凸多边形窗口线裁剪的新算法

孙燮华
(中国计量学院计算机科学与技术系,杭州 310034)

摘 要 凸多边形窗口的线裁剪是用多边形窗口裁剪多边形的基础.为此,提出了凸 n 边形窗口的线裁剪新算法.新算法与 Cyrus-Beck算法相比,当 n 较大时,新算法的乘法大约只有 Cyrus-Beck算法的 1/3且仅用 4次除法.因此,新算法大大地加快运算速度.

关键词 计算机图形学(520· 6030) 多边形 窗口 线裁剪
中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2003)12-1475-03

A New Algorithm of Line Clipping for Convex Polygons

SUN Xie-hua
(*Department of Computer Science and Technology, China Institute of Metrology, Hanzhou* 310034)

Abstract A new algorithm of line clipping for convex polygons with n edges is proposed. Comparing the new algorithm and Cyrus-Beck algorithm, if n is sufficiently large, the number of multiplications used by the new algorithm is one third of the ones used by Cyrus-Beck algorithmand the new algorithm only uses 4 divisions for any convex polygons. Hence, the new algorithm is faster than Cyrus-Beck algorithm.

Keywords Polygon, Window, Segment clipping

0 引 言

凸多边形窗口的线裁剪是用多边形窗口裁剪多边形的基础. 其主要的算法有 Cyrus-Beck 算法[1,2],梁友栋-Barsky 算法[2,3]和 Nicholl-Lee-Nicholl算法[2,4].以上这些算法有一个共同之处,即都是用参数方程

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

表示通过端点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$的线段. 在二维坐标系中, 上述方程对应两个参数方程

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Cyrus-Beck算法基于凸多边形的如下性质:点 $P(t)$ 在凸多边形内的充要条件是, 凸多边形边界上任意一点 A 到 P 的向量 $\overrightarrow{AP}$ 和该边内法向量 N 的内积大于零,即

$$N \cdot \overrightarrow{AP} > 0$$

现在,考虑凸多边形窗口 $\boldsymbol{R}$ 和线段 P_1P_2,求 P_1P_2 落在凸多边形窗口 $\boldsymbol{R}$ 中的部分线段,如图 1中 $P(t_l)P(t_u)$的线段,称为可见线段.

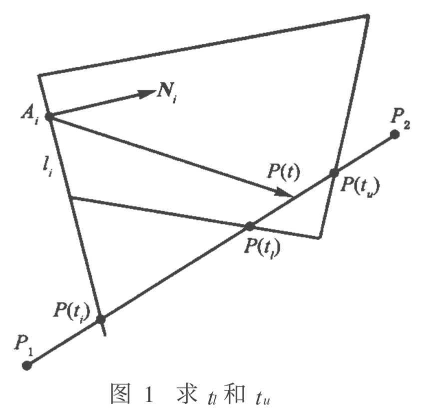


图 1 求 t_l 和 t_u

假定凸多边形有 n 条边, 在每条边 l_i 上任取一点 A_i,记边 l_i 的内法向量为 N_i.应寻找满足 $0 \leq t_l \leq t_u \leq 1$的最大区间 $[t_l, t_u]$,使得

$$\begin{cases} N_i, \overrightarrow{A_i}P \geq 0 \\ t_l \leq t \leq t_u \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

基金项目: 浙江省自然科学基金(1999046)
收稿日期: 2002-11-25;改回日期: 2003-06-09

即

$$\begin{cases} \boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{A_iP_1} + t(\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{P_1P_2}) \geq 0 \\ t_l \leq t \leq t_u \end{cases} \quad (i = 1,\cdots,n) \qquad (1)$$

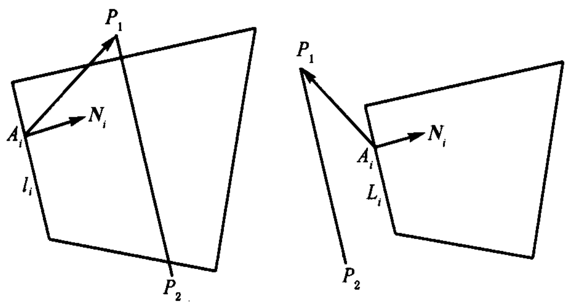
对某个 i,若有

$$\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$$

即内法向量 $\boldsymbol{N}_i$ 与线段 P_1P_2 垂直,则多边形的边 l_i 与线段 P_1P_2 平行,无交点(如图 2所示),这时分两种情形:

(1) $\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{A_iP_1} > 0$,线段 P_1P_2 在边 l_i 的内侧(参见图 2(a)).程序继续,处理其他边.

(2) $\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{A_iP_1} < 0$,线段 P_1P_2 在边 l_i 的外侧(参见图 2(b)).从而立即断定线段 P_1P_2 在多边形之外,程序结束.



(a) $\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{A_iP_1} > 0$ (b) $\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{A_iP_1} < 0$

图 2 l_i 与 P_1P_2 平行

当 $\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$时,记

$$t_i = \frac{\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{A_iP_1}}{\boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{P_1P_2}} \qquad (2)$$

上面的 t_i 为线段 P_1P_2 与第 i 条边或其延长线的交点的参数(见图 1).由式(1),得

$$\begin{cases} t \geq t_i & \boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{P_1P_2} > 0 \\ t \leq t_i & \boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{P_1P_2} < 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (3)$$

显然,式(3)解的最小值和最大值是

$$t_l = \max\{0, \max\{t_i: \boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{P_1P_2} > 0, i = 1,\cdots,n\}\}$$

$$t_u = \min\{1, \min\{t_i: \boldsymbol{N}_i \cdot \overrightarrow{P_1P_2} < 0, i = 1,\cdots,n\}\}$$

最后,判断解的合理性.若 $t_l \leq t_u$,则 t_l, t_u 是可见线段的端点参数.否则,即 $t_l > t_u$,则整条线段 P_1P_2 在多边形窗口外部.

在上面的算法中,在计算各边内法向量 $\boldsymbol{N}_i$ ($i = 0, 1,\cdots,n-1$)时需要 $2n+2$次乘法, $2n+3$次加减法.

在 n 次求交点参数 t_i 运算式(2)中,需要 $4n$ 次乘法, n 次除法, $3n$ 次加减法.

在用交点参数 t_i 计算交点中,有 4次乘法, 8次加减法.

因此, Cyrus-Beck算法总共需要 $6n+6$次乘法, n 次除法和 $5n+11$次加法.

分析 Cyrus-Beck算法,在计算各边内法向量和计算各边与线段 P_1P_2 交点参数中使用了大量的乘法和除法,却不管有关的边与线段实际上是否相交.显然,若有方法能避免计算与线段不相交边的交点,那么,就能大大地减少乘法和除法.

2 线裁剪新算法

本文的算法不采用线段的参数化表示.用通常的直角坐标系方程表示.其算法思想基于下面的定理.

定理 1 直线 AB 与线段 PQ 相交的充要条件是线段 PQ 的端点 P 和 Q 不在直线 AB 的同侧

如图 3所示,线段 P_3P_4 与直线 AB 相交,端点 P_3P_4,在直线 AB 的两侧.线段 P_0P_1 和 P_5P_0 都与直线 AB 相交,端点 P_0 在直线 AB 上,它们的两端点不在直线 AB 的同侧.线段 P_1P_2, P_2P_3, P_4P_5 不与直线 AB 相交,它们的两端点在直线 AB 的同侧.

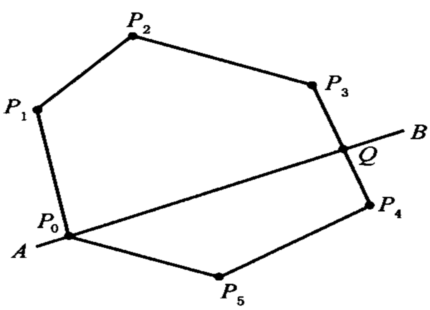


图 3 定理 1示意图

定理 2 一线段与凸多边形至多有两个交点

新算法的基本思想是检查凸多边形各顶点在直线 AB 的哪一侧,仅对两端点在直线 AB 异侧的边求它与直线 AB 的交点,然后舍去在线段 AB 延长线上的交点,判别出可见线段(图 4).

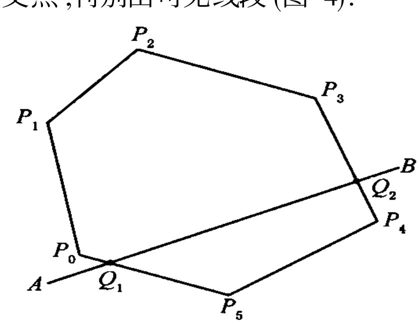


图 4 算法示意图之 1

该算法不再需要求凸多边形各边的内法向量,也不必求直线 AB 与每条边的交点,从而舍去了大

量的求交点运算.

记凸多边形的各顶点为 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=0, 1,\cdots, n-1)$,定义 $P_n=P_0$.设 $A(u_1, v_1)$,$B(u_2, v_2)$,则过点 A,B的直线方程为

$$ax+by+c=0$$

这里

$$a=v_2-v_1, b=u_1-u_2, c=bv_1-au_1$$

记 $e_i=ax_i+by_i+c$若 $e_ie_{i+1}<0$,则 P_i,P_{i+1}分别在直线 AB的两侧(图 4).新算法的具体步骤如下:

(1) 计算 e_0.若 $e_0=0$, P_0是直线 AB与多边形的一个交点.交点计数增加 1.

(2) 对 $i=0, 1,\cdots, n-1$计算 e_{i+1}.若 $e_{i+1}=0$, P_{i+1}是直线 AB与多边形的一个交点 $Q_1(x_1, y_1)$,交点计数增加 1.当交点计数等于 2时,退出循环.

(3) 若 $e_ie_{i+1}<0$,求直线 AB与边 P_iP_{i+1}的交点 $Q(x, y)$.交点计数增加 1,当交点计数等于 2时,退出循环,否则,返回第 2步.

(4) 求出线段 AB在多边形边内的可见线段.

记线段 AB与多边形各边的交点为 $Q_1(x, y)$,$Q_2(x_2, y_2)$.有可能无交点或只有一个交点.

不妨设 $u_1<u_2$.对其他情形,可类似地处理.若 $u_1\leq x_1$,$x_2\leq u_2$,且交点计数等于 2,则Q_1Q_2为可见线段(参见图 4).

若 $u_1\leq x_1\leq u_2$,$x_2\geq u_2$且交点计数等于 2,则Q_1B为可见线段(参见图 5).这时另一交点 Q_2在线段 AB的延长线上.

若 $u_1\leq x_2\leq u_2$,$x_1<u_1$且交点计数等于 2,则AQ_2为可见线段.这时另一交点 Q_1在线段 AB的延长线上.对于其他的情形,类似地处理.

若交点计数等于 0或 1,无可见线段.

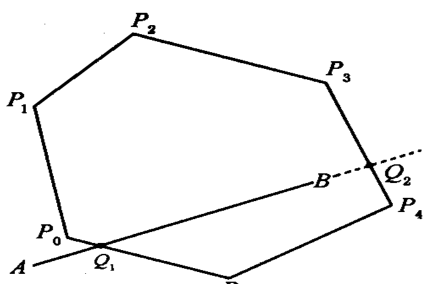


图 5　算法示意图之 2

3　算法分析与实验结果

该算法在一般情况下,判别 e_i $(i=0, 1,\cdots, n-1)$的正负号中至多使用 $2n+2$次乘法和 $2n+3$次加减法.

在二次求交点运算中需要 16乘法,4次除法和 12次加减法.

于是,本算法至多使用 $2n+18$次乘法,4次除法和 $2n+15$次加减法.

由此可见,新算法当 n较大时,其乘法大约只有 Cyrus-Beck算法的 1/3,且大大地减少了除法.

表 1是分别用 Cyrus-Beck算法程序 Clip-CB.C和新算法程序 Clip-NW.C对同一个半径为 150个像素的正 1 000边形的线裁剪 20 000次的速度比较.其中线段 1的端点是(230, 250),(240, 460),线段 2的端点是(530, 250),(150, 290).

表 1　C-B算法与新算法速度比较　　单位: s

	对线段 1裁剪	对线段 2裁剪
C-B算法	13	15
新算法	6	7

由此可见,新算法比 Cyrus-Beck算法要快得多.且速度之比与理论分析接近.

参 考 文 献

1　Cyrus M, Beck J. Generalized two-and three-dimensional clipping [J]. Computers and Graphics, 1978, 3(1): 23~28.

2　Rogers D F. 计算机图形学的算法基础(第二版)[M]. 北京:机械工业出版社, 2002.

3　Liang Y D, Barsky B A. A new concept and method for line clipping [J]. ACM Transactions on Graphics, 1984, 3(1): 1~22.

4　Nicholl T M, Lee D T, Nicholl R A. An efficient new algorithm for 2D line clipping: Its development and analysis [J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 253~262.

5　刘斌, 王勇, 黄树槐. 二维线段的矩形窗口逐边裁剪算法研究[J].计算机应用研究, 1997, 1: 15~17.

6　陆国栋, 吴晖. 基于变窗口过滤技术的线段裁剪中点分割算法[J].计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(6): 513~517.

孙燮华　1945年生,软件研究所所长,中国计量学院计算机系教授, 1981年于杭州大学信息与计算科学系硕士研究生毕业, 1990~1991美国麻省理工学院(MIT)高级访问学者.主要研究领域为计算机图形学、图象处理、算法分析和应用数学等.