

Homework

武国宁

1 讨论下列函数列在所示区间上是否一致收敛或内闭一致收敛，说明理由

$$(1) f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, n=1, 2, \dots, D \in (-\infty, +\infty)$$

$$(2) f_n(x) = \begin{cases} -(n+1)x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \frac{1}{n+1} < x < 1. \end{cases} \quad n=1, 2, \dots$$

$$(3) f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, n=1, 2, \dots, D \in (-\infty, +\infty)$$

2 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性

$$(1) \sum \frac{x^n}{n+1}, x \in [-r, r]$$

$$(2) \sum \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(3) \sum \frac{x^n}{n^2}, x \in [0, 1]$$

$$(4) \sum \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x \in (-\infty, +\infty)$$

3 证明题

证明： $f_n(x)$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 f 的充分且必要条件是：对于任意 $x_0 \in I$ ，存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$ ，使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $U(x_0) \cap I$ 上一致收敛于 f 。

4 讨论下列各函数列在所定义的区间上:

- (a) $\{f_n(x)\}$ 与 $\{f'_n(x)\}$ 的一致收敛性;
(b) $\{f_n(x)\}$ 是否有连续, 可积和可导定理的条件与结论。

1 $f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}, x \in [0, b]$

2 $f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}, x \in [0, 1]$

3 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}, x \in [0, 1]$

4.1 (计算题)

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2}, x \in [-1, 1]$ 计算

$$\int_0^x S(t) dt$$

计算积分 $\int_0^x S(t) dt$.