Одометрия двухколёсной тележки

(тестовое задание)

Пусть $r(t) = (x(t), y(t))$ — координаты середины оси тележки, а $\alpha(t)$ — азимут. Также обозначим полуось тележки $c = \frac{1}{2}b$. Также для удобства введём обозначения $\Delta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$ и $s(t) = \frac{1}{2}(\theta_2(t) + \theta_1(t))$.

Утверждение. Верны следующие соотношения:

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \frac{R}{b}\left(\Delta(t) - \Delta(0)\right)$$

$$x(t) = R\int\limits_{\tau=0}^{\tau=t} \cos\alpha ds$$

$$y(t) = R\int\limits_{\tau=0}^{\tau=t} \sin\alpha ds$$

Доказательство.

Пусть u, v — координаты точки касания колёс с плоскостью. Тогда u, v могут быть выражены следующим образом:

$$u = r + w, v = r - w, w = (-c\sin\alpha, c\cos\alpha)$$

Это выражение автоматически влечёт условие того, что расстояние между u и v равно константе — ширине тележки.

Добавим условие непроскальзывания. Оно означает, что вектор скорости точки соприкосновения колеса с плоскостью равен вектору скорости точки на колесе, это даёт следующие уравнения:

$$\dot{u_x} = R\dot{\theta}_1\cos\alpha$$

$$\dot{u_y} = R\dot{\theta}_1\sin\alpha$$

$$\dot{v_x} = R\dot{\theta}_2\cos\alpha$$

$$\dot{v_x} = R\dot{\theta}_2\sin\alpha$$

Перепишем теперь эти уравнения в терминах x, y, α:

$$\dot{w} = (-c\dot{\alpha}\cos\alpha, -c\dot{\alpha}\sin\alpha)$$

$$(1) : \dot{x} - c\dot{\alpha}\cos\alpha = R\dot{\theta}_1\cos\alpha$$

$$(2) : \dot{y} - c\dot{\alpha}\sin\alpha = R\dot{\theta}_1\sin\alpha$$

$$(3) : \dot{x} + c\dot{\alpha}\cos\alpha = R\dot{\theta}_2\cos\alpha$$

$$(4) : \dot{y} + c\dot{\alpha}\sin\alpha = R\dot{\theta}_2\sin\alpha$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (1):

$$(3) - (1) : 2c\dot{\alpha}\cos\alpha = R(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\cos\alpha$$

Вычтем из уравнения (4) уравнение (2):

$$(4) - (2) : 2c\dot{\alpha}\sin\alpha = R(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\sin\alpha$$

Синус и косинус угла не могут одновременно равняться нулю, поэтому в одном из этих уравнений можно сократить, и получаем:

$$2c\dot{\alpha} = R(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$

Или, что то же самое:

$$b\dot{\alpha} = R(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$

Отсюда можно сделать вывод, что при начальном условии $\alpha(0) = \alpha_0$, имеем следующее решение:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{R}{b}\left((\theta_2(t) - \theta_1(t)) - (\theta_2(0) - \theta_1(0))\right)$$

Используя выше введённое обозначение, получаем требуемое соотношение для азимута:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{R}{b}\left(\Delta(t) - \Delta(0)\right)$$

Теперь вычислим $x(t), y(t)$. Для этого действуем аналогично, но сложим уравнения (1) с (3) и (2) с (4):

$$(1) + (3) : 2\dot{x} = R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\alpha = 2R\dot{s}\cos\alpha$$

$$(2) + (4) : 2\dot{y} = R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\alpha = 2R\dot{s}\sin\alpha$$

Откуда получаем выражения для $x(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) = R\int\limits_0^t \dot{s}(\tau)\cos\alpha(\tau)d\tau = R\int\limits_{\tau=0}^{\tau=t}\cos\alpha ds$$

$$y(t) = R\int\limits_0^t \dot{s}(\tau)\sin\alpha(\tau)d\tau = R\int\limits_{\tau=0}^{\tau=t}\sin\alpha ds$$

Что и требовалось. $\square$

Мы будем использовать это утверждение для численного расчёта траектории движения платформы. Для этого мы сначала рассчитаем все промежуточные значения азимута α, затем, используя полученный массив значений, рассчитаем значения координат центра x, y.