$$

L3 互感.

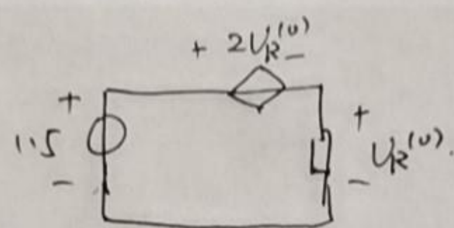
$$-j\omega M_{31}\dot{I}_1+j\omega M_{23}(\dot{I}_1-\dot{I}_2)=0.$$

13-11 题 13－11 图所示电路中 $u_{S1}=[1.5+5\sqrt{2}\sin(2t+90^\circ)]$ V，电流源电流 $i_{S2}=2\sin(1.5t)$ A。求 u_R 及 u_{S1} 发出的功率。



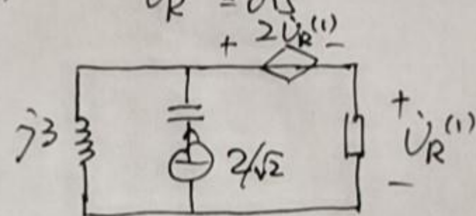
13-11

直流：$\omega=0$.



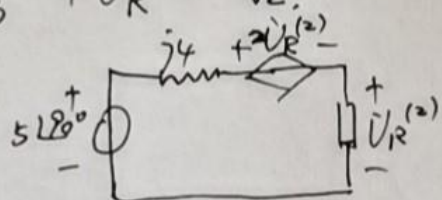
$1.5=3U_R^{(0)}$ $\quad U_R^{(0)}=0.5$

$\omega=1.5$



$$\frac{3\dot{U}_R^{(1)}}{j3}+\dot{U}_R^{(1)}=\frac{2}{\sqrt{2}}. \qquad \dot{U}_R^{(1)}=\frac{1+j}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sqrt{2}}.$$

$\omega=2$.



$$j5=(j4+3)\dot{U}_R^{(2)} \qquad \dot{U}_R^{(2)}=1\angle 36.87^\circ$$

$$U_R(t)=0.5+\sqrt{2}\sin(1.5t+45^\circ)+\sqrt{2}\sin(2t+36.87^\circ).$$

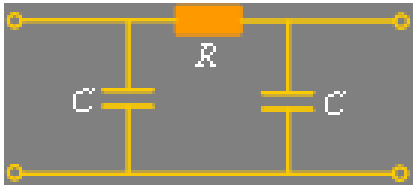
$$P=0.75+3=3.75$$

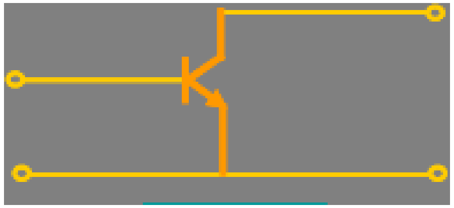
第十六章　二端口网络

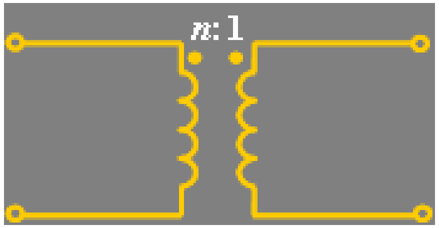
§16.1　二端口网络

一、二端口网络

端口由一对端钮构成，且满足端口条件：即从端口的一个端钮流入的电流必须等于从该端口的另一个端钮流出的电流。当一个电路与外部电路通过两个端口连接时称此电路为二端口网络。





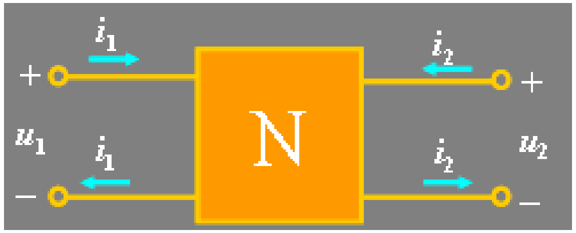


§16.1 二端口网络

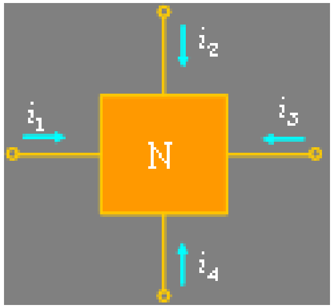
注意：

1）如果组成二端口网络的元件都是线性的，则称为线性二端口网络；依据二端口网络的两个端口是否服从互易定理，分为可逆的和不可逆的；依据二端口网络使用时两个端口互换是否不改变其外电路的工作情况，分为对称的和不对称的。

2） 图（a）所示的二端口网络与图（b）所示的四端网络的区别。



（a）



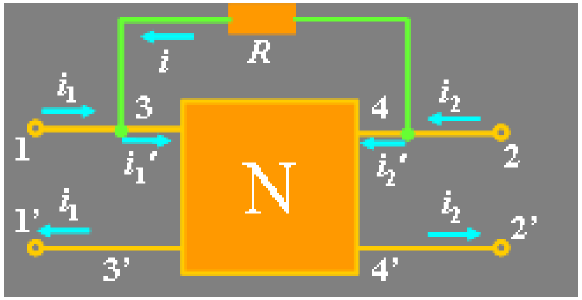
（b）

§ 16.1　　二端口网络

3）二端口的两个端口间若有外部连接，则会破坏原二端口的端口条件。若在二端口网络的端口间连接电阻 R 如下图所示，则端口条件破坏，因为

$$i_1' = i_1 + i \neq i_1 \qquad i_2' = i_2 - i \neq i_2$$

即 1-1 '和 2-2 '是二端口，但 3-3 '和 4-4 '不是二端口，而是四端网络。



§16.1　　二端口网络

二、研究二端口网络的意义

1）二端口应用很广，其分析方法易推广应用于 **n** 端口网络；

2）可以将任意复杂的二端口网络分割成许多子网络（二端口）进行分析，使分析简化；

3）当仅研究端口的电压电流特性时，可以用二端口网络的电路模型进行研究。

§16.1　二端口网络

三、分析方法

1）分析前提：讨论初始条件为零的无源线性二端口网络；

*N*中不含独立源，并处于零状态下。

端口电压电流对*N*取关联方向。

2）不涉及网络内部电路的工作状况，找出两个端口的电压、电流关系方程来表征网络的电特性，这些方程通过一些参数来表示；

3）分析中按正弦稳态情况考虑，应用相量法或运算法讨论。

§16.2　　二端口的参数和方程

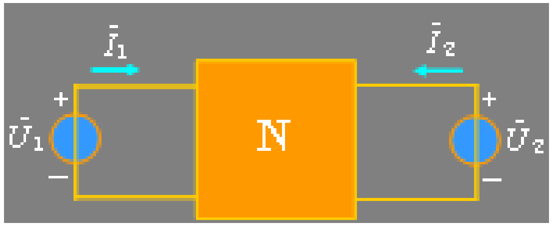
一、二端口的参数

$$\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_1 \\ i_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u_2 \\ i_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_1 \\ i_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} i_1 \\ u_2 \end{matrix}$$

§16.2　　二端口的参数和方程

二、*Y* 参数和方程

1、Y 参数方程



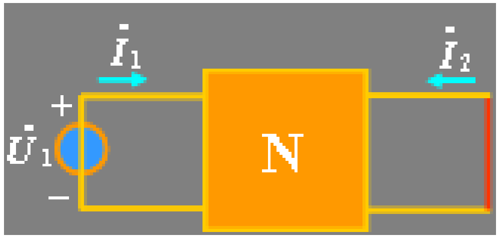
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix}$$

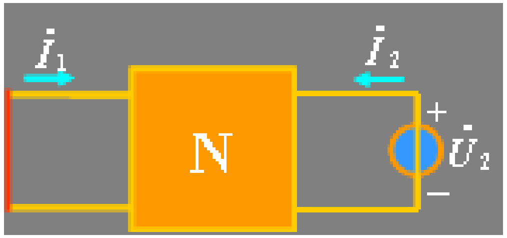
§ 16.2　　二端口的参数和方程

2、*Y* 参数的物理意义及计算和测定

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$



$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0} \qquad Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}$$



$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0} \qquad Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0}$$

§ 16.2　二端口的参数和方程

由以上各式得 Y 参数的物理意义：

Y_{11} 表示端口 2 短路时，端口 1 处的输入导纳或驱动点导纳；

Y_{22} 表示端口 1 短路时，端口 2 处的输入导纳或驱动点导纳；

Y_{12} 表示端口 1 短路时，端口 1 与端口 2 之间的转移导纳；

Y_{21} 表示端口 2 短路时，端口 2 与端口 1 之间的转移导纳，因 Y_{12} 和 Y_{21} 表示一个端口的电流与另一个端口的电压之间的关系。故 Y 参数也称短路导纳参数。

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0} \qquad Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0} \qquad Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0} \qquad Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0}$$

§16.2　　二端口的参数和方程

3、互易性二端口网络

若二端口网络是互易网络，则当 $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ 时，有 $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$

因此满足：

$$Y_{12} = Y_{21}$$

即互易二端口的 Y 参数中只有三个是独立的。

§16.2　　二端口的参数和方程

4、对称二端口网络

若二端口网络为对称网络，除满足 $Y_{12}=Y_{21}$ 外，还满足

$Y_{11}=Y_{22}$ ， 即对称二端口的 Y 参数中只有二个是独立的。

注意： 对称二端口是指两个端口电气特性上对称， 电路结构左右对称的一般为对称二端口， 结构不对称的二端口，其电气特性可能是对称的，这样的二端口也是对称二端口。

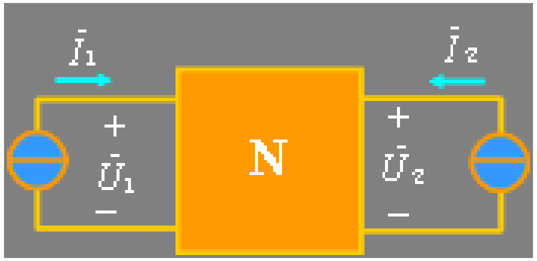
§16.2　二端口的参数和方程

三、Z 参数和方程

1、Z 参数方程

将二端口网络的两个端口各施加一电流源如图所示，则端口电压可视为两个电流源单独作用时的响应之和，即：

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$



§ 16.2　　二端口的参数和方程

上式称为 **Z** 参数方程，写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=Z\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$$

Z 参数方程也可由 ***Y*** 参数方程解出 $\dot{U}_1,\dot{U}_2$ 得到， 即：

$$\begin{cases}\dot{U}_1=\dfrac{Y_{22}}{\varDelta}\dot{I}_1+\dfrac{-Y_{12}}{\varDelta}\dot{I}_2=Z_{11}\dot{I}_1+Z_{12}\dot{I}_2\\ \dot{U}_2=\dfrac{-Y_{21}}{\varDelta}\dot{I}_1+\dfrac{Y_{11}}{\varDelta}\dot{I}_2=Z_{21}\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2\end{cases}$$

其中 $\varDelta=Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}$

§16.2　　二端口的参数和方程

Z 参数矩阵与 **Y** 参数矩阵的关系为：

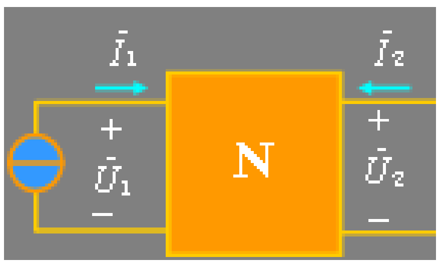
$$[Z]=[Y]^{-1}$$

§16.2　二端口的参数和方程

2、Z 参数的物理意义及计算和测定

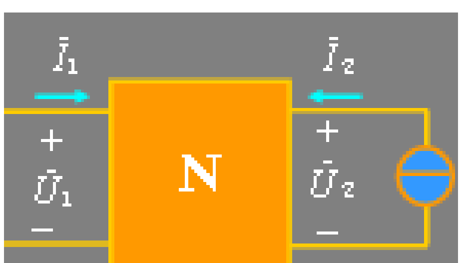
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

在端口 1 上外施电流 $\dot{I}_1$ 把端口 2 开路，如图所示，由 Z 参数方程得：



$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0} \qquad Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}$$

在端口 2 上外施电流 $\dot{I}_2$，把端口 1 开路，如图所示，由 Z 参数方程得：



$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0} \qquad Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0}$$

§16.2　二端口的参数和方程

由以上各式得 Z 参数的物理意义：

Z_{11} 表示端口 2 开路时，端口 1 处的输入阻抗或驱动点阻抗；

Z_{22} 表示端口 1 开路时，端口 2 处的输入阻抗或驱动点阻抗；

Z_{12} 表示端口 1 开路时，端口 1 与端口 2 之间的转移阻抗；

Z_{21} 表示端口 2 开路时，端口 2 与端口 1 之间的转移阻抗，因 Z_{12}和 Z_{21} 表示一个端口的电压与另一个端口的电流之间的关系。故 Z 参数也称开路阻抗参数。

$$Z_{11}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}\quad Z_{21}=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}\qquad Z_{12}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}\quad Z_{22}=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

§16.2 二端口的参数和方程

3、互易性和对称性

对于互易二端口网络满足: $Z_{12} = Z_{21}$

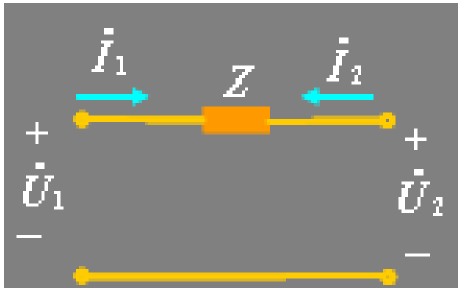
对于对称二端口网络满足: $Z_{11} = Z_{22}$

因此互易二端口网络 Z 参数中只有 3 个是独立的，而对称二端口的 Z 参数中只有2个是独立的。

§ 16.2　二端口的参数和方程

注意： 并非所有的二端口均有 Z , Y 参数，如图所示的两端口网络，端口电压和电流满足方程：

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{Z}$$



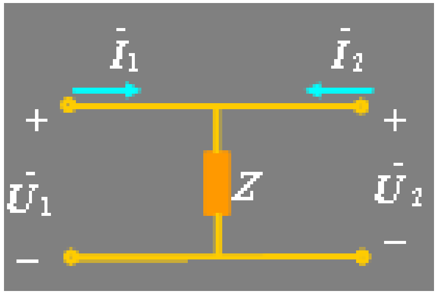
$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ -\frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \end{bmatrix}$$

Z 参数不存在

§16.2　　二端口的参数和方程

下图所示的二端口网络，端口电压和电流满足方程：

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = Z(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$



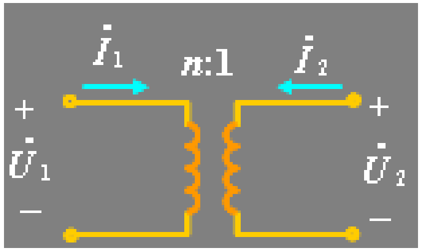
$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

Y 参数不存在

§ 16.2 二端口的参数和方程

下图所示的理想变压器电路，端口电压和电流满足方程：

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \qquad \dot{I}_1 = -\dot{I}_2 / n$$

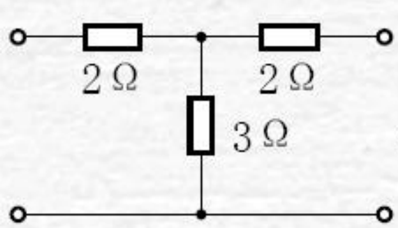


Z 、 Y 参数均不存在

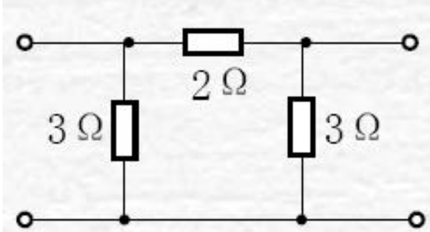
§16.2　　二端口的参数和方程

- 不含受控源的无源电路一定是互易电路。
- 含受控源的电路一般是非互易的（一定条件下也可能是互易电路）。
- 结构对称电路一定是电气对称的，反之，则不一定。

例，如下两图均为结构对称的，显然也是电气对称的。

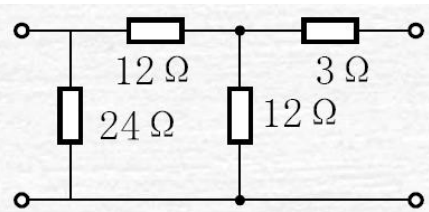


$$Z=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\Omega$$



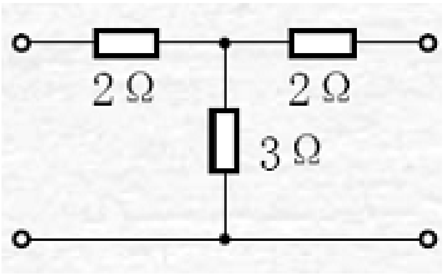
$$Z=\begin{bmatrix}15/8 & 9/8\\ 9/8 & 15/8\end{bmatrix}\Omega$$

例，如下图的结构不对称，但电气对称。



$$Z=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{bmatrix}\Omega$$

§ 16.2　二端口的参数和方程



$$\begin{cases} U_1 = 2I_1 + 3(I_1 + I_2) \\ U_2 = 2I_2 + 3(I_1 + I_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = 5I_1 + 3I_2 \\ U_2 = 3I_1 + 5I_2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Omega$$

$$I_2 = \frac{U_1 - 5I_1}{3}$$

$$I_1 = \frac{5}{16} U_1 - \frac{3}{16} U_2$$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} S$$

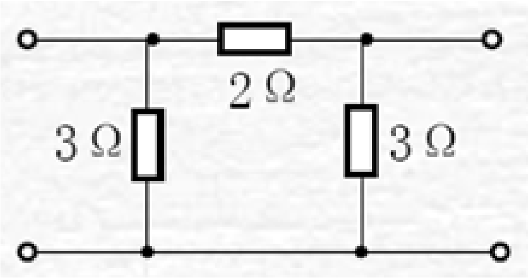
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1}\bigg|_{U_2=0} = \frac{1}{2 + 2//3} = \frac{5}{16}$$

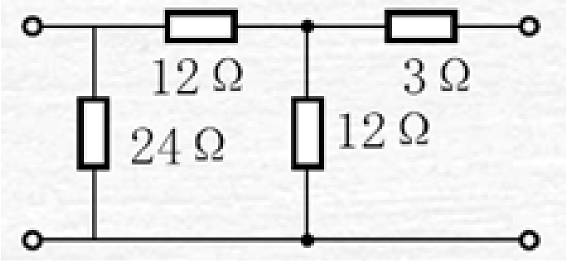
$U_1 = 0$时，$U_2 = 2I_2 - 2I_1 = 2I_2 + 3(I_1 + I_2)$

$$I_2 = -\frac{5}{3} I_1 \qquad I_1 = -\frac{3}{16} U_2$$

§ 16.2　　二端口的参数和方程



$$Y=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}S$$



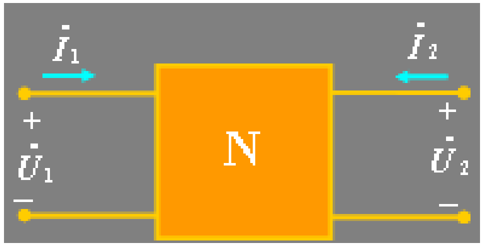
$$Y=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{1}{18}\\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}S$$

§ 16.2　　二端口的参数和方程

四、*T (A)*参数和方程

1、*T* 参数方程

$$\begin{cases}\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2\end{cases}$$



$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1 \\ \dot{I}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & B \\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2\end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix}\dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2\end{bmatrix}$$

注意： 应用 T 参数方程时要注意电流前面的负号。

T 参数也称为传输参数或 A 参数。

§ 16.2　　二端口的参数和方程

2、*T* 参数的物理意义及计算和测定

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 \end{cases}$$

T 参数的具体含义可分别用以下各式说明：

$A = \left.\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}$　为端口2开路时端口1与端口2的电压比，称转移电压比；

$B = \left.\dfrac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}$　为端口2短路时端口1的电压与端口2的电流比，称短路转移阻抗；

$C = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}$　为端口2开路时端口1的电流与端口2的电压比，称开路转移导纳；

$D = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0}$　为端口2短路时端口1的电流与端口2的电流比，称转移电流比。

每个参数单位不同

§ 16.2　二端口的参数和方程

3、互易性和对称性

由 Y 参数方程可以解得：

$$\dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = \left(Y_{12} - \frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}\right)\dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}\dot{I}_2$$

由此得 T 参数与 Y 参数的关系为：

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \qquad B = \frac{-1}{Y_{21}} \qquad C = \frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} \qquad D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$$

互易二端口：　$AD - BC = 1$

对称二端口：　$A = D$

§16.2　　二端口的参数和方程

五、*H* 参数和方程

1、*H* 参数和方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

H 参数也称为混合参数

§16.2 二端口的参数和方程

2、*H* 参数的物理意义计算与测定

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$H_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$ 称为短路输入阻抗

$$H_{12} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$ 称为开路电压转移比

$$H_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$$ 称为短路电流转移比

$$H_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$ 开路输出端导纳。

§16.2 二端口的参数和方程

3、互易性和对称性

对于互易二端口 **H** 参数满足：

$$H_{12} = -H_{21}$$

对于对称二端口 **H** 参数满足：

$$\boldsymbol{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1}$$

§ 16.2　　二端口的参数和方程

***B方程和B参数：**

以$\dot{U}_1$、$\dot{I}_1$ 作为自变量，以$\dot{U}_2$、$\dot{I}_2$ 和作应变量，则有方程

$$\dot{U}_2 = b_{11}\dot{U}_1 + b_{12}(-\dot{I}_1)$$
$$\dot{I}_2 = b_{21}\dot{U}_1 + b_{22}(-\dot{I}_1)$$

称反向传输方程或B方程。

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

称为反向传输矩阵。

注意：**$B \neq A^{-1}$** 。

对于互易电路，B参数满足 **$\triangle_B = b_{11}\, b_{22} - b_{12}\, b_{21} = 1$**。

若为对称电路，则有**$\triangle_B = 1$，$b_{11} = b_{22}$**。

实际中很少用。

§ 16.2　　二端口的参数和方程

*G方程和G参数：

以$\dot{U}_1$、$\dot{I}_2$作为自变量，以$\dot{U}_2$、$\dot{I}_1$作应变量，则有方程

$$\dot{I}_1 = g_{11}\dot{U}_1 + g_{12}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = g_{21}\dot{U}_1 + g_{22}\dot{I}_2$$

称二端口电路的G方程，也称混和方程。

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$ 也称为混合矩阵。

$$\mathbf{G = H^{-1}}$$

对于互易电路，G参数满足$g_{12} = - g_{21}$。

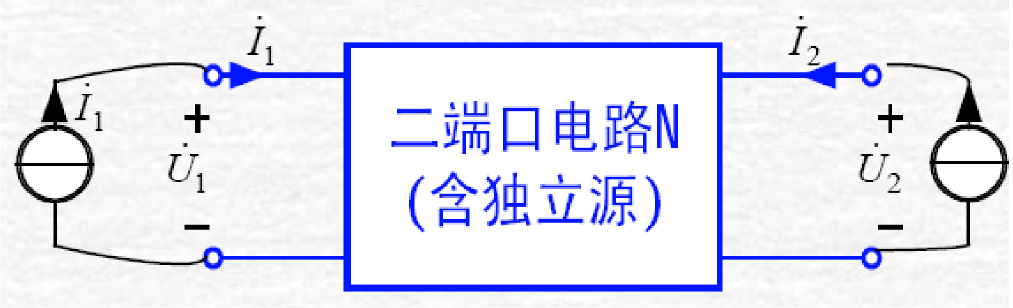
若为对称电路，则有$\triangle_G = g_{11}\, g_{22} - g_{12}\, g_{21} = 1$，　$g_{12} = - g_{21}$。

实际中很少用。

§16.2　二端口的参数和方程

*含独立源二端口电路的等效

对于如图含源电路，选$\dot{I}_1$和$\dot{I}_2$为自变量，以$\dot{U}_1$和$\dot{U}_2$为应变量描述端口VCR，为此，端口外加电流源。



根据电路的线性性质，端口电压看作是激励电流源$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$和N内独立源分别作用的叠加。

§16.2　二端口的参数和方程

（1）当仅由 $\dot{I}_1$作用时($\dot{I}_2=0$，电路N内部独立源均为零)，根据齐次定理有

$$\dot{U}_1^{(1)} = z_{11}\dot{I}_1$$

$$\dot{U}_2^{(1)} = z_{21}\dot{I}_1$$

（2）当仅由 $\dot{I}_2$作用时($\dot{I}_1=0$，电路N内部独立源均为零)，根据齐次定理有

$$\dot{U}_1^{(2)} = z_{12}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2^{(2)} = z_{22}\dot{I}_2$$

（3）当仅由电路N内部的独立源作用时，入口、出口均开路，有

$$\dot{U}_1^{(3)} = \dot{U}_{OC1}$$

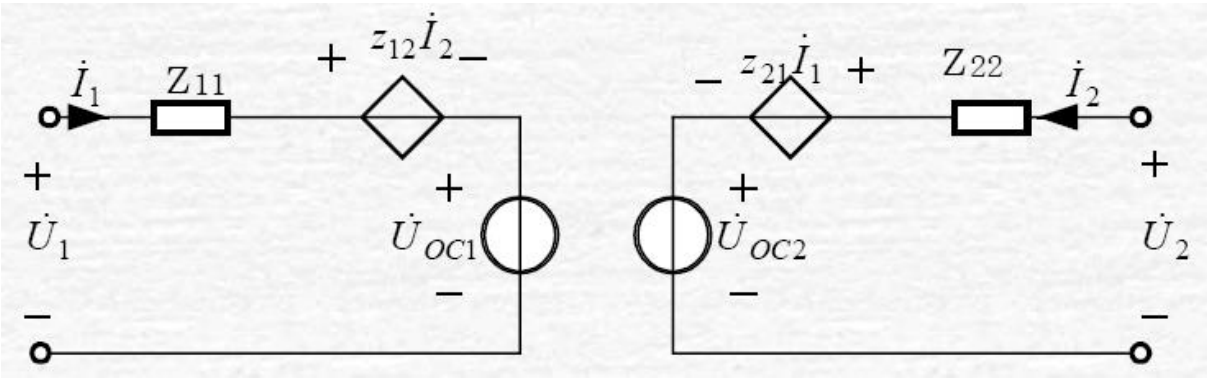
$$\dot{U}_2^{(3)} = \dot{U}_{OC2}$$

§16.2　二端口的参数和方程

根据叠加定理得

$$\dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 + \dot{U}_{OC1}$$
$$\dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 + \dot{U}_{OC2}$$

等效电路为

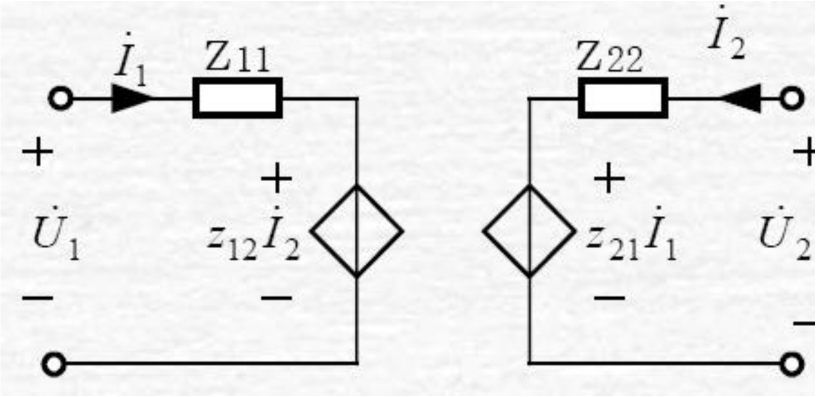


可看作是戴维宁定理在二端口电路中的推广。

§16.2　二端口的参数和方程

若二端口电路不含独立源，相当于前面 $\dot{U}_{OC1}=0,\ \dot{U}_{OC2}=0$

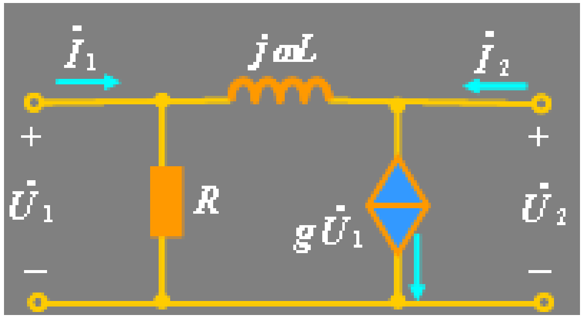
$$\dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$$



类似地，用其它方程也可以作出相应的等效电路。

§ 16.2 二端口的参数和方程

例16－1：求图示二端口电路的 *Y* 参数。



解： 应用 KCL 和 KVL 直接列方程求解，有：

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R}+\frac{\dot{U}_1-\dot{U}_2}{j\omega L}=(\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L})\dot{U}_1-\frac{1}{j\omega L}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2=g\dot{U}_1+\frac{\dot{U}_2-\dot{U}_1}{j\omega L}=(g-\frac{1}{j\omega L})\dot{U}_1+\frac{1}{j\omega L}\dot{U}_2$$

比较 *Y* 参数方程：

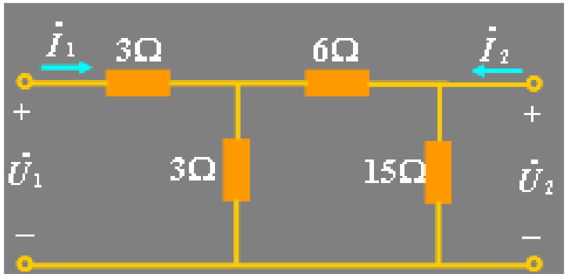
$$\begin{cases}\dot{I}_1=Y_{11}\dot{U}_1+Y_{12}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2=Y_{21}\dot{U}_1+Y_{22}\dot{U}_2\end{cases}$$

得：

$$[Y]=\begin{bmatrix}\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L}\\ g-\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{j\omega L}\end{bmatrix}$$

§ 16.2　　二端口的参数和方程

例16—2：求图示二端口电路的 *Y* 参数。



解： 根据 *Y* 参数的定义得：

$$Y_{11}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}=\frac{1}{3//6+3}=0.2S$$

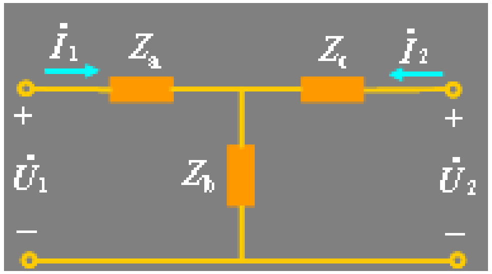
$$Y_{21}=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}=-0.0667S$$

$$Y_{22}=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}=0.2S$$

$$Y_{12}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}=-0.0667S$$

§ 16.2 二端口的参数和方程

例16—3：求图示二端口电路的 Z 参数。



解： 解法1 根据 Z 参数的定义得：

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0} = Z_a + Z_b \qquad Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0} = Z_b$$

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0} = Z_b \qquad Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0} = Z_b + Z_c$$

解法2 直接列方程求解，KVL 方程为：

$$\dot{U}_1 = Z_a\dot{I}_1 + Z_b(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (Z_a + Z_b)\dot{I}_1 + Z_b\dot{I}_2$$

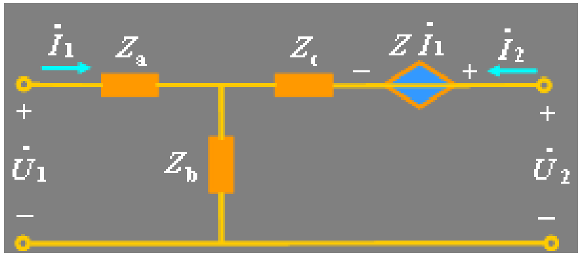
$$\dot{U}_2 = Z_c\dot{I}_2 + Z_b(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = Z_b\dot{I}_1 + (Z_b + Z_c)\dot{I}_2$$

所以 Z 参数为：

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_b + Z_c \end{bmatrix}$$

§ 16.2　　二端口的参数和方程

例16－4： 求图示二端口电路的 Z 参数。



解： 直接列方程求解，**KVL** 方程为：

$$\dot{U}_1 = Z_a\dot{I}_1 + Z_b(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (Z_a + Z_b)\dot{I}_1 + Z_b\dot{I}_2$$

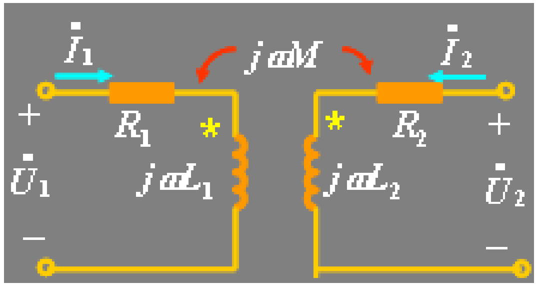
$$\dot{U}_2 = Z_c\dot{I}_2 + Z_b(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + Z\dot{I}_1 = (Z_b + Z)\dot{I}_1 + (Z_b + Z_c)\dot{I}_2$$

所以 **Z** 参数为：

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b \\ Z_b + Z & Z_b + Z_c \end{bmatrix}$$

§16.2 二端口的参数和方程

例16—5：求图示二端口电路的 Z 、Y 参数。



解：直接列方程求解，KVL 方程为：

$$\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2$$

所以 Z 参数为：

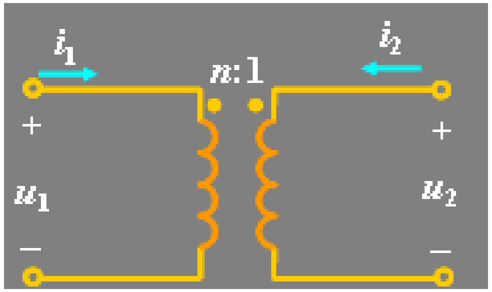
$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

Y 参数为：

$$[Y] = [Z]^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} R_2 + j\omega L_2 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_1 + j\omega L_1 \end{bmatrix}$$

§ 16.2　　二端口的参数和方程

例16－6：　求图示理想变压器的 T 参数。



解：　理想变压器的端口特性为：

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

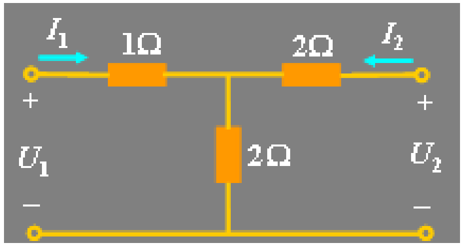
即：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix}$$

§16.2 二端口的参数和方程

例16－7：求图示二端口电路的 *T* 参数。



解： 根据 *T* 参数的定义得：

$$A = \frac{U_1}{U_2}\bigg|_{I_2=0} = 1.5 \qquad C = \frac{I_1}{U_2}\bigg|_{I_2=0} = 0.5\ S$$

$$B = \frac{U_1}{-I_2}\bigg|_{U_2=0} = 4\Omega \qquad D = \frac{I_1}{-I_2}\bigg|_{U_2=0} = 2$$

§16.3　二端口的连接

二端口网络也可以作为电路中的“端口器件”进行各种联接。二端口电路的联接方式有：级联(链接)、串联、并联、串并联、并串联等。

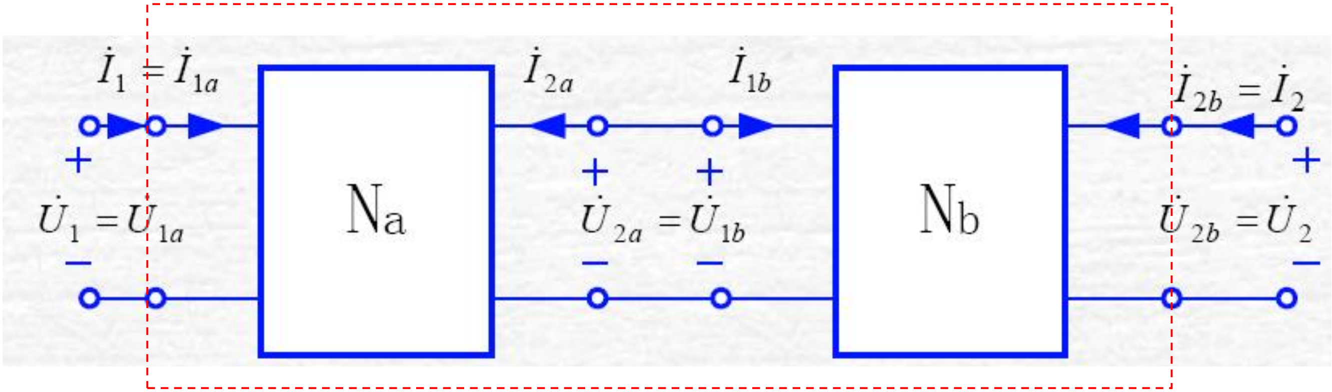
但是二端口的串联、并联和级联是需要满足一定条件的，即不能因为某种联接而破坏了端口处的端口条件。

几个二端口网络在做各种连接以后，可以用一个等效的二端口来等效。考虑到在做不同联接时的参数方程的特点，其等效二端口也应有不同的网络参数与其对应。

§16.3　二端口的连接

一、级联(链接，cascade)

级联是信号传输系统中最常见的联接方式。下图为两个二端口的级联联接，后一个二端口的输入端联接前一个二端口的输出端，即构成级联。



1、级联联接的条件：

$$u_{1b} = u_{2a} \qquad i_{1b} = -i_{2a}$$

§ 16.3　二端口的连接

2、级联联接的等效A参数：

设子电路（也称为部分二端口）N_a和N_b的传输矩阵分别为A_a和A_b，则其传输方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_{1a}\\ \dot{I}_{1a}\end{bmatrix}=A_a\begin{bmatrix}\dot{U}_{2a}\\ -\dot{I}_{2a}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\dot{U}_{1b}\\ \dot{I}_{1b}\end{bmatrix}=A_b\begin{bmatrix}\dot{U}_{2b}\\ -\dot{I}_{2b}\end{bmatrix}$$

对两个级联的二端口网络而言，满足级联的端口条件，则有

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_{1}\\ \dot{I}_{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{U}_{1a}\\ \dot{I}_{1a}\end{bmatrix}=A_a\begin{bmatrix}\dot{U}_{2a}\\ -\dot{I}_{2a}\end{bmatrix}=A_a\begin{bmatrix}\dot{U}_{1b}\\ \dot{I}_{1b}\end{bmatrix}=A_aA_b\begin{bmatrix}\dot{U}_{2b}\\ -\dot{I}_{2b}\end{bmatrix}=A_aA_b\begin{bmatrix}\dot{U}_{2}\\ -\dot{I}_{2}\end{bmatrix}$$

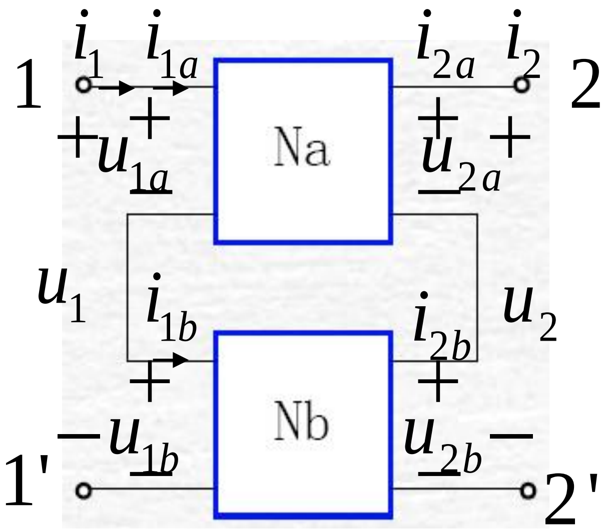
故

$$\boxed{A=A_aA_b}$$

§ 16.3　二端口的连接

二、串联和并联：

1、串联：

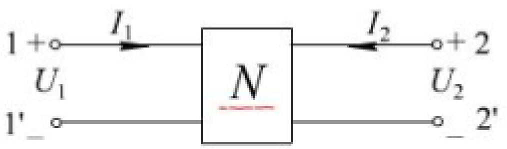


(1) 串联联接的条件：

$$i_{1a} = i_{1b} \qquad i_{2a} = i_{2b}$$

即输入端口处电流应为同一个电流，输出端口处也一样，也应为同一个电流。

$$i_{1a} = i_{1a}^{'} \text{、} i_{2a} = i_{2a}^{'} \text{；} i_{1b} = i_{1b}^{'} \text{、} i_{2b} = i_{2b}^{'}$$



§ 16.3　二端口的连接

(2)串联联接的等效Z参数：

对N_a二端口，其Z参数方程

$$\begin{cases} \dot{U}_{1a} = z_{11a}\dot{I}_{1a} + z_{12a}\dot{I}_{2a} \\ \dot{U}_{2a} = z_{21a}\dot{I}_{1a} + z_{22a}\dot{I}_{2a} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{bmatrix} = [Z_a] \begin{bmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix}$$

对N_b二端口，其Z参数方程

$$\begin{cases} \dot{U}_{1b} = z_{11b}\dot{I}_{1b} + z_{12b}\dot{I}_{2b} \\ \dot{U}_{2b} = z_{21b}\dot{I}_{1b} + z_{22b}\dot{I}_{2b} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{bmatrix} = [Z_b] \begin{bmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix}$$

根据KVL，有　$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b}$　　$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b}$

注意到，对串联的两个二端口而言，存在有如下端口条件

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b} \qquad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2b}$$

§16.3　二端口的连接

则有，

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (z_{11a} + z_{11b})\dot{I}_1 + (z_{12a} + z_{12b})\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = (z_{21a} + z_{21b})\dot{I}_1 + (z_{22a} + z_{22b})\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

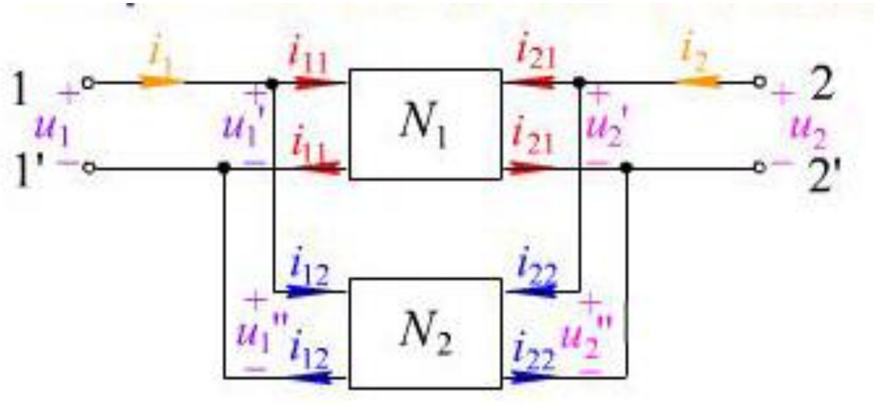
即若子电路N_a和N_b都满足端口条件，对串联等效二端口网络N，其等效Z参数

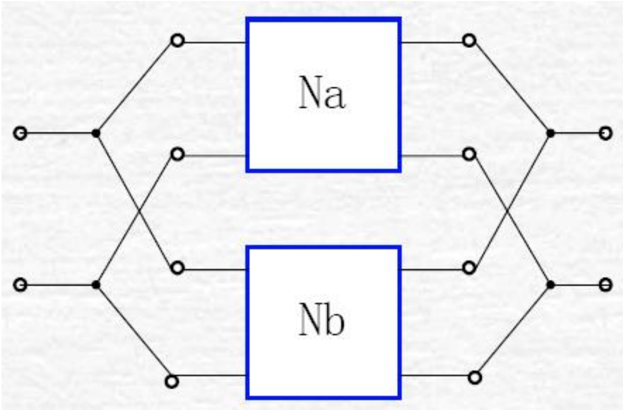
$$Z = Z_a + Z_b$$

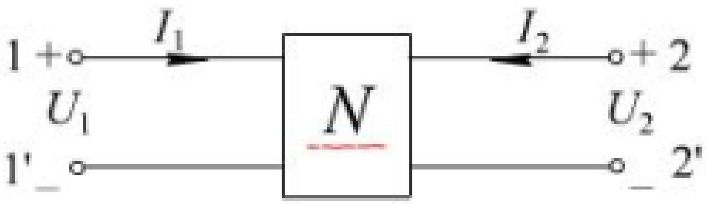
为两个串联二端口的Z参数矩阵之和。

§16.3　二端口的连接

2、并联



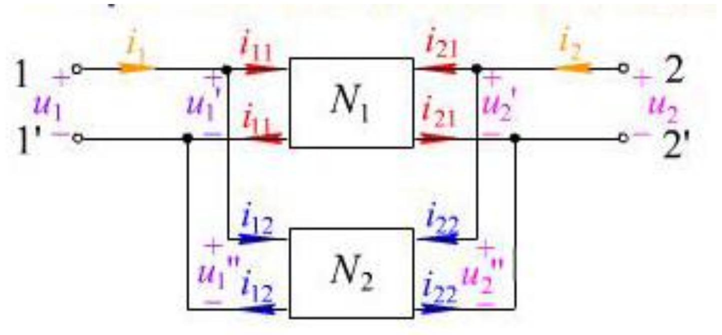




二端口的并联

§ 16.3 二端口的连接

(1) 并联联接的条件：



须满足的条件为：

端口处电压

$$\dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b} = \dot{U}_1 \qquad \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b} = \dot{U}_2$$

端口处电流， N_1有

$$i_{1a} = i_{1a}' \text{、} i_{2a} = i_{2a}'$$

N_2有

$$i_{1b} = i_{1b}' \text{、} i_{2b} = i_{2b}'$$

§ 16.3　二端口的连接

(2) 并联联接的等效Y参数：

对N_a二端口，其Y参数方程

$$\begin{cases} \dot{I}_{1a} = y_{11a}\dot{U}_{1a} + y_{12a}\dot{U}_{2a} \\ \dot{I}_{2a} = y_{21a}\dot{U}_{1a} + y_{22a}\dot{U}_{2a} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{bmatrix} = [Y_a]\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{bmatrix}$$

对N_b二端口，其Y参数方程

$$\begin{cases} \dot{I}_{1b} = y_{11b}\dot{U}_{1b} + y_{12b}\dot{U}_{2b} \\ \dot{I}_{2b} = y_{21b}\dot{U}_{1b} + y_{22b}\dot{U}_{2b} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = [Y_b]\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{bmatrix}$$

根据KCL，有　$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}$　　$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} + \dot{I}_{2b}$

端口条件　$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b}$　　$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b}$

§ 16.3 二端口的连接

则有，

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (y_{11a} + y_{11b})\dot{U}_1 + (y_{12a} + y_{12b})\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = (y_{21a} + y_{21b})\dot{U}_1 + (y_{22a} + y_{22b})\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} + y_{11b} & y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21a} + y_{21b} & y_{22a} + y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

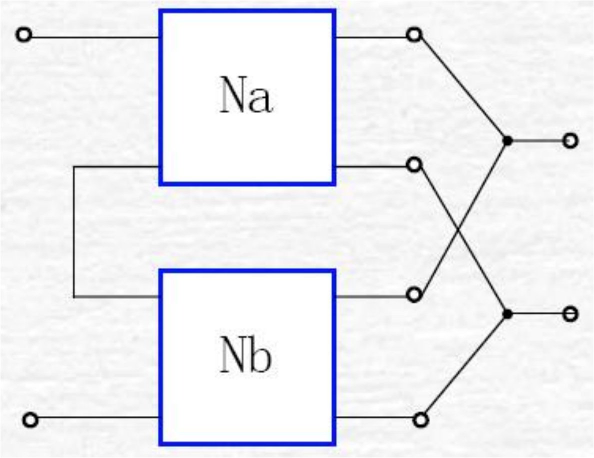
即若子电路N_a和N_b都满足端口条件，对并联等效二端口网络N，其等效Y参数

$$Y = Y_a + Y_b$$

为两个并联二端口的Y参数矩阵之和。

§16.3　二端口的连接

3、串并联：

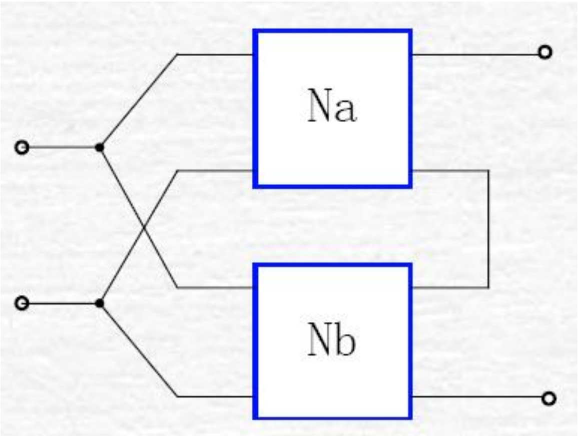


若子电路N_a和N_b都满足端口条件，则有

$$H = H_a + H_b$$

§16.3　二端口的连接

4、并串联：

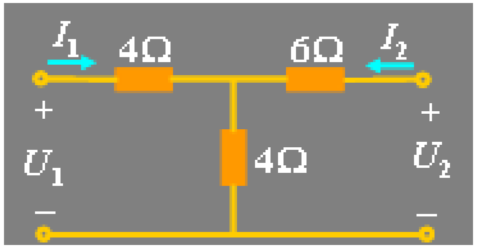


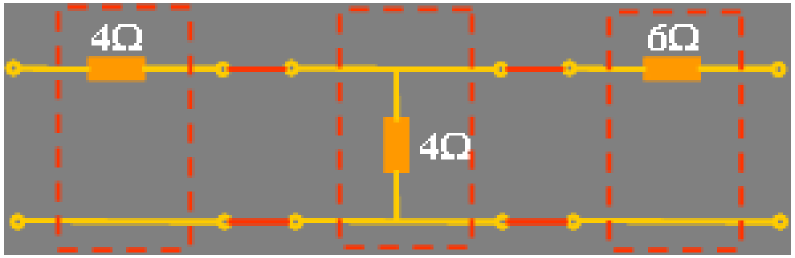
若子电路N_a和N_b都满足端口条件，则有

$$G = G_a + G_b$$

§ 16.3　二端口的连接

例16－8：求图（a）所示二端口网络的 ***T*** 参数。





解：图（a）的二端口网络可以看成图（b）所示的三个二端口的级联，易求出：

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4\ \Omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.25\ S & 1 \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6\ \Omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则图（a）二端口的 ***T*** 参数矩阵等于级联的三个两端口端口的 ***T*** 参数矩阵相乘：

$$[T] = [T_1][T_2][T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16\ \Omega \\ 0.25\ S & 2.5 \end{bmatrix}$$

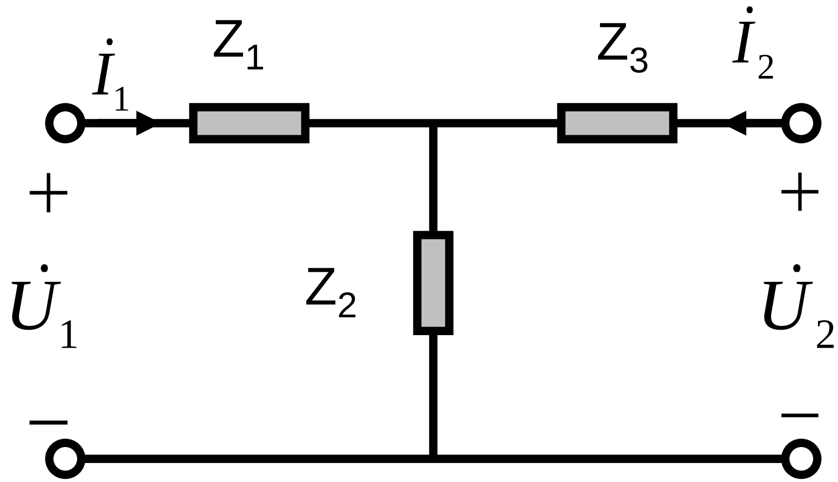
§16.4 二端口的T和π等效电路

对任一给定的线性无源互易二端口来说，因为$Z_{12}=Z_{21}$(或$Y_{12}=Y_{21}$，$A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}=1$，$H_{12}=-H_{21}$)，其外部特性可以用3个独立参数来确定。如果能找到一个由3个阻抗(或导纳)组成的简单二端口网络，且这个二端口与给定的二端口的参数分别对应相等，则这两个二端口外部特性也就完全相同，即它们是**等效**的。

由3个阻抗(导纳)组成的最简单二端口只有两种形式，即T形和π形电路。

§16.4 二端口的T和π等效电路

一、T形等效电路的元件参数：



T形网络

1)若给定某二端口的Z参数，须确定其等效T型电路中的元件Z_1、Z_2、Z_3的值。对图示T型电路，写出电压电流关系式

§ 16.4 二端口的T和π等效电路

$$\dot{U}_1 = Z_1\dot{I}_1 + Z_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (Z_1 + Z_2)\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = Z_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + Z_3\dot{I}_2 = Z_2\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_2$$

Z参数方程

$$\dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2$$

比较两组方程，对应项相等，则有T形电路元件与Z参数之关系为

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= z_{11} \\ Z_2 &= z_{12} = z_{21} \\ Z_2 + Z_3 &= z_{22} \end{aligned} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} Z_1 &= z_{11} - z_{12} \\ Z_2 &= z_{12} = z_{21} \\ Z_2 &= z_{22} - z_{21} \end{aligned}}$$

§16.4 二端口的T和π等效电路

2)同样的方法，可以求得当给定二端口的A参数时，等效T形电路中的元件参数。由T形电路求得传输参数(注意a_{12}=a_{21})如下，

$$a_{11}=\frac{\dot U_1}{\dot U_2}\bigg|_{\dot I_2=0}=1+\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$a_{21}=\frac{\dot I_1}{\dot U_2}\bigg|_{\dot I_2=0}=\frac{1}{Z_2}$$

$$a_{22}=\frac{\dot I_1}{-\dot I_2}\bigg|_{\dot U_2=0}=1+\frac{Z_3}{Z_2}$$

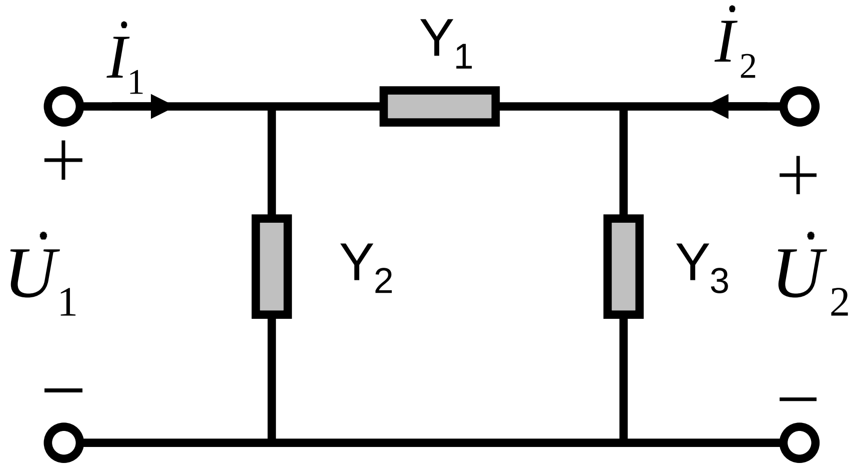
$\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} Z_1&=\frac{a_{11}-1}{a_{21}}\\ Z_2&=\frac{1}{a_{21}}\\ Z_3&=\frac{a_{22}-1}{a_{21}}\end{aligned}}$$

3)当给定二端口的Y参数时，可仿照上述过程求解T形电路中的参数。

§16.4 二端口的T和π等效电路

二、π形等效电路的元件参数：



π形网络

1)若给定某二端口的Y参数，须确定其等效的π型电路中的元件Y_1、Y_2、Y_3的值。

§ 16.4 二端口的T和π等效电路

对图示电路，可以采取对其求Y参数的办法，先将Y_1、Y_2、Y_3视作已知元件参数。故有：

$$y_{11}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}=Y_1+Y_2 \qquad y_{21}=y_{12}=\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}=-Y_1 \qquad y_{22}=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}=Y_1+Y_3$$

由此可求得π型等效电路中的元件参数与已知Y参数之间关系为

$$\boxed{Y_1=-y_{12}=-y_{21} \qquad Y_2=y_{11}+y_{12} \qquad Y_3=y_{22}+y_{21}}$$

对T型和π型等效电路，采用上述思路和方法不难求得等效电路中的元件参数与给定的二端口各组参数之间的关系。

§16.4 二端口的T和π等效电路

例16－9： 绘出给定的 Y 参数的任意一种二端口等效电路。已知 Y 参数为：

$$[Y]=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

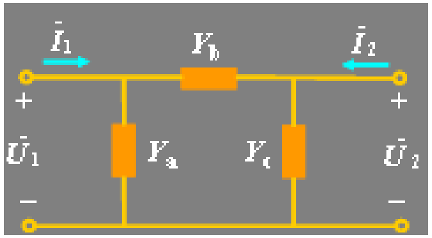
解： 由 Y 矩阵可知： $Y_{21}=Y_{12}$， 二端口是互易的，故可用无源 Π 型二端口网络作为等效电路，Π 型二端口网络参数为：

$$Y_a=Y_{11}+Y_{12}=5-2=3$$

$$Y_b=-Y_{12}=2$$

$$Y_c=Y_{22}+Y_{12}=3-2=1$$

等效电路如图所示。 通过 Π 型→ *T* 型变换可得 *T* 型等效电路。



§ 16.5　有载二端口

有载二端口网络是指输入端口接有信号源，输出端口接有负载阻抗Z_L的二端口网络。

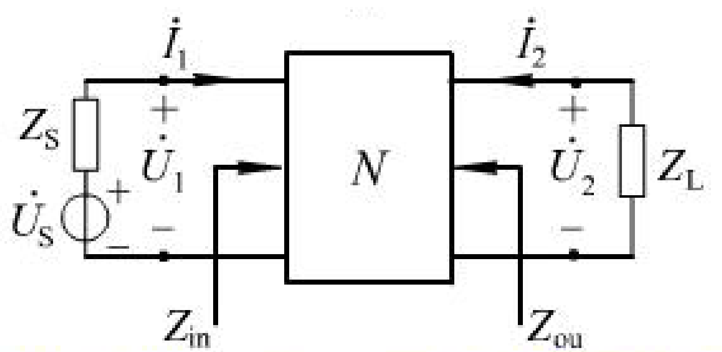


图 有载二端口示意（信号源用含有内阻Z_S的电压源来表示）

注：图中所示各变量均用正弦稳态下的相量表示。若在复频域下，则对应为$\dot{U}(s)$、$\dot{I}(s)$。

§16.5　有载二端口

一、有载二端口的网络函数（network function）

1、网络函数定义：

在实际应用中，常常要讨论有载二端口网络中<u>响应与激励之比</u>，这个比例式就构成了所谓的网络函数。

$$H(j\omega) \equiv \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = \left|H(j\omega)\right| \angle \varphi(j\omega)$$

其模随频率的变化关系称幅度-频率特性，

$$\left|H(j\omega)\right| \sim \omega$$

其幅角随频率的变化关系称相位-频率特性，

$$\varphi(j\omega) \sim \omega$$

§ 16.5　有载二端口

由于激励和响应可以是电压，也可以是电流，因此，二端口的网络函数有多种形式。常用的几种网络函数定义式分别如下表示：

输入阻抗

$$Z_{in}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{Z_L\neq 0}$$

电压转移函数

$$K_u=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}\right|_{Z_L\neq 0}$$

转移阻抗

$$Z_T=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{Z_L\neq 0}$$

输出阻抗

$$Z_{out}=\left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\substack{U_S=0\\ Z_S\neq 0}}$$

电流转移函数

$$K_i=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{Z_L\neq 0}$$

转移导纳

$$Y_T=\left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{Z_L\neq 0}$$

策动点函数　　　　转移函数

§16.5　有载二端口

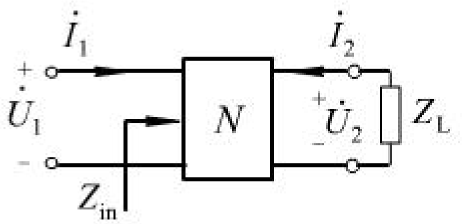
根据响应和激励是否在同一端口，又把网络函数分为**策动点函数**和**转移函数**两类：

策动点函数 响应、激励在同一端口	转移/传递函数 响应、激励在不同端口
$Z_{in}=\left.\dfrac{\dot U_1}{\dot I_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$	$K_u=\left.\dfrac{\dot U_2}{\dot U_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$
$Z_{out}=\left.\dfrac{\dot U_2}{\dot I_2}\right\vert_{\substack{U_S=0\\ Z_S\neq 0}}$	$K_i=\left.\dfrac{\dot I_2}{\dot I_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$
	$Z_T=\left.\dfrac{\dot U_2}{\dot I_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$
	$Y_T=\left.\dfrac{\dot I_2}{\dot U_1}\right\vert_{Z_L\neq 0}$

§16.5　有载二端口

2、网络函数的求取

在工程应用中，常用传输参数表示有载二端口的网络函数。下面以输入阻抗Z_{in}的求取为例，说明网络函数的求取方法。



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = a_{21}\dot{U}_2 + a_{22}(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

负载端约束关系式

$$\boxed{\dot{U}_2 = -Z_L\dot{I}_2}$$

输入阻抗　$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}(-\dot{I}_2)}{a_{21}\dot{U}_2 + a_{22}(-\dot{I}_2)} = \frac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}}$$

同样，仍以传输参数方程出发，代入负载端约束关系，可以求得电压比

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}(-\dot{I}_2)} = \frac{Z_L}{a_{11}Z_L + a_{12}}$$

§16.5　有载二端口

若已知有载二端口的其它参数，求网络函数与已知参数之间的关系，仍从该二端口的参数方程出发，注意代入约束关系，则不难求得所需的网络函数。

例如
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = y_{11}\dot{U}_1 + y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

且 $\dot{U}_2 = -Z_L\dot{I}_2$

则有转移导纳

$$Y_T = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{y_{21}}{1+y_{22}Z_L}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

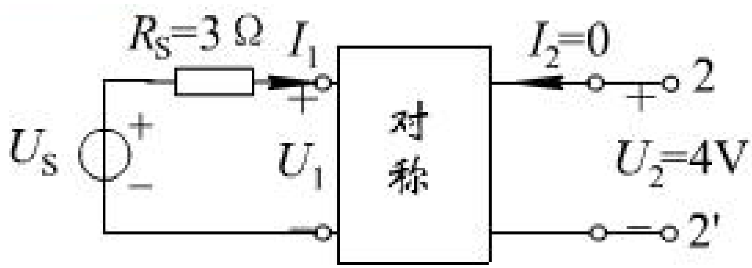
且 $\dot{U}_2 = -Z_L\dot{I}_2$

则有转移阻抗

$$Z_T = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{22}+Z_L}$$

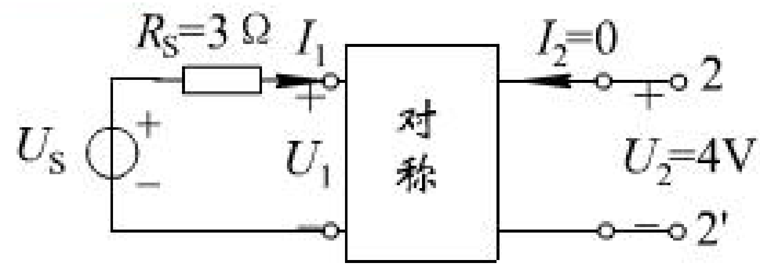
§16.5　有载二端口

例16-10、图示某对称二端口网络，输入端接有内阻R_S=3Ω、电压 U_S=16V的电压源。已知当2-2’开路时，I_1=2A，U_2=4V。求：①该对称二端口网络的传输参数矩阵；②若2-2’端接一负载电阻R_L，R_L=?时可获得最大功率，并求此最大功率P_{max}。



§ 16.5　有载二端口

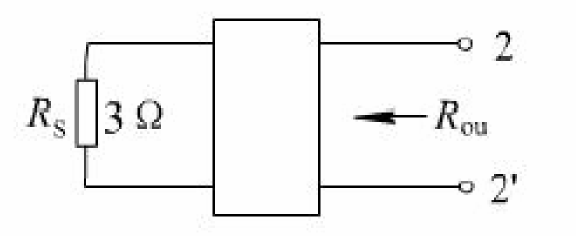
$$U_1 = a_{11}U_2 - a_{12}I_2$$
$$I_1 = a_{21}U_2 - a_{22}I_2$$



当I_2=0时U_2=4V，此时

$$U_1 = U_S - R_S I_1 = 16 - 3\times 2 = 10V$$

$$a_{11} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{10}{4} = 2.5 = a_{22} \quad (\text{因为对称})$$



$$a_{21} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{2}{4} = 0.5S$$

$$R_{out} = \frac{a_{12} + a_{22}R_S}{a_{11} + a_{21}R_S} = \frac{10.5 + 7.5}{2.5 + 1.5} = 4.5\Omega = R_L$$

$$a_{12} = \frac{a_{11}a_{22} - 1}{a_{21}} = \frac{5.25}{0.5} = 10.5\Omega$$

$$P_{\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_S} = 0.88W$$

$$T = \begin{bmatrix} 2.5 & 10.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

§16.5　有载二端口

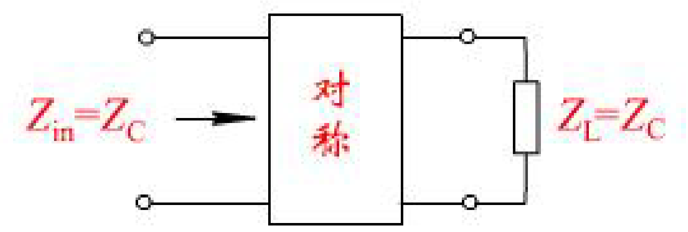
二、对称二端口的特性阻抗(characteristic impedance)

有载二端口网络是一个信号或能量传输系统，有时为使负载能获得最大功率，常要求网络处于匹配状态。一般常采用特性参数对匹配工作状态下的特性进行研究，特性阻抗就是二端口特性参数中得一个。

§16.5　有载二端口

1、特性阻抗的定义

对于一个对称的二端口网络，若其输出端接以负载阻抗$Z_L=Z_C$，而输入端的入端阻抗$Z_{in}=Z_C$，则此Z_C值就称为该对称二端口的特性阻抗(也成重复阻抗)。此时的工作状态称为匹配(matching)。



§16.5 有载二端口

2、特性阻抗与传输参数之间的关系

由网络函数求取可知，入端阻抗与传输函数之间存在有如下关系式

$$Z_{in} = \frac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}}$$

将特性阻抗定义式，即 $Z_{in} = Z_L = Z_C$ 代入

$$Z_C = \frac{a_{11}Z_C + a_{12}}{a_{21}Z_C + a_{22}}$$

§16.5　有载二端口

注意到对称二端口网络，有

$$a_{11} = a_{22}$$

故求得特性阻抗与传输参数之间的关系为

$$Z_C = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}$$

§16.5　有载二端口

3、特性阻抗Z_C的实验测定

由开路、短路实验，可以得出

$$Z_{O1}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}=\frac{a_{11}}{a_{21}} \qquad Z_{S1}=\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$$

在对称情况下，存在有 $a_{11}=a_{22}$ 且

$$Z_{O1}=Z_{O2}=Z_O \qquad Z_{S1}=Z_{S2}=Z_S$$

故有

$$Z_O Z_S=\frac{a_{12}}{a_{21}}=Z_C^2$$

所以有

$$Z_C=\sqrt{Z_O Z_S}$$

§16.6　回转器和负阻抗变换

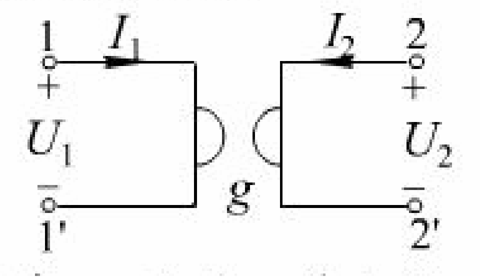
随着电子技术的发展，各种二端口器件的应用日益广泛，如晶体管、运算放大器等。随之而来的就是出现了一些与前面介绍的无源二端口不同的有源二端口器件，本节介绍的回转器和负阻抗变换器就是其中的两种。

§16.6　回转器和负阻抗变换

一、回转器

1、回转器方程(VCR)：

1)理想回转器可视为一个二端口，其电路符号如图所示。



在图示*u*、*i*参考方向下，其约束关系为：

$$\begin{cases} i_1 = g u_2 \\ i_2 = -g u_1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{g} i_2 \\ i_1 = g u_2 \end{cases}$$

式中，*g*称为回转电导，也称回转常数。

§16.6　回转器和负阻抗变换

2)上述约束关系写成矩阵形式则有：

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

故有Y参数矩阵为 $Y = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

故有T参数矩阵为 $T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix}$

由上述Y参数矩阵可以看出，在回转器中不满足$y_{12}=y_{21}$的关系，故它是非互易的。

§ 16.6　回转器和负阻抗变换

3)由回转器端口处的约束关系，可知其端口处吸收的功率

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = g u_1 u_2 - g u_1 u_2 = 0$$

可见，理想回转器不消耗功率，也不发出功率，
为无源无损二端口器件。

§ 16.6　回转器和负阻抗变换

2、回转器的特性：

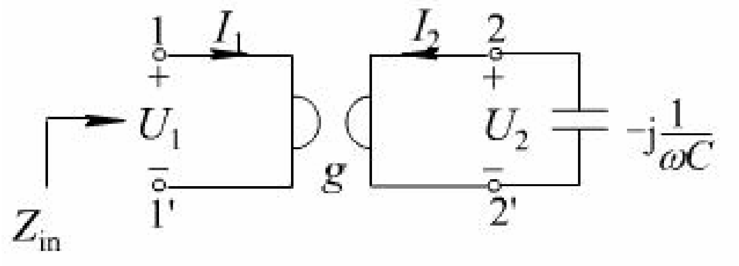
当回转器2-2'端接有负载阻抗Z_L时，1-1'端的入端阻抗

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{-\frac{1}{g}\dot{I}_2}{g\dot{U}_2}=\frac{1}{g^2}\cdot\frac{1}{Z_L}$$

（注意：$\dfrac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_2}=Z_L$。）

当 $Z_L=\dfrac{1}{j\omega C}$，即2-2'端接有电容元件C时，从1-1'看进去的入端阻抗

$$Z_{in}=j\omega\frac{C}{g^2}=j\omega L_{eq}$$



§16.6　回转器和负阻抗变换

由此不难看出，回转器有把一个端口上的电压“回转”为另一端口的电流或相反过程的性质。正是由于这一性质，使回转器具有把一个电容“回转”为一个电感的本领。上式中，等效电感

$$L_{eq} = \frac{C}{g^2}$$

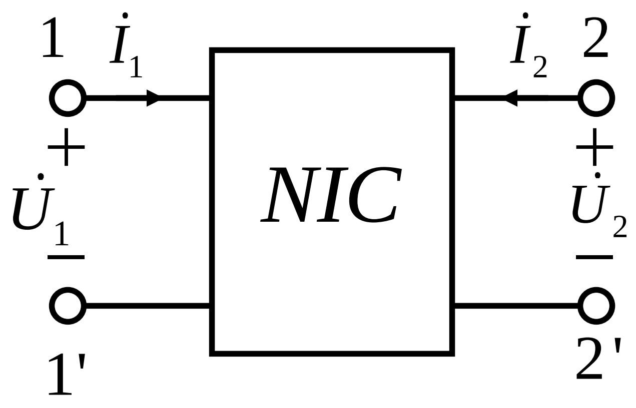
如 $g = 2\times10^{-5}S$, $C = 1\mu F$, 则$L_{eq} = 2500H$。

同样，若2-2’端接有电感元件L时，从1-1’看进去的将是一个等效电容C_{eq}。

§16.6　回转器和负阻抗变换

二、负阻抗变换器(negative impedance converter,NIC)：

负阻抗变换器也是一个二端口元件，其电路符号如图所示。



§16.6　回转器和负阻抗变换

1、负阻抗变换器方程(VCR)：

在图示电压、电流参考方向下，其端钮特性可用T参数方程来表示，　　其中k—正实常数

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = k\dot{I}_2 \end{cases}$ （电流反向型）　$\begin{cases} \dot{U}_1 = -k\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dot{I}_2 \end{cases}$ （电压反向型）

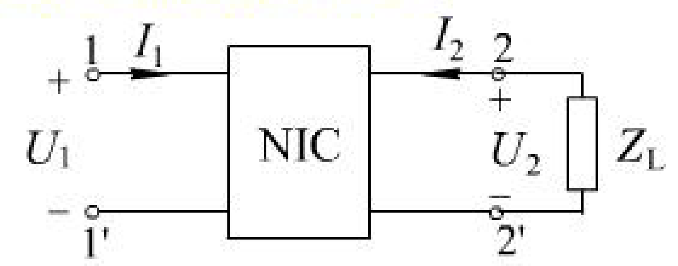
§ 16.6 回转器和负阻抗变换

2、负阻抗变换器的特性：

当负阻抗变换器2-2’端接有负载阻抗Z_L时，从1-1’端看进去的入端阻抗

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{k\dot{I}_2} = -\frac{1}{k}Z_L \qquad (注意\dot{U}_2 = -Z_L\dot{I}_2)$$

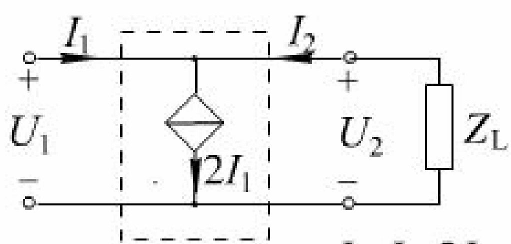
$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{-k\dot{U}_2}{-\dot{I}_2} = -kZ_L$$



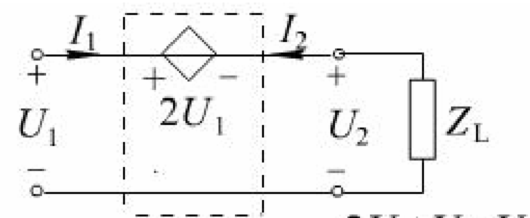
由此可以看出，入端阻抗为负载阻抗的负值。所以，它具有把一个正阻抗变为另一数值（乘以**1/*k***或***k***）的负阻抗的本领。负阻抗变换器为电路设计中实现负的***R***、***L***、***C***提供了可能。

§ 16.6　回转器和负阻抗变换

下面给出的两个含有受控源的二端口电路，分别对应了电流反向型和电压反向型的负阻抗变换器的实例。



$I_1+I_2=2I_1$



$2U_1+U_2=U_1$

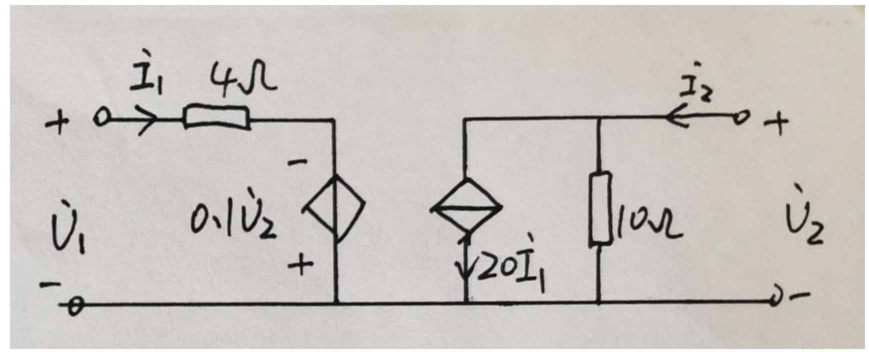
$$\begin{cases} U_1=U_2 \\ I_1=I_2 \qquad (k=1) \end{cases}$$

$$Z_{in}=-Z_L$$

$$\begin{cases} U_1=-U_2 \\ I_1=-I_2 \qquad (k=1) \end{cases}$$

$$Z_{in}=-Z_L$$

1、求Y参数



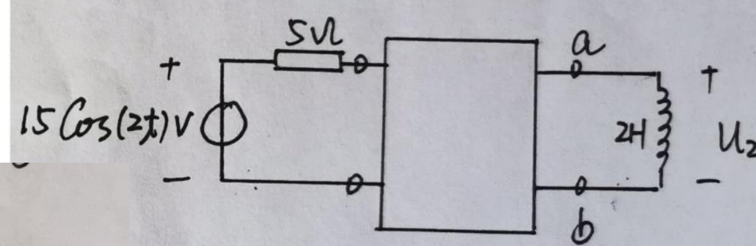
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = 4\dot{I}_1 - 0.1\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = 20\dot{I}_1 + \dfrac{\dot{U}_2}{10} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \dot{I}_1 = \tfrac{1}{4}\dot{U}_1 + \tfrac{1}{40}\dot{U}_2 \\ &\Rightarrow \dot{I}_2 = 5\dot{U}_1 + \tfrac{3}{5}\dot{U}_2 \end{aligned}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{40} \\ 5 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} S.$$

2. 已知: $\omega=2\,rad/s$, $Z_{11}=10\Omega$, $Z_{12}=Z_{21}=j6\,\Omega$.

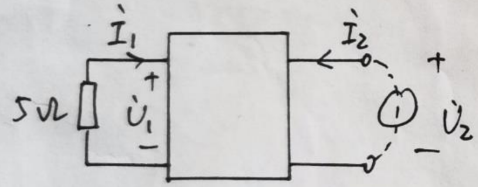
$Z_{22}=4\Omega$, 求 a.b 端的戴维宁等效电路。



$$\begin{cases}\dot{U}_1=10\dot{I}_1+j6\dot{I}_2 & \cdots ① \\ \dot{U}_2=j6\dot{I}_1+4\dot{I}_2 & \cdots ②\end{cases}$$

$\dot{I}_2=0$时 $\dot{U}_{oc}=\dot{U}_2=j6\dot{I}_1=j6\,\dfrac{\frac{15}{\sqrt{2}}-\dot{U}_1}{5}$ $\Leftarrow$ $\dot{U}_1=10\dot{I}_1$

$$=\frac{6}{\sqrt{2}}\angle 90^\circ\ V.$$



外加电源法 求 $Z_{eq}=\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}=\frac{+j6\dot{I}_1+4\dot{I}_2}{\dot{I}_2}=+j6\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}+4$$

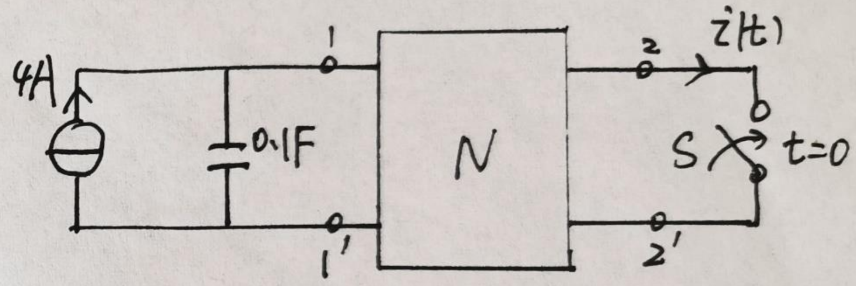
由②式. $\dot{U}_1=-5\dot{I}_1=10\dot{I}_1+j6\dot{I}_2 \Rightarrow \dot{I}_1/\dot{I}_2=-j\frac{6}{15}$

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}=\frac{32}{5}\Omega$$

3. 已知：N的Z参数 $Z=\begin{bmatrix}6&4\\2&8\end{bmatrix}\Omega$

$t<0$时S打开，电路已达稳态。

$t=0$时，S闭合，求$t>0$时的$i(t)$。

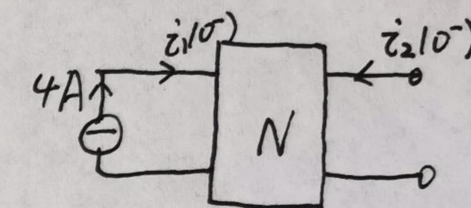


解：由Z均为实数可知N不含动态元件，或动态元件作用相互抵消，一阶电路问题。

$i(t)=-i_2(t)$

① $t=0^-$ 时刻

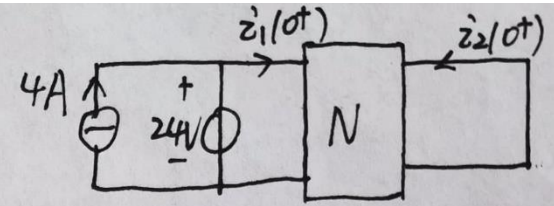
$$\begin{cases} U_1=6i_1+4i_2 \\ U_2=2i_1+8i_2 \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} i_1(0^-)=4A \\ i(0_-)=i_2(0^-)=0 \end{matrix}$$



得 $U_1(0^-)=24V$

电容两端电压满足换路定律 $U_1(0^+)=U_1(0^-)=24V$

② $t=0^+$ 时刻



$$\begin{cases} U_1=6i_1+4i_2 \\ U_2=2i_1+8i_2 \end{cases} \leftarrow \left\langle \begin{array}{l} U_1=24 \\ U_2=0 \end{array} \right.$$

得 $i_2(0^+)=-1.2A$

则 $i(0^+)=1.2A$

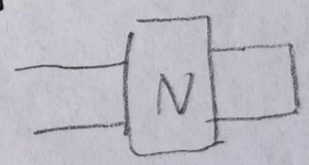
③ $t=\infty$ 时

$$\begin{cases} U_1=6i_1+4i_2 \\ U_2=2i_1+8i_2 \end{cases} \leftarrow \left\langle \begin{array}{l} U_2=0 \\ i_1=4A. \end{array} \right.$$

得 $i_2=-1A.$

则 $i(\infty)=1A$

$t>0$ 时 $U_2=0$ $i_1=-4i_2.$



④ $$Req=\frac{U_1}{i_1}=\frac{6i_1+4i_2}{i_1}$$

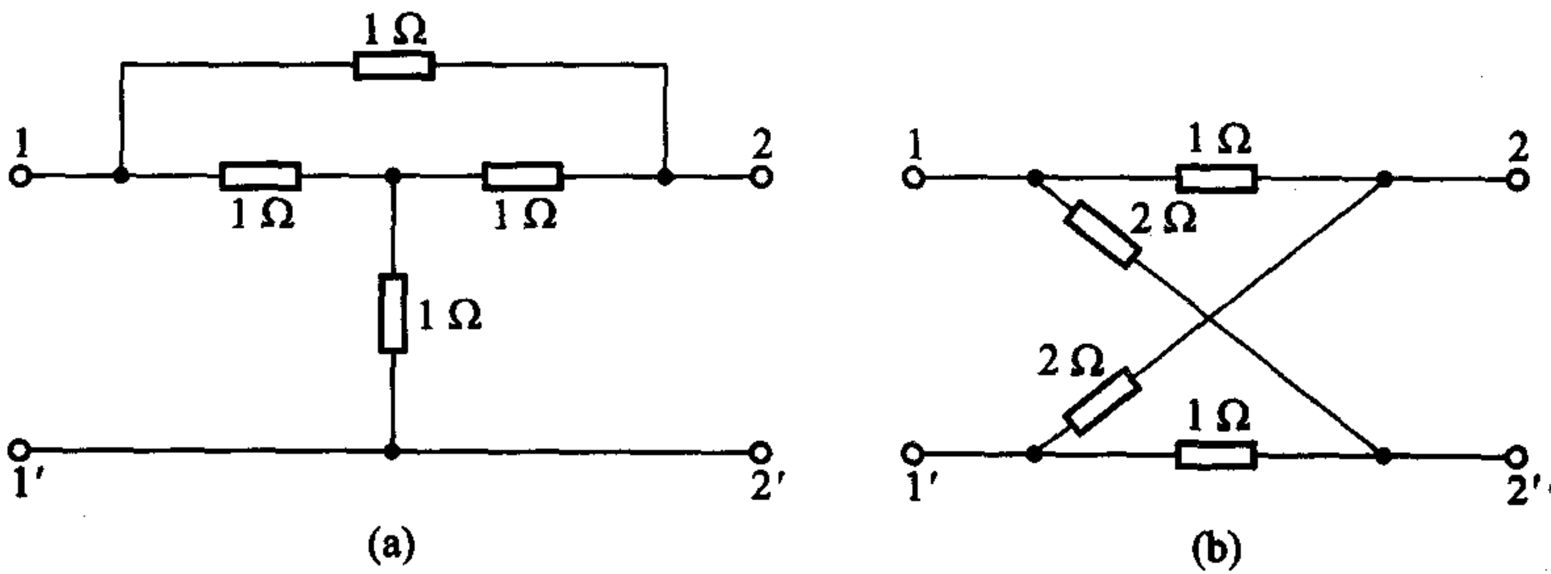
$$=\frac{24-4}{4}=5\Omega$$

$$\tau=Req\,C=0.5\,s$$

$$i(t)=i(\infty)-[i(\infty)-i(0^+)]e^{-t/\tau}=1+0.2e^{-2t}\ A.$$

作业

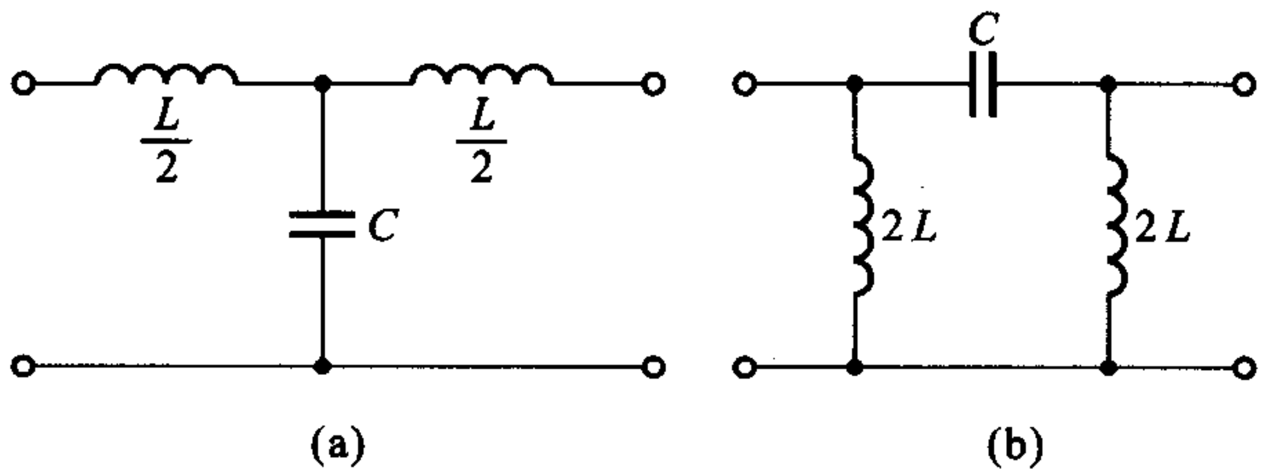
16-2 求题 16－2 图所示二端口的 Y 参数和 Z 参数矩阵。



题 16－2 图

作业

16－8 求题 16－8 图所示二端口的 Z 参数、T 参数矩阵。



题 16－8 图