

Contents

1	同调性	1
1.1	单纯复形	1
1.2	链	2
1.3	边缘映射	2
1.4	闭链和边界群	3
1.5	同调群	4
1.6	奇异同调性	6
1.7	第 0 同调群	7
1.8	球面的同调性	7
1.9	诱导同调性	8
1.10	Brouwer 不动点定理	10
2	持久性	13
2.1	过滤	13
2.2	持久同调	14
3	持久同调性的算法	16
3.1	持久性配对算法	16
3.1.1	基本描述	16
3.1.2	具体流程	16
3.2	矩阵约简算法	18
3.2.1	基本描述	18
3.2.2	具体流程	18

同调性

证明两个空间相互同胚是相对容易的，因为我们可以直接构造映射，并证明它满足条件。然而证明两个空间不同胚则相对困难，因为映射通常有无数个。拓扑的关键思想是寻找同胚（或其它映射）空间之间的不变量，若两个空间具有不同的该不变量，则它们一定不同胚。同调性通过计算孔洞的数量构建不变量。

1.1 单纯复形

为了定义同调性，我们（目前）将注意力限制在特殊类型的拓扑空间上，即单纯复形。我们将看到这涵盖了大多数自然空间。此外，单纯复形的同调性足以满足拓扑数据分析中的所有经典应用。我们将在本章后面简要概述一个更一般的定义。虽然单纯复形可以被视为完全抽象的对象，但在几何环境中思考它们会更直观。几何单纯复形中的基本对象是单纯形。

Definition 1.1: 单纯形

\mathbb{R}^d 中的 k -单纯形是 \mathbb{R}^d 中 $k + 1$ 个仿射独立点的凸包。

单纯形的面（face）是其顶点子集的凸包。自然地，单纯形的每个面也是单纯形。空集 \emptyset 也是一个面。 k -单纯形的 $(k - 1)$ -面称为维面（facet）。我们称 k -单纯形的维数为 k 。

Definition 1.2: 几何单纯复形

一个几何单纯复形 K 是 k 个单纯形 $\{\sigma_i\}$ ，使得：

- 若单纯形 $\tau \in K$ 且 $\sigma \subset \tau$ 是 τ 的一个面，则 $\sigma \in K$ 中。
- 对于任意两个单纯形 $\sigma, \tau \in K$ ， $\sigma \cap \tau$ 是两者的公共面。

单纯复形的维数是其中单纯形的最大维数。按照我们定义它们的方式，单纯复形是几何对象。为了得到纯粹的组合描述，我们可以简单地忽略空间中填充单纯形的点。

Definition 1.3: 抽象单纯复形

抽象单纯复形 K 是顶点集 $V(K)$ 的子集族，如果 $\tau \in K$ 且 $\sigma \subset \tau$ ，则 $\sigma \in K$ 。

这里的 k -单纯形是包含 $k + 1$ 个元素的子集. 请注意, 一维抽象单纯复形正是所谓的图: 它们由顶点集 V 和 V 的二元子集系统 (称为边) 定义.

从每个几何单纯复形中, 我们只需将点集作为顶点集并将每个单纯形对应到正确的子集即可获得抽象单纯复形. 对于反方向, 我们不得不谈谈几何实现:

我们的直觉是, 空洞是没有边界的子单纯复形, 并且它们本身不是某一个填充空洞的子单纯复形的边界. 在下文中, 我们将通过定义我们考虑的子复合体的类型、边界和闭链的概念以及如何以数学方式描述非边界的闭链来使这种直觉变得精确.

1.2 链

令 K 为单纯复形, m_p 表示 K 中 p -单纯形的数量. 我们首先要定义 p -链, 它只是形式化和概括 p -单纯形子集的代数方式.

Definition 1.4: 链

p -链 c 是 p -单纯形的形式和, 系数来自某个环 R . 因此, p -链 c 可以写为

$$c = \sum_{i=1}^{m_p} \alpha_i \sigma_i.$$

其中 $\alpha_i \in R$ 而 $\sigma_i \in K$ 为 p 单纯形.

形式和只是句法意义上的和, 但没有赋予此操作背后的含义; 除了形式和之外, 没有其他方法可以定义链.

然而, 使用环 R 的加法运算, 我们现在还可以将两条 p 链 $c = \sum \alpha_i \sigma_i$ 和 $c' = \sum \alpha'_i \sigma_i$ 相加. 由于这些链都是形式上的和, 因此我们可以简单地“按分量”进行加法:

$$c + c' := \sum_i^{m_p} (\alpha_i + \alpha'_i) \sigma_i.$$

因此, 我们能够在 K 中所有 p 链的集合 $C_p(K)$ 进行加法运算. 不难证明, 被赋予该运算的 $C_p(K)$ 形成一个交换群, 我们将其称为 K 的第 p 链群. 此外, $C_p(K)$ 也可以是一个 R -模.

从现在开始, 我们将主要使用环 \mathbb{Z}_2 , 它是最简单的环之一. 其好处是, 我们可以简单地将链视为 p -单纯形的集合, 并且得到恒等式 $c + c = 0$. 我们将定义 \mathbb{Z}_2 上的同调性, 通常也简称为 \mathbb{Z}_2 -同调性. 使用一些稍微更抽象的定义, 以下所有内容都可以扩展以定义任何环 R 上的同调性.

1.3 边缘映射

现在我们可以形式化边界的概念. 直观上应该很清楚单个 p -单纯形的边界应该是什么: 只需取其维面形成的 $(p - 1)$ -链即可.

更正式地说, 令 $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$ 是 p -单纯形. 然后, $\partial_p(\sigma)$ 定义为

$$\{v_1, \dots, v_p\} + \{v_0, v_2, \dots, v_p\} + \dots + \{v_0, \dots, v_{p-1}\} = \sum_{i=0}^p \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p\}.$$

其中, \hat{v}_i 表示元素 v_i 从集合中被跳过. 请注意, $\partial_p(\sigma)$ 确实是一条 $(p-1)$ -链.

∂_p 是从 p -单纯形到 $(p-1)$ -链的映射. 得益于链群的群结构, 我们现在可以立即将其扩展到任何链. 此时 ∂_p 定义了从群 $C_p(K)$ 到群 $C_{p-1}(K)$ 的映射.

$$\begin{aligned} \partial_p : C_p(K) &\rightarrow C_{p-1}(K), \\ c = \sum \alpha_i \sigma_i &\mapsto \partial_p(c) = \sum \alpha_i \partial(\sigma_i). \end{aligned}$$

很容易证明 ∂_p 是群同态, 我们称其为**边界算子同态**. 下面我们将要说明一个重要的性质: 任何边界的边界都是空的.

Lemma 1.5

对于 $p > 0$, 对于任何 p -链 c , $\partial_{p-1} \circ \partial_p(c) = 0$.

Proof. 对于 p -单纯形 σ , σ 的每个 $(p-2)$ -面恰好包含在 σ 的 2 个 $(p-1)$ 面中, 而 $\partial_p(\sigma)$ 又是 σ 所有维面的形式和. 因此在 $\partial_{p-1} \circ \partial_p(\sigma)$ 中每个 $p-2$ 面都恰好出现了两次. 因此 $\partial_{p-1} \circ \partial_p(\sigma) = 0$. 而扩展到 p -链 c , $\partial_{p-1} \circ \partial_p(c) = \sum \alpha_i (\partial_{p-1} \circ \partial_p(\sigma_i)) = 0$. \square

我们下面将介绍的同调概念实际上可以推广到满足上面引理 1.5 的任何群同态序列 (即正和列). 每个这样的同态序列都定义了一个**链复形**:

$$0 = C_{k+1}(K) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(K) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(K) \cdots C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} = 0$$

1.4 闭链和边界群

正如我们已经直观地建立的, 没有边界的链称为**闭链**. 这些是可能产生孔或空腔的物体.

Definition 1.6: 闭链

如果 $\partial(c) = 0$, p -链 c 就是一个 p -闭链. $Z_p(K)$ 是第 p -闭链群, 由 K 的所有 p -闭链组成.

因为 $Z_p(K)$ 是同态 ∂_p 的核, 即 $\ker \partial_p$, 因此 $Z_p(K)$ 也是一个群.

Definition 1.7: 边界链

如果存在 $c' \in C_{p+1}(K)$ 使得 $\partial(c') = c$, 则 p -链 c 是一个 p -边界. $B_p(K)$ 是第 p -边界链群, 由 K 的所有 p -边界组成.

因为 $B_p(K)$ 是同态 ∂_{p+1} 的像, 即 $\text{im } \partial_{p+1}$, 因此 $B_p(K)$ 也是一个群. 在不影响表达的情况下, 我们将在下文省略 $C_p(K), Z_p(K), B_p(K)$ 中的 ' K '.

根据引理 1.5, ∂_{p+1} 的像一定包含在 ∂_p 的核中, 即 $\text{im } \partial_{p+1} \subseteq \ker \partial_p$, 因此 $B_p \subseteq Z_p$.

1.5 同调群

直观上，洞是一个非边界的闭链，也就是说，没有被更高维度的东西填充，我们可以使用商群的代数术语来表达它。

Definition 1.8: 同调群

第 p 同调群 H_p 是商群 Z_p/B_p 。

通常在文献中，我们用 $H_p(K; R)$ 来表示单纯复形 K 在环 R 上的 p -同调群。由于多数情况下我们只考虑 \mathbb{Z}_2 上的同调性，因此我们将 $H_p(K; \mathbb{Z}_2)$ 简记为 $H_p(K)$ 。

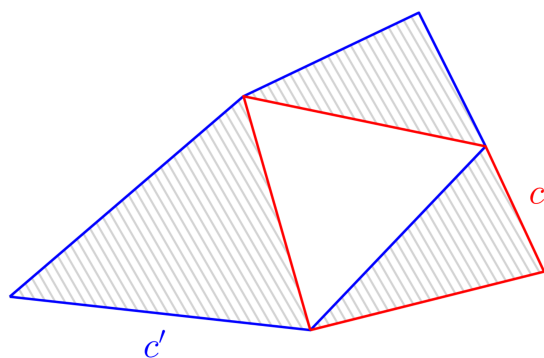


Fig 1.1: 同调性示意图. 其中 c 和 c' 是同调的

本质上，同调群的每个元素都是一个称为同调类的陪集，其中包含的闭链在同调意义下是等价的，但具有不同的边。陪集 $[c] = c + B_p$ 是 c 的同调类。如果 $[c] = [c']$ ，则称 c 和 c' 是同调的，这等价于语句 $c \in c' + B_p$ 和 $c + c' \in B_p$ 。

为了更直观理解商群的含义，我们以图 1.1 中的 2-单纯复形为例。可以看到 c 和 c' 都包含了同一个孔洞，因此我们希望它们被归为一类。令中间空三角形对应的边缘（即最小的闭链）为 c_m ，将其和右侧单纯形的边缘相加，就得到了 c （它们相交的边被叠加两次变为零）。根据商群的性质， $c_m \in H_p$ 且 $c_m \notin B_p$ ，而右侧单纯形的边缘属于 B_p ，因此 c_m 和 c 是同调的， c' 同理。

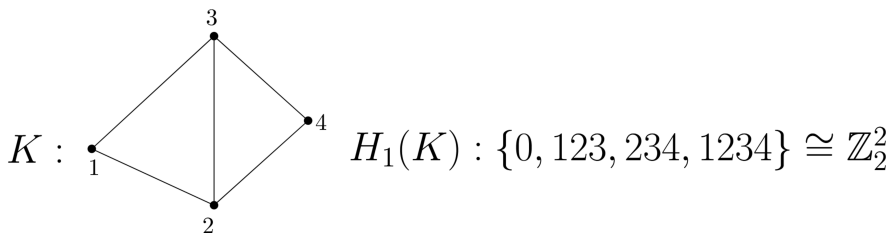


Fig 1.2: 1-同调群的一个简单例子

综上，加减单纯形边缘（即 B_p 中的元素）并不改变当前闭链所对应的孔洞，只会使其“扩张”

或“收缩”，因此商群 Z_p/B_p 的同调类个数应当对应于孔洞数量。然而有些孔洞可能仅仅是多个孔洞的组合，例如在图 1.2 中，边界群为空，因此所有的闭链都是一个同调类。尽管我们有 4 个同调类，但实际上生成元只有 2 个：0 可以由某个闭链与自己相加得到，1234 可以由 123 和 234 相加得到。因此孔洞的数量等同于同调群生成元的个数，而非同调类的个数。这进一步要求了孔洞之间线性无关。

\mathbb{Z}_2 是域，因此闭链群 Z_p 和边界链群 B_p 都是 \mathbb{Z}_2 上的向量空间，两者的商空间 H_p 也继承了向量空间的性质。由此，我们有如下结论：

Proposition 1.9

- H_p 是交换且自由的。
- H_p 是一个 \mathbb{Z}_2 上的向量空间。

Remark

如果我们考虑其他环上定义的同调性，例如在 \mathbb{Z} 而不是 \mathbb{Z}_2 上，同调群可能不是自由的。

同调群可以解释为域上的向量空间，这保证了基的存在性。根据我们定义的同调性，我们有了向量空间的代数结构，我们可以在其中将孔洞相加。不同孔洞的数量就是该向量空间的维数。

Definition 1.10: 贝蒂数

第 p 贝蒂数 $\beta_p := \dim H_p = \dim Z_p - \dim B_p$ 。dim 表示向量空间的维数，即 H_p 基中的元素数量。

Proof. 下面证明 $\dim H_p = \dim Z_p - \dim B_p$ 。定义商映射 $\varphi : Z_p \rightarrow H_p$ 。由于 Z_p 和 H_p 同时也是向量空间，因此 φ 也是一个线性映射。根据秩-零化度定理，

$$\dim Z_p = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{im} \varphi) = \dim B_p + \dim H_p.$$

□

Definition 1.11: 欧拉示性数

单纯复形 K 的欧拉示性数定义为

$$\chi = k_0 - k_1 + k_2 \cdots$$

其中 k_i 表示 K 中 i 维单纯形的数量。欧拉示性数是同一拓扑空间所有三角剖分的不变量。

Proof. 首先证明 $\chi = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 \cdots$ 。根据同态定理可知，

$$C_p/Z_p = C_p/\ker \partial_p = \operatorname{im} \partial_p = B_{p-1},$$

因此 $\dim C_p - \dim Z_p = \dim B_{p-1}$ 。其中 $\dim C_p$ 即为 p 维单纯形的个数，即 k_p 。记 $\dim Z_p =$

$\mu_p, \dim B_p = \nu_p$, 则有

$$k_p = \mu_p + \nu_{p-1},$$

$$\beta_p = \mu_p - \nu_p.$$

则 $k_p - \beta_p = \nu_{p-1} + \nu_p$. 带入到交替和,

$$\begin{aligned} \sum (-1)^p (k_p - \beta_p) &= \sum (-1)^p (\nu_{p-1} + \nu_p) \\ &= \nu_{-1} + (-1)^p \nu_p = (-1)^p \nu_p. \end{aligned}$$

因为 $C_{p+1} = 0$, 所以 $B_p = \partial_{p+1} C_{p+1} = 0$, 所以 $\sum (-1)^p (k_p - \beta_p) = (-1)^p \nu_p = 0$. 即

$$\sum (-1)^p k_p = \sum (-1)^p \beta_p.$$

这就是欧拉-庞加莱公式. 由于同胚空间具有相同的贝蒂数 (将在下一小节说明), 因此 χ 是同一拓扑空间所有三角剖分的不变量. \square

1.6 奇异同调性

在定义 1.11 中, 我们证明了同胚空间具有相同的贝蒂数. 实际上, 同胚空间上的所有三角剖分都具有同构的同调群.

到目前为止, 我们只考虑了简单同调, 它是在单纯复形上定义的. 现在我们将这个定义扩展到拓扑空间. 令 X 为拓扑空间, 并令 Δ_p 为 \mathbb{R}^{p+1} 中的标准 p -单纯形. 我们想要考虑该单纯形在 X 中所有可能出现的情况.

Definition 1.12

奇异 p -单纯形是映射 $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$.

请注意, 在这个定义中, 我们不要求 σ 是单射的, 因此甚至可以将单纯映射到单个点. 尽管如此, 我们仍然可以有链、边界和闭链的概念, 它们是定义同调群 (称为 X 的奇异同调性) 的主要成分.

p -单纯形 σ 的边界由下式给出: $\partial\sigma = \tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_p$ 其中 $\tau_i : (\partial\Delta_p)_i \rightarrow X$ 是映射 σ 在 Δ_p 的第 i 个维面 $(\partial\Delta_p)_i$ 上的限制.

p -链是奇异 p -单纯形的形式和. 和之前一样, 在我们假设系数属于 \mathbb{Z}_2 的情况下, 奇异 p -链由 $\sum \alpha_i \sigma_i$ 给出, 其中 $\alpha_i = 0$ 或 1 . 奇异 p -链的边界定义方式与我们对单纯链的定义方式相同, 不同之处在于我们必须引入无限的链.

$$\partial(c_p = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots) = \partial\sigma_1 + \partial\sigma_2 + \cdots,$$

对于所有 $p > 0$, 我们得到链复形, 其中 $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ 仍然成立. 闭链群、边缘群以及同调群的相关定义和单纯复形上的定义保持一致.

Theorem 1.13

设 X 为拓扑空间, K 为 X 的三角剖分. 则对于所有 $p \geq 0$, 我们有 $H_p(X) \cong H_p(K)$.

上述定理还意味着同一拓扑空间的不同三角剖分会产生同构的同调群. 对于该笔记的其余部分, 我们仍然使用单纯同调, 但我们会讨论可三角空间的同调而不指定某一个三角剖分. 上述定理赋予我们这样做的权利.

1.7 第 0 同调群

最容易理解的同调群是第 0 同调群. 由于 0-单纯形 (顶点) 没有任何边界, 因此每个顶点都是 0-闭链. 1-单纯形的边界仅由其两个顶点组成. 因此, 如果存在从顶点 v_1 到 v_2 的路径, 则两个顶点 v_1 和 v_2 是同调的, 并且同调类 $[v_1]$ 恰好是包含 v_1 的连通分支.

1.8 球面的同调性

当我们引入同调性时, 我们的主要直觉之一是 d 球应该有一个 d 孔而没有其他孔. 现在我们将验证这一点. 由于同调性与所选的三角剖分无关, 因此让我们选取球体 S^d 的一些三角剖分. 一个好的候选者 (由于其简单性) 是单纯形的边界, 即 $S^d \simeq \partial(\Delta^{d+1})$, 其顶点集 $V = \{v_0, \dots, v_{d+1}\}$.

$H_0(S^d)$: 由于所有顶点都是相连的, 因此所有顶点都是同源的, 并且 $H_0(S^d) = \langle [v] \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

$H_d(S^d)$: 首先考虑 Z_d . d -单纯形正是集合 $\sigma_i = \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{d+1}\}$. 此时每个 $(d-1)$ -单纯形都恰好是两个此类 d -单纯形的边界. 因此, 零元素 (空链) 以及由所有 d -单纯形组成的链 c 都是 Z_d 的一部分. 另一方面, 没有链 $c' \notin \{0, c\}$ 可以是闭链, 因为对于这样的链, 必存在某个 d -单纯形 $\sigma \in c'$ 其相邻的 d -单纯形 $\sigma' \notin c'$, 因此作为 σ 和 σ' 公共边的 $(d-1)$ -单纯形将是 $\partial_p(c')$ 的一部分. 我们得出结论: $Z_d(S^d) = \langle c \rangle$.

由于 $S^d = \partial(\Delta_{d+1})$ 是 d 维单纯复形, 不包含任何 $(d+1)$ -单纯形, 即 $C_{d+1} = 0$, 因此 $B_d(S^d) = 0$.

综上, 得到 $H_d(S^d) = Z_d/B_d = Z_d \cong \mathbb{Z}_2$.

$H_p(S^d)$: 直观上, 当 $0 < p < d$ 时, “洞”的个数为零. 令 $\sigma = (v_{m_0}, \dots, v_{m_p})$ 为 c 中不包含 v_0 的任意 p -单纯形. 我们将继续用包含 v_0 的单纯形替换此类单纯形, 直到不再有不包含 v_0 的单纯形.

设 b 为 $(p+1)$ -单纯形 $(v_0, v_{m_0}, \dots, v_{m_p})$. 注意 $b \in S^d = \partial(\Delta^{d+1})$, 因此 $\partial(b)$ 是一个 p -边界. 还要注意 σ 在 $\partial(b)$ 中. 此外, σ 是 $\partial(b)$ 中唯一不包含 v_0 的 p -单纯形. 现在我们将 $\partial(b)$ 加到 c 上, 得到 $c' := c + \partial(b)$. 由于我们添加了一个边界, $[c] = [c']$ (即 c 和 c' 是同调的). 此外, 与 c 相比, c' 包含的 p -单纯形不包含 v_0 的数量减少了一个.

我们重复这个过程, 直到我们达到一个循环 c^* , 其中每个 p -单纯形都包含 v_0 . 我们现在证明 c^* 是平凡闭链: 假设 c^* 包含一些 p -单纯形 $\alpha = (v_0, v_{a_1}, \dots, v_{a_p})$. 然后, $(p-1)$ -单纯形 $\alpha' =$

$(v_{a_1}, \dots, v_{a_p})$ 是 $\partial(\alpha)$ 的一部分. 但是, α' 不能成为 c^* 中其他任何 p -单纯形的边界的一部分, 因为唯一包含 α' 作为面同时也包含 v_0 的 p -单纯形是 α . 因此, 为了使 c^* 边界为空, 我们有 $c^* = 0$. 通过上述构造, $[c] = [c^*]$, 因此 $[c] = 0$.

每个闭链都是同调于 0 的, 因此对于所有 $0 < p < d$, $H_p(S^d) = 0$.

由于 S^d 是 d 维的, 我们没有任何维度大于 d 的单纯形, 因此对于 $p > d$, $H_p(S^d) = 0$. 结合所有讨论, 我们得出以下定理:

Theorem 1.14

对于任何 $d > 0$, 我们有

$$H_p(S^d) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & p \in \{0, d\} \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

$$\beta_p(S^d) = \begin{cases} 1 & p \in \{0, d\} \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

1.9 诱导同调性

单纯复形之间的映射与一般的“连续”拓扑空间略有不同, 我们在这里给出相关的定义, 并将它们关联起来.

Definition 1.15: 顶点映射

顶点映射 $f: V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ 将 K_1 中的顶点映射到 K_2 中的顶点.

Definition 1.16: 单纯映射

如果一个映射 $f: K_1 \rightarrow K_2$ 可以由一个顶点映射 $g: V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ 描述, 使得对于每个单纯形 $\{v_0, \dots, v_k\}$, 我们有 $f(\{v_0, \dots, v_k\}) = \{g(v_0), \dots, g(v_k)\}$, 则称这个映射为单纯映射. 由于 f 映射到 K_2 , $f(\{v_0, \dots, v_k\})$ 一定是 K_2 中的一个单纯形. 单纯映射也可以看作是底层空间上的映射 $f: |K_1| \rightarrow |K_2|$.

请注意, 对于单纯映射 f , 我们不要求 $\{f(v_0), \dots, f(v_k)\}$ 也是一个 k -维单纯形, 我们只要求它是 K_2 的单纯形. 因此, K_1 的不同顶点可以被映射到 K_2 的相同顶点. 单纯复形是拓扑空间, 因此它们之间还存在连续映射的概念. 可以证明每个单纯映射都是连续的.

Definition 1.17: 相邻

如果对于每个单纯形 $\sigma \in K_1$ 我们有 $f_1(\sigma) \cup f_2(\sigma)$ 是 K_2 中的单纯形, 则两个单纯映射 $f_1, f_2: K_1 \rightarrow K_2$ 是相邻的.

相邻是同伦映射在单纯形上的表达. 因此, 我们可以通过提供两个单纯映射 $f: K_1 \rightarrow K_2$ 和 $g: K_2 \rightarrow K_1$ 来证明两个单纯复形是同伦等价的, 使得 $g \circ f$ 与 K_1 上的恒等映射相邻, 并且 $f \circ g$

与 K_2 上的恒等映射相邻.

Definition 1.18: 自由面

如果单纯复形的某个面是非最大的（不包含最大的）并且包含在唯一的最大面中，则该面被称为自由面.

由定义可知，作为自由面超集的面要么是最大面，要么也是自由面.

Definition 1.19: 坍塌

坍塌是删除面 γ 的操作，其中面 γ 是某个固定自由面 τ 的超集（包括 τ 本身）. 如果存在使单纯复形变为单个点的坍塌序列，则该单纯复形是可坍塌的.

所有定义在单纯复形上的映射都可以视作一般拓扑空间上的一种简化，具体对应关系如表 1.1 所示.

“连续”拓扑	组合拓扑
拓扑空间	单纯复形
连续映射	单纯映射
同伦映射	相邻映射
收缩变形	坍塌

表 1.1: “连续”和组合拓扑中的等效概念

接下来将探讨单纯映射对同调性的影响.

Definition 1.20: 诱导链映射

设 $f: K_1 \rightarrow K_2$ 是一个单纯映射. 这诱导了一个链映射

$$f_{\#}: C_p(K_1) \rightarrow C_p(K_2)$$

$$c = \sum \alpha_i \sigma_i \mapsto f_{\#}(c) := \sum \alpha_i \tau_i, \quad \text{其中 } \tau_i = \begin{cases} f(\sigma_i) & \text{如果 } f(\sigma_i) \text{ 是 } K_2 \text{ 中的 } p\text{-单纯形} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

以下性质是容易证明的（其中第三条可作为第一条的推论）:

- $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$
- $f_{\#}(B_p(K_1)) \subseteq f_{\#}(Z_p(K_1))$
- $f_{\#}(Z_p(K_1)) \subseteq Z_p(K_2)$, $f_{\#}(B_p(K_1)) \subseteq B_p(K_2)$

通过这个链映射 $f_{\#}$ ，我们得到了 K_1 和 K_2 同源群之间明确定义的诱导同态.

Definition 1.21: 诱导同调性

设 f 是一个单纯映射, $f_{\#}$ 是其诱导的链映射. 这诱导了一个同态

$$\begin{aligned} f_* : H_p(K_1) &\rightarrow H_p(K_2) \\ [c] = c + B_p &\mapsto f_{\#}(c) + B_p(K_2) = [f_{\#}(c)]. \end{aligned}$$

Proof. 令 f 为单射, 则有 $f(x) = f(y)$ 当且仅当 $x = y$. □

我们还得到以下函数性质, 不作证明.

Theorem 1.22

对于两个单纯映射 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, 我们有 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Lemma 1.23

如果 $f, g : K_1 \rightarrow K_2$ 是相邻的, 则 $f_* = g_*$.

请注意, 诱导同调的定义可以从单纯映射扩展到任意拓扑空间之间的映射. 我们不会陈述确切的定义, 但下面的引理 1.24 是引理 1.23 在连续拓扑中的类比, 即将相邻对应到同伦.

Lemma 1.24

如果 $f, g : X \rightarrow Y$ 是同伦的, 则 $f_* = g_*$.

基于上述事实, 我们可以证明同调确实是在同胚下的不变量, 甚至在同伦等价下也是不变量. 这也使我们可以通过计算一个可能更简单的同伦等价空间的同调性从而获得一个空间的同调性.

Corollary 1.25

如果 $f : X \rightarrow Y$ 是同伦等价 (即存在 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $f \circ g$ 同伦于 id_Y 并且 $g \circ f$ 同伦于 id_X), 那么 f_* 是同构.

Proof. 根据定理 1.22 可得 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. 又因为 $(g \circ f)_* = (id_X)_*$ 是同构, 可知 $g_* \circ f_*$ 是同构的, 所以 f_* 必须是单射且 g_* 必须是满射. 通过对 $f \circ g$ 的对称论证, 可得 f_* 是满射并且 g_* 是单射, 因此 f_* 和 g_* 都是同构的. □

1.10 Brouwer 不动点定理

在本节中, 我们将利用同调对 Brouwer 著名的不动点定理进行相对简短的证明. 这里, B^d 表示维度为 d 的单位球. 在正式进入该定理的证明之前, 我们需要引入一些新的定义和引理.

Definition 1.26: 收缩

如果映射 $r : X \rightarrow A \subseteq X$ 满足 $r(a) = a, \forall a \in A$, 则 r 是收缩.

Lemma 1.27

不存在收缩 $r : B^d \rightarrow S^{d-1}$.

Proof. 考虑包含映射 $i : S^{d-1} \hookrightarrow B^d$ 和一个收缩映射 $r : B^d \rightarrow S^{d-1}$. 根据定义, $r \circ i = id$. 接下来考虑 r 和 i 在 S^{d-1} 和 B^d 的 $(d-1)$ 次同调中的诱导映射. 回想一下, $H_{d-1}(S^{d-1}) \cong \mathbb{Z}_2$ 和 $H_{d-1}(B^d) \cong 0$. 因此, 我们将 i_* 视为从 \mathbb{Z}_2 到 0 的同态, 而 r_* 视为从 0 到 \mathbb{Z}_2 的同态. 但是由于 $r \circ i = id$, 我们也有 $r_* \circ i_* = id$. 我们可以将其结合起来以得出矛盾:

$$1 = id(1) = (r_* \circ i_*)(1) = r_*(i_*(1)) = r_*(0) = 0$$

因此, i 或 r 不能同时存在, 已知 i 存在, 所以 r 不存在. □

下面我们正式给出 Brouwer 不动点定理的形式及其证明.

Theorem 1.28: Brouwer 不动点定理

令 $f : B^d \rightarrow B^d$ 连续. 那么, f 有不动点, 即 $\exists x \in B^d$ 使得 $f(x) = x$.

Proof. 我们通过反证法证明该定理. 假设 $f : B^d \rightarrow B^d$ 没有不动点. 对于每个 x , 考虑射线 $\overrightarrow{f(x)x}$ 并令 $r(x)$ 为该射线与 S^{d-1} 的交点. 然后, $r : B^d \rightarrow S^{d-1}$ 是连续的 (可由 $f(x)$ 连续得到) 并且 $r(s) = s, \forall s \in S^{d-1}$, 因为无论 $f(s)$ 位于何处, $\overrightarrow{f(s)s}$ 都在 s 处与 S^{d-1} 相交. 因此, r 是一个收缩映射, 这与引理 1.27 矛盾. □

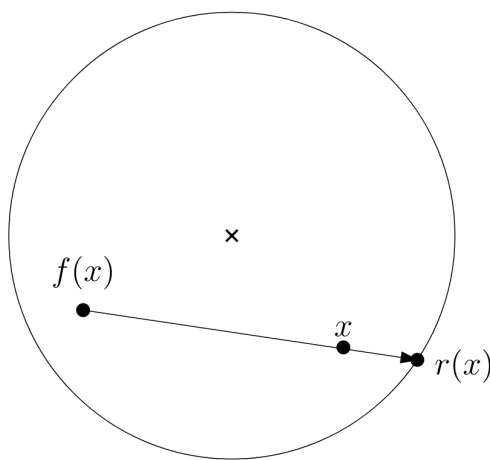


Fig 1.3: 如果 f 没有固定点, 我们就会得到边界收缩.

这个定理有许多引人入胜的推论:

- 将两张纸叠放在一起. 将上面的纸揉皱, 然后再放回到另一张纸上. 无论你怎么揉皱这张纸, 揉皱的纸上至少有一个点恰好位于下面那张纸上的对应点之上.

- 如果你在中国摊开一张中国的地图，那么地图上至少有一个点处于其确切的位置。
- 如果你拿一杯液体搅拌或翻动它，至少有一个原子会回到其原来的位置（但如果你摇晃它可能会析构连续性）。
- 该定理在数学和计算机科学中也有许多应用，例如在公平划分或证明纳什均衡的存在性方面。

持久性

在上一章中，我们研究了固定单纯复形的同调性。在本章中，我们将研究随时间增长的单纯复形。捕获空洞及其诞生和死亡的信息是持久同调性的目标。持久同调性可以应用于数据分析。用死亡时间减去出生时间，我们就得到了一个洞的寿命，基本思想是：寿命短的空洞是噪声，而寿命长的空洞则传达有关基础数据形状的信息。

2.1 过滤

Definition 2.1: 过滤

过滤是子空间的嵌套序列

$$\mathcal{F} : X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X.$$

对于每个 $i \leq j$ ，我们有包含映射 $\iota_{i,j} : X_i \hookrightarrow X_j$ 。给定这些函数 ι ，我们得到同调的诱导映射：
$$h_p^{i,j} = \iota_* : H_p(X_i) \rightarrow H_p(X_j).$$

过滤是非常自然的，让我们看一些重要的示例。

- 给定一个函数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ，我们可以定义（不可数的）下水平集过滤 $X_\alpha = f^{-1}((-\infty, \alpha])$ 。这使得我们可以在符号距离场（SDF）上轻松地构建过滤。
- 给定子复形的嵌套序列

$$\mathcal{F} : K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = K,$$

如果 $K_i \setminus K_{i-1}$ 是一个单纯形（或为空），我们称之为逐单纯形过滤。

- 如果对于每个 $\sigma \subseteq \tau$ ，我们有 $f(\sigma) \leq f(\tau)$ ，我们称一个函数 $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ 为单纯形单调函数。单纯形单调函数保证了由 f 的下水平集合过滤给出一个适当的单纯形过滤。注意，它不需要保证下水平集过滤是单纯形的（例如，考虑一个不是单射的函数 f ）。
- 我们还可以通过对顶点 v_0, v_1, \dots, v_n 排序来定义一个单纯形过滤。然后，设 K_i 为由顶点 v_0, \dots, v_i 诱导的单纯形复形。我们称在添加 v_i 时添加的单纯形 $K_i \setminus K_{i-1}$ 为 v_i 的下星。因此，这种类型的过滤也称为下星过滤。

- 给定在 \mathbb{R}^d 中的一些数据点，我们可以根据我们对增长球的直觉来定义一个过滤：我们考虑所有球 $B(p, r)$ 的神经；随着 r 的增长，我们在这个神经中得到越来越多的面。我们稍后将看到这就是所谓的 Čech 复形。

2.2 持久同调

正如我们所看到的，通过过滤 $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n$ ，我们得到一系列同态群，它们之间具有同态：

$$H_p(\mathcal{F}) : H_p(X_0) \rightarrow H_p(X_1) \rightarrow H_p(X_2) \rightarrow \dots \rightarrow H_p(X_n).$$

这样的对象称为**持久模**。给定一个持久模，我们现在可以定义一些群来捕捉在特定时间段内存在的所有空洞。

Definition 2.2: 持久同调群

第 p 个持久同源群 $H_p^{i,j}$ 定义为

$$H_p^{i,j} := \text{im } h_p^{i,j} = Z_p(K_i) / (B_p(K_j) \cap Z_p(K_i)).$$

$i = j$ 时，我们有 $H_p^{i,i} = Z_p(K_i) / (B_p(K_i) \cap Z_p(K_i)) = H_p$ ，即退化为同调群。

该定义描述了 K_i 中是闭链，并且在 K_j 中不是边界的链群。

Definition 2.3: 持久贝蒂数

第 p 持久贝蒂数 $\beta_p^{i,j}$ 是第 p 持久同调群的维数： $\beta_p^{i,j} = \dim H_p^{i,j}$ 。

由于包含关系的存在，这意味着在 $[i, j]$ 范围内， $H_p^{i,j}$ 中的元素都没有被“填充”，始终表现为孔洞。简言之， $\beta_p^{i,j}$ 表示从 i 到 j 始终存在的孔洞个数。

下面我们形式化地描述孔洞的诞生和死亡。如果 $[c] \in H_p(K_i)$ 但 $[c] \notin H_p^{i-1,i}$ ，则称 p 同调类 $[c]$ (p 孔) 在 K_i 处诞生。类似地，如果 $H_p(K_{j-1})$ 中的 $[c] \neq 0$ 但 $h_p^{j-1,j}([c]) = 0$ ，则称 $[c]$ 在进入 K_j 时死亡。

然而并不是总能明确指出哪个同调类会消亡。考虑以下过滤： X_1 由两个点 a 和 b 组成，在 X_2 中，这两个点通过一条边连接。让我们来看 H_0 ，即连通分支。我们有 $H_0(X_1) \cong \mathbb{Z}_2^2$ ，其自然基为 $\{[a], [b]\}$ 。另一方面，在 X_2 中只有一个连通分支，并且 $[a] = [b]$ 。所以有一个同调类正在消亡，但我们的两个基元 $[a]$ 和 $[b]$ 都存活。发生了什么？

事实上，这是因为在选择基时不够谨慎： $H_0(X_1)$ 也可以看作由 $[a]$ 和 $[a+b]$ 生成，而类 $[a+b]$ 在进入 X_2 时消亡。一般来说，如果两个同调类合并，它们都不会消亡，但它们的和会消亡。我们有一个一致的基选择，使我们仅通过基元来看持久同调，但暂且不深入探讨这个问题。

如果我们有一个逐单纯形过滤，我们可以通过按出生时间排序同调类来规避上述问题。因为单纯形被逐个添加，每一个同调类都有明确的出生时间，也即所谓全序。例如将上面的例子转化为逐单纯形过滤，至少需要经历 $\{[a]\} \rightarrow \{[a], [b]\} \rightarrow \{[a+b]\}$ 三个步骤，因此我们只需要规定更年轻的 $\{[a]\}$ 消亡即可。这可以看作在过滤的过程中调整所选取的基。

持久性配对是解决这个问题的另一种方法。我们添加一些具有平凡同调性的最终复形 K_{n+1} (即添加所有尚不存在的单纯形)。然后，我们的目标是找出有多少个孔在 K_i 处产生并在 K_j 处消亡。为此，我们定义

$$\mu_p^{ij} := (\beta_p^{ij-1} - \beta_p^{ij}) - (\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}), \text{ 对于 } i < j \leq n+1.$$

其中左括号的内容表示在 K_i 或之前产生的孔的数量，这些孔在进入 K_j 时死亡。而右括号表示在 K_{i-1} 或之前产生并在进入 K_j 时消亡的孔的数量。因此，将两者相减，得出恰好在 K_i 处产生并进入 K_j 的孔的数量。这传达了我們感兴趣的信息，但不需要选择任何基。

持久性图 $\text{Dgm}_p(F)$ 是一个出生-死亡图，其中每对 i, j 都包含一个点，其中 $\mu_p^{ij} > 0$ 。如果我们给每个 K_i 一个时间戳 a_i ，则该点将绘制在坐标 (a_i, a_j) 。我们给出每个点的重数 μ_p^{ij} (即出现了 μ_p^{ij} 次)。在对角线上，我们添加了无限重数的点，出于一些技术原因，这些操作稍后会变得容易理解。我们还可以用条形码表示相同的信息：对于每个 i, j ，我们绘制 μ_p^{ij} 的区间 $[a_i, a_j]$ 。这称为第 p 持久性条形码。

Example 2.4

考虑在单纯复形 K 上由序列 $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ 诱导的单纯形过滤，什么情况下序列

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \sigma_k, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_N$$

也引起单纯形过滤？当出现这种情况时，描述对应的持久性图之间的关系。

Solution. 由单纯形过滤的定义可知， $\sigma_k \subseteq \sigma_{k+1}$ ，且 $\sigma_{k+1} \subseteq \sigma_k$ ，因此 $\sigma_k = \sigma_{k+1}$ 。两者的持久性图是完全相同的。 ■

Example 2.5

给出两个过滤 $X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n$ 和 $Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_n$ 具有相同的持久性图，但对于任何 $i \in 1, \dots, n$ ， X_i 与 Y_i 不同伦等价。

Solution. 假设 X_i 都为两个 0-单纯形， Y_i 都为两个不相交的 1-单纯形。则它们的连通分支都始终为 2，孔洞的个数始终为 0，因此持久性图相同。但两者不存在同伦等价的关系。 ■

持久同调性的算法

这一节主要关注持久同调的具体计算方法，我们将讨论如何在给定单纯形过滤的情况下计算持久性配对。这当然也允许我们计算持久性图和持久性条形码。

3.1 持久性配对算法

3.1.1 基本描述

持久性配对算法仅适用于逐单纯形过滤，因此这里只讨论此类过滤。在任何时间步 j ，我们添加单个单纯形 $\sigma_j := K_j \setminus K_{j-1}$ 。设其维数为 p 。一个关键的观察是：添加 σ_j 时，同调性只会发生两件事：要么产生一个新的非边界 p -闭链 c （即空洞），要么某个 $(p-1)$ -闭链成为边界（即一个 $p-1$ 洞被其填充）。在第一种情况下，我们说 σ_j 是构造者。否则，我们说 σ_j 是析构者。

事实上，这一观察可以由欧拉-庞加莱公式导出（定义 1.11）。我们可以这样推理： σ_j 改变了 C_p ，同时经过边缘映射 ∂_p ， Z_{p-1} 也可能发生变化（ C_{p-1} 不变）。而对于 $p-2$ 及以下的维数，边缘链群和闭链群都不发生变化（回想一下链引理 1.5），同调群自然不发生变化。观察欧拉-庞加莱公式，添加一个单纯形会使得欧拉示性数 $+1$ 或 -1 ，取决于 p 的奇偶性。由于欧拉示性数也等于贝蒂数的交替和，根据前面的讨论，要么 β_p 增加 1，要么 β_{p-1} 减去 1。

当一个新的单纯形 σ_j 析构一个洞时，这对应着一个持续条形码结束的区间。这个区间的开始是在这个洞诞生的时间步，它对应于另一个唯一的单纯形（记住，我们只考虑逐单纯形过滤），而这个唯一的单纯形必须是一个构造者。自然地，持久化配对算法的思想是在析构者和构造者之间形成配对。该算法假设新增加的单纯形 σ_j 是一个析构者，并试图使用一个简单的启发式来找到相应的未配对创建者。如果程序无法找到这样的构造者，我们就认定 σ_j 实际上是一个构造者。

启发式算法的描述非常简单。我们知道有彼此同调的一系列闭链 c 由于 σ_j 的插入而成为边界，那么对应的构造者一定在这些 c 中。同时，我们希望将 σ_j 与最年轻的未配对构造者配对。 $\partial\sigma_j$ 是一个最简单的候选。因此搜索从 $\partial\sigma_j$ 开始。

3.1.2 具体流程

我们首先尝试将 σ_j 与其边界上最年轻的 $(p-1)$ -单纯形 ρ 配对。如果 ρ 未配对，我们将其与 σ_j 配对，然后就完成了。否则， ρ 已经与某个 $(p-1)$ -单纯形 τ 配对。在这种情况下，我们将 c 替换为

$c + \partial\tau$, 从而形成新的候选循环, 然后再次尝试将 σ_j 与最年轻的单纯形配对. 我们重复这个过程, 直到找到一个可以与 σ_j 配对的未配对构造者, 或者直到因为 $c = 0$ 而无法继续. 在这种情况下, 我们将 σ_j 标记为新的构造者. 在算法结束时 (处理完过滤的所有步骤后), 所有剩余的未配对构造者都对应于过滤最后一步中出现的空洞, 我们将它们与元素 ∞ 配对.

算法正确性的完整证明可以在 [Computational Topology for Data Analysis](#) 中找到, 但是那里提出的算法稍微复杂一些并且更高效. 简单来说, 如果我们达到 $c = 0$, 我们就知道 σ_j 的边界与 0 同调 (我们通过将边界添加到 $\partial\sigma_j$ 来获得 0). 因此, σ_j 不能是析构函数, 我们可以安全地将 j 标记为新的构造者.

我们用以下伪代码 1 总结该算法:

Algorithm 1 持久配对算法

输入: 通过单纯形序列 $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ 定义的逐单纯形过滤 K

```

for  $j = 1$  to  $n$  do
   $c := \delta\sigma_j$ 
  while  $c \neq 0$  do
     $i :=$  使得  $\sigma_i \in c$  且  $\sigma_i$  为构造者的最大整数
     $\rho := \sigma_i$ 
    if  $\rho$  没有配对 then
      将  $\sigma_j$  标记为构造者, 并将  $\rho$  和  $\sigma_j$  配对
       $c := 0$ 
    else
       $\tau :=$  与  $\rho$  配对的单纯形
       $c := c + \partial\tau$ 
    end if
  end while
  if  $\sigma_j$  没有被标记为析构者 then
    将  $\sigma_j$  标记为构造者
  end if
end for
将所有未配对的构造者与  $\infty$  配对

```

Example 3.1

令 G 为加权连通图, 其中所有边权重互不相同. 考虑一种过滤: 首先插入所有顶点 (任意顺序), 然后按权重从小到大的顺序逐个插入边. 那么析构者的集合是什么?

Solution. 考虑插入顶点的过程, 每个点的边缘都是 0 , 因此每个点都是构造者. 考虑插入的第一条边, 其边缘包含了两个点, 因此它将与两点中较为年轻的一个配对. 同理, 每插入一条边, 如果这条边对应的端点有一个尚未被连接, 则该边是析构者. ■

3.2 矩阵约简算法

3.2.1 基本描述

在实践中，矩阵约简算法更为常用。该算法与持久性配对算法有着相同的直觉。它有一些优点：1) 更高效。它避免了多次添加相同边界，类似于 [Computational Topology for Data Analysis](#) 中提供的持久性配对算法。2) 能够用矩阵语言表达。这使我们能够使用矩阵乘法技术更有效地实现它。3) 适用于非逐单纯形过滤。

3.2.2 具体流程

我们首先定义单纯形的全序。如果输入过滤是单纯形过滤，则插入的顺序就是全序。否则，我们主要通过插入顺序对单纯形进行排序，对于同时添加的单纯形，我们首先通过维度从小到大对单纯形进行排序，然后按字典顺序排序。最后，我们构造一个 $N \times N$ 矩阵，即所谓的边界矩阵。每行和每列都由一个单纯形标记，并按我们上面定义的顺序排序。然后，如果 σ 是 τ 边界的一部分，我们在行 σ 和列 τ 处插入 1。

我们现在对边界矩阵进行约简，从而获取持久性配对。我们从左到右处理列。对于每一列 c ，我们查看该列中最低的 1。我们将其称为该列的**枢轴元素**。如果左侧有一列 $c' < c$ ，并且同一行中也有一个枢轴元素，则将 c' 添加到 c 。重复此操作，直到不存在这样的列 $c' < c$ 为止。

处理完所有列后，矩阵呈简化形式：对于每一行，最多有一列的枢轴元素位于该行中。由此我们现在可以导出持久性配对：空列对应于构造者（出生）。要查找创建者的死亡情况，请查看其相应的行，并搜索该行中具有枢轴元素的列。这一列是对应于构造者的析构者。如果没有这样的列，则该构建者永远不会消亡，即不配对或与 ∞ 配对。

我们在下面的伪代码 2 中再次总结该算法。现在我们来分析这个算法的运行时间。对于每一列 ($O(N)$)，我们可能需要对每列进行 $O(N)$ 次加法，而每次加法的开销是 $O(N)$ 。因此，按照这个粗略的分析，算法的运行时间为 $O(N^3)$ 。但是，由于这个约简过程非常类似于高斯消元法，我们实际上可以使用一些技术来完成约简，得到 $O(N\omega)$ 的运行时间，其中 ω 是矩阵乘法的指数。然而，在实际中，这并不是非常有用，因为高效的矩阵乘法算法非常复杂，并且有较大的常数因子，而直接实现的朴素算法由于涉及的矩阵非常稀疏，其运行时间基本上是 $O(N)$ 。

Algorithm 2 矩阵约简算法

输入: K 的一个过滤.

找到一个序列 $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, 该序列对应于 K 的一个单纯形过滤, 并且与给定的过滤一致;

令 $M := 0^{N \times N}$;

for $1 \leq i, j \leq N$ **do**

if $\sigma_i \in \partial \sigma_j$ **then**

$M_{ij} := 1$;

end if

end for

for $j = 1$ to n **do**

$\ell := \max(\{-1\} \cup \{i \mid M_{i,j} = 1\})$;

while $\ell \neq -1$ 且存在 $j' < j$, 使得 $\ell = \max(\{-1\} \cup \{i \mid M_{i,j'} = 1\})$ **do**

$M_{j,j} := M_{j,j} + M_{j,j'}$;

$\ell := \max(\{-1\} \cup \{i \mid M_{i,j} = 1\})$;

end while

end for

for $j = 1$ 到 n **do**

if $M_{j,j} = 0^N$ **then**

 将 σ_j 标记为构造器;

for $j' = 1$ 到 n **do**

if $j = \max(\{-1\} \cup \{i \mid M_{i,j'} = 1\})$ **then**

 将 σ_j 和 $\sigma_{j'}$ 配对;

 将 $\sigma_{j'}$ 标记为析构器;

end if

end for

end if

end for

将所有未配对的构造器与 ∞ 配对;
