

冪級數

武國寧

1 冪級數

本章將討論由冪函數序列 $\{a_n(x - x_0)^n\}$ 所產生的函數級數：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (1)$$

它稱為冪級數，是一種最簡單的函數項級數。它可以看成是多項式的延伸。

下面討論 $x_0 = 0$ ，則(1)為：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

1.1 冪級數的收斂區間

首先討論冪級數(2)的收斂問題。

定理1.1. (Abel 定理) 若冪級數(2)在 $x = \bar{x} \neq 0$ 處收斂，則對於滿足不等式： $|x| < |\bar{x}|$ 的任何 x ，冪級數(2)收斂且絕對收斂；若冪級數(2)在 $x = \bar{x} \neq 0$ 處發散，則對於滿足不等式： $|x| > |\bar{x}|$ 的任何 x ，冪級數(2)發散。

注1.1. 冪級數(2)的收斂域是以原點為中心的區間。若以 $2R$ 表示區間的長度，則 R 為冪級數的收斂半徑。實際上，冪級數的收斂半徑為收斂點的絕對值的上確界。

稱 $(-R, R)$ 為冪級數(2)的收斂區間。

定理1.2. 對於冪級數(2)，若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \quad (3)$$

則當

(1) $0 < \rho < +\infty$ ，冪級數(2)的收斂半徑為 $R = \frac{1}{\rho}$;

(2) $\rho = 0$ ，冪級數(2)的收斂半徑為 $R = +\infty$;

(3) $\rho = +\infty$ ，冪級數(2)的收斂半徑為 $R = 0$.

例子1.1. 討論級數 $\sum \frac{x^n}{n^2}$ 的收斂域。

例子1.2. 討論級數 $\sum \frac{x^n}{n}$ 的收斂域。

例子1.3. 討論級數 $\sum \frac{x^n}{n!}, \sum n!x^n$ 的收斂域。

定理1.3. (柯西-阿達馬定理) 對於冪級數(2)，設

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

則當：

(1) $0 < \rho < +\infty$ ，冪級數(2)的收斂半徑為 $R = \frac{1}{\rho}$;

(2) $\rho = 0$ ，冪級數(2)的收斂半徑為 $R = +\infty$;

(3) $\rho = +\infty$ ，冪級數(2)的收斂半徑為 $R = 0$.

例子1.4. 討論級數

$$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} + \cdots$$

的收斂域。

例子1.5. 討論級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n - 3^{2n}}$$

的收斂域。

定理1.4. 若冪級數(2)的收斂半徑為 $R(R > 0)$ ，則冪級數(2)在它的收斂區間 $(-R, R)$ 內的任一閉區間 $[a, b]$ 上都一致收斂。

定理1.5. 若冪級數(2)的收斂半徑為 $R(R > 0)$ ，且在 $x = R$ 或 $x = -R$ 時收斂，則冪級數(2)在 $[0, R]$ 或 $[-R, 0]$ 上一致收斂。

例子1.6. 討論級數 $\sum \frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收斂域。

1.2 冪級數的性質

定理1.6. (i) 冪級數(2)的和函數為 $(-R, R)$ 上的連續函數；

(ii) 若冪級數(2)在左 (右)端點上收斂，則其和函數在這一端點上右(左)連續。

(2)逐項求導，積分為：

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \cdots + \cdots \quad (4)$$

$$a_0 + 2a_2x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \cdots \quad (5)$$

定理1.7. 冪級數(2)與冪級數(4),(5)具有相同的收斂區間。

定理1.8. 設冪級數(2)在收斂區間 $(-R, R)$ 上的和函數為 f ，若 $x \in (-R, R)$ 則有：

(1) f 在點 x 可導，且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

(2) f 在 0 與 x 之間的區間上可積，且

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

推論1.1. 記 f 為冪級數(2)在收斂區間 $(-R, R)$ 上的和函數，則在 $(-R, R)$ 上 f 具有任意階導數，且可以逐項求導數任意次：

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x$$

推論1.2. 記 f 為冪級數(2)在點 $x = 0$ 某鄰域上的和函數，則冪級數(2)的係屬與 f 在 $x = 0$ 處的各階導數有如下關係：

$$a_0 = f(0), \cdots a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n = 1, 2, \cdots$$

1.3 冪級數的運算

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \tag{7}$$

定義1.1. 若冪級數(6)與冪級數(7)在 $x = 0$ 點的某鄰域內有相同的和函數，則稱這兩個冪級數在該鄰域內相等。

定理1.9. 若冪級數(6)與(7)在 $x = 0$ 的某鄰域內相等，則它們同次冪的係屬相等。

定理1.10. 若冪級數(6)與(7)的收斂半徑分別是 R_a, R_b ，則有

$$\lambda \sum a_n x^n = \sum \lambda a_n x^n, |x| < R_a$$

$$\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R$$

$$\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n = \sum c_n x^n, |x| < R$$

$$\text{這裡 } R = \min \{R_a, R_b\}, c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$$

例子1.7. 討論幾何級數在收斂域 $(-1, 1)$ 上的可導，可積分性質。

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

例子1.8. 求級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ 的和函數。

2 函數的冪級數展開

2.1 泰勒級數

若函數 $f(x)$ 在 x_0 的某鄰域上存在直到 $n+1$ 階的連續導數，則有：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (8)$$

這裡 $R_n(x)$ 為拉格朗日型余項：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (9)$$

如果函數在 x_0 處具有任意階導數，這時稱級數：

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \quad (10)$$

為函數在 x_0 處的**泰勒級數**。對於級數(10)在 x_0 點的附近能否確切的表達 f ，是本節所要討論的問題。

例子2.1. 討論函數

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 處的泰勒展開式。

定理2.1. 設 $f(x)$ 在點 x_0 具有任意階導數，那麼 $f(x)$ 在區間 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上等於它的泰勒級數的和函數的充分必要條件是：對於一切滿足不等式 $|x - x_0| < r$ 的 x ，有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

這裡 $R_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 點的泰勒公式的余項。

如果 f 能在點 x_0 的某鄰域上等於其泰勒級數的和函數，則稱函數 f 在點 x_0 的這一鄰域上可以展開成為泰勒級數，並稱等式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (11)$$

的右邊為 f 在 x_0 處的**泰勒級數展開式**，或稱為**幂級數展開式**。

注2.1. 函數的泰勒級數展開式是唯一的。

在實際應用上，主要討論函數在 $x_0 = 0$ 處的泰勒展開式，這時級數可以寫作：

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

稱為**麥克勞林級數**。

定理2.2. (Cauchy型余項) 設 $f(x)$ 在 $(x_0 - r, x_0 + R)$ 上任意階可導，則有：

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x), x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

其中，

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt \quad (12)$$

注2.2. (1) 為拉格朗日型余項可以有柯西型余項的到，需要利用積分第一中值定理。

(2) 若果將函數 $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ 看做一個函數，利用積分第一中值定理，則有：

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!} \int_{x_0}^x dt (\xi \in (x_0, x)) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!} (1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}, 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 初等函數的冪級數展開式

例子2.2. 求 k 次多項式函數

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k$$

的展開式。

例子2.3. 求函數 $f(x) = e^x$ 的展開式。

例子2.4. 求函數 $f(x) = \sin x$ 的展開式。

例子2.5. 求函數 $f(x) = \ln(1+x)$ 的展開式。提示：

(1) 當 $0 \leq x \leq 1$ 時使用拉格朗日型余項，有

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{(1+\xi)} \right)^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(2) 當 $-1 < x < 0$ 的情形，拉格朗日型余項不易估計，改用柯西型余項，有

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left| \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} (1-\theta)^n x^{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n |x|^{n+1}, 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

因為 $-1 < x < 0$ ，所以有 $1-\theta \leq 1+\theta x$ 。即有 $0 \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。

例子2.6. 討論二項式函數 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 的展開式。關於收斂區間的討論(其推導過程參見菲赫金哥爾茨著《微積分教程》第二卷第二份冊)：

- (1) 當 $\alpha \leq -1$ 時，收斂域為 $(-1, 1)$;
- (2) 當 $-1 < \alpha < 0$ 時，收斂域為 $(-1, 1]$;
- (3) 當 $\alpha > 0$ 時，收斂域為 $[-1, 1]$;

例子2.7. 利用 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 的展開式，得到

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, (-1, 1). \quad (14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots, (-1, 1) \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, [-1, 1]\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \cdots, [-1, 1]\end{aligned} \quad (17)$$

例子2.8. 求函數 $f(x) = (1-x) \ln(1-x)$ 在 $x=0$ 點的展開式。

例子2.9. 用間接方法求非初等函數

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

的冪級數展開式。