第一章 行列式

第三节 行列式按行（列）展开

求解行列式除了利用行列式的性质，还可以采用一定手段**把高阶的行列式化成低阶行列式**的方法来进行。

一、余子式与代数余子式

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$- \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定义

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的n-1阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫做元素a_{ij}的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}.$$

$$M_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44} = (-1)^{4+4} M_{44} = M_{44}.$$

行列式的每个元素分别对应着一个余子式和一个代数余子式。

引理 若n阶行列式D第i行除a_{ij}外都为零，则D等于a_{ij}与其代数余子式乘积，即 $D = a_{ij} A_{ij}$.

例如 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

证 当a_{ij}位于第一行第一列时的特殊情况，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们前面的章节已经证明出结论成立，即

$$D=a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形， 此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行，第 $i-2$ 行，$\cdots$，第 1 行对调，

得 $$D=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再把 D 的第 j 列依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，$\cdots$，第 1 列对调，

得

$$D=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{ij}(-1)^{(i+j)-2}M_{ij}=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$ **证毕.**

二、行列式按行（列）展开法则

有了该引理，我们来看n阶行列式：【把第i行看成n项的和】

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + 0 + \cdots + 0 & \cdots & 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}
$$

$$
(i = 1, 2, \cdots, n)
$$

对列也有类似结论。

定理1 行列式$D=|a_{ij}|$等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj},$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

例1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

解：（按第5列展开）

原式= $(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

（再按第一列展开）

$$= -2(-1)^{1+1}5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

（第1行合适倍数分别加到第2行和第3行）

$$= -10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$= -10\times(-2)\times(-7\times6-2\times6)$

$= -1080$

根据代数余子式定义，行列式第i行（j列）元的代数余子式与该行（列）无关。

将行列式$|A|$的第i行元换成第k $(k\neq i)$ 行元得到新行列式

$|B| = |b_{ij}|$ 。**即**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad |B| = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ k\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

显然$|B|$=0，且$|B|$的第i行元的代数余子式与$|A|$的第i行元的代数余子式相等。 **由定理1得：**

$$|B| = b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \cdots + b_{in}B_{in}$$

$$= a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}$$

于是有：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0 \quad (k\neq i)$$

即：在行列式中，一行的元与另一行相应元的代数余子式乘积之和为零。

对于列，也有类似的性质。

定理2 $n(n\geq 2)$阶行列式任一行（列）元与另一行（列）对应元代数余子式乘积之和为零。即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{ks}=0, \quad (i\neq k, \quad i,k=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\sum_{s=1}^{n}a_{sj}A_{st}=0, \quad (j\neq t, \quad j,t=1,2,\cdots,n)$$

两个重要公式：

行

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\boxed{\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}|A|, & 当k=i\\ 0, & 当k\neq i\end{cases}}$$

列

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\boxed{\sum_{s=1}^{n}a_{sj}A_{st}=\begin{cases}|A|, & 当j=t\\ 0, & 当j\neq t\end{cases}}$$

例2. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

求： $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$， $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}$

解：

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=16$$

$$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$$

例3　证明范德蒙($Vandermonde$)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j). \qquad (1)$$

分析

第一行都是1，可用某个1消去其它的1。不妨将第一列的-1倍加到其它各列。

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_n^2-x_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_1^2 & (x_2-x_1)(x_2+x_1) & \cdots & (x_n-x_1)(x_n+x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & (x_2-x_1)(x_2^{n-2}+x_2^{n-3}x_1+x_2^{n-4}x_1^2+\cdots+x_1^{n-2}) & \cdots & (x_n-x_1)(x_n^{n-2}+x_n^{n-3}x_1+\cdots+x_1^{n-2}) \end{vmatrix}$$

之后，按照第一行展开并提出各列公因子。

$$D_n=(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2+x_1 & \cdots & x_n+x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}+x_2^{n-3}x_1+x_2^{n-4}x_1^2+\cdots+x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}+x_n^{n-3}x_1+\cdots+x_1^{n-2} \end{vmatrix}$$

但是后面处理很难继续了。

再观察范德蒙(*Vandermonde*)行列式，试着处理

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

从最后一行减去上一行的x_1倍，出现的结果分解后较为简单，试一试。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n32} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & \vdots \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n32} \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}_{n-1}$$

还可以按照上面的处理，每处理一次行列式阶次降一。最终可得

$$D_n = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j).$$

例3 证明范德蒙(*Vandermonde*)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j). \qquad (1)$$

证 用数学归纳法

$$\because \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j),$$

$\therefore$ 当 $n = 2$ 时（1）式成立.

假设(1)式结论对于n-1阶范德蒙行列式成立。对于n阶行列式，将(1)式由下而上依次从每一行减去上一行的x_1倍，得

$$D_n =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开,并把每列的公因子$(x_i - x_1)$提出,就有

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

***n*-1阶范德蒙行列式**

$$\therefore \quad D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n \geq i > j \geq 2}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1}(x_i - x_j).$$

范德蒙行列式为零的充分必要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 这n个数至少有两个相等。

三、k阶子式及其余子式和代数余子式

定义 在n阶行列式D中任选k行k列，位于这k行k列交叉点处的k^2个元素按原位置组成的k阶行列式M叫做D的一个k阶子式。

在D中划去M所在的行与列，剩下的元素按原位置组成的n-k子式N叫做M的余子式。

我们称这一对子式M与N互为余子式。

设M所在的行数与列数依次为$i_1<i_2<\ldots<i_k$，$j_1<j_2<\ldots<j_k$，

M的余子式N乘以 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$

叫做M的代数余子式，记作A。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$M=\begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \qquad N=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A=(-1)^{(4+5)+(4+5)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在D中， M 是 的一个2阶子式，N是 M 的余子式，A 是 M 的代数余子式.

四、拉普拉斯定理 (*Laplace*)

定理（拉普拉斯定理）：在n阶行列式$|A|$中，任意选定k个行（列）（$1\le k<n$），则$|A|$等于位于这k个行（列）中的一切k阶子式 $M_i(i=1,2,\cdots,C_n^k)$ 与对应的代数余子式 A_i 乘积之和。即

$$|A|=\sum_{i=1}^{C_n^k} M_i A_i$$

例4　设 $D=\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{matrix}} & 0 \\ \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}} \end{vmatrix}$ （一个很重要的结论）

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明　$D=D_1D_2.$

另外，对应的其转置　$\begin{vmatrix} *_1 & *_2 \\ 0 & *_3 \end{vmatrix}=\left|*_1\right|\cdot\left|*_3\right|$

小结

1. 行列式按行（列）展开法则是**把高阶行列式的计算化为低阶行列式**计算的重要工具.

2. $$\sum_{s=1}^{n} a_{ks} A_{is} = \begin{cases} |A|, & \text{当} k = i \\ 0, & \text{当} k \neq i \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sj} A_{st} = \begin{cases} |A|, & \text{当} j = t \\ 0, & \text{当} j \neq t \end{cases}$$

3.记住范德蒙和*Laplace*定理的结论。

思考题

1. 计算$n(n>1)$阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$$

思考题解答

1. 解：按第一列展开（其它可按第n行展开）

$$|A| = a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

（n−1阶）　　　　　　　　　　（n−1阶）

$$= aa^{n-1} + (-1)^{n+1}bb^{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n$$

2. $$\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$$

解：原式＝ $$\begin{vmatrix} \boxed{a \quad a \quad a} \\ b \quad c \quad d \\ b^2 \quad c^2 \quad d^2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+3+1+3+5} \begin{vmatrix} \boxed{ab \quad bc} \\ \boxed{cd \quad da} \end{vmatrix}$$

$$= -abd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & c \\ c & a \end{vmatrix}$$

$$= -abd(c-b)(d-b)(d-c)(a^2-c^2)$$

$$= abd(c-b)(d-b)(d-c)(c^2-a^2)$$