Homework

武国宁

1 讨论下列函数列在所示区间上是否一致收敛或内闭一致收敛，说明理由

(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}, n = 1, 2, \cdots, D \in (-\infty, +\infty)$

(2) $f_n(x) = \begin{cases} -(n+1)x+1, & 0 \le x \le \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \frac{1}{n+1} < x < 1. \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$

(3) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}, n = 1, 2, \cdots, D \in (-\infty, +\infty)$

2 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性

(1) $\sum \dfrac{x^n}{n+1}, x \in [-r, r]$

(2) $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty, +\infty)$

(3) $\sum \dfrac{x^n}{n^2}, x \in [0, 1]$

(4) $\sum \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x \in (-\infty, +\infty)$

3 证明题

证明：$f_n(x)$在区间I上内闭一致收敛于f的充分且必要条件是：对于任意$x_0 \in I$，存在x_0的一个邻域$U(x_0)$，使得$\{f_n(x)\}$在$U(x_0) \cap I$上一致收敛于f.

4 讨论下列各函数列在所定义的区间上：

（a）$\{f_n(x)\}$ 与 $\{f_n'(x)\}$ 的一致收敛性；
(b)$\{f_n(x)\}$是否有连续，可积和可导定理的条件 与结论。

1 $f_n(x) = \dfrac{2x+n}{x+n}, x \in [0, b]$

2 $f_n(x) = x - \dfrac{x^n}{n}, x \in [0, 1]$

3 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$