第三讲

线性规划对偶理论

对偶的由来

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

y_1 s.t. $x_1 + 4x_2 \le 1$

y_2 $3x_1 - x_2 + x_3 \le 3$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

每个可行解给出最优目标函数值的一个下界.

如 $(1,0,0)^T \Rightarrow c^* \ge 4$

$(0,0,3)^T \Rightarrow c^* \ge 9$

? 一个可行解是不是 optimal

我们需要 c^* 的上界!

$$\boxed{10x_1 + x_2 + 3x_3 \le 10}$$

$\Rightarrow$ $\min\ y_1 + 3y_2$

s.t. $y_1 + 3y_2 \ge 4$

$4y_1 - y_2 \ge 1$

$y_2 \ge 3$

$y_1 \ge 0$

对偶的一般形式

(P)

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$
\begin{aligned}
y_1 \quad \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \leq b_1 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
y_m \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \leq b_m \\
& x_j \geq 0, \ j=1,\cdots,n
\end{aligned}
$$

(D)

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i \geq c_1 \\
& \quad \vdots \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{in} y_i \geq c_n \\
& y_i \geq 0, \ i=1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

另一个说法:

$$\max \quad 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 24 \qquad (y_1) \\
& 5x_1 + 2x_2 \le 26 \qquad (y_2) \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$$\min \quad 24y_1 + 26y_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 2y_1 + 5y_2 \ge 4 \\
& 3y_1 + 2y_2 \ge 3 \\
& y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}$$

材料定价 影子价格

一般情况下

(P)
$$\max\ c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

(D)
$$\min\ b^T y$$
$$A^T y \geq c$$
$$y \geq 0$$

对偶例子

$$
(P)\quad
\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\
& 5x_1 + 2x_2 \le 26 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

对偶例子

$$(P)\quad \begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ s.t. \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 26 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$(D)\quad \begin{aligned} \min \quad & z = 24y_1 + 26y_2 \\ s.t. \quad & 2y_1 + 5y_2 \ge 4 \\ & 3y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

对偶对应关系

原始 (P)			对偶 (D)	
max	$c^T x$		min	$y^T b$
$s.t.$	$a_i^T x \leq b_i$	$i = 1, \dots, p$	$s.t.$	$y_i \geq 0$
	$a_i^T x \geq b_i$	$i = p+1, \dots, l$		$y_i \leq 0$
	$a_i^T x = b_i$	$i = l, \dots, m$		$y_i \lesseqgtr 0$
	$x_j \geq 0$	$j = 1, \dots, q$		$A_j^T y \geq c_j$
	$x_j \leq 0$	$j = q+1, \dots, h$		$A_j^T y \leq c_j$
	$x_j \lesseqgtr 0$	$j = h, \dots, n$		$A_j^T y = c_j$

$$
(P)\quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}
\qquad\qquad
(D)\quad \begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ s.t. \quad & y^T A \ge c^{\mathrm{T}} \\ & y \ge 0 \end{aligned}
$$

➢ **对偶的自反性**:

设(D)是(P)的对偶问题，那么(P)也是(D)的对偶。

$$
(P)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.t. & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array}
\qquad\qquad
(D)\quad \begin{array}{ll} \min & y^T b \\ s.t. & y^T A \ge c^T \\ & y \ge 0 \end{array}
$$

➢弱对偶定理

- 若(P)和(D)均有有限可行解，(P)问题任一可行解的目标函数值总是不大于(D)问题的任一可行解的目标函数值

- 设x和y分别是(P)和(D)的可行解，若二者的目标函数值相等，则它们分别是各自问题的最优解

- 若(P)有无限最优解，则(D)不可行；若(D)有无限最优解，则(P)不可行

$$(P)\quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad (D)\quad \begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ s.t. \quad & y^T A \ge c^T \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

➢强对偶定理

若(P)（或(D)）有有限最优解，则(D)（或(P)）也有有限最优解，且目标函数值相等

$$(P)\quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad (D)\quad \begin{aligned} \min \quad & y^T b \\ s.t. \quad & y^T A \ge c^T \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

➢强对偶定理

若(P)（或(D)）有有限最优解，则(D)（或(P)）也有有限最优解，且目标函数值相等

➢互补松弛定理

若 x^*, y^* 分别是$(P), (D)$的可行解，则

$$x^*, y^* \text{ 最优} \Longleftrightarrow \begin{cases} (y^{*T} A - c^T) x^* = 0 \\ y^{*T}(Ax^* - b) = 0 \end{cases}$$

	c_B^T	$c_{\boldsymbol{N}}^T$	
x_B	$\boldsymbol{A_B}$	$\boldsymbol{A_N}$	b

检验数

目标值相反数

	$\mathbf{0}$	$c_{\boldsymbol{N}}^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$\boldsymbol{I_{m\times m}}$	$A_B^{-1}\boldsymbol{A_N}$	$A_B^{-1} b$

$$\max \quad c^T x \qquad\qquad\qquad \min \quad y^T b$$
$$(P)\quad s.t. \quad Ax \le b \qquad\qquad (D)\quad s.t. \quad y^T A \ge c^T$$
$$x \ge 0 \qquad\qquad\qquad\qquad y \ge 0$$

强对偶定理：若(P)和(D)有一个有有限最优解，则另一个亦有，且目标函数值相等。

$$(P) \qquad\qquad (D)$$
$$\max\ c^T x \qquad \min\ y^T b$$
$$s.t.\ Ax \le b \qquad s.t.\ A^T y \ge c$$
$$x \ge 0 \qquad\qquad y \ge 0$$

不妨设(P)有有限最优解

$$x^* = (x_B, x_N)^T$$
$$(A_B \quad A_N)$$

$$Ax + I \cdot \bar{x} = b$$

$c^T - c_B^T A_B^{-1} A$ ≤ 0	$-c_B^T A_B^{-1}$ ≤ 0	$-c_B^T A_B^{-1} b$
$A_B^{-1} A$	A_B^{-1}	$A_B^{-1} b$

$$c_B^T A_B^{-1} A \ge c^T$$
$$c_B^T A_B^{-1} \ge 0$$
$$c_B^T A_B^{-1} b = c^T x^*$$

$$y^T = c_B^T A_B^{-1}$$

单纯形法

再回顾一下单纯形表:

	0	$c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	I	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$

最优: $\begin{cases} \text{可行} \\ \text{检验数 } \sigma \le 0 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ 对偶可行

① 保证可行

② Local Search

使得 $\sigma \le 0$

逐步满足

$\Updownarrow$

对偶可行

换个角度

那么，反过来呢？

① 保证对偶可行 $\boxed{\sigma \le 0}$

② 逐步迭代使得（原始）可行 $\boxed{A_B^{-1} b \ge 0}$ $\Longrightarrow$ 对偶单纯形法

例子

先看一个例子:

$$\max z = -x_2 - 2x_3$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$-4x_2 - 6x_3 + x_5 = -9$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, 5$$

	0	-1	-2	0	0		
x_1	1	1	1	0	0	5	
x_4	0	2	1	1	0	5	
x_5	0	-4	-6	0	1	-9	出
		入					

	0	0	-1/2	0	-1/4	9/4
x_1	1	0	-1/2	0	1/4	11/4
x_4	0	0	-2	1	1/2	1/2
x_2	0	1	3/2	0	-1/4	9/4

$$x^* = \left(\tfrac{11}{4}, \tfrac{9}{4}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right)^T$$

对偶单纯形法

对偶单纯形法:

(1) 初始单纯形表，保证对偶可行 ($\sigma \le 0$)

(2) 检查可行性 $A_B^{-1} b \ge 0$? Yes, done.

(3) 基变换 $A_B^{-1} = (\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_m)^T$

- $\exists i$, $\underline{\tilde{A}_i^T b} < 0 \Rightarrow$ 出基

  $i = \arg\min\limits_{k} \tilde{A}_k^T b$

- $j = \arg\min\limits_{\bar{a}_{ij} < 0} \dfrac{\sigma_j}{\bar{a}_{ij}} \Rightarrow$ 入基

- 以 $\bar{a}_{ij}$ 为主元变换