函数列与函数项级数

武国宁

1 一致收敛

1.1 函数列及其一致收敛性

设

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \tag{1}$$

是一列定义在同一数集E上的函数，称为定义在E上的函数列，记为：

$$\{f_n\}$$

设$x_0 \in E$，得到数列：

$$\{f(x_0)\} \tag{2}$$

收敛，则称数列(1)在x_0点收敛，x_0称为数列(1)的收敛点。若数列(2)发散，则称函数列(1)在x_0点发散。若数列(1) 在$D \subset E$上的每一点都收敛，则称(1)在数集D上收敛。这是对于 $\forall x \in D$，都有数列$\{f_n(x)\}$ 的一个极限值与之对应，由这个对应法则所确定 的D上的函数，成为函数列(1)的极限函数。若把此极限函数记作$f(x)$，则有：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in D$$

注 1. 函数极限的$\epsilon - N$ 定义是：对于每一个$x \in D$，$\forall x \in D, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$

注 2. 使得函数$\{f_n(x)\}$收敛的全体收敛点的集合，成为函数列$\{f_n(x)\}$的收敛域。

例子 1. 讨论函数列$\{f_n(x) = x^n\}$的收敛域与极限函数。

例子 2. 讨论函数列$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$的收敛域与极限函数。

定义 1. 设函数列$f_n(x)$与函数$f(x)$定义在同一数集D上，若对于任给的正数 $\epsilon > 0$，总存在某一个正整数$N > 0$， 使得当$n > N$ 时， 对于一切$x \in D$ ，都有：

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在D上**一致收敛**于$f(x)$，记作：

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in D$$

定理 1. 函数列一致收敛的柯西准则 函数列$f_n(x)$在数集D上一致收敛的充分必要条件为： 对于任给的$\epsilon > 0$ ，总存在正整数$N > 0$， 使得当$n, m > N$时，对于一切$x \in D$ 都有：

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon. \tag{3}$$

定理 2. 函数列$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于f的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{4}$$

推论 1. 函数列$\{f_n(x)\}$在D上不一致收敛于$f(x)$的充分且必要条件为： 存在$\{x_n\} \subset D$，使得$\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$不收敛于*0*.

例子 3. 讨论函数列$\left\{f_n(x) = nxe^{-nx^2}\right\}, x \in (0, +\infty)$的一致敛散性。

定义 2. 设函数列$\{f_n(x)\}$与$f(x)$定义在区间I上，多对于任意闭区间$[a, b] \subset I$， $\{f_n(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$，则称$\{f_n(x)\}$在I上内闭一致收敛于f.

1.2 函数项级数及其一致收敛性

设$\{u_n(x)\}$是定义在数集E上的一个函数列，表达式：

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, x \in E \tag{5}$$

称为定义在E上的函数项级数，记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$， 称

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), x \in E, n = 1, 2, \cdots, \tag{6}$$

为函数项级数(5)的部分和数列。 若$x_0 \in E$，数项级数：

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \tag{7}$$

收敛，则称x_0为函数项级数(5)的收敛点。所有的收敛点形成收敛域。 在收敛域上，级数(5)对应和函数，并写作：

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = S(x), x \in D$$

例子 4. 讨论几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$的收敛域。

定义 3. 设$\{S_n(x)\}$是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的部分和函数列。若$\{S_n(x)\}$在数集$D$上一致收敛于$S(x)$，则称级数$\sum u_n(x)$在$D$上一致收敛于 $S(x)$，若$\sum u_n(x)$在任意闭区间$[a,b] \subset I$上一致收敛，则称 $\sum u_n(x)$在I上内闭一致收敛。

定理 3. 函数项级数$\sum u_n(x)$在数集D上一致收敛的充分必要条件为：对于任意给定的正数 ϵ，总存在某个正整数N，使得当$n > N$时，对于一切$x \in D$ 和一切正整数q，都有：

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

推论 2. 函数项级数$\sum u_n(x)$ 在数集D上一致收敛的必要条件为 函数列$\{u_n(x)\}$在D上一致收敛于零。

设函数项级数$\sum u_n(x)$在D上的和函数为$S(x)$，则称

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

为函数项级数$\sum u_n(x)$的**余项**。

定理 4. 函数项级数$\sum u_n(x)$在数集D上一致收敛于$S(x)$的充分必要 条件为：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S(x) - S_n(x)| = 0$$

例子 5. 讨论函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$的一致收敛性。

1.3 函数项级数一致收敛性的判别方法

定理 5. (威尔斯特拉斯判别法) 设函数项级数$\sum u_n(x)$定义在数集D上，$\sum M_n$为收敛的正项级数，若对于一切$x \in D$，有：

$$|u_n(x)| \le M_n, n = 1, 2, \cdots, \tag{8}$$

则函数项级数$\sum u_n(x)$在D上一致收敛。

例子 6. 讨论函数项级数

$$\sum \frac{\sin nx}{n^2}, \sum \frac{\cos nx}{n^2}$$

在$(-\infty, +\infty)$的一致收敛性。

注 3. 上述级数$\sum M_n$称为函数项级数$\sum u_n(x)$的优级数。 上述判别方法成为$\boldsymbol{M}$判别法或优级数判别法。

下面讨论形如

$$\sum u_n(x)v_n(x) \tag{9}$$

定理 6. (阿贝尔判别法)设

(1) $\sum u_n(x)$ 在区间I上一致收敛;

(2) 对于每一个$x \in I, \{v_n(x)\}$是单调的;

(3) $\{v_n(x)\}$在I上一致有界, 即存在正数M, 对于一切$x \in I$ 和正整数n, 有

$$|v_n(x)| \le M,$$

则级数(9)一致收敛。

定理 7. (狄利克雷判别法)设

(1) $\sum u_n(x)$的部分和函数列

$$U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_k(x)(n = 1, 2, \cdots,)$$

在I上一致有界;

(2) 对于每一个$x \in I, \{v_n(x)\}$是单调的;

(3) 在I上$v_n(x) \rightrightarrows 0(n \to \infty)$ 则级数(9)一致收敛。

例子 7. 讨论函数项级数

$$\sum \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+1}}$$

在$[0, 1]$上的一致敛散性。

例子 8. 若数列$\{a_n\}$单调且收敛于零, 则级数

$$\sum a_n \cos nx$$

在$[\alpha, 2\pi - \alpha](0 < \alpha < \pi)$上的一致敛散性。

1.4 作业

1.4.1 讨论下列函数列在所示区间上是否一致收敛或内闭一致收敛，说明理由

(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}, n = 1, 2, \cdots, D \in (-\infty, +\infty)$

(2) $f_n(x) = \begin{cases} -(n+1)x + 1, & 0 \le x \le \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \frac{1}{n+1} < x < 1. \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$

(3) $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}, n = 1, 2, \cdots, D \in (-\infty, +\infty)$

1.4.2 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性

(1) $\sum \dfrac{x^n}{n+1}, x \in [-r, r]$

(2) $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty, +\infty)$

(3) $\sum \dfrac{x^n}{n^2}, x \in [0, 1]$

(4) $\sum \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x \in (-\infty, +\infty)$

1.4.3 证明题

证明：$f_n(x)$在区间I上内闭一致收敛于f的充分且必要条件是： 对于任意$x_0 \in I$，存在x_0的一个邻域$U(x_0)$，使得 $\{f_n(x)\}$在$U(x_0) \cap I$上一致收敛于f.

2 一致收敛函数列于函数项级数的性质

定理 8. 设函数列f_n在$(a, x_0) \cup (x_0, b)$上一致收敛于$f(x)$，且 对每一个n, $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$， 则$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ 和$\lim_{x \to x_0} f(x)$均存在且相等。

注 4. 上述定理说明：

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \tag{10}$$

注 5. 类似的，若函数$f_n(x)$在(a,b)上一致收敛且$\lim\limits_{x\to a^+}f_n(x)$存在，可得到：

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a^+}f_n(x)=\lim_{x\to a^+}\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

注 6. 类似的，若函数$f_n(x)$在(a,b)上一致收敛且$\lim\limits_{x\to b^-}f_n(x)$存在，可得到：

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b^-}f_n(x)=\lim_{x\to b^-}\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

定理 9. (连续性) 若函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致连续，且每一项都连续，则其极限函数f在I上连续。

例子 9. 例如函数列$\{x^n\}$各项在$[-1,1]$上连续，但是极限函数为：

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

说明该函数列在$(-1,1])$上不一致收敛。

推论 3. 若连续函数列$\{f_n\}$在区间I上内闭一致收敛于f，则f在I上连续。

例子 10. 例如函数列$\{x^n\}$各项在$(-1,1)$上连续，内闭一致收敛 于f，则 f在I上连续。

定理 10. (可积性) 若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则有：

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{dx}=\mathrm{\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx}\tag{11}$$

例子 11. 讨论函数

$$f_n(x)=\begin{cases}2n\alpha_n x, & 0\le x<\frac{1}{2n}\\ 2\alpha_n-2n\alpha_n x, & \frac{1}{2n}\le x<\frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

的一致收敛及其极限函数的可积性。