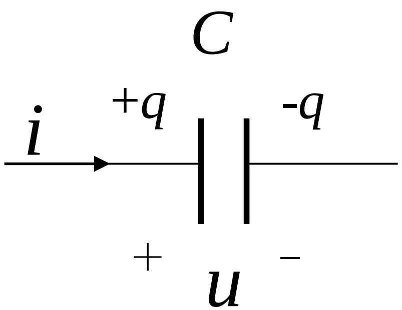
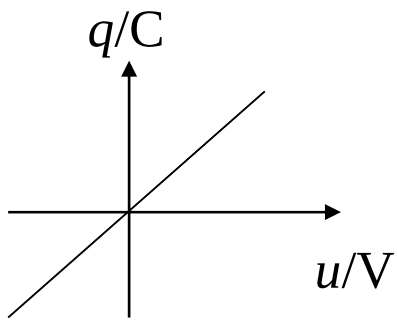
第六章　　储能元件

一、线性电容元件(capacitor)

1. 线性电容元件定义（库伏特性）

电容器是一种能储存电荷或者说储存电场能量的部件。线性电容元件就是反映这种物理现象的电路模型。





在外电源作用下，电容器两极板上分别带上等量异号电荷，撤去电源，板上电荷仍可长久地集聚下去，其特性可用u～q 平面上的一条曲线来描述，称为<u>**库伏特性**</u>。电荷量q与其端电压的关系为

$$q(t)=Cu(t)$$

式中C是电容元件的参数，称为电容元件的电容量，单位为法拉(F)。C是一个正实常数，简称为电容，其符号C既表示元件的参数，也表示电容元件。

2. 伏安特性（VCR，voltage current relation）

（1）伏安特性的微分形式：

若电容端电压u与通过的电流i采用关联参考方向，则有伏安特性的微分形式

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

上式表明：

1) 任何时刻，通过电容元件的电流与该时刻的电压变化率成正比，与u的大小无关，称为动态元件。如果电容两端加直流电压，则$i=0$，电容元件相当于开路。故电容元件有隔断直流的作用。

隔直通交

2) 在实际电路中，通过电容的电流i总是为有限值，这意味着du/dt必须为有限值，也就是说，电容两端电压u必定是时间t的连续函数，而不能跃变。这从数学上可以很好地理解，当函数的导数为有限值时，其函数必定连续。

（2）伏安特性的积分形式：

将微分形式改写为

$$du(t)=\frac{1}{C}i(t)dt$$

对上式从-∞到t进行积分，并设$u(-\infty)=0$，得

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)d\xi$$

可见，电容有“记忆”电流的作用，称为**记忆元件**。（而电阻元件的电压仅与该瞬时的电流值有关，是无记忆元件，称为即时元件。）

设t_0为初始时刻。如果只讨论$t \geq t_0$的情况

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)d\xi + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi$$

$$= u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi$$

其中

$$u(t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)d\xi$$

上式中$u(t_0)$称为电容电压的初始值，它反映电容初始时刻的储能状况，也称为**初始状态**。

上式是电容元件伏安特性的积分形式。

3. 电容元件的功率和储能

（1）在电压、电流关联参考方向下，电容元件吸收功率

$$p(t)=u(t)i(t)=Cu(t)\frac{du(t)}{dt}$$

储能

$$\begin{aligned}\omega_C(t)&=\int_{-\infty}^{t}p(\xi)d\xi\\&=\int_{-\infty}^{t}Cu(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi}d\xi\\&=\int_{u(-\infty)}^{u(t)}Cu(\xi)du(\xi)\\&=\frac{1}{2}Cu^2(t)-\frac{1}{2}Cu^2(-\infty)\end{aligned}$$

一般总可以认为$u(-\infty)=0$，得电容的储能为

$$\omega_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

上式表明，电容所储存的能量一定大于或等于零。

（2）储能：

若在[0， τ]时间内，电容电压由0升高到U，则电容元件吸收的电能为

$$W=\int_0^{\tau} pdt=\int_0^{U} Cudu=\frac{1}{2}CU^2$$

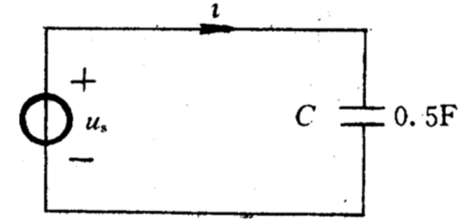
若在相同时间内，电容电压由U下降到0，则电容元件吸收的电能为

$$W^{'}=\int_0^{\tau} pdt=\int_U^{0} Cudu=-\frac{1}{2}CU^2$$

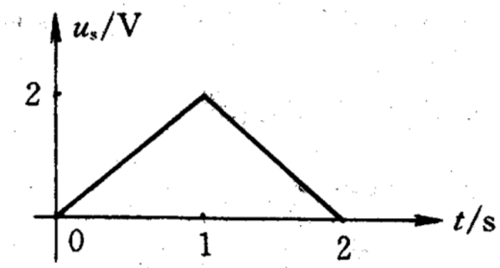
W 为负值，表明电容放出能量，电容元件将储存的电场能转换为电能送还给电路系统。

比较以上二式，电容元件吸收的电能与放出的电能相等，故电容元件不消耗能量，是储能元件。同时，电容元件不会释放出多于它吸收或储存的能量，所以它是一种无源元件。

例5.1-1 图 (*a*)所示电路中的$u_s(t)$波形如图(*b*)所示，已知电容C=0.5F，求电流i、功率$p(t)$和储能$w_C(t)$，并绘出它们的波形。



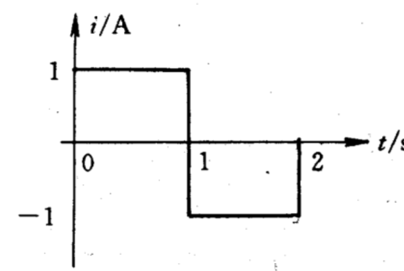
(a)



(b)

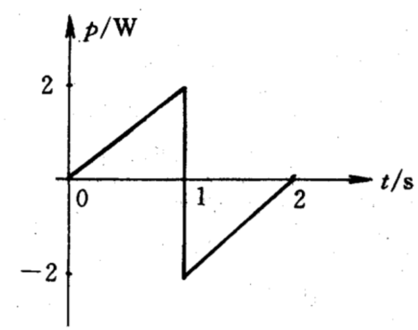
解 写出u_s的函数表示式为

$$u_s(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1s\\ -2(t-2) & 1\le t\le 2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}\qquad i(t)=C\frac{du_s}{dt}=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t<1s\\ -1 & 1\le t<2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



(c)

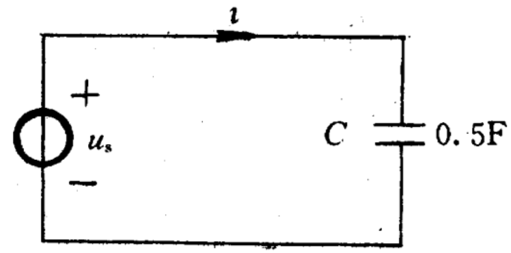
$$p(t)=u(t)i(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t<1s\\ 2(t-2) & 1\le t<2s\\ 0 & t\ge 2s\end{cases}$$



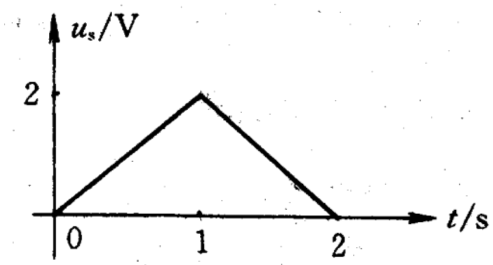
根据电容储能公式

$$w_C = \frac{1}{2}Cu^2(t)$$

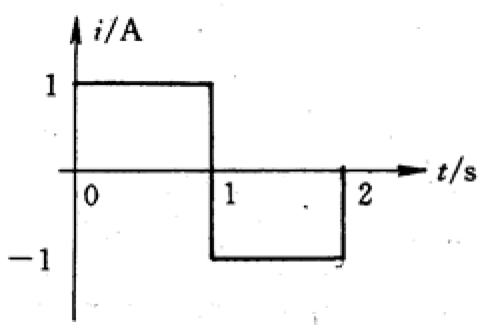
$$w_C(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t^2 & 0 \le t < 1s \\ (t-2)^2 & 1 \le t < 2s \\ 0 & t \ge 2s \end{cases}$$



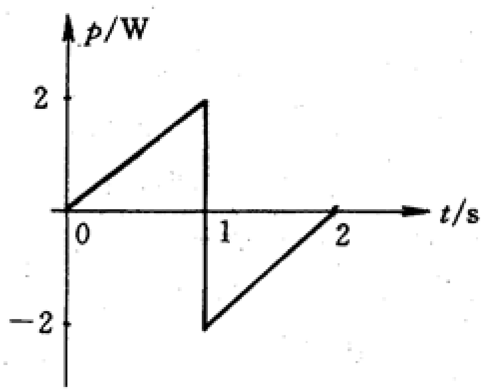
(a)

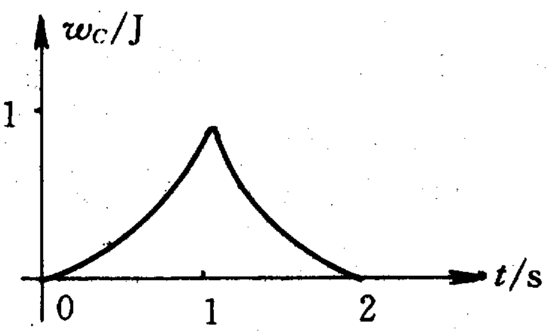


(b)



(c)

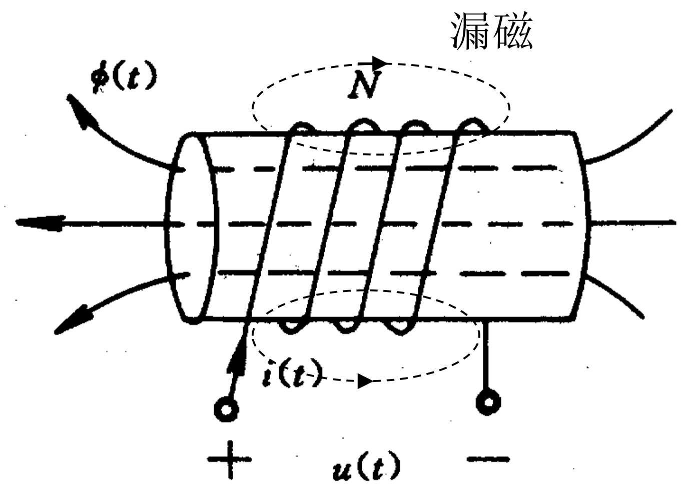




(e)

二、线性电感元件(inductor)

线性电感元件是从实际电感线圈抽象出来的理想模型，它反映了电流产生磁通和磁场能量储存这一物理现象。



一般把金属导线绕在一骨架上来构成一实际电感器，当电流通过线圈时，将产生磁通。其特性可用Ψ～i 平面上的一条曲线来描述，称为韦安特性。

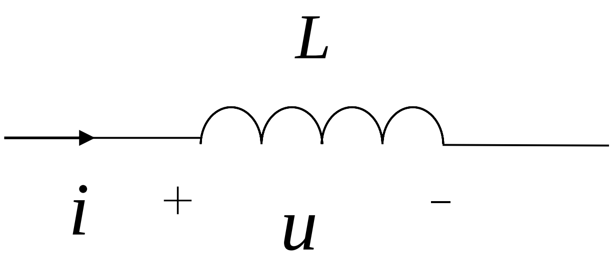
1. 线性电感元件定义（韦安特性）

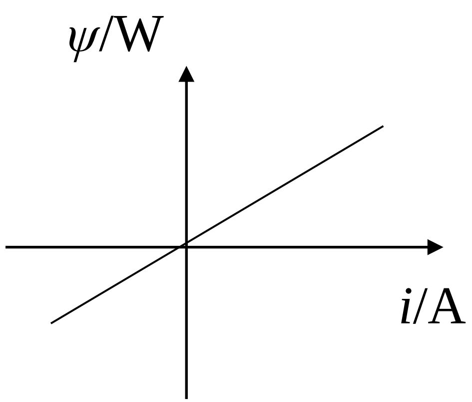
线性电感元件的自感磁通链与元件中的电流存在以下关系

$$\Psi_L(t) = Li(t)$$

其中L称为电感元件的自感（系数）或电感（系数）。L是一个正实常数。

磁通和磁通链的单位是韦伯（Wb），电感L的单位是亨利（H）。





2. 伏安特性（VCR）

（1）微分形式：若电感的端电压U和电流i取关联参考方向，根据电磁感应定律与楞次定律则有

$$u_L(t)=\frac{d\Psi}{dt}=L\frac{di}{dt}$$

式中u和i为关联参考方向，且与 Ψ_L成右手螺旋关系。

上式表明：

1) 任何时刻，电感元件两端的电压与该时刻的电流变化率成正比，称**动态元件**。如果通过电感的电流是直流，则u=0，电感相当于短路。

2) 由于电感上的电压为有限值，故电感中的电流不能跃变。

（2）伏安特性的积分形式：

对微分式两端同时积分，并设$i(-\infty)=0$， 得

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)d\xi$$

设t_0为初始时刻，可改写为

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)d\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)d\xi$$

$$=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)d\xi$$

$$i(t_0)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)d\xi$$

可见，电感元件也是**记忆元件**。上式中$i(t_0)$称为电感电流的初始值，它反映电感初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

3. 电感元件的功率与储能

（1）在电压、电流采用关联参考方向下，电感元件吸收的功率为

$$p(t)=u(t)i(t)=Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

对上式从-∞到t进行积分，得电感元件的储能为

$$w_L(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\xi)d\xi=L\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\frac{di(\xi)}{d\xi}d\xi$$

$$=L\int_{i(-\infty)}^{i(t)}i(\xi)di(\xi)=\frac{1}{2}Li^2(t)$$

（2）储能：

若在[0， τ]时间内，电感电流由0升高到I，则电感元件吸收的电能为

$$W=\int_0^{\tau} pdt=\int_0^{I} Lidi=\frac{1}{2}LI^2$$

若在相同时间内，电感电流由I下降到0，则电感元件吸收的电能为

$$W^{'}=\int_0^{\tau} pdt=\int_I^{0} Lidi=-\frac{1}{2}LI^2$$

吸收的电能为负，意味着放出能量。

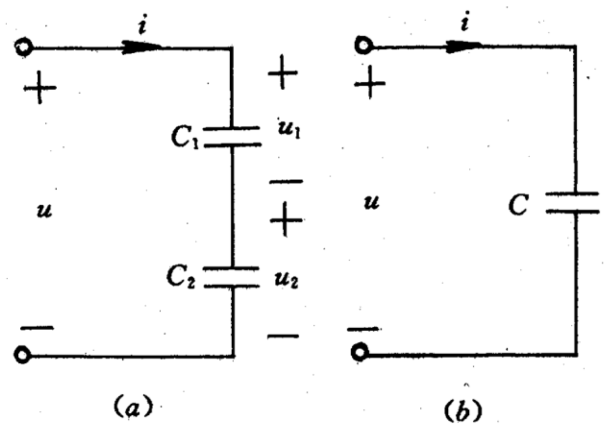
当电流增加时，电感元件从电路吸收电能，转化为磁场能储存起来；当电流减小时，释放磁场能量转化为电能送还给电路。

比较以上二式，电感元件吸收的电能与放出的电能相等，故电感元件不消耗能量，是储能元件。同时，电感元件不会释放出多于它吸收或储存的能量，所以也是一种无源元件。

三、电容的串联与并联等效

1. 串联：

（1）等效电容：



根据电容元件VCR的积分形式，有

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)d\xi \\ u_2 &= \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)d\xi \end{aligned}\right\}$$

$$u = u_1 + u_2 = \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\int_{\infty}^{t} i(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)d\xi$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

若有n个电容C_i（i=1，2，…，n）相串联，同理可推得其等效电容为

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

$$\int_{-\infty}^{t} i(\xi)d\xi = Cu$$

（2）电容串联分压关系：

电容串联时，由于每个电容元件极板上电荷相同，设为q，则有

$$q = C_1 u_1 = C_2 u_2 = \cdots = C_n u_n = Cu$$

故每个电容的电压为，

$$u_k = \frac{C}{C_k} u$$

对两个电容串联的情况，

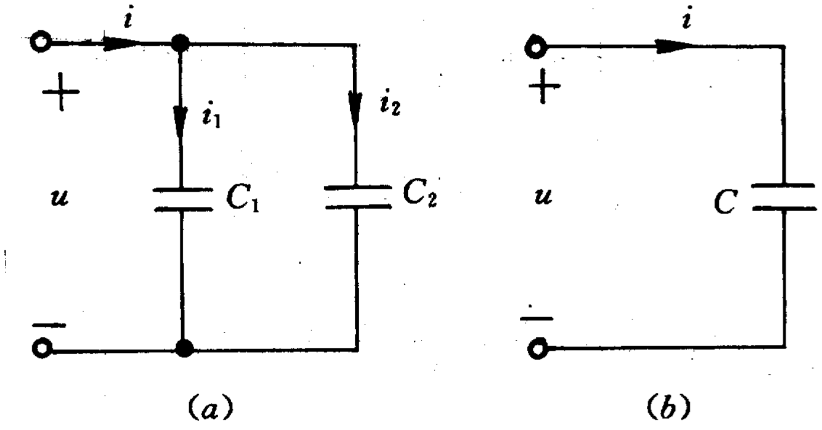
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{C}{C_1} u = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u \\ u_2 &= \frac{C}{C_2} u = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u \end{aligned}\right\}$$

可见，电容串联分压与电容量大小成反比，即电容越大，分得的电压越小。

2. 并联：

（1）等效电容：

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= C_1\frac{du}{dt} \\ i_2 &= C_2\frac{du}{dt} \end{aligned}\right\}$$



由KCL，得端口电流为

$$i = i_1 + i_2 = (C_1 + C_2)\frac{du}{dt}$$

$$= C\frac{du}{dt}$$

$$C = C_1 + C_2$$

若有n个电容C_i（i=1，2，…，n）相并联，同理可推得其等效电容为

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}i$$

（2）电容并联分流关系：

由于每个电容端电压相同，每个电容极板上电荷为，

$$q_k = C_k u$$

故每条支路电流为

$$i_k = \frac{dq_k}{dt} = C_k \frac{du}{dt} = \frac{C_k}{C} i$$

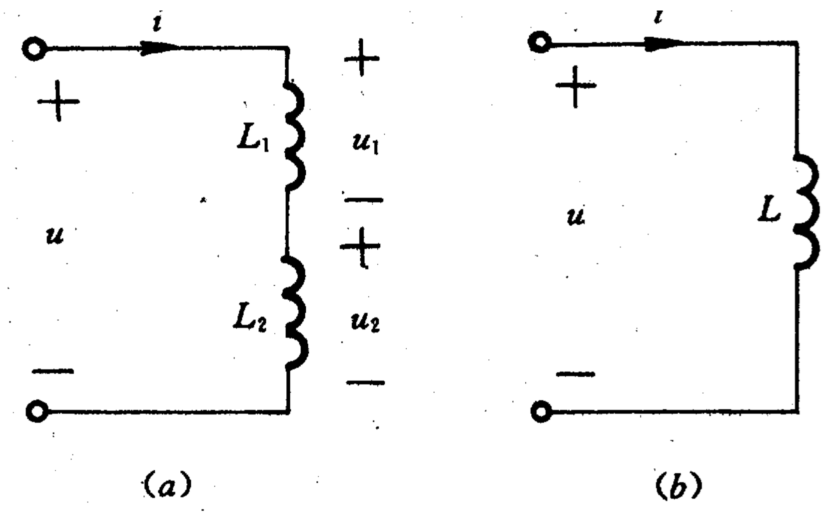
对两个电容并联的情况，

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{C_1}{C} i = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i \\ i_2 &= \frac{C_2}{C} i = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i \end{aligned}\right\}$$

四、电感的串联与并联等效

1. 串联：

（1）等效电感：



$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt}, u_2 = L_2 \frac{di}{dt}$$

$$u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2)\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$$L = L_1 + L_2$$

若有n个电感L_i(i=1，2，…，n)相串联，同理可推得其等效电感为

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

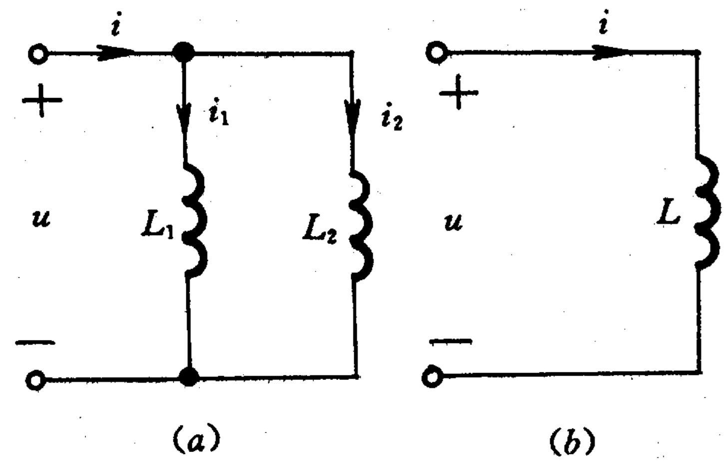
$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}u$$

（2）电感串联分压：

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{L_1}{L}u = \frac{L_1}{L_1+L_2}u \\ u_2 &= \frac{L_2}{L}u = \frac{L_2}{L_1+L_2}u \end{aligned}\right\}$$

2. 并联：

（1）等效电感：



$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)d\xi \\ i_2 &= \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)d\xi \end{aligned}\right\}$$

由KCL，得端口电流

$$i = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_{-\infty}^{t} u(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)d\xi$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

若有n个电感L_i(i =1, 2, …, n)相并联，同理可推得其等效电感为

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n}$$

$$\int_{-\infty}^{t} u(\xi)d\xi = Li$$

（2）电感并联分流：

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{L_1} i = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i \\ i_2 &= \frac{1}{L_2} i = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i \end{aligned}\right\}$$