

# 函数列与函数项级数

武国宁

## 1 一致收敛

### 1.1 函数列及其一致收敛性

设

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \quad (1)$$

是一列定义在同一数集 $E$ 上的函数，称为定义在 $E$ 上的函数列，记为：

$$\{f_n\}$$

设 $x_0 \in E$ ，得到数列：

$$\{f(x_0)\} \quad (2)$$

收敛，则称数列(1)在 $x_0$ 点收敛， $x_0$ 称为数列(1)的收敛点。若数列(2)发散，则称函数列(1)在 $x_0$ 点发散。若数列(1)在 $D \subset E$ 上的每一点都收敛，则称(1)在数集 $D$ 上收敛。这是对于 $\forall x \in D$ ，都有数列 $\{f_n(x)\}$ 的一个极限值与之对应，由这个对应法则所确定的 $D$ 上的函数，成为函数列(1)的极限函数。若把此极限函数记作 $f(x)$ ，则有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in D$$

**注 1.** 函数极限的 $\epsilon - N$  定义是：对于每一个 $x \in D$ ， $\forall x \in D, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

**注 2.** 使得函数 $\{f_n(x)\}$ 收敛的全体收敛点的集合，成为函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛域。

**例子 1.** 讨论函数列 $\{f_n(x) = x^n\}$ 的收敛域与极限函数。

**例子 2.** 讨论函数列 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ 的收敛域与极限函数。

**定义 1.** 设函数列  $f_n(x)$  与函数  $f(x)$  定义在同一数集  $D$  上, 若对于任给的正数  $\epsilon > 0$ , 总存在某一个正整数  $N > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 对于一切  $x \in D$ , 都有:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $D$  上**一致收敛**于  $f(x)$ , 记作:

$$f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in D$$

**定理 1.** 函数列一致收敛的柯西准则 函数列  $f_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的充分必要条件为: 对于任给的  $\epsilon > 0$ , 总存在正整数  $N > 0$ , 使得当  $n, m > N$  时, 对于一切  $x \in D$  都有:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon. \quad (3)$$

**定理 2.** 函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f$  的充分必要条件是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (4)$$

**推论 1.** 函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $D$  上不一致收敛于  $f(x)$  的充分且必要条件为: 存在  $\{x_n\} \subset D$ , 使得  $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$  不收敛于 0.

**例子 3.** 讨论函数列  $\left\{f_n(x) = nxe^{-nx^2}\right\}, x \in (0, +\infty)$  的一致敛散性。

**定义 2.** 设函数列  $\{f_n(x)\}$  与  $f(x)$  定义在区间  $I$  上, 多对于任意闭区间  $[a, b] \subset I$ ,  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ , 则称  $\{f_n(x)\}$  在  $I$  上**内闭一致收敛**于  $f$ .

## 1.2 函数项级数及其一致收敛性

设  $\{u_n(x)\}$  是定义在数集  $E$  上的一个函数列, 表达式:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, x \in E \quad (5)$$

称为定义在  $E$  上的函数项级数, 记为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , 称

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), x \in E, n = 1, 2, \cdots, \quad (6)$$

为函数项级数(5)的部分和数列。若  $x_0 \in E$ , 数项级数:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \quad (7)$$

收敛, 则称  $x_0$  为函数项级数(5)的收敛点。所有的收敛点形成收敛域。在收敛域上, 级数(5)对应和函数, 并写作:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = S(x), x \in D$$

**例子 4.** 讨论几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  的收敛域。

**定义 3.** 设  $\{S_n(x)\}$  是函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的部分和函数列。若  $\{S_n(x)\}$  在数集  $D$  上一致收敛于  $S(x)$ ，则称级数  $\sum u_n(x)$  在  $D$  上一致收敛于  $S(x)$ ，若  $\sum u_n(x)$  在任意闭区间  $[a, b] \subset I$  上一致收敛，则称  $\sum u_n(x)$  在  $I$  上内闭一致收敛。

**定理 3.** 函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的充分必要条件为：对于任意给定的正数  $\epsilon$ ，总存在某个正整数  $N$ ，使得当  $n > N$  时，对于一切  $x \in D$  和一切正整数  $q$ ，都有：

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

**推论 2.** 函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的必要条件为 函数列  $\{u_n(x)\}$  在  $D$  上一致收敛于零。

设函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $D$  上的和函数为  $S(x)$ ，则称

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

为函数项级数  $\sum u_n(x)$  的余项。

**定理 4.** 函数项级数  $\sum u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛于  $S(x)$  的充分必要条件为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |S(x) - S_n(x)| = 0$$

**例子 5.** 讨论函数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  的一致收敛性。

### 1.3 函数项级数一致收敛性的判别方法

**定理 5.** (威尔斯特拉斯判别法) 设函数项级数  $\sum u_n(x)$  定义在数集  $D$  上， $\sum M_n$  为收敛的正项级数，若对于一切  $x \in D$ ，有：

$$|u_n(x)| \leq M_n, n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

则函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $D$  上一致收敛。

**例子 6.** 讨论函数项级数

$$\sum \frac{\sin nx}{n^2}, \sum \frac{\cos nx}{n^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 的一致收敛性。

**注 3.** 上述级数 $\sum M_n$ 称为函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的优级数。上述判别方法成为**M**判别法或优级数判别法。

下面讨论形如

$$\sum u_n(x)v_n(x) \quad (9)$$

**定理 6.** (阿贝尔判别法) 设

- (1)  $\sum u_n(x)$  在区间 $I$ 上一致收敛;
- (2) 对于每一个 $x \in I$ ,  $\{v_n(x)\}$ 是单调的;
- (3)  $\{v_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致有界, 即存在正数 $M$ , 对于一切 $x \in I$  和正整数 $n$ , 有

$$|v_n(x)| \leq M,$$

则级数(9)一致收敛。

**定理 7.** (狄利克雷判别法) 设

- (1)  $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) (n = 1, 2, \dots,)$$

在 $I$ 上一致有界;

- (2) 对于每一个 $x \in I$ ,  $\{v_n(x)\}$ 是单调的;
- (3) 在 $I$ 上 $v_n(x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  则级数(9)一致收敛。

**例子 7.** 讨论函数项级数

$$\sum \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+1}}$$

在 $[0, 1]$ 上的一致收敛性。

**例子 8.** 若数列 $\{a_n\}$ 单调且收敛于零, 则级数

$$\sum a_n \cos nx$$

在 $[\alpha, 2\pi - \alpha] (0 < \alpha < \pi)$ 上的一致收敛性。

## 1.4 作业

1.4.1 讨论下列函数列在所示区间上是否一致收敛或内闭一致收敛, 说明理由

$$(1) f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, n=1, 2, \dots, D \in (-\infty, +\infty)$$

$$(2) f_n(x) = \begin{cases} -(n+1)x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \frac{1}{n+1} < x < 1. \end{cases} \quad n=1, 2, \dots$$

$$(3) f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, n=1, 2, \dots, D \in (-\infty, +\infty)$$

1.4.2 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性

$$(1) \sum \frac{x^n}{n+1}, x \in [-r, r]$$

$$(2) \sum \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(3) \sum \frac{x^n}{n^2}, x \in [0, 1]$$

$$(4) \sum \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x \in (-\infty, +\infty)$$

1.4.3 证明题

证明:  $f_n(x)$ 在区间 $I$ 上内闭一致收敛于 $f$ 的充分且必要条件是: 对于任意 $x_0 \in I$ , 存在 $x_0$ 的一个邻域 $U(x_0)$ , 使得  $\{f_n(x)\}$ 在 $U(x_0) \cap I$ 上一致收敛于 $f$ .

## 2 一致收敛函数列与函数项级数的性质

**定理 8.** 设函数列 $f_n$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上一致收敛于 $f(x)$ , 且对每一个 $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  均存在且相等。

**注 4.** 上述定理说明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (10)$$

注 5. 类似的, 若函数  $f_n(x)$  在  $(a, b)$  上一致收敛且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f_n(x)$  存在, 可得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

注 6. 类似的, 若函数  $f_n(x)$  在  $(a, b)$  上一致收敛且  $\lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x)$  存在, 可得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

定理 9. (连续性) 若函数列  $\{f_n(x)\}$  在区间  $I$  上一致连续, 且每一项都连续, 则其极限函数  $f$  在  $I$  上连续。

例子 9. 例如函数列  $\{x^n\}$  各项在  $(-1, 1]$  上连续, 但是极限函数为:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

说明该函数列在  $(-1, 1]$  上不一致收敛。

推论 3. 若连续函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  上内闭一致收敛于  $f$ , 则  $f$  在  $I$  上连续。

例子 10. 例如函数列  $\{x^n\}$  各项在  $(-1, 1)$  上连续, 内闭一致收敛于  $f$ , 则  $f$  在  $I$  上连续。

定理 10. (可积性) 若函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则有:

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (11)$$

例子 11. 讨论函数

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n\alpha_n x, & 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ 2\alpha_n - 2n\alpha_n x, & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

的一致收敛及其极限函数的可积性。

定理 11. (可微性) 设  $\{f_n\}$  定义在  $[a, b]$  上的函数列, 若  $x_0 \in [a, b]$  为  $\{f_n\}$  的收敛点,  $\{f_n\}$  的每一项在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $\{f'_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则:

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad (12)$$

*Proof.* 对于  $x \in [a, b]$ , 总有:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

□

**推论 4.** 设函数列  $\{f_n\}$  定义在区间  $I$  上, 若  $x_0 \in I$  为  $\{f_n\}$  的收敛点, 且  $\{f'_n(x)\}$  在  $I$  上内闭一致收敛, 则  $f$  在  $I$  上可导, 且有:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

**例子 12.** 讨论函数列

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} \ln(1 + n^2 x^2), n = 1, 2, \dots$$

与

$$f'_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, n = 1, 2, \dots$$

导函数列  $\{f'_n(x)\}$  在  $[0, 1]$  上不一致收敛, 但是交换极限与导数法则成立。说明: 一致收敛是极限运算与求导运算交换的充分条件, 不是必要条件。

现在来讨论定义在区间  $[a, b]$  上的函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (13)$$

的连续性、逐项积分与求导的性质。

**定理 12.** (连续性) 若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则和函数在  $[a, b]$  上也连续。

这个定理指出: 在一致收敛条件下, 求和运算与极限运算可以交换顺序:

$$\sum \left( \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum u_n(x) \right) \quad (14)$$

**定理 13.** (逐项求积) 若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\sum \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum u_n(x) dx.$$

**定理 14.** (逐项求积) 若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上每一项都有连续导数  $x_0 \in [a, b]$  为  $\sum u_n(x)$  的收敛点, 且  $\sum u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则:

$$\sum u'_n(x) = \left( \sum u_n(x) \right)'$$

**例子 13.** 设

$$u_n(x) = \frac{1}{n^3} \ln(1 + n^2 x^2), n = 1, 2, \dots,$$

证明函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $[0, 1]$  上一致收敛, 并讨论其和函数在  $[0, 1]$  上的连续性、可积性和可畏性。

**例子 14.** 证明: 函数  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  在  $(1, +\infty)$  上有连续的各阶导函数。