Contents

1

环和理想

1.1 素理想和极大理想

在本课程中, “环” 一词始终指的是一个有单位元 1 的交换环.

定义 1.1. A 是一个环，A 的所有素理想的集合称为 A 的**谱**，记为 $\mathrm{Spec}(A)$. A 的所有极大理想的集合称为 A 的**极大谱**，记为 $\Omega(A)$.

$f : A \to B$ 是一个环同态, 对于每个 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$, 考虑复合同态 $g = \pi \circ f : A \to B/\mathfrak{q}$, 那么 $\ker g = f^{-1}(\mathfrak{q})$, 故 $A/f^{-1}(\mathfrak{q}) \simeq \mathrm{im}\, g \subset B/\mathfrak{q}$ 是整环, 所以 $f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A)$, 故 f 诱导出了映射 $f^* : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A), f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q})$. 对于极大理想并没有类似的结果, 例如 $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}$, 映射 $f : A \to B$ 为嵌入映射, 取 B 的极大理想 0, 但是 $f^{-1}(0) = 0$ 不是 A 的极大理想.

再提一下理想 $\mathfrak{p}$ 是素理想的三个重要等价条件, 这三种后面都会用到:

1. 定义: 若 $ab \in \mathfrak{p}$, 则 $a \in \mathfrak{p}$ 或者 $b \in \mathfrak{p}$;
2. 逆否命题: 若 $a \notin \mathfrak{p}$ 且 $b \notin \mathfrak{p}$, 则 $ab \notin \mathfrak{p}$;
3. 写为理想的形式: 若理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 满足 $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ 或者 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.

定理 1.2. 任意非零环 A 至少有一个极大理想.

Proof. 令 S 为 A 中所有不等于 (1) 的理想的集合. 由于 $(0) \in S$, 所以 S 非空. 在集合的包含关系下 S 成为一个偏序集. 对于 S 中的每个链 T, 考虑

$$I = \bigcup_{\mathfrak{a} \in T} \mathfrak{a},$$

容易验证 I 是不等于 (1) 的理想, 所以 $I \in S$ 是 T 的上界. 那么根据 Zorn 引理, S 存在一个极大元 $\mathfrak{m}$. 若理想 J 满足, $\mathfrak{m} \subseteq J \subseteq A$, 如果 $J \neq A$, 那么 $J \in S$, 由于 $\mathfrak{m}$ 是极大元, 所以 $J = \mathfrak{m}$, 故 $\mathfrak{m}$ 就是一个极大理想. □

推论 1.3. 如果 $\mathfrak{a} \neq (1)$ 是 A 的一个理想，那么存在一个包含 $\mathfrak{a}$ 的极大理想.

Proof. $A/\mathfrak{a}$ 是非零环, 从而至少有一个极大理想, 对应于 A 的包含 $\mathfrak{a}$ 的极大理想. □

推论 1.4. A 的任意非单位元素 a 都被包含在一个极大理想中.

定义 1.5. 若环 A 只有一个极大理想 $\mathfrak{m}$，那么 A 被称为**局部环**. 对应的域 $A/\mathfrak{m}$ 被称为 A **的剩余域**.

例 1.6.

1. 任意域都是局部环, 其只有一个极大理想 0.
2. p 是素数, $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 是局部环, 其极大理想为 $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. 这是因为 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 的极大理想一一对应到 $\mathbb{Z}$ 中包含 (p^n) 的极大理想 (a), 那么 $a \mid p^n$, 由于 $\mathbb{Z}$ 是主理想整环, 所以 (a) 是极大理想当且仅当 a 是不可约元, 故只有 $a = p$, 对应于 $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
3. 域 F 上的形式幂级数环 $F[[x]]$ 是局部环, 其极大理想为 (x). 注意到如果 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \notin (x)$, 即 $a_0 \neq 0$, 那么
$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots} = \frac{1}{a_0}\frac{1}{1 + (a_1/a_0x + a_2/a_0x^2 + \cdots)} = \frac{1}{a_0}(1 - a_1/a_0x + \cdots),$$
这表明 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ 是单位. 另一方面, 因为 x 不可逆, 所以 (x) 中的元素都不可逆. 故 $F[[x]]$ 的单位群就是 $F[[x]]\backslash(x)$. 这表明若 $\mathfrak{a} \neq (1)$ 是理想, 那么必然有 $\mathfrak{a} \subseteq (x)$. 这就表明 (x) 是唯一的极大理想.

上述例 3 可以进行一般化, 即下面的命题.

命题 1.7.

1. A 是一个环，$\mathfrak{m} \neq (1)$ 是一个理想，并且任意 $x \in A\backslash\mathfrak{m}$ 都是 A 中的单位，那么 A 是局部环，且 $\mathfrak{m}$ 为 A 的极大理想.
2. A 是一个环，$\mathfrak{m}$ 是一个极大理想，使得 $1 + \mathfrak{m}$ 中的每个元素都是 A 中的单位，那么 A 是局部环.

Proof. (1) 任意 $x \in A\backslash\mathfrak{m}$ 都是 A 中的单位表明若 $\mathfrak{a} \neq (1)$ 是任意理想, 那么 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$, 所以 $\mathfrak{m}$ 是唯一的极大理想.

(2) 任取 $x \in A\backslash\mathfrak{m}$, 那么 $x + \mathfrak{m} \in A/\mathfrak{m}$ 是非零元, 所以存在 $y + \mathfrak{m} \in A/\mathfrak{m}$ 使得 $(x + \mathfrak{m})(y + \mathfrak{m}) = 1 + \mathfrak{m}$, 即 $xy - 1 \in \mathfrak{m}$, 故 $xy \in 1 + \mathfrak{m}$ 是单位, 所以 x 是单位, 由 (1) 可知 A 是局部环. □

1.2 幂零根和 Jacobson 根

命题 1.8. 环 A 的所有幂零元的集合 $\mathrm{nil}(A)$ 是一个理想，并且 $A/\mathrm{nil}(A)$ 没有非零的幂零元.

Proof. 任取 $x \in \mathrm{nil}(A)$, 显然对于所有的 $a \in A$, ax 仍然是幂零元. 任取 $x, y \in \mathrm{nil}(A)$, 即存在 m, n 使得 $x^m = 0, y^n = 0$, 那么
$$(x - y)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n}\binom{m+n}{i}x^i(-y)^{m+n-i} = \left(\sum_{i=0}^{m} + \sum_{i=m+1}^{m+n}\right)\binom{m+n}{i}x^i(-y)^{m+n-i},$$
前一个和式的每一项中 $m + n - i \geq n$, 故 $x^i(-y)^{m+n-i} = 0$, 后一个和式的每一项中 $i \geq m$, 故 $x^i(-y)^{m+n-i} = 0$, 所以 $x - y \in \mathrm{nil}(A)$, 即 $\mathrm{nil}(A)$ 是一个理想.

若 $a+\mathrm{nil}(A)$ 是幂零元，即存在 m 使得 $a^m+\mathrm{nil}(A)=0$，即 $a^m\in\mathrm{nil}(A)$，这表明 $a\in\mathrm{nil}(A)$. □

定义 1.9. 理想 $\mathrm{nil}(A)$ 被称为 A 的**幂零根**.

命题 1.10. A 的幂零根是所有素理想的交集.

Proof. 令 $\mathrm{nil}'(A)$ 是 A 的所有素理想的交集. 如果 $a\in A$ 是幂零元, 那么存在 m 使得 $a^m=0\in\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ 是任意素理想. 根据素理想的定义, 这表明 $a\in\mathfrak{p}$, 故 $a\in\mathrm{nil}'(A)$.

另一方面, 如果 $a\in A$ 不是幂零元, 令 S 是理想 $\mathfrak{a}$ 的集合, $\mathfrak{a}$ 满足对于任意的 $n>0$, $a^n\notin\mathfrak{a}$. 由于 $0\in S$, 所以 S 非空. 容易验证 S 满足 Zorn 引理使用条件, 所以存在极大元 $\mathfrak{p}$. 我们证明 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 若 $x,y\notin\mathfrak{p}$, 那么 $\mathfrak{p}+(x)$ 和 $\mathfrak{p}+(y)$ 严格包含 $\mathfrak{p}$, 因此它们不属于 S, 于是存在 m,n 使得

$$a^m\in\mathfrak{p}+(x),\quad a^n\in\mathfrak{p}+(y).$$

这表明 $a^{m+n}\in(\mathfrak{p}+(x))(\mathfrak{p}+(y))\subseteq\mathfrak{p}+(xy)$, 故 $\mathfrak{p}+(xy)\notin S$, 所以 $xy\notin\mathfrak{p}$. 这表明 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 所以存在一个素理想 $\mathfrak{p}$ 使得 $a\notin\mathfrak{p}$, 故 $a\notin\mathrm{nil}'(A)$. □

定义 1.11. 环 A 的所有极大理想的交集被称为 A 的 **Jacobson 根**，记为 $\mathrm{rad}(A)$.

命题 1.12. $x\in\mathrm{rad}(A)$ 当且仅当对于任意的 $y\in A$，$1-xy$ 是单位.

Proof. 若 $x\in\mathrm{rad}(A)$, 那么对于任意的 $y\in A$ 有 $xy\in\mathrm{rad}(A)$. 如果 $1-xy$ 不是单位, 那么存在一个极大理想 $\mathfrak{m}\ni 1-xy$, 注意到 $xy\in\mathrm{rad}(A)\subseteq\mathfrak{m}$, 所以 $1=(1-xy)+xy\in\mathfrak{m}$, 这与 $\mathfrak{m}$ 是极大理想矛盾, 所以 $1-xy$ 是单位.

若对于任意的 $y\in A$, $1-xy$ 是单位. 假设存在一个极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $x\notin\mathfrak{m}$, 故 $\mathfrak{m}+(x)$ 严格包含 $\mathfrak{m}$, 所以 $(1)=\mathfrak{m}+(x)$, 即存在 $y\in A$ 使得 $1=m+xy$, 其中 $m\in\mathfrak{m}$, 那么 $1-xy=m$ 不是单位, 推出矛盾. 故 $x\in\mathrm{rad}(A)$. □

1.3 幂等元与环的分解

这部分是上课的内容, 书中没有. 环 A 中满足 $x^2=x$ 的元素被称为幂等元. 0 和 1 显然是幂等元, 被称为平凡幂等元. 关于幂等元可以注意到下面的两个简单事实: 如果 x 是幂等元, 那么 $(1-x)^2=1-2x+x^2=1-x$, 所以 $1-x$ 也是幂等元, 并且 $x(1-x)=0$. 如果 $x\in A^\times$ 是幂等元, 那么 $x=x^2x^{-1}=xx^{-1}=1$, 所以 $A^\times$ 中的幂等元只有 1.

定义 1.13. 一个环 A 如果不能同构于两个非零环 A_1 和 A_2 的直积，那么称 A 是**不可分解的**.

幂等元实际上和环的可分解性联系紧密, 体现在下面的引理.

引理 1.14. A 是一个环，那么下面的说法是等价的：

1. 存在两个非零环 A_1,A_2 使得 $A\simeq A_1\times A_2$；
2. A 存在非平凡幂等元；

3. 存在两个非零理想 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ 使得 $A = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$.

Proof. (1) ⇒ (2) 如果存在两个非零环 A_1, A_2 使得 $A \simeq A_1 \times A_2$, 那么 $(0,0), (1,0), (0,1)$ 是 $A_1 \times A_2$ 的三个幂等元, 所以 $A_1 \times A_2$ 一定有非平凡幂等元, 即 A 存在非平凡幂等元.

(2) ⇒ (3) 如果 A 存在非平凡幂等元 e, 注意到任意的 $x \in A$ 满足 $x = xe + x(1-e)$, 所以 $A = (e) + (1-e)$. 取 $x \in (e) \cap (1-e)$, 那么存在 $a, b \in A$ 使得 $x = ae = b(1-e)$, 那么 $ae = ae^2 = b(1-e)e = 0$, 所以 $x = 0$. 这就表明 $A = (e) \oplus (1-e)$.

(3) ⇒ (1) 考虑同态 $\phi : A \to A/\mathfrak{a}_1 \times A/\mathfrak{a}_2$, $\phi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, x + \mathfrak{a}_2)$, 由于 $\ker \phi = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = 0$, 所以 ϕ 是单射. 任取 $(x + \mathfrak{a}_1, y + \mathfrak{a}_2) \in A/\mathfrak{a}_1 \times A/\mathfrak{a}_2$, 设 $1 = a_1 + a_2$, 其中 $a_1 \in \mathfrak{a}_1, a_2 \in \mathfrak{a}_2$, 那么令 $a = xa_2 + ya_1$, 就有

$$\phi(a) = (xa_2 + \mathfrak{a}_1, ya_1 + \mathfrak{a}_2) = (x + \mathfrak{a}_1, y + \mathfrak{a}_2),$$

所以 ϕ 是满射, 故 $A \simeq A/\mathfrak{a}_1 \times A/\mathfrak{a}_2$. □

例 1.15.

1. 整环都是不可分解的, 因为 $x^2 - x = x(x-1) = 0$ 的解只有 0 和 1.
2. 局部环是不可分解的, 若 x 是一个非平凡幂等元, 那么 $1 - x$ 可逆, 从而 $1 - x = 1$, 即 $x = 0$, 这与 x 非平凡矛盾.

1.4 理想的操作

对于环 A 的两个理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, 有 $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, 这表明 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$ 的时候, 有 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, 我们将这种情况称为 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 互素.

A 是环, $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ 是 A 的理想, 定义同态

$$\phi : A \to \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{a}_i)$$

为 $\phi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, \dots, x + \mathfrak{a}_n)$.

下面的命题实际上就是中国剩余定理的证明.

命题 1.16.

1. 若 $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$ 互素 $(i \neq j)$, 那么 $\prod \mathfrak{a}_i = \bigcap \mathfrak{a}_i$.
2. ϕ 是满射当且仅当 $i \neq j$ 的时候总有 $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$ 互素.
3. ϕ 是单射当且仅当 $\bigcap \mathfrak{a}_i = (0)$.

Proof. (1) 对 n 归纳即可. $n = 2$ 的时候上面已经说明, 假设结论在 $n - 1$ 的时候成立. 我们证明 $\mathfrak{a}_i$ 和 $\prod_{j \neq i} \mathfrak{a}_j$ 互素即可. 这实际上是证明若理想 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ 都和 $\mathfrak{b}$ 互素, 那么 $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ 也和 $\mathfrak{b}$ 互素. 注意到

$$(1) = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b})(\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b},$$

这就表明 $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ 与 $\mathfrak{b}$ 互素. 回到这个命题, 重复上述步骤就可以得到 $\mathfrak{a}_i$ 和 $\prod_{j\neq i}\mathfrak{a}_j$ 互素, 根据假设, $\prod_{j\neq i}\mathfrak{a}_j=\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{a}_j$, 故

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}_i\left(\prod_{j\neq i}\mathfrak{a}_j\right)=\mathfrak{a}_i\cap\left(\prod_{j\neq i}\mathfrak{a}_j\right)=\mathfrak{a}_i\cap\left(\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{a}_j\right)=\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i.$$

(2) 若 ϕ 是满射,对于 $(0,\dots,1+\mathfrak{a}_i,\dots,0)$,存在 $a\in A$,使得 $\phi(a)=(0,\dots,1+\mathfrak{a}_i,\dots,0)$, 这表明 $1-a\in\mathfrak{a}_i$, 并且 $a\in\mathfrak{a}_j$ $(j\neq i)$, 故

$$1=(1-a)+a\in\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j,$$

这就表明 $\mathfrak{a}_i$ 和 $\mathfrak{a}_j$ 互素.

反之, 若 $\mathfrak{a}_i$ 和 $\mathfrak{a}_j$ 互素. 令 $\mathfrak{b}_i=\prod_{j\neq i}\mathfrak{a}_j$, 那么 $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2=(\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_1)\mathfrak{a}_3\cdots\mathfrak{a}_n=\mathfrak{a}_3\cdots\mathfrak{a}_n$, 进一步的, $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_3=(\mathfrak{a}_3+\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)\mathfrak{a}_4\cdots\mathfrak{a}_n$, 根据 (1) 的证明我们知道 $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ 与 $\mathfrak{a}_3$ 互素, 所以 $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2+\mathfrak{b}_3=\mathfrak{a}_4\cdots\mathfrak{a}_n$, 重复这个步骤, 就得到 $\mathfrak{b}_1+\cdots+\mathfrak{b}_n=(1)$. 这表明存在 $b_i\in\mathfrak{b}_i$, 使得 $b_1+\cdots+b_n=1$, 此时 $b_i\in\prod_{j\neq i}\mathfrak{a}_j\subseteq\mathfrak{a}_j$ 以及 $1-b_i=\sum_{j\neq i}b_j\in\mathfrak{a}_i$, 故 $\phi(b_i)$ 的第 i 个分量是 $1+\mathfrak{a}_i$, 其余分量都是 0. 这就足以证明 ϕ 是满射.

(3) 注意到 $\bigcap\mathfrak{a}_i=\ker\phi$ 即可. □

命题 1.17.

1. 令 $\mathfrak{p}_1,\dots\mathfrak{p}_n$ 是素理想，理想 $\mathfrak{a}$ 包含于 $\bigcup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$，那么存在某个 i 使得 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$.
2. 令 $\mathfrak{a}_1,\dots\mathfrak{a}_n$ 是理想，素理想 $\mathfrak{p}$ 包含 $\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i$，那么存在某个 i 使得 $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}_i$. 如果 $\mathfrak{p}=\bigcap\mathfrak{a}_i$，那么存在某个 i 使得 $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_i$.

Proof. (1) 证明逆否命题: 如果对于任意的 $1\le i\le n$ 都有 $\mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{p}_i$, 那么 $\mathfrak{a}\not\subseteq\bigcup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$. 对 n 使用归纳法, $n=1$ 时显然成立. 假设结论在 $n-1$ 时成立. 在 n 的时候, 那么根据假设, 对于任意的 $1\le i\le n$, 有 $\mathfrak{a}\not\subseteq\bigcup_{j\neq i}\mathfrak{p}_j$, 即存在 $x_i\in\mathfrak{a}$, 使得 $x_i\notin\bigcup_{j\neq i}\mathfrak{p}_j$, 此时有两种情况.

- 存在某个 i_0 使得 $x_{i_0}\notin\mathfrak{p}_{i_0}$. 此时 $x_{i_0}\notin\bigcup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$, 故 $\mathfrak{a}\not\subseteq\bigcup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$, 结论成立.
- 对于任意的 i, 都有 $x_i\in\mathfrak{p}_i$. 考虑元素

$$y=\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}x_j=x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_1\cdots x_{n-2}x_{n-1},$$

根据假设 $x_2,x_3,\dots,x_n\notin\mathfrak{p}_1$, 所以 $x_2x_3\cdots x_n\notin\mathfrak{p}_1$, 同时 $\prod_{j\neq i,i>1}x_j\in\mathfrak{p}_1$, 所以 $y\notin\mathfrak{p}_1$. 同理, 对于任意的 i 都有 $y\notin\mathfrak{p}_i$, 所以 $y\notin\bigcup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$, 故 $\mathfrak{a}\not\subseteq\bigcup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$, 结论成立.

(2) 由于

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\cdots\mathfrak{a}_n\subseteq\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i\subseteq\mathfrak{p},$$

所以存在某个 i 使得 $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}_i$. □

如果 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 是环 A 的两个理想, 定义它们的**商**为

$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})=\{x\in A\,|\,x\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\},$$

容易验证这是一个理想. 注意到 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$, 所以 $\mathfrak{a}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$. 特别地, $(0:\mathfrak{b})$ 被称为 $\mathfrak{b}$ 的**零化子**, 记为 $\mathrm{Ann}(\mathfrak{b})$. 由于 $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ 是包含 $\mathfrak{a}$ 的理想, 根据对应定理, 所以其对应到 $A/\mathfrak{a}$ 的理想 $\overline{(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})}=\mathrm{Ann}(\bar{\mathfrak{b}})$. 如果 $\mathfrak{b}$ 是主理想 (x), 我们用 $(\mathfrak{a}:x)$ 代表 $(\mathfrak{a}:(x))$.

命题 1.18.

1. $\mathfrak{a}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$;
2. $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$;
3. $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})=((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})$;
4. $(\bigcap_i\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})=\bigcap_i(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$;
5. $\left(\mathfrak{a}:\sum_i\mathfrak{b}_i\right)=\bigcap_i(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_i)$.

Proof. (1) 和 (2) 是显然的.

(3) $x\in((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})$ 当且仅当 $x\mathfrak{c}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$, 当且仅当 $x\mathfrak{c}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$, 当且仅当 $x\in(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})$, 所以 $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})$. 另一个同理.

(4) $x\in(\bigcap_i\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$ 当且仅当 $x\mathfrak{b}\subseteq\bigcap_i\mathfrak{a}_i$, 当且仅当 $x\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}_i\ (\forall i)$, 当且仅当 $x\in(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})\ (\forall i)$, 所以 $(\bigcap_i\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})=\bigcap_i(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$.

(5) $x\in\left(\mathfrak{a}:\sum_i\mathfrak{b}_i\right)$ 当且仅当 $x\left(\sum_i\mathfrak{b}_i\right)\subseteq\mathfrak{a}$, 由于 $x\left(\sum_i\mathfrak{b}_i\right)=\sum_i x\mathfrak{b}_i$, 所以这相当于 $x\mathfrak{b}_i\subseteq\mathfrak{a}\ (\forall i)$, 所以 $\left(\mathfrak{a}:\sum_i\mathfrak{b}_i\right)=\bigcap_i(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_i)$. □

对于环 A 的理想 $\mathfrak{a}$, 定义 $\mathfrak{a}$ 的**根**为

$$\sqrt{\mathfrak{a}}=\{x\in A\,|\,\exists n>0,x^n\in\mathfrak{a}\}.$$

显然 $\mathfrak{a}\subseteq\sqrt{\mathfrak{a}}$. 对于自然同态 $\pi:A\to A/\mathfrak{a}$, 注意到 $\sqrt{\mathfrak{a}}=\pi^{-1}(\mathrm{nil}(A/\mathfrak{a}))$, 所以 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ 是包含 $\mathfrak{a}$ 的一个理想.

命题 1.19. 理想 $\mathfrak{a}$ 的根是所有包含 $\mathfrak{a}$ 的素理想的交集.

Proof. 我们有

$$\sqrt{\mathfrak{a}}=\pi^{-1}(\mathrm{nil}(A/\mathfrak{a}))=\pi^{-1}\left(\bigcap_{\bar{\mathfrak{p}}\text{ prime}}\bar{\mathfrak{p}}\right)=\bigcap_{\bar{\mathfrak{p}}\text{ prime}}\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})=\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\text{ prime}\\ \mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}}}\mathfrak{p}.$$ □

命题 1.20.

1. $\sqrt{\mathfrak{a}}\supseteq\mathfrak{a}$;
2. $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}=\sqrt{\mathfrak{a}}$;
3. $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}=\sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}=\sqrt{\mathfrak{a}}\cap\sqrt{\mathfrak{b}}$;
4. $\sqrt{\mathfrak{a}}=(1)$ 当且仅当 $\mathfrak{a}=(1)$;
5. $\sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}=\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}}$;
6. 如果 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 那么 $\sqrt{\mathfrak{p}^n}=\mathfrak{p}\ (\forall n>0)$.

Proof. (1) 显然.

(2) 已经有 $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}$. 任取 $x \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}$, 那么存在 n 使得 $x^n \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, 进而存在 m 使得 $x^{nm} = (x^n)^m \in \mathfrak{a}$, 所以 $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, 所以 $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(3) 由于 $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$,所以 $\sqrt{\mathfrak{ab}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}$.任取 $x \in \sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}$,那么存在 n 使得 $x^n \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, 那么 $x^{2n} = x^n x^n \in \mathfrak{ab}$, 所以 $x \in \sqrt{\mathfrak{ab}}$. 所以 $\sqrt{\mathfrak{ab}} = \sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}$.

显然 $\sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$. 任取 $x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$, 那么存在 n, m 使得 $x^n \in \mathfrak{a}, x^m \in \mathfrak{b}$, 所以 $x^{n+m} = x^n x^m \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, 所以 $x \in \sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}$, 所以 $\sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.

(4) $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1)$ 当且仅当 $1 \in \mathfrak{a}$.

(5) 显然 $\sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}}$. 由于 $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ 以及 $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$, 所以 $\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$, 所以 $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}} \subseteq \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}} = \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$, 所以 $\sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{b}}}$.

(6) 对 n 归纳. $n = 1$ 的时候, 任取 $x \in \sqrt{\mathfrak{p}}$, 那么存在 m 使得 $x^m \in \mathfrak{p}$, 故 $x \in \mathfrak{p}$, 所以 $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. 假设结论在 $n-1$ 时成立, 那么 $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \sqrt{\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{n-1}} = \sqrt{\mathfrak{p}} \cap \sqrt{\mathfrak{p}^{n-1}} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. □

1.5 理想的扩张和收缩

$f : A \to B$ 是环同态. 如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想,$f(\mathfrak{a})$ 不一定是理想, 我们定义 $f(\mathfrak{a})$ 在 B 中生成的理想 $Bf(\mathfrak{a})$ 为 $\mathfrak{a}$ 的**扩张**, 记作 $\mathfrak{a}^e$, 更准确地说, $\mathfrak{a}^e$ 中的元素形如 $\sum y_i f(x_i)$, 其中 $x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in B$.

如果 $\mathfrak{b}$ 是 B 的理想, 那么 $f^{-1}(\mathfrak{b})$ 总是 A 的理想, 我们称为 $\mathfrak{b}$ 的**收缩**, 记为 $\mathfrak{b}^c$. 在一开始我们就提过, 如果 $\mathfrak{b}$ 是素理想, 那么 $\mathfrak{b}^c$ 也是素理想. 但是 $\mathfrak{a}$ 是素理想, $\mathfrak{a}^e$ 不一定是素理想.

当 $A \subseteq B$, f 是嵌入的时候, 可以观察到: $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}B$ 以及 $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b} \cap A$.

例 1.21. 考虑嵌入 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$. $\mathbb{Z}$ 的素理想 (p) 扩张到 $\mathbb{Z}[i]$ 中可能是也可能不再是素理想. $\mathbb{Z}[i]$ 是主理想整环, 那么实际上有下面的情况:

1. $(2)^e = ((1+i)^2)$ 是 $\mathbb{Z}[i]$ 中两个素理想的平方.
2. 如果 $p \equiv 1 \pmod 4$,那么 $(p)^e$ 是两个不同的素理想之积,例如 $(5)^e = (2+i)(2-i)$.
3. 如果 $p \equiv 3 \pmod 4$, 那么 $(p)^e$ 仍然是 $\mathbb{Z}[i]$ 中的素理想.

第二种情况并不是一个平凡的结果, 这来源于 Fermat 二平方和定理: 一个素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ 当且仅当能够写为 $p = a^2 + b^2$ 的形式. 进一步的, 在代数数论中, 上述三种情况分别被称为分歧、分裂和惯性.

命题 1.22.

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$, $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$.
2. $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$, $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$.
3. 如果 C 所有理想的收缩组成的 A 的子集, E 是所有理想的扩张组成的 B 的子集, 即

$$C = \{\mathfrak{b}^c \mid \mathfrak{b} \subseteq B\}, \quad E = \{\mathfrak{a}^e \mid \mathfrak{a} \subseteq A\},$$

那么 $C = \{\mathfrak{a} \subseteq A \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$, $E = \{\mathfrak{b} \subseteq B \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$. 这表明 C 和 E 之间存在一一对应, 即 $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$ 以及 $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$.

Proof. (1) 直接按定义验证即可.

(2) 已经有 $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{b}^{cec}$. 另一方面, 有 $\mathfrak{b}^{cec} = (\mathfrak{b}^{ce})^c \subseteq \mathfrak{b}^c$.

(3) 如果 $\mathfrak{a} \in C$, 那么 $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{a}$. 反之, 若 $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$, 那么 $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}^e)^c$, 所以 $\mathfrak{a} \in C$. □

命题 1.23. 如果 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ 是 A 的理想, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ 是 B 的理想, 那么

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e, && (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c,\\
&(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e, && (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c,\\
&(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e, && (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c,\\
&(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e), && (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c),\\
&\sqrt{\mathfrak{a}}^e \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}^e}, && \sqrt{\mathfrak{b}}^c = \sqrt{\mathfrak{b}^c}.
\end{aligned}$$

Proof.

- $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$. 根据环同态的性质, 我们有
$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = B(f(\mathfrak{a}_1) + f(\mathfrak{a}_2)) = Bf(\mathfrak{a}_1) + Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e.$$
- $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$. 任取 $a_1 + a_2 \in \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$, 即 $f(a_1) \in \mathfrak{b}_1, f(a_2) \in \mathfrak{b}_2$, 所以 $f(a_1+a_2) = f(a_1)+f(a_2) \in \mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2$,所以 $a_1+a_2 \in (\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)^c$,即 $(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c+\mathfrak{b}_2^c$.
- $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$.
$$(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq B(f(\mathfrak{a}_1) \cap f(\mathfrak{a}_2)) = Bf(\mathfrak{a}_1) \cap Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e.$$
- $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$.
$$(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = f^{-1}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \cap f^{-1}(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c.$$
- $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e$.
$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1)f(\mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1)Bf(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e.$$
- $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c$. 任取 $a_1 \in \mathfrak{b}_1^c, a_2 \in \mathfrak{b}_2^c$, 那么 $f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2) \in \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, 是哟 $a_1a_2 \in (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c$, 即 $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c$.
- $(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$.
$$(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e\mathfrak{a}_2^e = \big((\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)\mathfrak{a}_2\big)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e.$$
- $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$.
$$(\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)\mathfrak{b}_2^c \subseteq \big((\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)\mathfrak{b}_2\big)^c \subseteq \mathfrak{b}_1^c.$$
- $\sqrt{\mathfrak{a}}^e \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}^e}$. 任取 $\sum_i b_i f(a_i) \in \sqrt{\mathfrak{a}}^e$, 其中 $a_i \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, 那么存在 n_i 使得 $a_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$, 所以 $f(a_i)^{n_i} = f(a_i^{n_i}) \in f(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}^e$, 故 $f(a_i) \in \sqrt{\mathfrak{a}^e}$, 所以 $\sum_i b_i f(a_i) \in \sqrt{\mathfrak{a}^e}$, 即 $\sqrt{\mathfrak{a}}^e \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}^e}$.
- $\sqrt{\mathfrak{b}}^c = \sqrt{\mathfrak{b}^c}$.
$$a \in \sqrt{\mathfrak{b}}^c \Leftrightarrow f(a) \in \sqrt{\mathfrak{b}} \Leftrightarrow \exists n, f(a)^n = f(a^n) \in \mathfrak{b} \Leftrightarrow a \in \sqrt{\mathfrak{b}^c}.$$ □

1.6 EXERCISES

Ex 1.6.1. A 是一个环, $A[x]$ 是 A 上的多项式环, 令 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x]$. 证明

1. f 是 $A[x]$ 中的单位当且仅当 a_0 是 A 中的单位并且 $a_1, \ldots, a_n$ 是幂零元.
2. f 是幂零元当且仅当 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 都是幂零元.
3. f 是零因子当且仅当存在 $a \neq 0$ 使得 $af = 0$.
4. 如果 $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (1)$, 那么称 f 是本原的. 证明如果 $f, g \in A[x]$, 那么 fg 是本原的当且仅当 f 和 g 都是本原的.

Proof. (1) 若 f 是单位, 那么存在 $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in A[x]$ 使得 $fg = 1$, 设 $fg = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$, 那么 $c_0 = a_0b_0 = 1$, 故 a_0 是单位. 接下来证明对于 $0 \le r \le m$ 有 $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. 对 r 归纳, $r = 0$ 的时候, x^{n+m} 的系数为 $a_nb_m = 0$. 假设 $k < r$ 的时候都有 $a_n^{k+1}b_{m-k} = 0$, 那么

$$\begin{aligned} & f(g - b_mx^m - b_{m-1}x^{m-1} - \cdots - b_{m-r+1}x^{m-r+1}) \\ = & 1 - b_mx^mf - b_{m-1}x^{m-1}f - \cdots - b_{m-r+1}x^{m-r+1}f, \end{aligned}$$

两边对比 x^{n+m-r} 的系数, 有

$$a_nb_{m-r} = -a_{n-r}b_m - a_{n-r+1}b_{m-1} - \cdots - a_{n-1}b_{m-r+1},$$

故

$$a_n^{r+1}b_{m-r} = -a_{n-r}a_n^rb_m - a_{n-r+1}a_n^rb_{m-1} - \cdots - a_{n-1}a_n^rb_{m-r+1},$$

根据假设, 有 $a_nb_m = a_n^2b_{m-1} = \cdots = a_n^rb_{m-r+1} = 0$, 所以 $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$, 结论成立. 那么 $a_n^{m+1}b_0 = 0$, 由于 b_0 是单位, 故 $a_n^{m+1} = 0$, 即 a_n 是幂零元. 那么 $f - a_nx^n$ 是单位减去一个幂零元, 所以 $f - a_nx^n$ 是单位, 重复上面的论证, 得到 a_{n-1} 是幂零元, 继续这个步骤, 可知 $a_1, \ldots, a_n$ 都是幂零元.

对于这种多项式的命题还可以采用类似模 p 约化的方法: 对于任意素理想 $\mathfrak{p}$, 考虑自然的同态 $A[x] \to A/\mathfrak{p}[x]$, 整环上的多项式环依然是整环, 并且单位群不变. 那么 $f \in A[x]^\times$ 表明 $\bar{f} \in A/\mathfrak{p}[x]^\times$, 所以 $\bar{f}$ 为常系数多项式, 这就表明 f 的非常数项的系数 $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{p}$, 故 $a_i \in \mathrm{nil}(A)$ $(i \ge 1)$ 是幂零元.

若 a_0 是单位且 $a_1, \ldots, a_n$ 都是幂零元, 那么 f 是单位加上一些幂零元, 故 f 是单位.

(2) 若 f 是幂零元, 那么存在 $m > 0$ 使得 $f^m = 0$, 对比最高次项系数可知 $a_n^m = 0$, 故 a_n 是幂零元. 由于所有幂零元构成一个理想, 所以 $f - a_nx^n$ 是幂零元, 所以最高次项系数 a_{n-1} 是幂零元, 以此类推, 可知 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 都是幂零元.

若 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 都是幂零元, 那么 f 是幂零元的和, 所以也是幂零元.

(3) 若 f 是零因子, 那么取次数最小的非零 $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in A[x]$ 使得 $fg = 0$. 于是 $a_nb_m = 0$, 那么 a_ng 是次数小于 g 的多项式, 并且 $f(a_ng) = 0$, 根据 g 的最小性, 所以 $a_ng = 0$. 接下来我们证明 $0 \le r \le n$ 时有 $a_{n-r}g = 0$. 对 r 归纳, $r = 0$ 的

时候已经证明. 假设 $k < r$ 的时候都有 $a_{n-k}g = 0$, 那么类似 (1) 的操作, 有

$$a_n b_{m-r} = -a_{n-r}b_m - a_{n-r+1}b_{m-1} - \cdots - a_{n-1}b_{m-r+1},$$

即

$$a_{n-r}b_m = -a_{n-r+1}b_{m-1} - \cdots - a_{n-1}b_{m-r+1} - a_n b_{m-r},$$

$a_{n-k}g = 0$ 表明 $a_n b_{m-r} = a_{n-1}b_{m-r+1} = \cdots = a_{n-r+1}b_{m-1} = 0$, 故 $a_{n-r}b_m = 0$, 那么 $a_{n-r}g$ 是次数小于 g 的多项式且 $f(a_{n-r}g) = 0$, 根据 g 的最小性, 所以 $a_{n-r}g = 0$, 结论成立. 由于 g 非零, 取一个非零系数 b_s, 那么 $a_0 b_s = a_1 b_s = \cdots = a_n b_s = 0$, 故 $b_s f = b_s a_0 + b_s a_1 x + \cdots + b_s a_n x^n = 0$, 即存在 $a = b_s \neq 0$ 使得 $af = 0$. 反过来是显然的.

(4) 取 A 的一个极大理想 $\mathfrak{m}$, 考虑满同态 $\varphi : A[x] \to A/\mathfrak{m}[x]$, $\varphi(\sum_i a_i x^i) = \sum_i (a_i + \mathfrak{m})x^i$, 容易验证 $\ker\varphi = \mathfrak{m}[x]$, 故 $A[x]/\mathfrak{m}[x] \simeq A/\mathfrak{m}[x]$. 根据 推论 1.3, f 不是本原多项式当且仅当存在某个极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $(a_0, a_1, \dots, a_n) \subseteq \mathfrak{m}$ 当且仅当 $f \in \mathfrak{m}[x]$, 故 f 是本原多项式当且仅当对于任意的极大理想 $\mathfrak{m}$ 都有 $f \notin \mathfrak{m}[x]$. 又因为

$$f, g \notin \mathfrak{m}[x] \Longleftrightarrow \bar{f}, \bar{g} \neq 0 \Longleftrightarrow \overline{fg} \neq 0 \Longleftrightarrow fg \notin \mathfrak{m}[x],$$

其中 $\bar{f} = \varphi(f) \in A/\mathfrak{m}[x]$, 所以 f, g 是本原多项式当且仅当 fg 是本原多项式. □

Ex 1.6.2. 在环 $A[x]$ 中, Jacobson 根等于幂零根.

Proof. 首先总是有 $\mathrm{nil}(A[x]) \subseteq \mathrm{rad}(A[x])$. 若 $f \in \mathrm{rad}(A[x])$, 根据 命题 1.12, $1 + xf$ 是单位, 再根据上一道习题, $1 + xf$ 的常数项是单位, 其他项的系数都是幂零元, 即 f 的系数都是幂零元, 即 f 是幂零元, 故 $\mathrm{rad}(A[x]) \subseteq \mathrm{nil}(A[x])$. □

Ex 1.6.3. 令 A 是环, $A[[x]]$ 表示 A 上的形式幂级数环. $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in A[[x]]$, 证明

1. f 是 $A[[x]]$ 中的单位当且仅当 a_0 是 A 中的单位.
2. 如果 f 幂零, 那么对于所有的 $n \geq 0$, a_n 幂零. 反过来成立吗?
3. f 属于 $A[[x]]$ 的 Jacobson 根当且仅当 a_0 属于 A 的 Jacobson 根.
4. $A[[x]]$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 的收缩是 A 的极大理想, 并且 $\mathfrak{m}$ 由 $\mathfrak{m}^c$ 和 x 生成.
5. A 的每个素理想都是 $A[[x]]$ 的某个素理想的收缩.

Proof. (1) 若 f 是 $A[[x]]$ 的单位, 显然 a_0 是 A 的单位. 若 a_0 是 A 的单位, 设 $g = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$, 我们希望 $fg = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 1$, 显然 $c_0 = a_0 b_0 = 1$, 故 $b_0 = a_0^{-1}$. 当 $i \geq 1$ 的时候, 有 $c_i = \sum_{n=0}^{i} a_n b_{i-n} = 0$. 假设我们已经得到了 $b_0, \dots, b_i$. 那么我们可以按照下面的步骤解出 b_{i+1}: 首先我们需要 $c_{i+1} = \sum_{n=0}^{i+1} a_n b_{i+1-n} = 0$, 从这里可以得到 $-a_0 b_{i+1} = \sum_{n=1}^{i+1} a_n b_{i+1-n}$, 右边的每一项我们都是已知的, 故

$$b_{i+1} = -a_0^{-1}\left(\sum_{n=1}^{i+1} a_n b_{i+1-n}\right).$$

此时 g 就是 f 的逆元, 故 f 是 $A[[x]]$ 的单位.

(2) 如果 f 幂零, 观察常数项可知 a_0 幂零, 所以 $f - a_0$ 幂零, 观察一次项, 又可以得到 a_1 幂零, 所以 $f - a_0 - a_1 x$ 幂零, 以此类推, 所以所有的系数 a_n 都幂零.

(3) $f \in \mathrm{rad}(A[[x]])$ 当且仅当对于任意的 $g \in A[[x]]$, $1 - fg$ 都是 $A[[x]]$ 中的单位, 由 (1), 这当且仅当对于任意的 $b_0 \in A$, $1 - a_0 b_0$ 是 A 中的单位, 当且仅当 $a_0 \in \mathrm{rad}(A)$.

(4) 注意到 $\mathfrak{m}^c = \mathfrak{m} \cap A$, 根据环的同构定理, 有

$$A/(\mathfrak{m} \cap A) \simeq (A + \mathfrak{m})/\mathfrak{m},$$

任取 $f = \sum a_i x^i \in A[[x]]$, 那么 $f = a_0 + g$, 其中 $g \in (x)$, 由 (3) 可知 $g \in \mathrm{rad}(A[[x]]) \subseteq \mathfrak{m}$, 所以 $A[[x]] = A + \mathfrak{m}$, 故 $A/\mathfrak{m}^c \simeq (A + \mathfrak{m})/\mathfrak{m} = A[[x]]/\mathfrak{m}$ 是域, $\mathfrak{m}^c$ 是 A 的极大理想. 类似地, 任取 $f = \sum a_i x^i \in \mathfrak{m}$, 都有 $f = a_0 + g \in \mathfrak{m}^c + (x)$, 所以 $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^c + (x)$. 反之, 由于 $(x) \subseteq \mathrm{rad}(A[[x]]) \subseteq \mathfrak{m}$, 所以 $\mathfrak{m}^c + (x) \subseteq \mathfrak{m}$, 故 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^c + (x)$.

(5) 令 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想, 类比 (4), 考虑 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^e + (x)$, 此时 $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$, 根据同构定理, 有

$$A/\mathfrak{p} = A/(\mathfrak{q} \cap A) \simeq (A + \mathfrak{q})/\mathfrak{q},$$

而 $A + \mathfrak{q} \supseteq A + (x) = A[[x]]$, 所以 $A[[x]]/\mathfrak{q} \simeq A/\mathfrak{p}$ 是整环, $\mathfrak{q}$ 是 $A[[x]]$ 的素理想. □

Ex 1.6.4. 令 A 是非零环, 证明 A 的素理想的集合相对于包含关系有极小元.

Proof. 设 $\{\mathfrak{p}_i\}_{i \in I}$ 是 $\mathrm{Spec}(A)$ 中的一条链, 令 $\mathfrak{p} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i$, 我们证明 $\mathfrak{p}$ 是一个素理想. 假设 $xy \in \mathfrak{p}$ 以及 $x \notin \mathfrak{p}$, 那么对于任意的 $i \in I$, 有 $xy \in \mathfrak{p}_i$, 且存在 $j \in I$, 使得 $x \notin \mathfrak{p}_j$. 当 $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$ 的时候, 都有 $x \notin \mathfrak{p}_i$, 所以此时 $y \in \mathfrak{p}_j$. 当 $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{p}_j$ 的时候, $y \in \mathfrak{p}_j$ 自然也表明 $y \in \mathfrak{p}_i$. 所以必有 $y \in \mathfrak{p}$, 故 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 最后根据 Zorn 引理就能得出结论. □

Ex 1.6.5. 令 $\mathfrak{a} \neq (1)$ 是环 A 的理想, 证明 $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ 当且仅当 $\mathfrak{a}$ 是某些素理想的交.

Proof. 已经有 $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. 如果 $\mathfrak{a} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i$ 是某些素理想的交, 那么每个 $\mathfrak{p}_i$ 都是包含 $\mathfrak{a}$ 的素理想, 所以 $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}$, 故 $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. 反方向是显然的. □

Ex 1.6.6. 环 A 如果对于任意 $x \in A$ 都满足 $x^2 = x$, 那么称 A 是**布尔环**. 在一个布尔环 A 中, 证明

1. 对于任意 $x \in A$ 有 $2x = 0$;
2. 每个素理想 $\mathfrak{p}$ 都是极大理想, 并且 $A/\mathfrak{p}$ 是有两个元素的域;
3. 每个有限生成的理想都是主理想.

Proof. (1) $2x = (x+1)^2 - x^2 - 1 = x + 1 - x - 1 = 0$.

(2) 任取 $x + \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$ 且 $x \notin \mathfrak{p}$, 那么 $x^2 + \mathfrak{p} = x + \mathfrak{p}$, 即 $x(x-1) \in \mathfrak{p}$, $x \notin \mathfrak{p}$ 表明 $x - 1 \in \mathfrak{p}$, 故 $x + \mathfrak{p} = 1 + \mathfrak{p}$, 所以 $A/\mathfrak{p}$ 只有两个元素 $\mathfrak{p}$ 与 $1 + \mathfrak{p}$, 这表明 $A/\mathfrak{p}$ 是域, $\mathfrak{p}$ 是极大理想.

(3) 注意到 $(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - x_1 x_2)$, 若 $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_n)$, 对 n 归纳, $n = 2$ 的时候已经成立, 设结论对 $n - 1$ 成立. 那么 $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_{n-1}) + (x_n) = (x) + (x_n) = (x, x_n)$ 是主理想. □

Ex 1.6.7. 证明: 局部环没有非平凡的幂等元.

Proof. 若 x 是局部环 A 的非平凡幂等元, 那么 x 包含于 A 的极大理想, 所以 $1-x \in A^{\times}$, 从而 $1-x=1$, $x=0$, 矛盾. □

Ex 1.6.8. 在环 A 中, 令 Σ 为理想的集合, 里面的每个理想的元素均为零因子. 证明 Σ 有一个极大元, 并且 Σ 的每个极大元都是素理想. 因此 A 中零因子的集合是这些作为极大元的素理想的并集.

Proof. 由于 $(0) \in \Sigma$, 所以 Σ 非空. 设 $\{\mathfrak{a}\}_{i\in I}$ 是 Σ 的一条链. 令 $\mathfrak{a}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i$, 容易验证这仍然是一个理想, 并且其元素显然都是零因子, 所以 $\{\mathfrak{a}\}_{i\in I}$ 有上界 $\mathfrak{a}$, 根据 Zorn 引理可知 Σ 有极大元.

设 $\mathfrak{p}$ 是 Σ 的一个极大元, 若 $a \notin \mathfrak{p}$ 以及 $b \notin \mathfrak{p}$, 那么 $\mathfrak{p}+(a)$ 和 $\mathfrak{p}+(b)$ 严格包含 $\mathfrak{p}$, 因此它们不属于 Σ, 所以存在 $x \in \mathfrak{p}+(a)$ 与 $y \in \mathfrak{p}+(b)$ 但是 x, y 都不是零因子, 那么 xy 也不是零因子, 但是 $xy \in (\mathfrak{p}+(a))(\mathfrak{p}+(b)) \subseteq \mathfrak{p}+(ab)$, 所以 $\mathfrak{p}+(ab)$ 也严格包含 $\mathfrak{p}$, 故 $ab \notin \mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{p}$ 是素理想.

由于 A 中每个零因子生成的主理想都属于 Σ, 所以每个零因子都属于 Σ 的一个极大元, 故零因子的集合包含于所有极大元的并集. 反之, Σ 的所有极大元的并集当然都是零因子, 所以 A 的零因子的集合就是 Σ 的极大元的并集. □

Ex 1.6.9. A 是一个环, X 是 A 的所有素理想的集合. 对于 A 的每个子集 E, 令 $V(E)$ 为所有 A 的包含 E 的素理想的集合, 证明

1. 如果 $\mathfrak{a}$ 是由 E 生成的理想, 那么 $V(E)=V(\mathfrak{a})=V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.
2. $V(0)=X$, $V(1)=\emptyset$.
3. 如果 $(E_i)_{i\in I}$ 是 A 的一族子集, 那么

$$V\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)=\bigcap_{i\in I}V(E_i).$$

4. 对于任意理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, 有 $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})$.

这些结果表明 $V(E)$ 满足拓扑空间的闭集公理, 所以定义 $\mathrm{Spec}(A)$ 的子集为闭集当且仅当存在 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 使得其能够写为 $V(\mathfrak{a})$ 的形式, 这给出了 $\mathrm{Spec}(A)$ 上的一个拓扑, 称为 **Zariski 拓扑**.

Proof. (1) 显然有 $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E)$. 任取 $\mathfrak{p} \in V(E)$, 那么 $E \subseteq \mathfrak{p}$, 自然有 $\mathfrak{a}=(E)\subseteq\mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})$, 故 $V(E)\subseteq V(\mathfrak{a})$. 这就表明 $V(E)=V(\mathfrak{a})$. 由于 $\mathfrak{a}\subseteq\sqrt{\mathfrak{a}}$, 所以 $V(\sqrt{\mathfrak{a}})\subseteq V(\mathfrak{a})$. 任取 $\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})$, 那么 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}$, 任取 $x\in\sqrt{\mathfrak{a}}$, 则存在 n 使得 $x^n\in\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}$, 这表明 $x\in\mathfrak{p}$, 所以 $\sqrt{\mathfrak{a}}\subseteq\mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{p}\in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. 这就表明 $V(\mathfrak{a})=V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

(3) 我们有关系

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}\in V\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right) &\Leftrightarrow \forall i\in I,\ \bigcup_{i\in I}E_i\subseteq\mathfrak{p}\Leftrightarrow\forall i\in I,\ E_i\subseteq\mathfrak{p}\\ &\Leftrightarrow\forall i\in I,\ \mathfrak{p}\in V(E_i)\Leftrightarrow\mathfrak{p}\in\bigcap_{i\in I}V(E_i).\end{aligned}$$

(4) 由于 $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, 所以 $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab})$. 任取 $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{ab})$, 那么 $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ 或者 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, 故 $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab})$.

显然有 $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{ab})$ 以及 $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab})$,所以 $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab})$. 若 $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{ab})$, 那么 $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}$,所以 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ 或者 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$,所以 $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ 或者 $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$,所以 $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, 故 $V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. □

Ex 1.6.10. 对于每个 $f \in A$, 令 X_f 表示 $V(f)$ 在 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 中的补集, 那么 X_f 是开集. 证明它们组成了 Zariski 拓扑的一组拓扑基, 并且

1. $X_f \cap X_g = X_{fg}$;
2. $X_f = \emptyset$ 当且仅当 f 是幂零元;
3. $X_f = X$ 当且仅当 f 是单位;
4. $X_f = X_g$ 当且仅当 $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$;
5. X 是紧致空间;
6. 更一般地, 每个 X_f 是紧致子集;
7. X 的一个开子集是紧致的当且仅当它是形如 X_f 的集合的有限并.

X_f 被称为 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 的**基本开集**.

Proof. 我们说明任意一个开集都能表示为这些基本开集的并.对于任意开集 $X - V(E)$, 我们有

$$X - V(E) = X - V\left(\bigcup_{f\in E}\{f\}\right) = X - \bigcap_{f\in E} V(\{f\}) = \bigcup_{f\in E}(X - V(\{f\})) = \bigcup_{f\in E} X_f.$$

所以所有的 X_f 组成 Zariski 拓扑的一组拓扑基.

(1) 我们已经知道 $V(fg) = V(f) \cup V(g)$, 两边取补集, 所以 $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

(2) $X_f = \emptyset$ 当且仅当 $V(f) = X$, 当且仅当 f 属于任意素理想, 当且仅当 $f \in \mathrm{nil}(A)$, 即 f 是幂零元.

(3) $X_f = X$ 当且仅当 $V(f) = \emptyset$, 当且仅当 f 不属于任意素理想, 当且仅当 f 不属于任意极大理想, 当且仅当 f 是单位.

(4) $X_f = X_g$ 当且仅当 $V(f) = V(g)$, 即 $V((f)) = V((g))$. 若 $V((f)) = V((g))$, 注意到

$$\sqrt{(f)} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V((f))} \mathfrak{p},$$

所以 $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$. 若 $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$, 任取 $\mathfrak{p} \in V((f))$, 有 $(f) \subseteq \mathfrak{p}$, 所以 $\sqrt{(f)} \subseteq \mathfrak{p}$, 所以 $(g) \subseteq \sqrt{(g)} = \sqrt{(f)} \subseteq \mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{p} \in V((g))$, 反之同理, 故 $V((f)) = V((g))$.

(5) 见 (6).

(6) 任取 X_f 的一个基本开集的开覆盖 $\{X - V(g_i)\}_{i\in I}$, 那么

$$X_f \subseteq \bigcup_{i\in I}(X - V(g_i)) \Leftrightarrow V(f) \supseteq \bigcap_{i\in I} V(g_i),$$

根据 1.15 题, 这相当于

$$V((f)) = V(f) \supseteq \bigcap_{i\in I} V(g_i) = V\left(\bigcup_{i\in I}\{g_i\}\right) = V\left((g_i)_{i\in I}\right),$$

根据 (4) 的证明, 这当且仅当

$$\sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g_i)_{i\in I}},$$

当且仅当存在 n 使得 $f^n \in (g_i)_{i\in I}$, 由 $\{g_i\}_{i\in I}$ 生成的理想中的元素均为有限个 g_i 的线性组合的形式, 所以存在有限子集 $J \subseteq I$, 使得 $f^n = \sum_{j\in J} x_j g_j$, 其中 $x_j \in A$, 故 $\{X - V(g_j)\}_{j\in J}$ 就是一族有限子覆盖, X_f 是紧致子集.

(7) 若 X 的一个开子集是紧致的, X_f 是拓扑基, 那么其可以表示为一些 X_f 的并集, 紧致性表明其可以表示为有限个 X_f 的并集. 反之, 有限个紧致子集的并集还是紧致子集. □

Ex 1.6.11. 出于心理上的原因, 将 A 的一个素理想视为 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 中的一个点的时候, 使用一个字母 (例如 x 或者 y) 来表示这个素理想是更方便的. 当将 x 视为 A 的一个素理想的时候, 我们也写为 $\mathfrak{p}_x$ (这只是两个不同的记号). 证明:

1. 集合 $\{x\}$ 是 X 中的闭集当且仅当 $\mathfrak{p}_x$ 是极大理想.
2. $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$.
3. $y \in \overline{\{x\}}$ 当且仅当 $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$.
4. X 是 T_0-空间 (这意味着对于 X 中的不同的两点 x, y, 要么存在 x 的一个邻域不包含 y, 要么存在 y 的一个邻域不包含 x).

Proof. (1) 若 $\{x\}$ 是 X 中的闭集, 那么存在集合 $E \subseteq A$ 使得 $\{x\} = V(E)$, 即 $\mathfrak{p}_x$ 是包含 E 的唯一的素理想, 若 $\mathfrak{p}_x$ 不是极大理想, 那么 $V(E)$ 至少有两个元素 (因为极大理想都是素理想), 所以 $\mathfrak{p}_x$ 是极大理想.

反之, 若 $\mathfrak{p}_x$ 是极大理想, 那么 $\{x\} = V(\mathfrak{p}_x)$ 是闭集.

(2) 显然有 $\overline{\{x\}} \subseteq V(\mathfrak{p}_x)$. 下面我们说明任意 $y \in V(\mathfrak{p}_x)$, 如果 $y \neq x$, 那么 y 是 $\{x\}$ 的极限点. 即任取 y 的邻域 $X - V(E)$, $y \in X - V(E)$ 表明 $y \notin V(E)$, 即 $\mathfrak{p}_y$ 不是包含 E 的素理想. 假设 $x \in V(E)$, 那么 $\mathfrak{p}_x$ 是包含 E 的素理想, 由于 y 是包含 $\mathfrak{p}_x$ 的素理想, 所以此时 $y \in V(E)$, 矛盾. 故 $x \notin V(E)$, 所以 $x \in X - V(E)$, 所以 $(X - V(E)) \cap \{x\} \neq \emptyset$, 这就说明 y 是 $\{x\}$ 的极限点, 从而 $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$.

(3) 由 (2), $y \in \overline{\{x\}}$ 当且仅当 $y \in V(\mathfrak{p}_x)$, 当且仅当 $\mathfrak{p}_y \supseteq \mathfrak{p}_x$.

(4) 使用反证法. 任取 X 中不同的两点 x, y, 如果 x 的任意邻域都包含 y 并且 y 的任意邻域都包含 x, 那么 $x \in \overline{\{y\}}$ 以及 $y \in \overline{\{x\}}$, 由 (3), 这表明 $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x$, 这与 $\mathfrak{p}_x \neq \mathfrak{p}_y$ 矛盾. □

Ex 1.6.12. 一个拓扑空间 X 被称为**不可约的**, 如果 $X \neq \emptyset$ 并且 X 中的每一对非空开集都相交, 等价地说, X 中的每个非空开集都在 X 中稠密. 证明 $\mathrm{Spec}(A)$ 是不可约的当且仅当 A 的幂零根是一个素理想.

Proof. X 中的每一对非空开集都相交等价于 X 的每一对恰当闭集的并都不是整个空间. 若 $\mathrm{Spec}(A)$ 不可约, 假设 $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{nil}(A) = E$,

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(E) = X,$$

X 不可约表明 $V(\mathfrak{a})=\emptyset$ 或者 $V(\mathfrak{b})=\emptyset$, 不妨设 $V(\mathfrak{a})=\emptyset$, 那么 $V(\mathfrak{b})=X$, 所以 $\mathfrak{b}\subseteq E=\mathrm{nil}(A)$, 这就表明 $\mathrm{nil}(A)$ 是素理想.

反之, 若 $\mathrm{nil}(A)$ 是素理想, 设 $X=V(\mathfrak{a}_1)\cup V(\mathfrak{a}_2)=V(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)$, 这表明 $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\subseteq\mathrm{nil}(A)$, 从而 $\mathfrak{a}_1\subseteq\mathrm{nil}(A)$ 或者 $\mathfrak{a}_2\subseteq\mathrm{nil}(A)$, 不妨设 $\mathfrak{a}_1\subseteq\mathrm{nil}(A)$, 那么 $\mathfrak{a}_1=X$. 这就表明 $\mathfrak{a}_1$ 和 $\mathfrak{a}_2$ 至少有一个是整个空间 X, 所以 X 不可约. □

Ex 1.6.13. X 是一个拓扑空间.

1. 如果 Y 是 X 的不可约子空间, 那么闭包 $\bar{Y}$ 也是不可约的.
2. X 的每个不可约子空间都被包含在一个极大的不可约子空间中.
3. X 的极大不可约子空间是闭集并且所有的极大不可约子空间覆盖 X. 它们被称为 X 的**不可约分支**. Hausdorff 空间的不可约分支是什么?
4. 如果 A 是一个环, $X=\mathrm{Spec}(A)$, 那么 X 的不可约分支是闭集 $V(\mathfrak{p})$, 其中 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个极小素理想.

Proof. (1) 设 U,V 是 $\bar{Y}$ 的两个非空开集, 即存在 X 的两个开集 U_1,V_1 使得 $U=U_1\cap\bar{Y},V=V_1\cap\bar{Y}$, 那么 $U\cap Y=U_1\cap Y$ 和 $V\cap Y=V_1\cap Y$ 是 Y 的两个非空开集, Y 不可约表明 $(U\cap Y)\cap(V\cap Y)\neq\emptyset$, 故 $U\cap V\neq\emptyset$, 所以 $\bar{Y}$ 不可约.

(2) 设 Y 是 X 的一个不可约子空间, 令 Σ 为所有包含 Y 的不可约子空间的集合. 设 $\{Y_i\}_{i\in I}$ 是 Σ 的一条链, 令 $Z=\bigcup_{i\in I}Y_i$, 我们需要证明 Z 不可约. 任取 Z 的两个非空开集 U,V, 那么存在 $i_1,i_2\in I$ 使得 $U\cap Y_{i_1}$ 和 $V\cap Y_{i_2}$ 非空, 不妨设 $Y_{i_1}\subseteq Y_{i_2}$, 那么 $U\cap Y_{i_2}$ 和 $V\cap Y_{i_2}$ 是 Y_{i_2} 的两个非空开集, 所以 $(U\cap Y_{i_2})\cap(V\cap Y_{i_2})\neq\emptyset$, 即 $U\cap V\neq\emptyset$, 所以 Z 不可约, Σ 存在极大元.

(3) 假设 Y 是一个极大不可约子空间, 由 (1), 那么 $\bar{Y}$ 是包含 Y 的不可约子空间, 故 $Y=\bar{Y}$, 所以 Y 是闭集. 任取 $x\in X$, 单点集 $\{x\}$ 都是不可约子空间, 所以包含于一个不可约分支, 故所有的不可约分支覆盖 X.

Hausdorff 空间中任意两个不同的点都可以找到分别覆盖住这两点的不相交开集, 所以任意多于一个点的子空间都不是不可约子空间, 故 Hausdorff 空间的不可约分支就是所有的单点集.

(4) 根据 1.21 的 (4), X 的闭集 $V(\mathfrak{a})$ 同胚于 $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$, 所以 $V(\mathfrak{a})$ 不可约当且仅当 $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ 不可约, 再根据 1.19, 这当且仅当 $\mathrm{nil}(A/\mathfrak{a})$ 是素理想, 根据对应定理, 当且仅当 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ 是素理想, 故 $V(\mathfrak{a})=V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ 不可约当且仅当 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ 是素理想, 这表明 X 的不可约分支必为 $V(\mathfrak{p})$ 的形式, 其中 $\mathfrak{p}$ 是素理想. $V(\mathfrak{p})$ 极大表明如果 $V(\mathfrak{p})\subseteq V(\mathfrak{q})$, 那么只能严格相等. $V(\mathfrak{p})\subseteq V(\mathfrak{q})$ 当且仅当

$$\mathfrak{q}=\sqrt{\mathfrak{q}}=\bigcap_{\mathfrak{q}'\in V(\mathfrak{q})}\mathfrak{q}'\subseteq\bigcap_{\mathfrak{q}'\in V(\mathfrak{p})}\mathfrak{q}'=\sqrt{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p},$$

所以 $V(\mathfrak{p})$ 是不可约分支当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是极小的. □

Ex 1.6.14. 令 $\phi:A\to B$ 是环同态, $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(B)$. 如果 $\mathfrak{q}\in Y$, 那么 $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ 是 A 的素理想, 所以 ϕ 诱导了映射 $\phi^*:Y\to X$. 证明

1. 如果 $f \in A$, 那么 ${\phi^*}^{-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$, 因此 ϕ^* 是连续映射.
2. 如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想, 那么 ${\phi^*}^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$.
3. 如果 $\mathfrak{b}$ 是 B 的理想, 那么 $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$.
4. 如果 ϕ 是满射, 那么 ϕ^* 是 Y 到 X 的闭子集 $V(\ker\phi)$ 的同胚.(特别地, $\mathrm{Spec}(A)$ 和 $\mathrm{Spec}(A/\mathrm{nil}(A))$ 是同胚的.)
5. 如果 ϕ 是单射, 那么 $\phi^*(Y)$ 在 X 中稠密. 更准确地, $\phi^*(Y)$ 在 X 中稠密当且仅当 $\ker\phi \subseteq \mathrm{nil}(A)$.
6. 令 $\psi : B \to C$ 是另一个环同态, 那么 $(\psi\circ\phi)^* = \phi^*\circ\psi^*$.
7. 令 A 是整环, 并且只有一个非零素理想 $\mathfrak{p}$, K 是 A 的分式域. 令 $B = (A/\mathfrak{p}) \times K$. 定义 $\phi : A \to B$ 为 $\phi(x) = (\bar{x}, x)$, 其中 $\bar{x}$ 是 x 在 $A/\mathfrak{p}$ 中的像. 证明 ϕ^* 是双射但是不是同胚.

Proof. (1) 按照定义, 有

$$\mathfrak{q} \in {\phi^*}^{-1}(X_f) \Leftrightarrow \phi^*(\mathfrak{q}) \in X_f \Leftrightarrow \phi^*(\mathfrak{q}) \notin V(f) \Leftrightarrow f \notin \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in Y_{\phi(f)}.$$

(2) 按照定义, 有

$$\begin{aligned}\mathfrak{q} \in {\phi^*}^{-1}(V(\mathfrak{a})) \Leftrightarrow \phi^*(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q})\\ \Leftrightarrow \phi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in V(\phi(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e).\end{aligned}$$

(3) 对于 $S \subseteq X$, 我们有

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \bigcap\{V(E) \mid S \subseteq V(E)\} = \bigcap\left\{V(E) \,\middle|\, E \subseteq \bigcap_{s\in S}\mathfrak{p}_s\right\}\\ &= V\left(\bigcup\left\{E \,\middle|\, E \subseteq \bigcap_{s\in S}\mathfrak{p}_s\right\}\right) = V\left(\bigcap_{s\in S}\mathfrak{p}_s\right).\end{aligned}$$

所以

$$\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in\phi^*(V(\mathfrak{b}))}\mathfrak{p}\right),$$

又因为

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in\phi^*(V(\mathfrak{b}))}\mathfrak{p} = \bigcap\{\mathfrak{q}^c \mid \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})\} = \left(\bigcap_{\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{q}}\mathfrak{q}\right)^c = \left(\sqrt{\mathfrak{b}}\right)^c = \sqrt{\mathfrak{b}^c},$$

所以

$$\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\sqrt{\mathfrak{b}^c}) = V(\mathfrak{b}^c).$$

(4) 若 $\phi^*(\mathfrak{q}_1) = \phi^*(\mathfrak{q}_2)$, 那么 $\phi^{-1}(\mathfrak{q}_1) = \phi^{-1}(\mathfrak{q}_2)$, ϕ 是满射表明 $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$, 所以 ϕ^* 是单射. 任取 $\mathfrak{p} \in \mathrm{im}\,\phi^* = \phi^*(Y)$, 即存在 $\mathfrak{q} \in Y$ 使得 $\mathfrak{p} = \phi^*(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q})$, 显然 $\ker\phi \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, 故 $\mathfrak{p} \in V(\ker\phi)$, 所以 $\mathrm{im}\,\phi^* \subseteq V(\ker\phi)$. 任取 $\mathfrak{p} \in V(\ker\phi)$, 我们希望证明 $\mathfrak{p} \in \mathrm{im}\,\phi^*$, 注意到总是有 $\mathfrak{p} \subseteq \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p}))$, 所以我们分两步: 首先说明 $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$, 从而 $\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p}))$; 再说明 $\phi(\mathfrak{p})$ 是 B 的素理想, 从而得出 $\mathfrak{p} = \phi^*(\phi(\mathfrak{p})) \in \mathrm{im}\,\phi^*$.

1. 任取 $x \in \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p}))$, 那么 $\phi(x) \in \phi(\mathfrak{p})$, 故存在 $a \in \mathfrak{p}$ 使得 $\phi(x) = \phi(a)$, 那么 $x - a \in \ker\phi \subseteq \mathfrak{p}$, 所以 $x \in \mathfrak{p}$, 所以 $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$.
2. 假设 $xy \in \phi(\mathfrak{p})$,那么存在 $a \in \mathfrak{p}$ 使得 $xy = \phi(a)$, ϕ 是满射还表明存在 $x', y' \in A$ 使得 $x = \phi(x')$ 以及 $y = \phi(y')$, 那么 $\phi(a) = xy = \phi(x'y')$, 所以 $a - x'y' \in \ker\phi \subseteq \mathfrak{p}$, 所以 $x'y' \in \mathfrak{p}$, 所以 $x' \in \mathfrak{p}$ 或者 $y' \in \mathfrak{p}$, 所以 $x \in \phi(\mathfrak{p})$ 或者 $y \in \phi(\mathfrak{p})$, 这表明 $\phi(\mathfrak{p})$ 确实是 B 的素理想.

于是我们证明了 $\operatorname{im}\phi^* = V(\ker\phi)$. 所以 ϕ^* 诱导出的映射 $\tilde{\phi} : Y \to V(\ker\phi)$ 是双射, 且由 (1) 可知 $\tilde{\phi}$ 是连续映射.

接下来证明 $\tilde{\phi}^{-1} : V(\ker\phi) \to Y$ 是连续映射. 任取 Y 的基本开集 Y_g, 其中 $g \in B$, 由于 $\tilde{\phi}(Y_g) = \phi^*(Y_g) = X_f \cap V(\ker\phi)$, 其中 $f \in A$ 满足 $\phi(f) = g$, X_f 是 X 的开集, 故 $X_f \cap V(\ker\phi)$ 是 $V(\ker\phi)$ 的开集, 所以 $\tilde{\phi}^{-1}$ 是连续映射. 进而 $\tilde{\phi} : Y \to V(\ker\phi)$ 是同胚. 令 ϕ 为 $A \to A/\operatorname{nil}(A)$ 的自然同态便可以得出 $\operatorname{Spec}(A)$ 和 $\operatorname{Spec}(A/\operatorname{nil}(A))$ 是同胚的.

(5) 根据 (3), 我们有

$$\overline{\phi^*(Y)} = \overline{\phi^*(V(0))} = V(\phi^*(0)) = V(\ker\phi),$$

$\phi^*(Y)$ 在 X 中稠密当且仅当 $V(\ker\phi) = X$, 当且仅当 $\ker\phi \subseteq \operatorname{nil}(A)$.

(6) 任取 C 的素理想 $\mathfrak{p}_c$, 那么

$$\begin{aligned} a \in (\psi\circ\phi)^*(\mathfrak{p}_c) \Leftrightarrow a \in (\psi\circ\phi)^{-1}(\mathfrak{p}_c) &\Leftrightarrow (\psi\circ\phi)(a) \in \mathfrak{p}_c \\ &\Leftrightarrow \phi(a) \in \psi^*(\mathfrak{p}_c) \Leftrightarrow a \in (\phi^*\circ\psi^*)(\mathfrak{p}_c), \end{aligned}$$

所以 $(\psi\circ\phi)^*(\mathfrak{p}_c) = (\phi^*\circ\psi^*)(\mathfrak{p}_c)$, 即 $(\psi\circ\phi)^* = \phi^*\circ\psi^*$.

(7) 由于 B 的理想必然形如 $A/\mathfrak{p}$ 的理想与 K 的理想的直积, 并且 $A/\mathfrak{p}$ 和 K 都是域, 所以 B 的素理想实际上只有 $\mathfrak{q}_1 = \{\bar{0}\} \times K$ 以及 $\mathfrak{q}_2 = A/\mathfrak{p} \times \{0\}$ (注意 B 的零理想不是素理想). 按定义有 $\phi^*(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}$, $\phi^*(\mathfrak{q}_2) = 0$, 所以 ϕ^* 是双射. 那么 ${\phi^*}^{-1} : \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ 定义为 ${\phi^*}^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}_1$, ${\phi^*}^{-1}(0) = \mathfrak{q}_2$. $\{\mathfrak{q}_2\} = V(\mathfrak{q}_2)$ 的原像为 $\phi^*(\{\mathfrak{q}_2\}) = \{0\}$, 而 $\overline{\{0\}} = V(0) = \operatorname{Spec}(A) \neq \{0\}$, 所以 $\{0\}$ 不是闭集, 故 ${\phi^*}^{-1}$ 不连续, 从而 ϕ^* 不是同胚. □

Ex 1.6.15. 令 $A = \prod_{i=1}^n A_i$ 是环 A_i 的直积. 证明 $\operatorname{Spec}(A)$ 是开 (或者闭) 子空间 X_i 的无交并, 其中 X_i 典范同胚于 $\operatorname{Spec}(A_i)$.

反之, 令 A 是任意环, 证明下面的说法是等价的:
1. $X = \operatorname{Spec}(A)$ 是不连通的.
2. $A \simeq A_1 \times A_2$ 是两个非零环的直积.
3. A 存在非平凡的幂等元.

特别地, 我们知道局部环的谱总是连通的.

Proof. 考虑投影 $\pi_i : A \to A_i$, 这是一个满同态, $\ker\pi_i = \prod_{j\neq i} A_j$. 根据 1.21 的 (4), 我们知道 $\operatorname{Spec}(A_i)$ 同胚于 $V(\ker\pi_i)$. 我们有

$$\bigcup_{i=1}^n V(\ker\pi_i) = V\left(\bigcap_{i=1}^n \ker\pi_i\right) = V(0) = \operatorname{Spec}(A),$$

同时 $V(\ker\pi_i)\cap V(\ker\pi_j)=V(\ker\pi_i+\ker\pi_j)=V(1)=\emptyset$, 所以 $\mathrm{Spec}(A)$ 是闭子空间 $V(\ker\pi_i)$ 的无交并, 并且每个 $V(\ker\pi_i)$ 同胚于 $\mathrm{Spec}(A_i)$.

下面的命题 (2) 和 (3) 的等价性我们已经证明. (2) $\Rightarrow$ (1) 就是前一问, 此时 X 为两个不相交非空开集 $\mathrm{Spec}(A_1)$ 和 $\mathrm{Spec}(A_2)$ 的并集, 所以 X 不连通.

(1) $\Rightarrow$ (3) X 不连通表明 $X=(X-V(\mathfrak{a}))\cup(X-V(\mathfrak{b}))$ 是两个不相交非空开集的并集, 即 $\emptyset=V(\mathfrak{a})\cap V(\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, 并且 $(X-V(\mathfrak{a}))\cap(X-V(\mathfrak{b}))=\emptyset$ 表明 $X=V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. 所以我们得到 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$ 以及 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subseteq\mathrm{nil}(A)$. 取 $a\in\mathfrak{a},b\in\mathfrak{b}$, 使得 $a+b=1$, 并且存在 n 使得 $(ab)^n=0$. 故 $(a)+(b)=(1)$, 这也表明 $(a^n)+(b^n)=(1)$, 所以存在 $e\in(a^n)$ 使得 $1-e\in(b^n)$, 此时 $e(1-e)\in(ab)^n=0$, 故 e 是幂等元. 如果 $e=1$, 那么 $(1)=(a^n)\subseteq(a)$, 这不可能, 同理 $e=0$ 表明 $(1)=(b^n)\subseteq(b)$ 也不可能, 所以 e 就是非平凡的幂等元. □

Ex 1.6.16. k 是代数闭域, 令

$$f_\alpha(t_1,\dots,t_n)=0$$

是 k 上 n 元多项式方程的集合. 所有满足这些方程的点 $x=(x_1,\dots,x_n)\in k^n$ 的集合 X 被称为一个**仿射代数簇**.

考虑多项式 $g\in k[t_1,\dots,t_n]$ 的集合, 其中每个 g 满足 $g(x)=0$ $(\forall x\in X)$. 这个集合是多项式环中的一个理想 $I(X)$, 被称为簇 X 的理想. 商环

$$P(X)=k[t_1,\dots,t_n]/I(X)$$

是 X 上的多项式函数环, 因为两个多项式 g,h 对应同一个 X 上的多项式函数当且仅当 $g-h\in I(X)$, 即 $g-h$ 以 X 中的点为零点.

令 ξ_i 是 t_i 在 $P(X)$ 中的像. ξ_i $(1\le i\le n)$ 称为 X 上的**坐标函数**: 如果 $x\in X$, 那么 $\xi_i(x)$ 是 x 的第 i 个坐标. $P(X)$ 作为 k-代数由坐标函数生成, 称为 X 的**坐标环** (或者仿射代数).

对于每个 $x\in X$, 令 $\mathfrak{m}_x$ 是 $f\in P(X)$ 组成的理想, 其中每个 f 满足 $f(x)=0$, 这是 $P(X)$ 的一个极大理想. 因此, 如果 $\tilde{X}=\mathrm{Max}(P(X))$, 那么我们定义了一个映射 $\mu:X\to\tilde{X}$ 为 $x\mapsto\mathfrak{m}_x$.

容易证明 μ 是单射: 如果 $x\ne y$, 那么存在某个 i 使得 $x_i\ne y_i$, 因此 ξ_i-x_i 在 $\mathfrak{m}_i$ 中但不在 $\mathfrak{m}_y$ 中, 所以 $\mathfrak{m}_x\ne\mathfrak{m}_y$. 不那么显然的一点是 μ **是满射**. 这是 Hilbert 零点定理 (Hilbert's Nullstellensatz) 的一种形式.

Ex 1.6.17. 令 $f_1,\dots,f_m$ 是 $k[t_1,\dots,t_n]$ 的元素. 它们确定了一个多项式映射 $\phi:k^n\to k^m$: 如果 $x\in k^n$, 则 $\phi(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))$.

令 X,Y 分别是 k^n,k^m 中的仿射代数簇. 一个映射 $\phi:X\to Y$ 被称为**正则的**, 如果 ϕ 是一个从 k^n 到 k^m 的多项式映射在 X 上的限制.

如果 η 是 Y 上的多项式函数, 那么 $\eta\circ\phi$ 是 X 上的多项式函数. 因此 ϕ 诱导了 k-代数同态 $P(Y)\to P(X)$: $\eta\mapsto\eta\circ\phi$. 证明通过这种方式, 我们得到了正则映射 $X\to Y$ 和 k-代数同态 $P(Y)\to P(X)$ 的一一对应.

Proof. 我们需要证明

$$\begin{aligned}\{\text{regular maps } X \to Y\} &\to \{k\text{-algebra homomorphisms } P(Y) \to P(X)\}\\ \phi &\mapsto \tilde{\phi}\end{aligned}$$

是双射, 其中 $\tilde{\phi}(\eta) = \eta \circ \phi$.

若 $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2$, 令 ξ_i $(1 \le i \le m)$ 是 Y 上的坐标函数, 那么

$$\xi_i \circ \phi_1 = \tilde{\phi}_1(\xi_i) = \tilde{\phi}_2(\xi_i) = \xi_i \circ \phi_2,$$

而 $\phi_1(x) = (\xi_1 \circ \phi_1(x), \dots, \xi_m \circ \phi_m(x))$, ϕ_2 同理. 这就表明 $\phi_1 = \phi_2$, 所以 $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ 是单射.

若 $\psi : P(Y) \to P(X)$ 是 k-代数同态, 定义 $\phi : k^n \to k^m$ 为

$$\phi(x) = \big(\psi(\xi_1)(x), \dots, \psi(\xi_m)(x)\big),$$

那么我们有

$$\tilde{\phi}(\xi_i) = \xi_i \circ \phi = \xi_i \circ \big(\psi(\xi_1), \dots, \psi(\xi_m)\big) = \psi(\xi_i),$$

这就表明 $\tilde{\phi} = \psi$. 下面我们验证 ϕ 是正则映射, 即 $\operatorname{im} \phi|_X \subseteq Y$. 任取 $x \in X$, 我们需要说明 $\phi(x) \in Y$, 即 $\phi(x)$ 是 $I(Y)$ 中多项式的零点, 即任取 $h \in I(Y)$, 有 $h(\phi(x)) = 0$. $h \in I(Y)$ 作为 Y 上的多项式函数是零函数, 所以 $h \circ \phi = \tilde{\phi}(h) = \psi(h) = \psi(0) = 0$, 故 $\operatorname{im} \phi|_X \subseteq Y$. 所以我们证明了 $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ 是满射. □

2

模

2.1 自由模与有限生成模

给定一个环 A, 以及任意集合 I, 那么 I 上的**自由 A-模**指的是直和 $\bigoplus_{i\in I} A$, 通常记为 $A^{(I)}$. 当 $|I| = n$ 是有限集的时候, 显然 $A^{(I)} \simeq A^n$ 是有限生成模. 注意到 I 可以被嵌入到 $A^{(I)}$ 中, 即映射 $j : I \to A^{(I)}$, 满足

$$j(x) = (a_i)_{i\in I} \quad a_i = \begin{cases} 1 & i = x, \\ 0 & i \neq x. \end{cases}$$

定理 2.1 (自由模的泛性质). $A^{(I)}$ 满足以下泛性质: B 是任意 A-模, $\varphi : I \to B$ 是集合间的映射, 那么存在唯一的 A-模同态 $\bar{\varphi} : A^{(I)} \to B$ 满足 $\varphi = \bar{\varphi} \circ j$, 即使得下面的图表交换.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & B \\ A^{(I)} \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. 定义

$$\bar{\varphi}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\varphi(i_k),$$

其中 $i_k \in I, n \geq 1$. 显然 $\bar{\varphi}$ 是 A-模同态, 并且有 $\bar{\varphi}(j(i)) = \varphi(i)$. 由于 $\bar{\varphi}$ 必须满足 $\bar{\varphi}(j(i)) = \varphi(i)$ 且所有的 $j(i)$ $(i \in I)$ 组成了 $A^{(I)}$ 的生成元, 所以这样的 $\bar{\varphi}$ 是唯一的. □

例 2.2. 环 $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ 是有限生成 R-模, 生成元就是 1. 但是理想 $(x_1, x_2, \dots)$ 作为 R-模不是有限生成的.

定理 2.3. M 是有限生成 A-模当且仅当对于某个整数 n, 存在满的 A-模同态 $\varphi : A^n \to M$.

Proof. 若 M 是有限生成的, 设 $x_1, \dots, x_n$ 是一组生成元, 考虑映射 $\varphi : A^n \to M$ 为

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

容易验证这是一个模同态, 并且由于 $x_1, \dots, x_n$ 是生成元, 所以 φ 是满同态.

反过来，记 $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) \in A^n$，其中第 i 个分量为 1. 那么任取 $m \in M$，存在 $(a_1,\dots,a_n) \in A^n$ 使得 $\varphi(a_1,\dots,a_n) = m$，即

$$m = \varphi(a_1,\dots,a_n) = \varphi(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) = a_1\varphi(e_1) + \cdots + a_n\varphi(e_n),$$

故 M 由 $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$ 生成. □

定义 2.4. 一个 A-模 M 被称为 **Noether 模**，如果它的每个子模都是有限生成 A-模. 一个环 A 被称为 Noether 环，如果它作为 A-模是 Noether 模.

命题 2.5. M 是一个 A-模，N 是 M 的子模，那么 M 是 Noether 模当且仅当 N 和 M/N 都是 Noether 模.

Proof. 若 M 是 Noether 模，那么 N 当然是 Noether 模. 根据对应定理，M/N 的子模形如 P/N，P 是 M 的包含 N 的子模，设 P 由 $x_1,\dots,x_n$ 生成，那么 P/N 由 $x_1+N,\dots,x_n+N$ 生成，所以 M/N 是 Noether 模.

若 N 和 M/N 都是 Noether 模，设 P 是 M 的子模，根据同构定理，我们有 $(P+N)/N \simeq P/(P\cap N)$，同构关系为 $x+P\cap N \mapsto x+N$，其中 $x \in P$. 此时 $P\cap N$ 作为 N 的子模是有限生成的，设生成元为 $x_1,\dots,x_n$，$(P+N)/N$ 作为 M/N 的子模是有限生成的，设生成元为 $y_1+N,\dots,y_m+N$. 那么任取 $z \in P$，存在 $a_1,\dots,a_m \in A$，使得

$$z+N = a_1(y_1+N) + \cdots + a_m(y_m+N),$$

即 $z - a_1y_1 - \cdots - a_my_m \in P\cap N$，那么存在 $b_1,\dots,b_n \in A$ 使得

$$z - a_1y_1 - \cdots - a_my_m = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n,$$

这表明 P 可以由 $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m$ 生成. 所以 M 是 Noether 模. □

推论 2.6. A 是 Noether 环，M 是有限生成 A-模，则 M 是 Noether 模.

Proof. 根据定理 2.3，M 同构于 A^n 的一个商模，所以我们证明 A^n 是 Noether 模即可. 对 n 归纳，$n=1$ 时 A 是 Noether 环. 假设 A^{n-1} 是 Noether 模，考虑最后一个分量的投影 $\pi_n : A^n \to A$，那么有 $A^n/A^{n-1} \simeq A$，所以 A^{n-1} 和 A^n/A^{n-1} 都是 Noether 模，故 A^n 是 Noether 模. □

下面我们扩展向量空间中"基"的概念. 对于 A-模 M 的子集 S，根据自由模 $A^{(S)}$ 的泛性质，存在唯一的 A-模同态 $\varphi : A^{(S)} \to M$，使得下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "1"] \arrow[d, "j"'] & M \\ A^{(S)} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

定义 2.7. 如果上述映射 φ 是单射，那么我们说 S **线性无关**，如果 φ 是满射，那么我们说 S **生成** M.

若 S 线性无关, 则表明任取有限个元素 $e_1, \ldots, e_n \in S$, 如果 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 使得

$$a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0,$$

那么

$$\varphi(a_1 j(e_1) + \cdots + a_n j(e_n)) = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0,$$

φ 是单射表明 $a_1 j(e_1) + \cdots + a_n j(e_n) = 0 \in \bigoplus_{s \in S} A$, 故 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, 反之也是成立的. 这和我们熟悉的线性无关的定义是一致的.

引理 2.8. M 是 A-模，$S \subseteq M$ 是线性无关子集，那么存在包含 S 的极大线性无关子集.

2.2 ED 上的有限生成模与相似标准型

本节的目标是证明 ED (Euclid 整环) 上的有限生成模的结构定理:

定理 2.9 (基本定理: 不变因子型). A 是 ED，M 是有限生成 A-模，那么 M 同构于有限多个循环模的直和，即

$$M \simeq A^r \oplus A/(a_1) \oplus A/(a_1) \oplus \cdots \oplus A/(a_m),$$

其中 $r \geq 0$，$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 是 A 中非零非单位的元素，并且满足关系

$$a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m.$$

此时 r 称为 M 的**自由秩**，$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 称为 M 的**不变因子**.

实际上上述定理对于 PID 上的有限生成模也成立, 但是 PID 没有一个好的算法来寻找 $a_1, a_2, \ldots, a_m$, 我们将看到 ED 上的 Euclid 算法将发挥重要作用, 并且这也是线性代数中有理标准型和 Jordan 标准型理论的来源.

设 M 是有限生成 A-模, 根据 定理 2.3, 我们知道存在满同态 $\varphi : A^n \to M$, 即 $M \simeq A^n/\ker\varphi$. 再根据 推论 2.6, 我们知道 A^n 和 $\ker\varphi$ 都是有限生成 A-模, 设 $x_1, \ldots, x_n$ 是 A^n 的基, $y_1, \ldots, y_m$ 是 $\ker\varphi$ 的生成元, 注意此时我们考虑生成元的顺序. 那么对于每个 $1 \leq i \leq m$, 都存在 $a_{i1}, \ldots, a_{in} \in A$, 使得

$$y_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n,$$

记矩阵 (与线性代数中基的过渡矩阵的写法是一致的)

$$\boldsymbol{A} = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(A).$$

那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表述了 A^n 的基和 $\ker\varphi$ 的生成元的关系, 我们称其为 A^n 到 $\ker\varphi$ 的**关系矩阵**.

下面我们观察对关系矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等变换会有什么样的后果. 下面是初等列变换.

1. 如果用 $u \in A^\times$ 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列, 那么相当于将 $\ker\varphi$ 的生成元 y_i 变为 uy_i, 即给出了 $\ker\varphi$ 的一组新的生成元 $y_1, \dots, uy_i, \dots, y_m$.
2. 如果交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列和第 j 列, 那么相当于交换 $\ker\varphi$ 的生成元 y_i 和 y_j, 即给出了 $\ker\varphi$ 的一组新的生成元 $y_1, \dots, y_j, \dots, y_i, \dots, y_m$.
3. 如果将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 $a \in A$ 加到第 j 列, 那么相当于将 $\ker\varphi$ 的生成元 y_j 替换为 $y_j + ay_i$, 即给出了 $\ker\varphi$ 的一组新的生成元 $y_1, \dots, y_i, \dots, y_j + ay_i, \dots, y_m$.

下面是初等行变换.

1. 如果用 $u \in A^\times$ 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行, 那么相当于将 A^n 的生成元 x_i 变为 $u^{-1}x_i$, 即给出了 A^n 的一组新的生成元 $x_1, \dots, u^{-1}x_i, \dots, x_n$.
2. 如果交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行, 那么相当于交换 A^n 的生成元 x_i 和 x_j, 即给出了 A^n 的一组新的生成元 $x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n$.
3. 如果将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 $a \in A$ 加到第 j 行, 那么相当于将 A^n 的生成元 x_i 替换为 $x_i - ax_j$, 即给出了 A^n 的一组新的生成元 $x_1, \dots, x_i - ax_j, \dots, x_j, \dots, x_n$.

定理 2.10 (Smith 标准型). 如果关系矩阵为零矩阵，那么 $\ker\varphi = 0$，从而 $M \simeq A^n$. 所以我们假设 $\ker\varphi \neq 0$，令 a_1 是初始关系矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素的最大公因子. 那么通过上述六种初等变换，可以将 A 变换为

$$\begin{pmatrix} D_k & \\ & O_{n-k,m-k} \end{pmatrix},$$

其中 D_k 是对角阵，对角线为 $a_1, a_2, \dots, a_k$ $(k \le m)$，并且满足 $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_k$.

Proof. (1) 首先注意到初等行或者列变换并不会改变所有元素的最大公因子, 因为新矩阵的元素显然被原矩阵元素的最大公因子整除, 而初等变换的操作是可逆的, 所以原矩阵的元素又被新矩阵元素的最大公因子整除, 所以新矩阵和原矩阵元素的最大公因子相同.

我们先考虑对第一行的操作: 假设第一行的最大公因子是 $d = \gcd(a_{11}, \dots, a_{m1})$, 那么我们可以按照下面的方法将 d 放到第一行第一列:

- 首先仅涉及前两列, 使用辗转相除法, 将 $\gcd(a_{11}, a_{21})$ 放到第一行第一列;
- 然后仅涉及第一列和第三列, 使用辗转相除法, 将 $\gcd(\gcd(a_{11}, a_{21}), a_{31}) = \gcd(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ 放到第一行第一列;
- 重复上述步骤, 直到把 d 放到第一行第一列.

上述操作可以导出下面的算法:

1. 使用上述操作将 $d = \gcd(a_{11}, \dots, a_{m1})$ 放到第一行第一列;
2. 此时 d 整除 $a_{21}, \dots, a_{m1}$, 那么我们可以将第一行除开 d 之外全变为零;
3. 如果此时矩阵的所有元素都被 d 整除, 那么操作停止. 否则, 存在元素 a_{ji} $(i > 1)$, 使得 $d \nmid a_{ji}$;
4. 如果 $d \nmid a_{1i}$, 那么我们跳过这一步. 否则, 我们将第 j 列加到第 1 列使得 $a \nmid a_{1i}$, 注意此时并没有改变第一行;
5. 计算新的最大公因子 $d' = \gcd(d, a_{1i})$, 通过仅涉及第 1 行和第 i 行的操作, 可以

将 d' 放到第一行第一列, 注意到通过第四步, 有 $d \nmid a_{1i}$, 所以 d' 的次数严格小于 d 和 a_{1i} 的次数;

6. 回到操作 1.

这个算法必然在有限步结束, 因为每进行一次第 5 步, 第一行第一列的元素的次数就会严格变小, 最多也只能变到零次, 从而在第 3 步退出操作. 最后我们就得到了 a_{11} 整除所有其他元素的新矩阵, 而根据前面的观察, 这个新矩阵元素的最大公因子等于初始矩阵元素的最大公因子, 而新矩阵元素的最大公因子显然就是 a_{11}, 这就完成了第一步.

(2) 在 (1) 的基础上, 使用初等变换将第一行第一列的非 $(1,1)$-元全变成零即可.

(3) 在 (2) 的基础上, 右下角的分块矩阵又回到了 (1) 的形式, 注意到对该分块矩阵的操作不会影响大矩阵的第一行第一列, 所以重复 (1) 的操作, 又可以将这个分块矩阵化为 (2) 的形式, 即使得 $a_1 \mid a_2$ 并且 a_2 整除其他所有元素.

(4) 重复前三步的操作, 便可以得到形如 $\begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & O_{n-k,m-k} \end{pmatrix}$ 的关系矩阵. □

Proof of 2.9. 根据前面的叙述, $M \simeq A^n/\ker\varphi$, 并且通过初等变换将关系矩阵变为 Smith 标准型后, 此时表明存在 A^n 的一组基 $x_1, \dots, x_n$ 和 $\ker\varphi$ 的一组生成元 $y_1, \dots, y_k$, 此时 $k \le n$ 并且 $y_i = a_i x_i$, 故

$$\begin{aligned} M &\simeq A^n/\ker\varphi = (A \oplus \cdots \oplus A)/(Ay_1 \oplus \cdots \oplus Ay_k \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \\ &\simeq A/(a_1) \oplus A/(a_2) \oplus \cdots \oplus A/(a_k) \oplus A^{n-k}. \end{aligned}$$

□

推论 2.11. A 是 ED，M 是自由模 A^n 的一个子模，那么 M 是秩 $m \le n$ 的自由模.

Proof. 存在 A^n 的一组基 $x_1, \dots, x_n$ 和 M 的一组生成元 $y_1, \dots, y_m$, 使得 $m \le n$ 并且 $y_i = a_i x_i$, 此时 y_i 线性无关, 故 $M = Ay_1 \oplus \cdots \oplus Ay_m$ 是秩 m 的自由模. □

推论 2.12. A 是 ED，M 是有限生成 A-模，那么

$$\mathrm{Tor}(M) = A/(a_1) \oplus A/(a_2) \oplus \cdots \oplus A/(a_m),$$

其中 $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_m$. 特别地，$M$ 是无扭模当且仅当 M 是自由模，M 是扭模当且仅当自由秩 $r = 0$，此时 $\mathrm{Ann}(M) = (a_m)$.

定理 2.9 的结果还可以进一步改进, 设 a 是 A 中的非零非单位的元素, 那么 a 可以唯一分解为 $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, 其中 p_i 为互不相同的素元, 那么根据中国剩余定理, 有环同构 (同时也是 A-模同构)

$$A/(a) \simeq A/(p_1^{\alpha_1}) \oplus A/(p_2^{\alpha_2}) \oplus \cdots \oplus A/(p_s^{\alpha_s}).$$

定理 2.9 的右端每一项都可以做类似的分解, 于是我们得到了下面定理.

定理 2.13 (基本定理: 初等因子型). A 是 ED，M 是有限生成 A-模，那么 M 同构于有限多个循环模的直和，即

$$M \simeq A^r \oplus A/(p_1^{\alpha_1}) \oplus A/(p_1^{\alpha_2}) \oplus \cdots \oplus A/(p_t^{\alpha_t}),$$

其中 $r \geq 0$, $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_t^{\alpha_t}$ 是 A 中素元的幂次（不需要互不相同）. $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_t^{\alpha_t}$ 被称为 M 的**初等因子**.

给定 n 维 F-向量空间 V, 设有一组基 $e_1, \dots, e_n$, T 是 V 上的线性变换, 那么 V 可以成为一个 $F[x]$-模, 通过定义 $x \cdot v = T(v)$, 这当然是一个有限生成 $F[x]$-模, $F[x]$ 为 ED, 这允许我们使用前面的结果. 取 $F[x]^n$ 的一组基为 $\xi_1, \dots, \xi_n$, 那么存在满同态 $\varphi : F[x]^n \to V$ 定义为 $\varphi(\xi_i) = e_i$, 下面我们说明 T 的特征矩阵和 $\ker\varphi$ 之间的关系.

命题 2.14. 如果 T 在上述基 $e_1, \dots, e_n$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 特征矩阵

$$xI - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{pmatrix},$$

那么 $xI - \boldsymbol{A}$ 可以作为 $F[x]^n$ 到 $\ker\varphi$ 的关系矩阵.

Proof. 也就是说我们要证明 $1 \leq i \leq n$ 时,

$$\mu_i = -a_{1i}\xi_1 - \cdots - a_{i-1,i}\xi_{i-1} + (x - a_{ii})\xi_i - a_{i+1,i}\xi_{i+1} - \cdots - a_{ni}\xi_n$$

组成了 $\ker\varphi$ 的一组生成元.

直接验证可知

$$\varphi(\mu_i) = -(a_{1i}e_1 + \cdots + a_{ni}e_n) + T(e_i) = 0,$$

所以 $\mu_i \in \ker\varphi$.

由于

$$x\xi_i = \mu_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\xi_j \in (F[x]\mu_1 + \cdots F[x]\mu_n) + (F\xi_1 + \cdots + F\xi_n),$$

所以

$$x^2\xi_i = x(x\xi_i) = x\mu_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(x\xi_j) \in (F[x]\mu_1 + \cdots F[x]\mu_n) + (F\xi_1 + \cdots + F\xi_n),$$

以此类推, 可知任意的 $k \geq 0$ 有

$$x^k\xi_i \in (F[x]\mu_1 + \cdots F[x]\mu_n) + (F\xi_1 + \cdots + F\xi_n),$$

所以

$$F[x]^n = F[x]\xi_1 + \cdots + F[x]\xi_n = (F[x]\mu_1 + \cdots F[x]\mu_n) + (F\xi_1 + \cdots + F\xi_n).$$

那么任取 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\mu_i + \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i \in \ker\varphi$, 就有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\mu_i + \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i\right) = 0,$$

故 $a_i = 0$, 这就证明了 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 是 $\ker\varphi$ 的生成元. □

2.3 有限生成模

命题 2.15 (Cayley-Hamilton). M 是有限生成 A-模，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，令 ϕ 是 M 的自同态并且使得 $\phi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$，那么存在 $a_i \in \mathfrak{a}$ 使得 ϕ 满足下面的等式

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Proof. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为 M 的生成元，那么对于每个 x_i，存在 $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ 使得 $\phi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$，即

$$\begin{pmatrix} \phi - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \phi - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \phi - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

左乘左端矩阵的伴随矩阵，那么 $\det(\delta_{ij}\phi - a_{ij}) = 0$，这就给出了上述等式. □

推论 2.16. 令 M 是有限生成 A-模，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，使得 $\mathfrak{a}M = M$，那么存在 $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ 使得 $xM = 0$. 或者说，存在 $a \in \mathfrak{a}$，使得 $ay = y\ (\forall y \in M)$.

Proof. 取 ϕ 为单位映射 1，那么存在 $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$ 使得

$$1^n + a_1 1^{n-1} + \cdots + a_n 1 = 0,$$

那么 $x = 1 + a_1 + \cdots + a_n$ 满足 $xM = 0$，$a = -(a_1 + \cdots + a_n)$ 满足 $ay = y\ (\forall y \in M)$. □

命题 2.17 (Nakayama 引理). 令 M 是有限生成 A-模，理想 $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{rad}(A)$，如果 $\mathfrak{a}M = M$，那么 $M = 0$.

Proof. 存在 $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ 使得 $xM = 0$，此时 $x - 1 \in \mathrm{rad}(A)$，所以 $x \in A^\times$，故 $M = x^{-1}xM = 0$. □

推论 2.18. 令 M 是有限生成 A-模，N 是 M 的子模，理想 $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{rad}(A)$，如果 $M = \mathfrak{a}M + N$，那么 $M = N$.

Proof. M/N 是有限生成 A-模，由于 $\mathfrak{a}(M/N) = (\mathfrak{a}M + N)/N = M/N$，所以 $M/N = 0$，即 $M = N$. □

A 是一个局部环，$\mathfrak{m}$ 是极大理想，$A/\mathfrak{m}$ 是剩余域. M 是有限生成 A-模，那么 $M/\mathfrak{m}M$ 被 $\mathfrak{m}$ 零化，所以 $M/\mathfrak{m}M$ 可以视为 $A/\mathfrak{m}$-模，即一个有限维 $A/\mathfrak{m}$-向量空间.

命题 2.19. 令 $x_i\ (1 \le i \le n)$ 是 M 的元素，并且其在 $M/\mathfrak{m}M$ 中的像组成了 $M/\mathfrak{m}M$ 的一组基，那么 x_i 生成了 M.

Proof. 设 N 是 x_i 生成的子模，由于 $x_i + M/\mathfrak{m}M$ 组成了一组基，所以任取 $m \in M$，存在 $a_i \in A$ 使得 $m + \mathfrak{m}M = \sum a_i x_i + \mathfrak{m}M$，即 $m \in N + \mathfrak{m}M$，故 $M = \mathfrak{m}M + N$，所以 $M = N$. □

2.4 正合列

一列 A-模和 A-模同态

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

被称为**上链复形**, 如果 $f_{i+1}\circ f_i = 0$. 记 $Z_i = \ker f_{i+1}$, $B_i = \operatorname{im} f_i$, $H^i = Z_i/B_i$ 被称为 i-次上同调. 若 $H^i = 0$, 则称 (M_*, f_*) 是正合列.

命题 2.20.

1. 序列

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

是正合列当且仅当对于任意 A-模 N，序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M', N)$$

是正合列，这表明 $\operatorname{Hom}(\_, N)$ 是左正合（逆变）函子.

2. 序列

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$$

是正合列当且仅当对于任意 A-模 M，序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N'')$$

是正合列，这表明 $\operatorname{Hom}(M, \_)$ 是左正合（协变）函子.

Proof. 我们只证明第一个. 若 $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$ 是正合列, 令 $\bar{v}(f) = fv = 0$, v 是满射, 所以存在右逆 v' 使得 $vv' = 1_{M''}$, 故 $f = 0$, 所以 $\bar{v}$ 是单射. 任取 $f \in \operatorname{Hom}(M'', N)$, 那么 $\bar{u}(\bar{v}(f)) = \bar{u}(fv) = fvu = 0$, 所以 $\operatorname{im}\bar{v} \subseteq \ker\bar{u}$. 任取 $g \in \ker\bar{u}$, 即 $gu = 0$. 对于 $m'' \in M$, 有 $m \in M$ 使得 $m'' = v(m)$, 令 $h : M'' \to N$ 为 $h(m'') = g(m)$, 我们说明 h 是良定义的, 即若 $m'' = v(m_1) = v(m_2)$, 则有 $g(m_1) = g(m_2)$. $v(m_1) = v(m_2)$ 表明 $m_1 - m_2 \in \ker v = \operatorname{im} u$, 故 $g(m_1 - m_2) = 0$, 所以 $g(m_1) = g(m_2)$. 显然 h 是同态, 并且 $g = hv = \bar{v}(h)$, 这就表明 $\ker\bar{u} \subseteq \operatorname{im}\bar{v}$. 所以 $\operatorname{im}\bar{v} = \ker\bar{u}$.

若对于任意 A-模 N, $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M', N)$ 是正合列. 取 $N = \operatorname{coker} v = M''/\operatorname{im} v$, 那么自然映射 $\pi : M'' \to N$ 满足 $\bar{v} = \pi v = 0$, $\bar{v}$ 是单射表明 $\pi = 0$, 即 $M'' = \operatorname{im} v$, v 是满射. 取 $N = M''$, 那么 $1_{M''} \in \operatorname{Hom}(M'', M'')$ 满足 $\bar{u}\bar{v}(1_{M''}) = 0$, 即 $vu = 1_{M''}vu = 0$, 故 $\operatorname{im} u \subseteq \ker v$. 取 $N = \operatorname{coker} u = M/\operatorname{im} u$, $\pi : M \to N$ 为自然映射, 那么 $\bar{u}(\pi) = \pi u = 0$, 故 $\pi \in \ker\bar{u} = \operatorname{im}\bar{v}$, 故存在 $h \in \operatorname{Hom}(M'', N)$ 使得 $\pi = \bar{v}(h) = hv$, 任取 $m \in \ker v$, 那么 $m + \operatorname{im} u = \pi(v) = hv(m) = 0$, 故 $m \in \operatorname{im} u$, 即 $\ker v \subseteq \operatorname{im} u$. 所以 $\operatorname{im} u = \ker v$. □

命题 2.21 (蛇引理). 设有两个 A-模的正合列，并且满足如下交换图（中间两行），那么存在下述的红色正合列．

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, red] & \ker\alpha \arrow[r, red, "\bar{u}"] \arrow[d] & \ker\beta \arrow[r, red, "\bar{v}"] \arrow[d] & \ker\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, red, "d"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & N \arrow[r, "v'"] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r, red, "\bar{u}'"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r, red, "\bar{v}'"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[r, red] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Proof. 由于 $\beta\bar{u}(\ker\alpha) = \beta u(\ker\alpha) = u'\alpha(\ker\alpha) = 0$，所以 $\bar{u}(\ker\alpha) \subseteq \ker\beta$，而 $\bar{u}$ 作为 u 的限制自然是单射．故红色序列在 $\ker\alpha$ 处是正合的．显然 $\bar{v}\bar{u} = 0$．任取 $m \in \ker\bar{v}$，那么 $m \in \ker v = \operatorname{im} u$，故存在 $m' \in M'$ 使得 $m = u(m')$，此时 $u'\alpha(m') = \beta u(m') = 0$，$u'$ 是单射表明 $\alpha(m') = 0$，即 $m' \in \ker\alpha$，故 $m \in \operatorname{im}\bar{u}$．这就表明 $\ker\bar{v} = \operatorname{im}\bar{u}$，红色序列在 $\ker\beta$ 处是正合的．任取 $m'' \in \ker\gamma$，那么存在 $m \in M$ 使得 $m'' = v(m)$，此时 $v'\beta(m) = \gamma v(m) = 0$，故 $\beta(m) \in \ker v' = \operatorname{im} u'$，$u'$ 是单射表明存在唯一的 $n' \in N$ 使得 $\beta(m) = u'(n')$，定义 $d : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ 为 $d(m) = n' + \operatorname{im}\alpha$．首先我们说明 d 是良定义的，如果 $m_1, m_2 \in M$ 都满足 $m'' = v(m_1) = v(m_2)$，那么 $m_1 - m_2 \in \ker v = \operatorname{im} u$，设 $n_1', n_2' \in N'$ 分别满足 $u'(n_1') = \beta(m_1)$ 以及 $u'(n_2') = \beta(m_2)$，设 $m' \in M'$ 使得 $m_1 - m_2 = u(m')$，所以 $u'\alpha(m') = \beta u(m') = \beta(m_1 - m_2) = u'(n_1') - u'(n_2')$，故 $n_1' - n_2' = \alpha(m')$，即 $n_1' + \operatorname{im}\alpha = n_2' + \operatorname{im}\alpha$，所以 d 是良定义的．不难验证 d 是模同态．显然有 $d\bar{v} = 0$．任取 $m'' \in \ker d$，存在 $m \in M$ 使得 $m'' = v(m)$，设 $n' \in N'$ 使得 $\beta(m) = u'(n')$，那么 $d(m'') = n' + \operatorname{im}\alpha$，$m'' \in \ker d$ 表明 $n' \in \operatorname{im}\alpha$，故存在 $m' \in M'$ 使得 $n' = \alpha(m')$，所以 $\beta u(m') = u'\alpha(m') = \beta(m)$，故 $m - u(m') \in \ker\beta$，并且 $\bar{v}(m - u(m')) = v(m - u(m')) = v(m) = m''$，所以 $m'' \in \operatorname{im}\bar{v}$．故 $\ker d = \operatorname{im}\bar{v}$，红色序列在 $\ker\gamma$ 处是正合的．剩下的证明与上面的类似． □

令 $\mathcal{C}$ 是 A-模的一个类，λ 是 $\mathcal{C}$ 上的函数，取值为 $\mathbb{Z}$（一般的，也可以是交换群 G）．如果对于任意处于 $\mathcal{C}$ 中的短正合列 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$，有 $\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0$，那么我们说 λ 是**加性的**．

例 2.22. A 是域 k，$\mathcal{C}$ 是有限维 k-向量空间 V 的类，那么 $\lambda(V) = \dim V$ 是 $\mathcal{C}$ 上的加性函数．

命题 2.23. 令 $0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$ 是 A-模序列的上链复形，并且每个 M_i、同态核以及上同调 H^i 都在 C 中，那么对于任意 C 上的加性函数 λ 有

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda(M_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda(H^i).$$

Proof. 对于复形

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots,$$

其蕴含了两个短正合列：

$$0 \longrightarrow Z_i \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_{i+1}} B_{i+1} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow B_i \longrightarrow Z_i \xrightarrow{\pi} H^i \longrightarrow 0.$$

分别表明

$$\lambda(M_i) = \lambda(Z_i) + \lambda(B_{i+1}), \quad \lambda(Z_i) = \lambda(B_i) + \lambda(H^i),$$

所以

$$\lambda(M_i) = \lambda(B_i) + \lambda(B_{i+1}) + \lambda(H^i),$$

注意到 $B_0 = 0$ 以及 $B_{n+1} = 0$, 故

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda(M_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda(H^i).$$ □

2.5 模的张量积

给定 A-模 M, N, M, N 的张量积指的是 A-模 T, 并且存在 A-双线性映射 $g : M\times N \to T$, T 还满足下面的泛性质：任给 A-模 P 和 A-双线性映射 $f : M \times N \to P$, 存在唯一的 A-模同态（线性映射）$\bar{f} : T \to P$ 使得 $f = \bar{f}g$, 即有交换图：

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & P \\ T \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

命题 2.24. 上述 A-模 T 存在且在同构的意义下唯一. 这样的 T 记为 $M \otimes_A N$.

Proof. （唯一性）如果 T, T' 均满足上述性质, 那么同时有下面两个交换图成立

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & T' \\ T \arrow[ur, dashed, "\bar{g}'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & T \\ T' \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

即 $g' = \bar{g}'g = \bar{g}'\bar{g}g'$ 以及 $g = \bar{g}g' = \bar{g}\bar{g}'g$. 此时 $\bar{g}'\bar{g}: T' \to T'$ 也是 A-模同态, 并且 $g' = 1_{T'}g' = \bar{g}'\bar{g}g'$, 根据唯一性, 所以 $\bar{g}'\bar{g} = 1_{T'}$. 类似地有 $\bar{g}\bar{g}' = 1_T$, 所以 $\bar{g}$ 是同构映射.

(存在性) 做 A-上的自由模 $A^{(M\times N)}$, 这里 $M \times N$ 仅仅代表集合的 Cartesian 积, 我们知道 $A^{(M\times N)}$ 中的元素为有限的形式和 $\sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i)$, 其中 $a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N$.

令 D 是 $A^{(M\times N)}$ 的子模, 其由以下四类元素生成

$$\begin{cases}(x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y)\\(x,y_1+y_2)-(x,y_1)-(x,y_2)\\(ax,y)-a(x,y)\\(x,ay)-a(x,y)\end{cases}$$

令 $T = A^{(M\times N)}/D$, 我们记 $(m,n)+D \in T$ 为 $m \otimes n$. 根据构造, 我们知道

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)\otimes y &= x_1\otimes y + x_2\otimes y,\\ x\otimes(y_1+y_2) &= x\otimes y_1 + x\otimes y_2,\\ (ax)\otimes y &= a(x\otimes y) = x\otimes(ay).\end{aligned}$$

下面我们证明 T 就是我们需要的张量积. $g: M\times N \to T$ 定义为 $g(m,n) = m\otimes n$ 是一个自然的双线性映射. 根据自由模的泛性质, 任意双线性映射 $f: M\times N \to P$ 可以诱导出唯一的同态 $f': A^{(M\times N)} \to P$, 其满足 $f'|_{M\times N} = f$, 此时 $D \subseteq \ker f'$, 所以 f' 诱导出良定义的同态 $\bar{f}: T \to P$, 满足 $\bar{f}(m\otimes n) = f'(m,n) = f(m,n)$, 即 $f = \bar{f}g$. □

对于多个模的张量积有完全类似地定义和证明.

推论 2.25. 令 $x_i \in M, y_i \in N$ 使得在 $M\otimes N$ 中有 $\sum x_i\otimes y_i = 0$, 那么存在 M 的有限生成子模 M_0 和 N 的有限生成子模 N_0 使得在 $M_0\otimes N_0$ 中有 $\sum x_i \otimes y_i = 0$.

Proof. 若 $M\otimes N$ 中有 $\sum x_i\otimes y_i = 0$, 这表明 $\sum(x_i,y_i) \in D$, 所以 $\sum(x_i,y_i)$ 可以表示为上述四类元素的有限和, 令 M_0 为所有 x_i 和上述四类元素的第一个分量生成的子模, N_0 为所有 y_i 和上述四类元素的第二个分量生成的子模即可. □

命题 2.26. M, N, P 是 A-模, 那么存在以下唯一的同构

1. $M\otimes N \to N\otimes M$
2. $(M\otimes N)\otimes P \to M\otimes(N\otimes P) \to M\otimes N\otimes P$
3. $(M\oplus N)\otimes P \to (M\otimes P)\oplus(N\otimes P)$
4. $A\otimes M \to M$

分别使得

1. $x\otimes y \mapsto y\otimes x$
2. $(x\otimes y)\otimes z \mapsto x\otimes(y\otimes z) \mapsto x\otimes y\otimes z$
3. $(x,y)\otimes z \mapsto (x\otimes z, y\otimes z)$
4. $a\otimes x \mapsto ax$.

Proof. (1) 映射 $(x,y)\mapsto y\otimes x$ 是双线性映射, 所以诱导出唯一的同态 $x\otimes y\mapsto y\otimes x$. 另一方面, $(y,x)\mapsto x\otimes y$ 也是双线性映射, 诱导出唯一的同态 $y\otimes x\mapsto x\otimes y$, 上述两个同态互为逆映射, 所以是同构.

(2) 给定 $z_0\in P$, 映射 $(x,y)\mapsto x\otimes y\otimes z_0$ 是双线性映射, 所以诱导出唯一的同态 $x\otimes y\mapsto x\otimes y\otimes z_0$, 这表明 $(x\otimes y,z)\mapsto x\otimes y\otimes z$ 是良定义的双线性映射, 所以诱导出唯一的同态 $(x\otimes y)\otimes z\mapsto x\otimes y\otimes z$. 另一方面, 映射 $(x,y,z)\mapsto (x\otimes y)\otimes z$ 是三线性映射, 所以诱导出唯一的同态 $x\otimes y\otimes z\mapsto (x\otimes y)\otimes z$, 这与上述同态互为逆映射, 所以是同构, 这就证明了 $(M\otimes N)\otimes P\simeq M\otimes N\otimes P$. 另一边同理.

(3) 映射 $((x,y),z)\mapsto (x\otimes z, y\otimes z)$ 是双线性映射,所以诱导出唯一的同态 $(x,y)\otimes z\mapsto (x\otimes z,y\otimes z)$. 另一方面, 映射 $(x,z)\mapsto (x,0)\otimes z$ 和 $(y,z)\mapsto (0,y)\otimes z$ 都是双线性映射, 分别诱导出同态 $x\otimes z\mapsto (x,0)\otimes z$ 和 $y\otimes z\mapsto (0,y)\otimes z$, 那么我们有同态 $(x\otimes z,y\otimes z)\mapsto (x,0)\otimes z+(0,y)\otimes z=(x,y)\otimes z$, 这与上述同态互为逆映射.

(4) 映射 $(a,x)\mapsto ax$ 是双线性映射, 所以诱导出唯一的同态 $a\otimes x\mapsto ax$. 另一方面, 同态 $x\mapsto 1\otimes x$ 是上述映射的逆映射. □

推论 2.27. 若 V,W 分别为 m,n 维 k-向量空间，且分别有一组基 $v_1,\dots,v_m$ 与 $w_1,\dots,w_n$，那么 $V\otimes W$ 是 mn 维 k-向量空间，基为 $v_i\otimes w_j$ $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$.

Proof. 我们有

$$V\otimes W\simeq\left(\bigoplus_{i=1}^{m}k\right)\otimes W\simeq\bigoplus_{i=1}^{m}(k\otimes W)\simeq\bigoplus_{i=1}^{m}W,$$

同构映射为 $v_i\otimes w_j\mapsto (0,\dots,1,\dots,0)\otimes w_j\mapsto (0,\dots,1\otimes w_j,\dots,0)\mapsto (0,\dots,w_j,\dots,0)$. □

令 A,B 是环, M 是 A-模, P 是 B-模, N 是 (A,B)-双模（即 N 既是 A-模又是 B-模, 并且有相容的模结构: $a(xb)=(ax)b$ 对于 $a\in A, b\in B, x\in N$）. 此时, 通过定义 $b(m\otimes n):=m\otimes(nb)$, 使得 $M\otimes_A N$ 自然地成为一个 B-模, 此时 $M\otimes_A N$ 是一个 (A,B)-双模, 因为

$$\begin{aligned}(a(m\otimes n))b&=(m\otimes(an))b=m\otimes((an)b)=m\otimes(a(nb))\\&=a(m\otimes(nb))=a((m\otimes n)b).\end{aligned}$$

类似地, $N\otimes_B P$ 也自然地成为一个 (A,B)-双模, 类似上面的证明, 我们同时有 A-模或者 B-模同构

$$(M\otimes_A N)\otimes_B P\simeq M\otimes_A(N\otimes_B P).$$

$f:M\to M'$ 和 $g:N\to N'$ 是 A-模同态的张量积. 定义 $h:M\times N\to M'\otimes N'$ 为 $h(x,y)=f(x)\otimes g(y)$, 容易验证 h 是双线性映射, 所以诱导出同态

$$f\otimes g: M\otimes N\to M'\otimes N'$$

为

$$(f\otimes g)(x\otimes y)=f(x)\otimes g(y).$$

令 $f': M' \to M''$ 和 $g': N' \to N''$ 为 A-模同态, 注意到

$$\begin{aligned}((f'\circ f)\otimes(g'\circ g))(x\otimes y) &= (f'\circ f)(x\otimes y)\otimes(g'\circ g)(x\otimes y)\\ &= (f'\otimes g')(f(x\otimes y)\otimes g(x\otimes y))\\ &= (f'\otimes g')\circ(f\otimes g)(x\otimes y),\end{aligned}$$

所以

$$(f'\circ f)\otimes(g'\circ g) = (f'\otimes g')\circ(f\otimes g).$$

2.6 标量的扩张与限制

$f: A\to B$ 是环同态, N 是 B-模, 那么 N 自然有一个 A-模结构, 为 $ax := f(a)x$. 这个 A-模称为 N 通过标量的限制得到的. 特别地, f 定义了 B 上的 A-模结构.

命题 2.28. 设 N 作为 B-模是有限生成的, B 作为 A-模是有限生成的, 那么 N 作为 A-模是有限生成的.

Proof. 设 $x_1,\dots,x_n$ 是 N 作为 B-模的生成元, $b_1,\dots,b_m$ 是 B 作为 A-模的生成元, 那么 b_ix_j 就是 N 作为 A-模的生成元. □

现在令 M 是 A-模, 如上所述, B 可以视为 A-模, 那么我们可以构造 A-模 $M_B = B\otimes_A M$, 实际上 M_B 拥有 B-模结构, 通过 $b(b'\otimes x) := bb'\otimes x$, 这个 B-模 M_B 称为 M 通过标量的扩张得到的.

命题 2.29. 若 M 作为 A-模是有限生成的, 那么 M_B 是有限生成 B-模.

Proof. 如果 $x_1,\dots,x_n$ 是 M 的生成元, 那么 $1\otimes x_1,\dots,1\otimes x_n$ 是 M_B 的 B-模生成元. □

在线性代数中, 经常将实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 视为复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的子空间. 这实际上是在说将 $\mathbb{R}^n$ 的标量扩张为 $\mathbb{C}$, 可以预见应该有 $\mathbb{C}$-模同构 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$. 现在我们来证明这一点, 对于更一般的情况, 我们证明 B-模同构 $B\otimes_A A^n \simeq B^n$. 考虑双线性映射 $\varphi: B\times A^n \to B^n$ 为

$$\varphi(x,(y_1,\dots,y_n)) = (xf(y_1),\dots,xf(y_n)),$$

这诱导出 A-模同态 $\bar\varphi: B\otimes_A A^n \to B^n$. 定义同态 $\psi: B^n \to B\otimes_A A^n$ 为

$$\psi(x_1,\dots,x_n) = x_1\otimes e_1 + \cdots + x_n\otimes e_n,$$

其中 $e_i = (0,\dots,1,\dots,0)\in A^n$ 是生成元, 容易验证 $\bar\varphi$ 和 ψ 互为逆映射. 所以 $\bar\varphi$ 是 A-模同构. 容易验证 $\bar\varphi$ 也是 B-模同构.

还是按照上面的记号, 标量的限制实际上可以视为 B-Mod $\to$ A-Mod 的协变函子 $\mathcal{R}$, 将 B-模 M 送到限制标量后的 A-模 $\mathcal{R}(M) = M$, 将 B-模同态 $f: M\to M'$ 送到 A-模同态 $\mathcal{R}(f): \mathcal{R}(M)\to\mathcal{R}(M')$, 作用为 $\mathcal{R}(f)(x) = f(x)$, 即 $\mathcal{R}(f) = f$. 同样的, 标量的扩张可以视为 A-Mod $\to$ B-Mod 的协变函子 $\mathcal{E}$, 将 A-模 M 送到 $\mathcal{E}(M) = B\otimes_A M$, 将 A-模

同态 $g: M \to M'$ 送到 B-模同态 $\mathcal{E}(g): \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M')$, 作用为 $\mathcal{E}(g)(b \otimes x) = b \otimes g(x)$, 即 $\mathcal{E}(g) = 1 \otimes g$. 我们证明对于任意 A-模 M 和 B-模 N, 都有

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, \mathcal{R}(N)) \simeq \mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(M), N).$$

任取 A-模同态 $g: M \to \mathcal{R}(N)$, 诱导出一个 B-模同态 $\bar{g}: \mathcal{E}(M) \to N$, 通过

$$\bar{g}(b \otimes x) = bg(x).$$

反之, 任取 B-模同态 $\bar{f}: \mathcal{E}(M) \to N$, 诱导出一个 A-模同态 $f: M \to \mathcal{R}(N)$, 通过

$$f(x) = \bar{f}(1 \otimes x).$$

容易验证 $g \mapsto \bar{g}$ 和 $\bar{f} \mapsto f$ 互为逆映射, 所以这给出了上述一一对应. 这就表明对于任意 A-模 M 和 B-模 N, 有同构

$$\nu_{M,N}: \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, \mathcal{R}(N)) \to \mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(M), N).$$

任取 A-模 M_1, M_2 和 B-模 N_1, N_2, $\varphi: M_2 \to M_1$ 和 $\psi: N_1 \to N_2$ 分别是 A-模同态与 B-模同态, 我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M_1, \mathcal{R}(N_1)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(\varphi, \mathcal{R}(\psi))"] \arrow[d, "\nu_{M_1,N_1}"'] & \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M_2, \mathcal{R}(N_2)) \arrow[d, "\nu_{M_2,N_2}"] \\
\mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(M_1), N_1) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(\varphi), \psi)"] & \mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(M_2), N_2)
\end{tikzcd}$$

上面的叙述说明了存在自然同构 $\nu: \mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(\_, \mathcal{R}(\_)) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(\mathcal{E}(\_), \_)$, 所以 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{E}$ 是一对伴随函子, $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{R}$ 的左伴随.

2.7 张量积的正合性质

给定环 A 和 A-模 N, 考虑 A-Mod $\to$ A-Mod 的张量积函子 $\_ \otimes N$ 和 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(N, \_)$, 为了简洁, 后面我们略去下标 A-Mod. 张量积函子 $\_ \otimes N$ 将一个 A-模 M 送到 A-模 $M \otimes_A N$, 将 A-模同态 $f: M \to M'$ 送到 $f \otimes 1: M \otimes N \to M \otimes N$. Hom 函子 $\mathrm{Hom}(N, \_)$ 将一个 A-模 P 送到 A-模 $\mathrm{Hom}(N, P)$, 将 A-模同态 $f: P \to P'$ 送到 $\bar{f}: \mathrm{Hom}(N, P) \to \mathrm{Hom}(N, P')$, 作用为 $\bar{f}(\varphi) = f \circ \varphi$. 我们证明这两个函子是一对伴随函子.

任取 A-模 M 和 P, 我们说明存在 A-模同构

$$\nu_{M,P}: \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)) \to \mathrm{Hom}(M \otimes N, P). \tag{2.1}$$

任取同态 $g: M \to \mathrm{Hom}(N, P)$, 那么对于每个 $x \in M$, 诱导了一个双线性映射 $(x, y) \mapsto g(x)(y)$, 进而诱导出同态 $\bar{g}: M \otimes N \to P$, 故定义 $\nu_{M,P}(g) = \bar{g}$, 满足 $\bar{g}(x \otimes y) = g(x)(y)$.

反之，任取同态 $\bar{f}: M\otimes N\to P$，其对应一个双线性映射 $f: M\times N\to P$，对于每个 $x\in M$，这个双线性映射可以诱导出同态 $f_x: N\to P$，不难验证 $\bar{f}\mapsto (x\mapsto f_x)$ 是上述映射的逆映射. 此外，容易验证 $\nu_{M,P}$ 是 A-模同态.

任取 A-模 M_1,M_2 和 P_1,P_2，$\varphi: M_2\to M_1$ 和 $\psi: P_1\to P_2$，我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M_1,\mathrm{Hom}(N,P_1)) \arrow[r, "{\mathrm{Hom}(\varphi,\mathrm{Hom}(N,\psi))}"] \arrow[d, "\nu_{M_1,P_1}"'] & \mathrm{Hom}(M_2,\mathrm{Hom}(N,P_2)) \arrow[d, "\nu_{M_2,P_2}"] \\
\mathrm{Hom}(M_1\otimes N,P_1) \arrow[r, "{\mathrm{Hom}(\varphi\otimes N,\psi)}"] & \mathrm{Hom}(M_2\otimes N,P_2)
\end{tikzcd}$$

这就表明 $\mathrm{Hom}(N,\_)$ 和 $\_\otimes N$ 是一对伴随函子，$\_\otimes N$ 是 $\mathrm{Hom}(N,\_)$ 的左伴随.

命题 2.30. 令

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

是正合列，N 是任意 A-模，那么序列

$$M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M''\otimes N \longrightarrow 0$$

是正合列.

Proof. 任取 A-模 P，根据命题 2.20 的 (1)，记 $D=\mathrm{Hom}(N,P)$，我们知道

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'',D) \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{Hom}(M,D) \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}(M',D)$$

是正合列，其中 $\bar{g}:\phi\mapsto\phi\circ g$，$\bar{f}:\psi\mapsto\psi\circ f$. 根据 (2.1) 式，有

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M''\otimes N,P) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathrm{Hom}(M\otimes N,P) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Hom}(M'\otimes N,P)$$

是正合列，其中 $\tilde{g}=\nu_{M,P}\circ\bar{g}\circ\nu^{-1}_{M'',P}$，$\tilde{f}=\nu_{M',P}\circ\bar{f}\circ\nu^{-1}_{M,P}$. 再根据命题 2.20 的 (1)，并且注意到任取 $\bar{\phi}\in\mathrm{Hom}(M''\otimes N,P)$，对于任意 $x\otimes y\in M\otimes N$，有

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\bar{\phi})(x\otimes y) &= (\nu_{M,P}\circ\bar{g}\circ\nu^{-1}_{M'',P}(\bar{\phi}))(x\otimes y) = \left(\nu_{M,P}(\nu^{-1}_{M'',P}(\bar{\phi})\circ g)\right)(x\otimes y) \\
&= (\nu^{-1}_{M'',P}(\bar{\phi})\circ g)(x)(y) = \phi_{g(x)}(y) \\
&= \bar{\phi}(g(x)\otimes y) = \bar{\phi}\circ(g\otimes 1)(x\otimes y),
\end{aligned}$$

所以

$$M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M''\otimes N \longrightarrow 0$$

是正合列. □

上述证明实际上表明任意左伴随的函子都是右正合的.

一般来说，如果 $M'\longrightarrow M\longrightarrow M''$ 是正合列，那么对于任意 A-模 N，通过张量积函子 $\_\otimes N$ 作用后的序列 $M'\otimes N\longrightarrow M\otimes N\longrightarrow M''\otimes N$ 不一定是正合列. 对于一个 A-模 N，如果张量积函子 $\_\otimes N$ 是正合函子，即能把任意正合列变为一个正合列，那么我们称 N 是**平坦模**.

命题 2.31. 对于一个 A-模 N，下面的说法是等价的：

1. N 是平坦模.
2. 如果 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ 是任意 A-模的短正合列，那么张量积序列
$$0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$$
是短正合列.
3. 如果 $f : M' \to M$ 是单同态，那么 $f \otimes 1 : M' \otimes N \to M \otimes N$ 是单同态.
4. 如果 $f : M' \to M$ 是单同态并且 M, M' 是有限生成模，那么 $f \otimes 1 : M' \otimes N \to M \otimes N$ 是单同态.

Proof. (1) ⇒ (2) 显然.

(2) ⇒ (1) 若 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ 是正合列, 那么其蕴含两个短正合列
$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M' \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{im} f \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow M \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{im} g \longrightarrow 0,$$
其中 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 表示值域的限制. 根据条件, 有短正合列
$$0 \longrightarrow \ker f \otimes N \longrightarrow M' \otimes N \xrightarrow{\bar{f}\otimes 1} \operatorname{im} f \otimes N \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \ker g \otimes N \longrightarrow M \otimes N \xrightarrow{\bar{g}\otimes 1} \operatorname{im} g \otimes N \longrightarrow 0,$$
所以 $\operatorname{im}(f \otimes 1) = \operatorname{im}(\bar{f} \otimes 1) = \operatorname{im} f \otimes N = \ker g \otimes N$, 接下来证明 $\ker g \otimes N = \ker(g \otimes 1)$ 即可. 注意到我们还有短正合列
$$0 \longrightarrow \operatorname{im} g \xrightarrow{i} M'' \longrightarrow \operatorname{coker} g \longrightarrow 0,$$
所以有短正合列
$$0 \longrightarrow \operatorname{im} g \otimes N \xrightarrow{i\otimes 1} M'' \otimes N \longrightarrow \operatorname{coker} g \otimes N \longrightarrow 0,$$
注意到 $\bar{g} \otimes 1$ 是满射, $i \otimes 1$ 是单射, 以及
$$(i \otimes 1) \circ (\bar{g} \otimes 1) = (i \circ \bar{g}) \otimes (1 \circ 1) = g \otimes 1,$$
所以
$$\ker(g \otimes 1) = \ker((i \otimes 1) \circ (\bar{g} \otimes 1)) = \ker g \otimes N.$$

(2) ⇔ (3) 由 命题 2.30 立即得到.

(3) ⇒ (4) 显然.

(4) ⇒ (3) 令 $f : M' \to M$ 是单射, $\sum x_i' \otimes y_i \in \ker(f \otimes 1)$, 也就是说在 $M \otimes N$ 中有 $\sum f(x_i') \otimes y_i = 0$. 令 M_0' 为 x_i' 生成的子模, 根据 推论 2.25, 存在 M 的有限生成子模 M_0 使得在 $M_0 \otimes N$ 中有 $\sum f(x_i') \otimes y_i = 0$, 那么 $f_0 : M_0' \to M_0$ 满足 $\sum x_i' \otimes y_i \in \ker(f_0 \otimes 1)$, f_0 作为 f 的限制是单射, 所以 $\sum x_i' \otimes y_i = 0$, 故 $f \otimes 1$ 是单射. □

如果 $f : A \to B$ 是环同态, M 是平坦 A-模, 我们证明 $M_B = B \otimes_A M$ 是平坦 B-模. 若 $\varphi : N \to N'$ 是 B-模同态, 我们说明

$$\varphi \otimes_B 1_{M_B} : N \otimes_B (B \otimes_A M) \to N' \otimes_B (B \otimes_A M)$$

是单同态. 我们知道有 B-模同构

$$\psi_1 : N \otimes_B (B \otimes_A M) \simeq (N \otimes_B B) \otimes_A M,$$
$$\psi_2 : N' \otimes_B (B \otimes_A M) \simeq (N' \otimes_B B) \otimes_A M,$$

所以我们有 $(N \otimes_B B) \otimes_A M \to (N' \otimes_B B) \otimes_A M$ 的 B-模同态 $\psi_2 \circ (\varphi \otimes_B 1_{M_B}) \circ \psi_1$, 自然也是 A-模同态, M 是平坦 A-模表明上述映射是单射, 所以 $\varphi \otimes_B 1_{M_B}$ 是单射, 从而 M_B 是平坦 B-模.

设 A 是环, 其自身作为一个 A-模, 给定 $a \in A$ 且 a 不是零因子, 考虑 A-模同态 $a : A \to A$ 为 $a(x) = ax$, 那么这是一个单同态. 此时, 如果 N 是平坦 A-模, 那么 $a \otimes 1_N : A \otimes N \to A \otimes N$ 是单同态, 又因为有 A-模同构 $A \otimes N \simeq N$, 所以 $x \mapsto ax$ 是 $N \to N$ 的单同态. 这就表明, 如果 N 是平坦 A-模, 那么对于任意非零因子的 $a \in A$, 集合

$$\{x \in N \mid ax = 0\} = \{0\}$$

是单点集. 特别地, 如果 A 是整环, 那么 N 是平坦 A-模表明 N 是无扭模. 如果 A 是 PID, 实际上我们有更强的结论: N 是平坦 A-模当且仅当 N 是无扭模.

2.8 代数

令 $f : A \to B$ 是环同态, 如果 $a \in A$ 和 $b \in B$, 定义模的乘积

$$a \cdot b := f(a)b,$$

这使得 B 成为一个 A-模, 即之前提到的标量的限制. 所以 B 同时拥有环结构和 A-模结构, 并且这两个结构是相容的, 即

$$a \cdot (b_1 b_2) = (a \cdot b_1)b_2 = b_1(a \cdot b_2).$$

这样的配备了 A-模结构的环 B, 我们称之为 **A-代数**. 更明确地说, A-代数指的是一个环 B 以及一个环同态 $f : A \to B$. 当然, 上面的两种说法是等价的, 即如果环 B 有一个与环结构相容的 A-模结构, 那么 B 是一个 A-代数. 因为此时我们可以构造环同态 $f : A \to B$ 为 $f(a) = a \cdot 1_B$,

$$f(aa') = (aa') \cdot 1_B = a \cdot (a' \cdot 1_B) = a \cdot (1_B(a' \cdot 1_B)) = (a \cdot 1_B)(a' \cdot 1_B) = f(a)f(a')$$

表明这确实是环同态.

关于代数的定义有两个特殊的例子. 如果 A 是一个域 K, 并且 B 非零, 那么同态 $f : K \to B$ 一定是单同态, 因此 K 可以视为 B 的子域, 所以一个 K-代数就是包含 K 作

为子域的环. 如果 A 是任意环, 此时总是有 $\mathbb{Z} \to A$ 的同态, 为 $n \mapsto n1_A$, 所以每个环自动地成为一个 $\mathbb{Z}$-代数.

对于两个 A-代数 B, C, 一个 **A-代数同态** $h : B \to C$ 指的是一个环同态并且同时是一个 A-模同态. 令 $f : A \to B$, $g : B \to C$ 分别是 B, C 对应的环同态, 我们证明环同态 h 是 A-代数同态当且仅当 $h \circ f = g$. 若 h 是 A-代数同态, 那么

$$h(f(a)) = h(a \cdot 1_B) = a \cdot h(1_B) = a \cdot 1_C = g(a).$$

反之, 如果环同态 h 满足 $h \circ f = g$, 那么

$$h(a \cdot b) = h(f(a)b) = h(f(a))h(b) = g(a)h(b) = a \cdot h(b),$$

从而 h 是 A-代数同态.

2.9 代数的张量积

令 B, C 是两个 A-代数, $f : A \to B$ 和 $g : A \to C$ 是对应的环同态. 因为 B 和 C 是 A-模, 所以我们可以作张量积得到 A-模 $D = B \otimes_A C$, 实际上我们可以赋予 D 环结构.

考虑映射 $B \times C \times B \times C \to D$ 为

$$(b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'.$$

容易验证这是 4-多重线性映射, 所以诱导了 A-模同态

$$B \otimes C \otimes B \otimes C \to D,$$

所以我们有对应的 A-模同态 $D \otimes D \to D$, 这个同态又对应到双线性映射 $\mu : D \times D \to D$ 为

$$\mu(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

这给出了 D 上的乘法, 对于单张量, 我们定义

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc',$$

对于一般的张量, 我们定义

$$\left(\sum_i (b_i \otimes c_i) \right) \left(\sum_j (b_j \otimes c_j) \right) = \sum_{i,j} (b_i b_j \otimes c_i c_j).$$

可以验证这个乘法使得 D 成为一个交换环, 单位元为 $1_B \otimes 1_C$. 此外, D 成为了一个 A-代数, 对应的环同态为

$$a \mapsto a(1_B \otimes 1_C) = f(a) \otimes 1_C = 1_B \otimes g(a).$$

2.10 EXERCISES

Ex 2.10.1. $f: A \to B$ 是环同态, N_1, N_2 是 B-模, 通过标量的限制, 我们也可以将它们视为 A-模, 证明存在 B-模同构:

$$N_1 \otimes_B N_2 \simeq (N_1 \otimes_A N_2)/D,$$

D 为所有形如 $bx \otimes y - x \otimes by$ ($b \in B, x \in N_1, y \in N_2$) 的元素生成的 A-子模.

Proof. 考虑映射 $\varphi: N_1 \times N_2 \to N_1 \otimes_B N_2$ 为

$$\varphi(x, y) = x \otimes y,$$

那么 φ 显然是 A-双线性映射, 故诱导出 A-模同态 $\bar{\varphi}: N_1 \otimes_A N_2 \to N_1 \otimes_B N_2$. 由于

$$\bar{\varphi}(b(x \otimes_A y)) = \bar{\varphi}(bx \otimes_A y) = bx \otimes_B y = b(x \otimes_B y),$$

所以 $\bar{\varphi}$ 也是 B-模同态. 由于

$$\bar{\varphi}(bx \otimes_A y - x \otimes_A by) = bx \otimes_B y - x \otimes_B by = 0,$$

所以 $D \subseteq \ker \bar{\varphi}$, 同时由于

$$b'(bx \otimes_A y - x \otimes_A by) = b'bx \otimes_A y - b'x \otimes_A by = b(b'x) \otimes_A y - (b'x) \otimes_a by \in D,$$

所以 D 也是 B-子模. 这表明 $\bar{\varphi}$ 诱导出 B-模同态 $\psi: (N_1 \otimes_A N_2)/D \to N_1 \otimes_B N_2$. 令 $\lambda: N_1 \times N_2 \to (N_1 \otimes_A N_2)/D$ 为

$$\lambda(x, y) = x \otimes_A y + D,$$

由于

$$\lambda(bx, y) = bx \otimes_A y + D = b(x \otimes_A y + D) = b\lambda(x, y),$$
$$\lambda(x, by) = x \otimes_A by + D = bx \otimes_A y + D = b(x \otimes_A y + D) = b\lambda(x, y),$$

所以 λ 是 B-双线性映射, 故诱导出 B-模同态 $\bar{\lambda}: N_1 \otimes_B N_2 \to (N_1 \otimes_A N_2)/D$. 容易验证 $\bar{\lambda}$ 和 ψ 互为逆映射, 故 ψ 为同构. □

Ex 2.10.2. 令 $e_1, \dots, e_n$ 是 k-向量空间 V 的一组基, 那么对偶空间 $V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$ 有一组基 $e_1^*, \dots, e_n^*$, 它们满足

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad 1 \le i, j \le n.$$

令 $\varphi \in \mathrm{End}_k(V)$ 为自同态, 那么诱导出 $\varphi^* \in \mathrm{End}_k(V^*)$ 为

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

证明如果 φ 在 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 下的表示矩阵为 $A = (a_{ij})$, 那么 φ^* 在 $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ 下的表示矩阵为转置 $A^\top = (a_{ji})$.

Proof. 任意 $f \in V^*$ 可以表示为

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*,$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi^*(e_j^*) = e_j^* \circ \varphi &= \sum_{k=1}^{n} (e_j^* \circ \varphi)(e_k)e_k^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} e_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}e_i\right)e_k^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}e_k^*,\end{aligned}$$

即 φ^* 在 $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ 下的表示矩阵为转置 $A^\top = (a_{ji})$. □

Ex 2.10.3. 令 V, W 分别为 m, n 维 k-向量空间, $\{e_1, \dots, e_m\}$ 和 $\{u_1, \dots, u_n\}$ 分别是 V, W 的一组基, 推论 2.27 告诉我们 $\{e_i \otimes u_j\}$ 构成了 $V \otimes W$ 的一组基.

设线性变换 $\varphi : V \to V$ 相对于 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 的表示矩阵为 $A = (a_{ij})$, 线性变换 $\psi : W \to W$ 相对于 $\{u_1, \dots, u_n\}$ 的表示矩阵为 $B = (b_{ij})$, 证明 $\varphi \otimes \psi : V \otimes W \to V \otimes W$ 相对于 $\{e_i \otimes u_j\} = \{e_1 \otimes u_1, \dots, e_1 \otimes u_n, e_2 \otimes u_1, \dots, e_m \otimes u_n\}$ 的表示矩阵为

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix} \in M_{mn}(k).$$

上述乘法被称为矩阵的 Kronecker 积.

Proof. 我们有

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi)(e_i \otimes u_j) = \varphi(e_i) \otimes \psi(u_j) &= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}e_k\right) \otimes \psi(u_j) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ki}e_k \otimes \psi(u_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \sum_{l=1}^{n} b_{lj}e_k \otimes u_j \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(a_{ki} \sum_{l=1}^{n} b_{lj}\right) e_k \otimes u_j.\end{aligned}$$

□

Ex 2.10.4. 证明 m, n 互素的时候有 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.

Proof. 我们证明更一般的情况, 即 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, 其中 $d = \gcd(m, n)$. 由于 $\bar{a} \otimes \bar{b} = ab(\bar{1} \otimes \bar{1})$, 所以 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 是由 $\bar{1} \otimes \bar{1}$ 生成的 $\mathbb{Z}$-模 (循环群). 注意到

$$m(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \bar{m} \otimes \bar{1} = 0, \quad n(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \bar{1} \otimes \bar{n} = 0,$$

所以 $\bar{1} \otimes \bar{1}$ 作为加法群元素的阶整除 d. 另一方面, 考虑映射 $\varphi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 为 $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{ab}$, 容易验证 φ 是良定义的双线性映射, 所以 φ 诱导出 $\mathbb{Z}$-模同态

$\bar{\varphi}:(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, 由于 $\bar{\varphi}(\bar{1}\otimes\bar{1})=\bar{1}$ 是 d 阶元, 所以 $\bar{1}\otimes\bar{1}$ 的阶不可能小于 d, 故 $\bar{1}\otimes\bar{1}$ 的阶等于 d, 所以 $\bar{\varphi}$ 是同构. □

Ex 2.10.5. 令 A 是环, $\mathfrak{a}$ 是理想, M 是 A-模, 证明 $(A/\mathfrak{a})\otimes_A M$ 同构于 $M/\mathfrak{a}M$.

Proof. 我们有正合列 $0\longrightarrow\mathfrak{a}\xrightarrow{i}A\longrightarrow A/\mathfrak{a}\longrightarrow 0$, 根据 $\_\otimes_A M$ 的右正合性质, 所以有正合列 $\mathfrak{a}\otimes M\xrightarrow{i\otimes 1}A\otimes M\longrightarrow(A/\mathfrak{a})\otimes M\longrightarrow 0$, 于是我们有

$$(A/\mathfrak{a})\otimes M\simeq(A\otimes M)/\mathrm{im}(i\otimes 1).$$

我们知道$A\otimes M\to M$ 有同构映射 $a\otimes x\mapsto ax$,与自然同态符合得到同态$A\otimes M\to M/\mathfrak{a}M$, 容易验证这个同态的核就是 $\mathrm{im}(i\otimes 1)$, 所以

$$(A/\mathfrak{a})\otimes M\simeq(A\otimes M)/\mathrm{im}(i\otimes 1)\simeq M/\mathfrak{a}M.$$

□

Ex 2.10.6. 令 A 是局部环, M 和 N 是有限生成 A-模, 证明: 如果 $M\otimes N=0$, 那么 $M=0$ 或者 $N=0$.

Proof. 令 $k=A/\mathfrak{m}$ 是剩余域,$M\otimes_A N=0$ 表明 $k\otimes_A(M\otimes_A N)=0$,即 $(k\otimes_A M)\otimes_A N=0$, 根据上一题, 有 $(M/\mathfrak{m}M)\otimes_A N=0$, 此时 $M/\mathfrak{m}M$ 可以视为 k-向量空间, 故 $M/\mathfrak{m}M\simeq(M/\mathfrak{m}M)\otimes_k k$, 故 $(M/\mathfrak{m}M)\otimes_k(k\otimes_A N)=0$, 这就表明 $(M/\mathfrak{m}M)\otimes_k(N/\mathfrak{m}N)=0$, 而 $M/\mathfrak{m}M$ 和 $N/\mathfrak{m}N$ 都是有限维 k-向量空间, 所以 $M/\mathfrak{m}M=0$ 或者 $N/\mathfrak{m}N=0$, 即 $\mathfrak{m}M=M$ 或者 $\mathfrak{m}N=N$, 根据 Nakayama 引理, 所以 $M=0$ 或者 $N=0$. □

Ex 2.10.7. 令 $M_i(i\in I)$ 是一族 A-模, 令 M 是它们的直和, 证明 M 是平坦模当且仅当每个 M_i 是平坦模.

Proof. 设 $\varphi:N\to N'$ 是单同态, 那么同态 $\varphi\otimes 1_{M_i}:N\otimes M_i\to N'\otimes M_i$ 可以分解为复合映射

$$N\otimes M_i\xrightarrow{j_i}\bigoplus_{i\in I}(N\otimes M_i)\xrightarrow{\sim}N\otimes M\xrightarrow{\varphi\otimes 1_M}N'\otimes M\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{i\in I}(N'\otimes M_i)\xrightarrow{\pi_i}N'\otimes M_i,$$

不难验证所有的 $\varphi\otimes 1_{M_i}$ 为单射当且仅当 $\varphi\otimes 1_M$ 为单射, 这就表明 M 是平坦模当且仅当 M_i 都是平坦模. □

Ex 2.10.8. 令 A 是环, 证明 $A[x]$ 是平坦 A-代数.

Proof. $A[x]=\bigoplus_{i=0}^{\infty}A$ 是自由 A-模, 而 A 是平坦 A-模, 所以 $A[x]$ 是平坦 A-模. □

Ex 2.10.9. 令 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想, 证明 $\mathfrak{p}[x]$ 是 $A[x]$ 的素理想. 如果 $\mathfrak{m}$ 是极大理想, $\mathfrak{m}[x]$ 是 $A[x]$ 的极大理想吗?

Proof. 考虑满同态 $\varphi:A[x]\to A/\mathfrak{p}[x]$ 为

$$\varphi\left(\sum a_i x^i\right)=\sum(a_i+\mathfrak{p})x^i,$$

显然 $\ker\varphi=\mathfrak{p}[x]$, 所以 $A[x]/\mathfrak{p}[x]\simeq A/\mathfrak{p}[x]$ 是整环, 故 $\mathfrak{p}[x]$ 是 $A[x]$ 的素理想. 类似地, $A[x]/\mathfrak{m}[x]\simeq A/\mathfrak{m}[x]$ 是域上的多项式环, 为 PID, 所以 $\mathfrak{m}[x]$ 不是极大理想. □

Ex 2.10.10. (1) 如果 M,N 是平坦 A-模, 证明 $M\otimes_A N$ 也是平坦 A-模.
(2) 如果 B 是平坦 A-代数, N 是平坦 B-模, 那么 N 也是平坦 A-模.

Proof. (1) 令 $\varphi: P\to P'$ 是 A-模的单同态, 那么 $\varphi\otimes 1_M: P\otimes_A M\to P'\otimes_A M$ 是 A-模的单同态, 进而 $\varphi\otimes 1_M\otimes 1_N: P\otimes_A M\otimes_A N\to P'\otimes_A M\otimes_A N$ 是 A-模的单同态, 再根据张量积的结合性, 所以 $M\otimes_A N$ 是平坦 A-模.

(2) 令 $\varphi: P\to P'$ 是 A-模的单同态, 那么 $\varphi\otimes 1_B: P\otimes_A B\to P'\otimes_A B$ 是 A-模的单同态, 此时

$$(\varphi\otimes 1_B)(b(x\otimes y)) = x\otimes by = b(\varphi\otimes 1_B)(x\otimes y),$$

所以 φ 也是 B-模的单同态, 故 $\varphi\otimes 1_B\otimes 1_N: (P\otimes_A B)\otimes_B N\to (P'\otimes_A B)\otimes_B N$ 是 B-模的单同态, 从而也是 A-模的单同态. 又因为有 B-模同构 $(P\otimes_A B)\otimes_B N\simeq P\otimes_A(B\otimes_B N)\simeq P\otimes_A N$, 所以 N 是平坦 A-模. □

Ex 2.10.11. 令 $0\longrightarrow M'\xrightarrow{u} M\xrightarrow{v} M''\longrightarrow 0$ 是 A-模的短正合列. 如果 M' 和 M'' 是有限生成的, 那么 M 也是有限生成的.

Proof. 设 $x_1,\dots,x_n$ 是 M' 的生成元, $y_1,\dots,y_k$ 是 M'' 的生成元, 任取 $m\in M$, 那么 $v(m)=a_1y_1+\cdots+a_ky_k$, v 是满射表明存在 $z_1,\dots,z_k\in M$ 使得 $y_i=v(z_i)$, 所以 $v(m)=v(a_1z_1+\cdots+a_kz_k)$, 即 $m-a_1z_1-\cdots-a_kz_k\in\ker v=\operatorname{im} u$, 故 $m-a_1z_1-\cdots-a_kz_k=u(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$, 即 $m=b_1u(x_1)+\cdots+b_nu(x_n)+a_1z_1+\cdots+a_kz_k$, 所以 M 由 $u(x_1),\dots,u(x_n),z_1,\dots,z_k$ 生成. □

Ex 2.10.12. A 是环, 理想 $\mathfrak{a}\subseteq\operatorname{rad}(A)$, 令 M 是 A-模, N 是有限生成 A-模, $u: M\to N$ 是同态. 如果诱导的同态 $M/\mathfrak{a}M\to N/\mathfrak{a}N$ 是满射, 那么 u 是满射.

Proof. $M/\mathfrak{a}M\to N/\mathfrak{a}N$ 是满射表明任取 $n\in N$,有 $n+\mathfrak{a}N=u(m)+\mathfrak{a}N$,即 $n\in u(M)+\mathfrak{a}N$, 所以 $N=u(M)+\mathfrak{a}N$, 根据 2.18, 有 $N=u(M)$. □

Ex 2.10.13. 令 A 是非零环, 证明:

1. $A^m\simeq A^n$ 表明 $m=n$.
2. 如果 $\phi: A^m\to A^n$ 是满射, 那么 $m\geq n$.
3. 如果 $\phi: A^m\to A^n$ 是单射, 这种情况下一定有 $m\leq n$ 吗?

Proof. (1) 取 A 的一个极大理想 $\mathfrak{m}$. 设 $\varphi: A^m\to A^n$ 是同构映射, 容易验证 $1\otimes\varphi: (A/\mathfrak{m})\otimes A^m\to(A/\mathfrak{m})\otimes A^n$ 也是同构映射. 考虑正合列 $\mathfrak{m}\longrightarrow A\longrightarrow A/\mathfrak{m}\longrightarrow 0$, 根据 命题 2.30, $\mathfrak{m}\otimes A^m\longrightarrow A\otimes A^m\longrightarrow(A/\mathfrak{m})\otimes A^m\longrightarrow 0$ 是正合列, 由于 $A\otimes A^m\simeq A^m$, $\mathfrak{m}\otimes A^m\simeq\mathfrak{m}A^m$, 所以我们有 A-模同构 $(A/\mathfrak{m})\otimes A^m\simeq A^m/\mathfrak{m}A^m\simeq(A/\mathfrak{m})^m$, 所以 $A^m\simeq A^n$ 表明存在 A-模同构 $(A/\mathfrak{m})^m\simeq(A/\mathfrak{m})^n$, $(A/\mathfrak{m})^m$ 可以被 $\mathfrak{m}$ 零化, 所以可以自然地导出 $A/\mathfrak{m}$-向量空间同构, 所以 $m=n$. □

Ex 2.10.14. 一个偏序集 I 被称为**正向集**, 如果对于 I 中的每对 i,j, 都存在 $k \in I$ 使得 $i \leq k$ 以及 $j \leq k$.

令 A 是环, I 是一个正向集, $(M_i)_{i\in I}$ 是一族 A-模. 对于 I 中的每对满足 $i \leq j$ 的 i,j, 令 $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ 是 A-模同态, 并且其满足下面的公理:

1. 对于每个 $i \in I$, μ_{ii} 是 M_i 的单位映射;
2. 当 $i \leq j \leq k$ 的时候有 $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$.

那么称模 M_i 和同态 μ_{ij} 组成了正向集 I 上的**正向系统** $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$.

我们将构建正向系统 $\mathbf{M}$ 的**正向极限** M. 令 C 是 M_i 的直和, 并且将 M_i 自然地视为 C 的子模. 令 D 是 C 的子模, 由所有的形如 $x_i - \mu_{ij}(x_i)$ $(i \leq j, x_i \in M_i)$ 的元素生成. 令 $M = C/D$, $\mu : C \to M$ 为自然投影, μ_i 是 μ 在 M_i 上的限制.

模 M（更准确地说, 应该是模 M 与一族同态 $\mu_i : M_i \to M$）被称为正向系统 $\mathbf{M}$ 的**正向极限**, 记为 $\varinjlim M_i$. 从这个构造容易看出 $i \leq j$ 的时候有 $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$.

Proof. 我们说明 $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$. 任取 $x_i \in M_i$, 有

$$\mu_j \circ \mu_{ij}(x_i) = \mu_{ij}(x_i) + D = x_i + D = \mu_i(x_i). \qquad \square$$

Ex 2.10.15. 在上一题的前提下, 证明

1. M 的每个元素都可以写成 $\mu_i(x_i)$ 的形式, 其中 $i \in I$, $x_i \in M_i$.
2. 如果 $\mu_i(x_i) = 0$, 那么存在 $j \geq i$ 使得 $\mu_{ij}(x_i) = 0$.

Proof. (1) 任取 $\sum_{j\in J} x_j + D \in M$, 其中 $J \subseteq I$ 是有限子集. 首先我们说明存在 $k \in I$ 使得任意的 $j \in J$ 都满足 $j \leq k$. 对 $|J| = n$ 归纳, $n = 2$ 的时候是正向集的定义, 假设结论在 $n-1$ 时成立. 那么存在 $k_1 \in I$ 使得 $j_m \leq k_1$ $(1 \leq m \leq n-1)$, 同时存在 $k \in I$ 使得 $k_1 \leq k$ 以及 $j_n \leq k$, 那么 k 就使得任意的 $j \in J$ 都满足 $j \leq k$.

对于上述的 k, $x_j - \mu_{jk}(x_j) \in D$ $(\forall j \in J)$, 所以

$$\sum_{j\in J} x_j + D = \sum_{j\in J} \mu_{jk}(x_j) + D = \mu_k\left(\sum_{j\in J} \mu_{jk}(x_j)\right),$$

其中 $\sum_{j\in J} \mu_{jk}(x_j) \in M_k$, 这就证明了 (1).

(2) $\mu_i(x_i) = 0$ 表明 $x_i \in D \cap M_i$, 那么 x_i 是形如 $y_j - \mu_{j\ell}(y_j)$ 的有限 A-线性组合, 注意到 $a(y_j - \mu_{j\ell}(y_j)) = (ay_j) - \mu_{j\ell}(ay_j)$, 所以 x_i 可以表示为 $y_j - \mu_{j\ell}(y_j)$ 的有限和, 即

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} (y_{j_k} - \mu_{j_k\ell_k}(y_{j_k})),$$

其中 $j_k, \ell_k \in I$, $y_{j_k} \in M_{j_k}$, 并且 $j_k \leq \ell_k$. 根据 (1) 的叙述, 可以选取一个 $c \in I$, 使得所有的 $j_k, \ell_k \leq c$ 以及 $i \leq c$.

由于 C 是 M_i 的直和,所以上式右端的第 i 个分量为 x_i,其余全为零.记 $\pi_a : C \to M_a$ 是投影, 那么

$$\pi_a(x_i) = \sum_{j_k=a} y_{j_k} - \sum_{\ell_k=a} \mu_{j_k\ell_k}(y_{j_k}),$$

那么

$$\begin{aligned}\mu_{ac}(\pi_a(x_i)) &= \sum_{j_k=a}\mu_{j_kc}(y_{j_k}) - \sum_{\ell_k=a}\mu_{\ell_kc}\circ\mu_{j_k\ell_k}(y_{j_k})\\ &= \sum_{j_k=a}\mu_{j_kc}(y_{j_k}) - \sum_{\ell_k=a}\mu_{j_kc}(y_{j_k}),\end{aligned}$$

对 a 求和, 我们有

$$\begin{aligned}\mu_{ic}(x_i) &= \sum_{a\in I}\mu_{ac}(\pi_a(x_i))\\ &= (\mu_{j_1c}(y_{j_1})+\cdots+\mu_{j_kc}(y_{j_k})) - (\mu_{j_1c}(y_{j_1})+\cdots+\mu_{j_kc}(y_{j_k})) = 0.\end{aligned}$$ □

Ex 2.10.16. 证明正向极限可以通过下面的性质刻画. 令 N 是 A-模, 对于每个 $i\in I$, 令 $\alpha_i : M_i \to N$ 是 A-模同态, 并且使得 $i\le j$ 的时候有 $\alpha_i = \alpha_j\circ\mu_{ij}$. 那么存在唯一的同态 $\alpha : M\to N$ 使得 $\alpha_i = \alpha\circ\mu_i$ 对于所有的 $i\in I$ 成立.

Proof. 首先说明正向极限 $M = \varinjlim M_i$ 满足这个性质, 即有交换图

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "\mu_i"'] & N \\ \varinjlim M_i \arrow[ur, dashed, "\exists!\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

令 $\bar\alpha : C\to N$ 满足 $\bar\alpha|_{M_i} = \alpha_i$. 由于

$$\bar\alpha(x_i - \mu_{ij}(x_i)) = \alpha_i(x_i) - \alpha_j\circ\mu_{ij}(x_i) = 0,$$

所以 $D\subseteq \ker\bar\alpha$, 故 $\bar\alpha$ 诱导出同态 $\alpha : M\to N$, 那么此时有 $\alpha_i(x_i) = \bar\alpha(x_i) = \alpha(x_i + D) = \alpha\circ\mu_i(x_i)$.

现在证明 M 在同构的意义下唯一. 设 M 和 M' 都满足上述泛性质. 对于同态 $\mu_i' : M_i \to M'$, 存在唯一的同态 $\alpha : M\to M'$ 使得 $\mu_i' = \alpha\circ\mu_i$. 同样的, 对于 $\mu_i : M_i\to M$, 存在唯一的同态 $\beta : M'\to M$, 使得 $\mu_i = \beta\circ\mu_i'$. 也就是说, 我们有下面的交换图:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\mu_i'"] \arrow[dd, "\mu_{ij}"'] & & \\ & M \arrow[r, dashed, shift left, "\alpha"] & M' \arrow[l, dashed, shift left, "\beta"] \\ M_j \arrow[ur, "\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\mu_j'"'] & & \end{tikzcd}$$

所以 $\mu_i = \beta\circ\mu_i' = \beta\circ\alpha\circ\mu_i : M_i\to M$, 又因为 1_M 也满足 $\mu_i = 1_M\circ\mu_i$, 根据唯一性, 所以 $\beta\circ\alpha = 1_M$. 同理可得 $\alpha\circ\beta = 1_{M'}$, 故 α 是同构. □

Ex 2.10.17. 令 $(M_i)_{i\in I}$ 是一个 A-模的一族子模, 并且对于每对 $i,j\in I$, 都存在 $k\in I$ 使得 $M_i+M_j\subseteq M_k$. 定义 $i\leq j$ 意味着 $M_i\subseteq M_j$, 令 $\mu_{ij}:M_i\to M_j$ 表示嵌入映射, 证明

$$\varinjlim M_i=\sum M_i=\bigcup M_i.$$

特别地, 任意 A-模都是它的有限生成子模的正向极限.

Proof. 先说明 $\sum M_i=\bigcup M_i$. 显然有 $\bigcup M_i\subseteq\sum M_i$. 任取 $y=\sum x_i\in\sum M_i$ 是有限和, 记 $S=\{i\in I\,|\,x_i\neq 0\}$, 那么 S 是有限集, I 是正向集表明存在 $j\in I$ 使得 $i\leq j$ $(\forall i\in S)$, 所以 $y\in M_j\subseteq\bigcup M_i$. 这就表明 $\sum M_i=\bigcup M_i$.

下面我们说明 $\bigcup M_i$ 满足上述泛性质.令 $\alpha_i:M_i\to N$ 是一族模同态,并且对于 $i\leq j$ 有 $\alpha_i=\alpha_j\circ\mu_{ij}$. 对于每个 i 总存在嵌入映射 $\mu_i:M_i\to\bigcup M_i$. 令 $\alpha=\bigcup\alpha_i:\bigcup M_i\to N$, 也就是说 α 限制在 M_i 上就是 α_i. 这个 α 是良定义的, 也就是说对于 $i\leq j$, 任取 $x_i\in M_i\subseteq M_j$, 有 $\alpha_i(x_i)=\alpha_j\circ\mu_{ij}(x_i)=\alpha_j(x_i)$. 显然 α 是同态, 且满足 $\alpha_i=\alpha\circ\mu_i$. 所以 $\varinjlim M_i\simeq\bigcup M_i$.

对于一个 A-模 M, 令 $(N_i)_{i\in I}$ 是 M 的所有有限生成子模, 注意到

$$M=\bigcup_{x\in M}Ax\subseteq\bigcup N_i,$$

所以 M 是所有有限生成子模的并集. 对于每对 $i,j\in I$, 此时 N_i+N_j 也是有限生成子模, 故所有的有限生成子模和包含关系构成了一个正向系统. □

Ex 2.10.18.

3

分式环和分式模

3.1 分式环、分式模与局部化

给定一个环 A, A 的一个**乘性子集** S 指的是一个对乘法封闭的子集 S, 并且 $1 \in S$. 定义 $A \times S$ 上的一个等价关系为

$$(a, s) \sim (b, t) \iff (at - bs)u = 0 \ (\exists u \in S).$$

可以验证这确实是一个等价关系. 即 a/s 为 (a, s) 所在的等价类, $S^{-1}A$ 为等价类的集合, 我们在 $S^{-1}A$ 上定义一个环结构, 即:

$$a/s + b/t = (at + bs)/st, \quad (a/s)(b/t) = ab/st.$$

可以验证这两个运算是良定义的, 并且满足环的运算法则. 这使得 $S^{-1}A$ 成为一个有单位元 $1/1$ 的交换环, 称为 A 相对于 S 的**分式环**. 此时, 我们有一个自然的环同态 $f : A \to S^{-1}A$ 为 $f(x) = x/1$, 一般而言这并不是单射.

我们也可以用泛性质刻画分式环.

命题 3.1. 令 $g : A \to B$ 是环同态并且对于所有的 $s \in A$ 有 $g(s) \in B^{\times}$. 那么存在唯一的环同态 $h : S^{-1}A \to B$ 使得 $g = h \circ f$.

Proof. (唯一性) 若这样的 h 存在, 那么对于任意的 $a/s \in S^{-1}A$, 有

$$h(a/s) = h((a/1)(1/s)) = h(a/1)h(1/s) = h(f(a))h(1/s) = g(a)h(1/s),$$

另一方面有

$$h(1/s) = h(s/1)^{-1} = h(f(s))^{-1} = g(s)^{-1},$$

所以这样的 h 如果存在, 那么一定满足 $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$.

(存在性) 令 $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$. 若 $a/s = a'/s'$, 那么存在 $u \in S$ 使得 $(as' - a's)u = 0$, 那么

$$(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(u) = 0,$$

$g(u) \in B^{\times}$ 表明 $g(a)g(s') = g(a')g(s)$, 即 $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$, 所以 $h(a/s) = h(a'/s')$, h 是良定义的. h 显然是群同态且满足 $g = h \circ f$. □

环 $S^{-1}A$ 和同态 $f: A \to S^{-1}A$ 有下面的性质:

1. $s \in S$ 表明 $f(s) \in (S^{-1}A)^\times$, 因为此时 $(s/1)(1/s) = 1/1$.
2. $f(a) = 0$ 表明存在某个 $s \in S$ 使得 $as = 0$, 因为此时 $a/1 = 0/1$.
3. $S^{-1}A$ 的每个元素都形如 $f(a)f(s)^{-1}$, 其中 $a \in A, s \in S$. 因为 $a/s = (a/1)(1/s) = f(a)f(s)^{-1}$.

例 3.2.

1. 令 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想, 那么 $S = A - \mathfrak{p}$ 是 A 的一个乘性子集, 我们记 $A_\mathfrak{p} = S^{-1}A$, 称为 A 在 $\mathfrak{p}$ 处的**局部化**. 下面我们说明 $A_\mathfrak{p}$ 是一个局部环. 令 $\mathfrak{m}$ 为所有 a/s 的集合, 其中 $a \in \mathfrak{p}, s \in S$. 容易验证这是一个理想. 如果 $b/t \notin \mathfrak{m}$, 即 $b \notin \mathfrak{p}$, 那么 $b \in S$, 此时 $(b/t)(t/b) = 1/1$, 所以 $b/t \in A_\mathfrak{p}^\times$, 这表明 $A_\mathfrak{p}^\times = A_\mathfrak{p} - \mathfrak{m}$, 所以 $A_\mathfrak{p}$ 是局部环, $\mathfrak{m}$ 是唯一的极大理想, 剩余域 $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ 记为 $k(\mathfrak{p})$.
2. $S^{-1}A$ 是零环当且仅当 $0 \in S$.
3. 令 $f \in A$, $S = \{f^n\}_{n\geq 0}$, 此时 S 也是乘性子集, 我们记 $A_f = S^{-1}A$.

$S^{-1}A$ 的构造过程可以复制到一个 A-模 M 上. 定义 $M \times S$ 上的等价关系为

$$(m, s) \sim (m', s') \iff t(sm' - s'm) = 0 \ (\exists t \in S).$$

同样记 m/s 为 (m, s) 所在的等价类, 记 $S^{-1}M$ 为这些等价类的集合. 通过定义

$$m/s + m'/s' = (sm' + s'm)/ss', \quad (a/t) \cdot (m/s) = am/st,$$

$S^{-1}M$ 成为一个 $S^{-1}A$-模. 正如上面的例子提到的, 当 $S = A - \mathfrak{p}$ 的时候, 我们记 $S^{-1}M$ 为 $M_\mathfrak{p}$, 当 $S = \{f^n\}_{n\geq 0}$ 的时候, 我们记 $S^{-1}M$ 为 M_f.

令 $u: M \to N$ 是 A-模同态, 那么诱导出一个 $S^{-1}A$-模同态 $S^{-1}u: S^{-1}M \to S^{-1}N$, 定义为 $S^{-1}u(m/s) = u(m)/s$. 我们有 $S^{-1}(v \circ u) = S^{-1}v \circ S^{-1}u$. 这表明 S^{-1} 可以视为 A-Mod $\to S^{-1}A$-Mod 的函子.

命题 3.3. 函子 S^{-1} 是正合函子，也就是说，如果 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ 是正合列，那么 $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ 是正合列.

Proof. 由于 $g \circ f = 0$, 所以 $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(g \circ f) = 0$, 故 $\operatorname{im} S^{-1}f \subseteq \ker S^{-1}g$. 任取 $m/s \in \ker S^{-1}g$, 即 $g(m)/s = 0$, 即存在 $u \in S$ 使得 $g(um) = ug(m) = 0$, 即 $um \in \ker g = \operatorname{im} f$, 所以存在 $m' \in M'$ 使得 $um = f(m')$, 此时

$$S^{-1}f(m'/us) = f(m')/us = um/us = m/s,$$

故 $m/s \in \operatorname{im} S^{-1}f$, 所以 $\ker S^{-1}g \subseteq \operatorname{im} S^{-1}f$. □

特别地, 命题 3.3 告诉我们, 如果 M' 是 M 的子模, 那么 $S^{-1}M' \to S^{-1}M$ 是单射, 因此 $S^{-1}M'$ 可以视为 $S^{-1}M$ 的子模.

推论 3.4. 分式化的操作可以与有限和、有限交和商交换. 准确地说，如果 N, P 是 A-模 M 的子模，那么

1. $S^{-1}(N+P)=S^{-1}(N)+S^{-1}(P)$
2. $S^{-1}(N\cap P)=S^{-1}(N)\cap S^{-1}(P)$
3. 有 $S^{-1}A$-模同构 $S^{-1}(M/N)\simeq(S^{-1}M)/(S^{-1}N)$.

Proof. (1) 显然 $S^{-1}(N+P)\subseteq S^{-1}(N)+S^{-1}(P)$. 任取 $x/s+y/t\in S^{-1}(N)+S^{-1}(P)$, 那么

$$x/s+y/t=(tx+sy)/st\in S^{-1}(N+P),$$

所以 $S^{-1}(N)+S^{-1}(P)\subseteq S^{-1}(N+P)$.

(2) 显然 $S^{-1}(N\cap P)\subseteq S^{-1}(N)\cap S^{-1}(P)$. 任取 $x/s\in S^{-1}(N)\cap S^{-1}(P)$, 其中 $x\in M$, 那么存在 $n\in N,t\in S$ 以及 $p\in P,r\in S$ 使得 $x/s=n/t=p/r$, 即存在 $u\in S$ 使得 $u(rn-tp)=0$, 所以 $urn=utp\in N\cap P$, 于是

$$x/s=n/t=urn/urt\in S^{-1}(N\cap P),$$

所以 $S^{-1}(N)\cap S^{-1}(P)\subseteq S^{-1}(N\cap P)$.

(3) 考虑正合列 $0\longrightarrow N\longrightarrow M\longrightarrow M/N\longrightarrow 0$, 根据 S^{-1} 的正合性质, 我们有正合列 $0\longrightarrow S^{-1}N\longrightarrow S^{-1}M\longrightarrow S^{-1}(M/N)\longrightarrow 0$. □

通过同态 $a\mapsto a/1$, $S^{-1}A$ 可以视为一个 A-代数, 同理 $S^{-1}M$ 可以视为 $(A,S^{-1}A)$-双模.

命题 3.5. 令 M 是 A-模，那么有 $S^{-1}A$-模或者 A-模同构

$$S^{-1}A\otimes_A M\simeq S^{-1}M.$$

更准确地说，存在同构映射 $f:S^{-1}A\otimes_A M\to S^{-1}M$ 为

$$f((a/s)\otimes m)=am/s.$$

Proof. 令 $g:S^{-1}A\times M\to S^{-1}M$ 为

$$g(a/s,m)=am/s.$$

容易验证 g 是良定义的 A-双线性映射, 所以诱导出 A-模同态 $f:S^{-1}A\otimes_A M\to S^{-1}M$. 容易验证 f 也是 $S^{-1}A$-模同态. 显然 f 是满射.

令 $\sum_i(a_i/s_i)\otimes m_i\in S^{-1}A\otimes_A M$. 令 $s=\prod_i s_i$, $t_i=\prod_{j\neq i}s_j$, 那么

$$\sum_i\frac{a_i}{s_i}\otimes m_i=\sum_i\frac{t_ia_i}{t_is_i}\otimes m_i=\sum_i\frac{t_ia_i}{s}\otimes m_i=\sum_i\frac{1}{s}\otimes t_ia_im_i=\frac{1}{s}\otimes\left(\sum_i t_ia_im_i\right),$$

所以若 $f(\sum_i(a_i/s_i)\otimes m_i)=0$, 那么存在 $u\in S$ 使得

$$u\left(\sum_i t_ia_im_i\right)=0,$$

即

$$\sum_i\frac{a_i}{s_i}\otimes m_i=\frac{u}{su}\otimes\left(\sum_i t_ia_im_i\right)=\frac{1}{su}\otimes u\left(\sum_i t_ia_im_i\right)=0,$$

所以 f 是单射. □

推论 3.6. 给定任意环 A，$S^{-1}A$ 是平坦 A-模．

Proof. 假设 $f: M \to N$ 是 A-模的单同态, S^{-1} 的正合性质表明 $S^{-1}f: S^{-1}M \to S^{-1}N$ 是 $S^{-1}A$-模的单同态, 由于有 $S^{-1}A$-模同构 $S^{-1}M \simeq S^{-1}A \otimes_A M$ 和 $S^{-1}N \simeq S^{-1}A \otimes_A N$, 所以导出 $S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}A \otimes_A N$ 的 $S^{-1}A$-模的单同态:

$$(a/s) \otimes m \mapsto am/s \mapsto f(am)/s \mapsto 1/s \otimes f(am) = (a/s) \otimes f(m),$$

这就是 $1_{S^{-1}A} \otimes f$, 容易验证这也是 A-模同态, 所以 $S^{-1}A$ 是平坦 A-模. □

命题 3.7. 若 M, N 是 A-模，那么有 $S^{-1}A$-模同构 $f: S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N)$，同构映射为

$$f\big((m/s) \otimes (n/t)\big) = (m \otimes n)/st.$$

特别地，如果 $\mathfrak{p}$ 是素理想，那么有 $A_{\mathfrak{p}}$-模同构

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \simeq (M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}}.$$

Proof. 我们有一系列 $S^{-1}A$-模同构:

$$\begin{aligned}
S^{-1}(M \otimes_A N) &\simeq S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_A N) \simeq (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_A N \\
&\simeq S^{-1}M \otimes_A N \simeq (S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}A) \otimes_A N \\
&\simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) \simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N,
\end{aligned}$$

同构映射为

$$\begin{aligned}
(m \otimes n)/s &\mapsto 1/s \otimes (m \otimes n) \mapsto (1/s \otimes m) \otimes n \\
&\mapsto m/s \otimes n \mapsto (m/s \otimes 1/1) \otimes n \\
&\mapsto m/s \otimes (1/1 \otimes n) \mapsto m/s \otimes n/1.
\end{aligned}$$

□

3.2 局部性质

环 A 或者 A-模 M 拥有局部性质 P 指的是: A 或者 M 有性质 P 当且仅当对于每个素理想 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, 局部化 $A_{\mathfrak{p}}$ 或者 $M_{\mathfrak{p}}$ 拥有性质 P.

命题 3.8 (零模是局部性质). 令 M 是 A-模，那么下面的说法是等价的：

1. $M = 0$；
2. 对于任意素理想 $\mathfrak{p}$，有 $M_{\mathfrak{p}} = 0$；
3. 对于任意极大理想 $\mathfrak{m}$，有 $M_{\mathfrak{m}} = 0$．

Proof. (1) ⇒ (2) 是因为 $M = 0$ 则任意分式模 $S^{-1}M = 0$. (2) ⇒ (3) 是因为极大理想都是素理想.

(3) ⇒ (1) 如果对于任意极大理想 $\mathfrak{m}$, 有 $M_{\mathfrak{m}} = 0$, 假设 $M \neq 0$, 那么取非零元 $x \in M$, $\mathrm{Ann}(x)$ 是一个恰当理想, 故存在极大理想 $\mathfrak{m}$ 包含 $\mathrm{Ann}(x)$, 由于 $x/1 \in M_{\mathfrak{m}} = 0$, 所以 $x/1 = 0/1$, 故存在 $a \in A - \mathfrak{m}$ 使得 $ax = 0$, 那么 $a \in \mathrm{Ann}(x)$, 这与 $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$ 矛盾, 所以 $M = 0$. □

命题 3.9. 令 $\phi : M \to N$ 是 A-模同态，那么下面的说法是等价的：

1. ϕ 是单射；
2. 对于每个素理想 $\mathfrak{p}$，$\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ 是单射；
3. 对于每个极大理想 $\mathfrak{m}$，$\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ 是单射.

将单射替换为满射也正确.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 由分式化的正合性质即得. (2) $\Rightarrow$ (3) 极大理想都是素理想.

(3) $\Rightarrow$ (1) 对于任意极大理想 $\mathfrak{m}$，有 $\ker\phi_{\mathfrak{m}} = 0$. 将 $(\ker\phi)_{\mathfrak{m}}$ 视为 $M_{\mathfrak{m}}$ 的子集. 若 $x/a \in \ker\phi_{\mathfrak{m}}$，故 $\phi(x)/a = 0/1$，即存在 $u \in A - \mathfrak{m}$ 使得 $\phi(ux) = u\phi(x) = 0$，故 $x/a = ux/ua \in (\ker\phi)_{\mathfrak{m}}$. 反之，若 $x/a \in (\ker\phi)_{\mathfrak{m}}$，那么 $\phi_{\mathfrak{m}}(x/a) = \phi(x)/a = 0$，故 $x/a \in \ker\phi_{\mathfrak{m}}$. 所以 $(\ker\phi)_{\mathfrak{m}} = \ker\phi_{\mathfrak{m}} = 0$，根据命题 3.8，所以 $\ker\phi = 0$，即 ϕ 是单射.

对于满射的情况类似. □

命题 3.10 (平坦性是局部性质). 对于任意 A-模 M，下面的说法是等价的：

1. M 是平坦 A-模；
2. 对于每个素理想 $\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}}$ 是平坦 $A_{\mathfrak{p}}$-模；
3. 对于每个极大理想 $\mathfrak{m}$，$M_{\mathfrak{m}}$ 是平坦 $A_{\mathfrak{m}}$-模.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 根据命题 3.3，有 $A_{\mathfrak{p}}$-模同构 $M_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$，而 $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$ 是平坦 $A_{\mathfrak{p}}$-模（平坦模进行标量扩张仍然是平坦模）. (2) $\Rightarrow$ (3) 极大理想都是素理想.

(3) $\Rightarrow$ (1) 令 $f : N \to N'$ 是 A-模的单同态. 对于任意极大理想 $\mathfrak{m}$，根据命题 3.9，我们知道 $f_{\mathfrak{m}} : N_{\mathfrak{m}} \to N'_{\mathfrak{m}}$ 是单同态，所以 $f_{\mathfrak{m}} \otimes 1_{M_{\mathfrak{m}}} : N_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{m}} \to N'_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{m}}$ 是单同态，根据命题 3.7，所以 $(f \otimes 1)_{\mathfrak{m}} : (N \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \to (N' \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}$ 是单同态，根据命题 3.9，所以 $f \otimes 1 : N \otimes_A M \to N' \otimes_A M$ 是单同态，故 M 是平坦 A-模. □

3.3 分式环中理想的扩张和收缩

A 是环，S 是 A 的乘性子集，$f : A \to S^{-1}A$ 是自然同态. 回顾命题 1.22，令 C 为所有理想的收缩构成的 A 中理想的集合，E 为所有理想的扩张构成的 $S^{-1}A$ 中理想的集合. 如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，那么 $\mathfrak{a}^e$ 为所有 $a/1$ ($a \in \mathfrak{a}$) 生成的理想，实际上就是 $S^{-1}\mathfrak{a}$.

命题 3.11. (1) $S^{-1}A$ 中的每个理想都是 A 中某个理想的扩张.

(2) 如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，那么 $\mathfrak{a}^{ec} = \bigcup_{s\in S}(\mathfrak{a} : s)$，所以 $\mathfrak{a}^e = (1)$ 当且仅当 $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.

(3) $\mathfrak{a} \in C$ 当且仅当 S 的元素在 $A/\mathfrak{a}$ 中都不是零因子.

(4) $S^{-1}A$ 的素理想一一对应到 A 的与 S 不相交的素理想，对应关系为 $\mathfrak{p} \leftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$.

(5) S^{-1} 操作与理想的有限和、积、交和根式操作交换.

4

整相关和赋值

4.1 整相关

令 B 是环, A 是 B 的子环, $x \in B$ 在 A 上是**整的**, 指的是 x 是某个 A 中系数的首一多项式的根. 显然 A 的每个元素在 A 上都是整的.

命题 4.1. 下面的说法是等价的:

1. $b \in B$ 在 A 上是整的;
2. $A[b]$ 是有限生成 A-模;
3. $A[b]$ 被包含在 B 的一个子环 C 中,其中 C 是有限生成 A-模;
4. 存在一个忠实的 $A[b]$-模 M (即 $\mathrm{Ann}(M) = 0$),其作为 A-模是有限生成的.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 设 b 满足方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

那么 b^{n+k} $(k \geq 0)$ 都可以写为 $1, b, \ldots, b^{n-1}$ 的 A-线性组合, 所以 $A[b]$ 是有限生成 A-模.

(2) $\Rightarrow$ (3) 取 $C = A[b]$ 即可.

(3) $\Rightarrow$ (4) 取 $M = C$, 若 $f(b) \in A[b]$ 使得 $f(b)M = 0$, 特别地, 有 $f(b) = f(b) \cdot 1 = 0$, 故 $\mathrm{Ann}(M) = 0$, 所以 M 是忠实的 $A[b]$-模.

(4) $\Rightarrow$ (1) 根据 命题 2.15, 取 $\phi : M \to M$ 为 $\phi(x) = bx$, 那么存在 $a_i \in A$ 使得

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

任取非零的 $x \in M$, 那么 $\phi^k(x) = b^k x$, 所以

$$(b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n)x = 0,$$

M 是忠实的 $A[b]$-模表明 $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, 即 $b \in B$ 在 A 上是整的. □

推论 4.2. 令 b_i $(1 \leq i \leq n)$ 是 B 的元素,并且在 A 上是整的. 那么环 $A[b_1, \ldots, b_n]$ 是有限生成 A-模.

Proof. 对 n 归纳, $n = 1$ 的时候成立. 设 $n = k$ 的时候成立, 那么 $A[b_1, \ldots, b_{k+1}] = A[b_1, \ldots, b_k][b_{k+1}]$, 并且 b_{k+1} 显然在 $A[b_1, \ldots, b_k]$ 上是整的, 所以 $A[b_1, \ldots, b_{k+1}]$ 是有限生成 A-模. □

推论 4.3. B 中所有在 A 上整的元素的集合 C 是 B 的包含 A 的子环.

Proof. 如果 $c_1, c_2 \in C$, 那么 $A[c_1, c_2]$ 是有限生成 A-模, 此时 $A[c_1 + c_2] \subseteq A[c_1, c_2]$, 根据命题 4.1 的 (3), 所以 $c_1 + c_2$ 在 A 上是整的, 故 $c_1 + c_2 \in C$. 同理 $c_1 - c_2, c_1c_2 \in C$, 故 C 是子环. 显然 C 包含 A. □

上述推论中的 C 被称为 A 在 B 中的**整闭包**. 如果 $C = A$, 那么说 A 在 B 中是**整闭的**. 如果 $C = B$, 那么说 B 在 A 上是整的.

推论 4.4. 若 $A \subseteq B \subseteq C$ 是环, B 在 A 上是整的, C 在 B 上是整的, 那么 C 在 A 上是整的.

Proof. 任取 $c \in C$, 那么 c 满足方程

$$x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \quad (b_i \in B),$$

由于 b_i 在 A 上是整的, 所以 $A[b_1, \ldots, b_n]$ 是有限生成 A-模, 此时 c 在 $A[b_1, \ldots, b_n]$ 上是整的, 故 $A[b_1, \ldots, b_n, c]$ 是有限生成 $A[b_1, \ldots, b_n]$-模, 所以 $A[b_1, \ldots, b_n, c]$ 是有限生成 A-模, 故 c 在 A 上是整的. □

推论 4.5. 令 $A \subseteq B$ 是环, C 为 A 在 B 中的整闭包, 那么 C 在 B 中是整闭的.

Proof. 假设 $b \in B$ 在 C 上是整的, 那么 b 在 A 上是整的, 所以 $b \in C$. □

下面的命题表明商和分式化的操作保持整相关性质.

命题 4.6. 令 $A \subseteq B$ 是环, B 在 A 上是整的.

1. 如果 $\mathfrak{b}$ 是 B 的理想, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = A \cap \mathfrak{b}$, 那么 $B/\mathfrak{b}$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 上是整的.
2. 如果 R 是平坦 A-代数, 那么 $B \otimes_A R$ 在 R 上是整的.
3. 如果 S 是 A 的乘性子集, 那么 $S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上是整的.

Proof. (1) 对于环同态 $f : A \to B/\mathfrak{b}$, 显然 $\mathfrak{a} = \ker f$, 故 f 诱导出单的环同态 $\bar{f} : A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{b}$, 故 $A/\mathfrak{a}$ 可以视为 $B/\mathfrak{b}$ 的子环. 任取 $b + \mathfrak{b} \in B/\mathfrak{b}$, 由于 b 在 A 上是整的, 所以

$$b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in A),$$

那么

$$(b + \mathfrak{b})^n + \bar{f}(a_1 + \mathfrak{a})(b + \mathfrak{b})^{n-1} + \cdots + \bar{f}(a_n + \mathfrak{a}) = (b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_n) + \mathfrak{b} = 0,$$

所以 $b + \mathfrak{b}$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 上是整的.

(2) R 平坦表明 $R \simeq A \otimes_A R \to B \otimes_A R$ 是单射, 故通过 $r \mapsto 1 \otimes r$, R 可以视为 $B \otimes_A R$ 的子环. 任取 $b \otimes r \in B \otimes_A R$, 由于 b 在 A 上是整的, 所以

$$b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in A),$$

故

$$\begin{aligned}&(b\otimes r)^n+(a_1r)(b\otimes r)^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}r^{n-1})(b\otimes r)+a_nr^n\\=&b^n\otimes r^n+(a_1b^{n-1})\otimes r^n+\cdots+(a_{n-1}b)\otimes r^n+a_n\otimes r^n=0,\end{aligned}$$

所以 $b\otimes r$ 在 R 上是整的. 所以任意有限和 $\sum b_i\otimes r_i$ 在 R 上是整的, 故 $B\otimes_A R$ 在 R 上是整的.

(3) 在 (2) 中取 $R=S^{-1}A$ 即可, 注意到 $S^{-1}A$ 是平坦 A-模, 以及 $B\otimes_A S^{-1}A\simeq S^{-1}B$. □

4.2 上行定理

命题 4.7. 令 $A\subseteq B$ 是整环, B 在 A 上是整的. 那么 B 是域当且仅当 A 是域.

Proof. 假设 A 是域, 任取非零的 $b\in B$, 取以 b 为零点的 $A[x]$ 中的最低次多项式, 即

$$b^n+a_1b^{n-1}+\cdots+a_{n-1}b+a_n=0,$$

那么 $a_n\neq 0$, 否则 B 是整环表明 $b^{n-1}+a_1b^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$, 违背了最低次的假设. 于是

$$-b(b^{n-1}+a_1b^{n-2}+\cdots+a_{n-1})a_n^{-1}=1,$$

所以 b 可逆, 逆元为 $-a_n^{-1}(b^{n-1}+a_1b^{n-2}+\cdots+a_{n-1})$, 故 B 是域.

假设 B 是域, 任取非零的 $a\in A\subseteq B$, 那么 $a^{-1}\in B$ 在 A 上是整的, 所以存在

$$a^{-m}+a_1'a^{-m+1}+\cdots+a_m'=0,$$

两边乘以 a^{m-1}, 这表明

$$a^{-1}=-(a_1'+\cdots+a_m'a^{m-1})\in A,$$

故 a 可逆, A 为域. □

推论 4.8. 令 $A\subseteq B$ 是环, B 在 A 上是整的, 令 $\mathfrak{q}$ 是 B 是素理想, $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^c=A\cap\mathfrak{q}$, 那么 $\mathfrak{q}$ 是极大理想当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是极大理想.

Proof. 根据命题 4.6, $B/\mathfrak{q}$ 在 $A/\mathfrak{p}$ 上是整的, 并且二者都是整环, 故 $\mathfrak{q}$ 是极大理想当且仅当 $B/\mathfrak{q}$ 是域当且仅当 $A/\mathfrak{p}$ 是域当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是极大理想. □

推论 4.9. 令 $A\subseteq B$ 是环, B 在 A 上是整的, 令 $\mathfrak{q},\mathfrak{q}'$ 是 B 的素理想并且满足 $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{q}'$ 以及 $\mathfrak{q}^c=\mathfrak{q}'^c=\mathfrak{p}$, 那么 $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$.

Proof. 根据命题 4.6, $B_{\mathfrak{p}}$ 在 $A_{\mathfrak{p}}$ 上是整的, 令 $\mathfrak{m}$ 为 $\mathfrak{p}$ 在 $A_{\mathfrak{p}}$ 中的扩张, $\mathfrak{n},\mathfrak{n}'$ 分别为 $\mathfrak{q},\mathfrak{q}'$ 在 $B_{\mathfrak{p}}$ 中的扩张. 那么 $\mathfrak{m}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想, $\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{n}'$, 并且 $\mathfrak{n}^c=\mathfrak{n}'^c=\mathfrak{m}$, 根据上面的推论, 所以 $\mathfrak{n},\mathfrak{n}'$ 是极大理想, 故 $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}'$, 所以 $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$. □