冪級數

武國寧

1 冪級數

本章將討論由冪函數序列$\{a_n(x-x_0)^n\}$所產生的函數級數：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{1}$$

它稱為冪級數，是一種最簡單的函數項級數。它可以看成是多項式的延伸。

下面討論$x_0=0$，則(1)為：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2}$$

1.1 冪級數的收斂區間

首先討論冪級數(2)的收斂問題。

定理1. (Abel 定理) 若冪級數(2)在$x=\bar{x}\neq 0$處收斂，則對於滿足不等式：$|x|<|\bar{x}|$的任何x，冪級數(2)收斂且絶對收斂；若冪級數(2) 在$x=\bar{x}\neq 0$處發散，則對於滿足不等式：$|x|>|\bar{x}|$的任何x，冪級數(2)發散。

注1. 冪級數(2)的收斂域是以原點為中心的區間。若以$2R$表示區間的長度，則R為冪級數的收斂半徑。實際上，冪級數的收斂半徑為收斂點的絶對值的上確界。

稱$(-R,R)$為冪級數(2)的收斂區間。

定理2. 對於冪級數(2)，若

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \tag{3}$$

則當

(1) $0 < \rho < +\infty$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = \dfrac{1}{\rho}$;

(2) $\rho = 0$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = +\infty$;

(3) $\rho = +\infty$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = 0$.

例子1. 討論級數$\sum \dfrac{x^n}{n^2}$的收斂域。

例子2. 討論級數$\sum \dfrac{x^n}{n}$的收斂域。

例子3. 討論級數$\sum \dfrac{x^n}{n!}, \sum n!x^n$的收斂域。

定理3. (柯西-阿達馬定理) 對於冪級數(2)，設

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

則當：

(1) $0 < \rho < +\infty$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = \dfrac{1}{\rho}$;

(2) $\rho = 0$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = +\infty$;

(3) $\rho = +\infty$，冪級數(2)的收斂半徑為$R = 0$.

例子4. 討論級數

$$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} + \cdots$$

的收斂域。

例子5. 討論級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$$

的收斂域。

定理4. 若冪級數(2)的收斂半徑為$R(R>0)$，則冪級數(2)在它的收斂區間$(-R,R)$內的任一閉區間$[a,b]$上都一致收斂。

定理5. 若冪級數(2)的收斂半徑為$R(R>0)$，且在$x=R$或$x=-R$ 時收斂，則冪級數(2)在$[0,R]$或$[-R,0]$上一致收斂。

例子6. 討論級數$\sum \dfrac{(x-1)^n}{2^n n}$的收斂域。

1.2 冪級數的性質

定理6. (i) 冪級數(2)的和函數為$(-R,R)$上的連續函數；

(ii) 若冪級數(2)在左（右)端點上收斂，則其和函數在這一端點上右(左)連續。

(2)逐項求導，積分為：

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \cdots + \cdots \tag{4}$$

$$a_0 + 2a_2x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \cdots \tag{5}$$

定理7. 冪級數(2)與冪級數(4),(5)具有相同的收斂區間。

定理8. 設冪級數(2)在收斂區間$(-R,R)$上的和函數為f，若$x \in (-R,R)$ 則有：

(1) f在點x可導，且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

(2) f在0與x之間的區間上可積，且

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

推論1. 記f 為冪級數(2)在收斂區間$(-R, R)$上的和函數，則在$(-R, R)$上f具有任意階導數，且可以逐項求導數任意次：

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x$$

推論2. 記f 為冪級數(2)在點$x = 0$ 某鄰域上的和函數，則冪級數(2)的係屬與f在$x = 0$處的各階導數有如下關係：

$$a_0 = f(0), \cdots a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n = 1, 2 \cdots$$

1.3 冪級數的運算

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \tag{7}$$

定義1. 若冪級數(6)與冪級數(7)在$x = 0$點的某鄰域內有相同的和函數，則稱這兩個冪級數在該鄰域內相等。

定理9. 若冪級數(6)與(7)在$x = 0$的某鄰域內相等，則它們同次冪的係屬相等。

定理10. 若冪級數(6)與(7)的收斂半徑分別是R_a, R_b，則有

$$\lambda \sum a_n x^n = \sum \lambda a_n x^n, |x| < R_a$$

$$\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R$$

$$\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum c_n x^n, |x| < R$$

這裡$R = \min \{R_a, R_b\}, c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-1}$

例子7. 討論幾何級數在收斂域*(-1, 1)*上的可導，可積分性質。

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

例子8. 求級數$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$的和函數。