第六讲: 整数规划(续)

背景

整数规划(integer programming, IP)在组合优化中占有非常重要的地位. 许多经典的组合优化问题均能建模成整数线性规划.

一般整数线性规划的求解是非常困难的. 理论方面的研究可分成两个不同的方向：一是针对一般模型设计最优算法, 降低计算复杂度, 开发相应的求解器, 不断提高可精确求解(或近似最优)的实例规模; 另一是寻求可多项式求解或存在固定参数可解(fixed parameter tractable, FPT)算法的特殊整数规划结构.

背景

整数规划(integer programming, IP)在组合优化中占有非常重要的地位. 许多经典的组合优化问题均能建模成整数线性规划.

一般整数线性规划的求解是非常困难的. 理论方面的研究可分成两个不同的方向：一是针对一般模型设计最优算法, 降低计算复杂度, 开发相应的求解器, 不断提高可精确求解(或近似最优)的实例规模; 另一是寻求可多项式求解或存在固定参数可解(fixed parameter tractable, FPT)算法的特殊整数规划结构.

FPT算法. 对于参数为k的问题实例I, 称具有运行时间$f(k)\mathrm{poly}(|I|)$的算法为FPT算法, 其中f为可计算函数, $|I|$为输入规模, k与$|I|$无关.

发展概况

一般讲, 整数线性规划的难解性源于约束矩阵的规模和结构.

- 1981年, Papadimitriou研究了具有常数个约束(约束矩阵行数为常数)的情形, 证明了这类整数线性规划存在伪多项式时间算法. 特别地, 当约束矩阵A及常数向量$\mathbf{b}$的最大绝对值参数为多项式限定时, 该问题多项式时间可解.
- 1983年, Lenstra研究了整数变量个数(约束矩阵列数)为常数的情况, 给出了该情况下整数规划的多项式时间最优算法.

Papadimitriou的结果

- “背包”问题: 是否存在0-1向量$\mathbf{x}$满足$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$, 其中$a_1, a_2, \ldots, a_n, b$均为给定的正整数.
- 该问题是(弱)NP完全的, 存在伪多项式时间算法, 即存在关于n和$a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b\}$的多项式时间的算法.

考虑该问题的几种推广形式:

- 变量x_j的取值不必限制在0或1
- 某些a_i可取负数
- 有$m > 1$个方程要满足(m固定)

Papadimitriou证明了当上述三者满足时, 拓展后的问题仍然是伪多项式时间可解的.

拓展后的新问题:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$$

其中$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$.

拓展后的新问题:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$$

其中$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$.

当m为常数时, 判定整数规划$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$是否有解:

利用动态规划, 定义状态S_i为$\sum_{j=1}^{i} \mathbf{v}_j x_j$所有可能取值的向量集合(每个向量只需保留一组$x_j$的取值). 则$|S_i| \leq (an\|\mathbf{x}\|_\infty)^m$, 其中$\mathbf{v}_j$是$A$的第$j$个列向量, a是所有参数的最大绝对值.

动态规划框架

拓展后的新问题:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$$

其中$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$.

当m为常数时, 判定整数规划$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$是否有解:

利用动态规划, 定义状态S_i为$\sum_{j=1}^{i} \mathbf{v}_j x_j$所有可能取值的向量集合(每个向量只需保留一组$x_j$的取值). 则$|S_i| \leq (an\|\mathbf{x}\|_\infty)^m$, 其中$\mathbf{v}_j$是$A$的第$j$个列向量, a是所有参数的最大绝对值.
那么,计算 S_{i+1}所需要的时间不超过 $|S_i|\|\mathbf{x}\|_\infty$.

拓展后的新问题:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$$

其中$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$.

当m为常数时, 判定整数规划$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$是否有解:

利用动态规划, 定义状态S_i为$\sum_{j=1}^{i} \mathbf{v}_j x_j$所有可能取值的向量集合(每个向量只需保留一组$x_j$的取值). 则$|S_i| \leq (an\|\mathbf{x}\|_\infty)^m$, 其中$\mathbf{v}_j$是$A$的第$j$个列向量, a是所有参数的最大绝对值.
那么,计算 S_{i+1}所需要的时间不超过 $|S_i|\|\mathbf{x}\|_\infty$.

则整个算法所需要的时间至多为$O(\sum_{i=1}^{n} |S_i|\|\mathbf{x}\|_\infty) = O(a^m(n\|\mathbf{x}\|_\infty)^{m+1})$,
即当m是常数时, 若$\|\mathbf{x}\|_\infty$是关于n和a的多项式, 那么算法运行的总时间就是n和a的多项式.

Papadimitriou的结果

第一步：分析可行解的$\|\mathbf{x}\|_\infty$上界.

定理

令A为$m \times n$维整矩阵，$\mathbf{b}$为m维整向量，其中参数的取值均在$\{0, \pm 1, \ldots, \pm a\}$之间. 则若$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$有解$\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$，那么一定也有解取自$\{0, 1, \ldots, n(ma)^{2m+1}\}^n$.

推论

当m为常数时，判定$m \times n$规模的整数规划是否有解是伪多项式时间可解的.

第二步：设计优化模型的伪多项式时间算法.

回到对偶: Farkas 引理 (1894)

引理

$A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$有解当且仅当对任意$y \ge 0$,若$y^T A = 0$, 则$y^T b \ge 0$.

推论

$A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$, $x \ge 0$有解当且仅当对任意$y \ge 0$,若$y^\top A \ge 0$, 则$y^\top b \ge 0$.

Farkas 引理

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $x \ge 0$有解当且仅当对任意y,若$y^\top A \ge 0$, 则$y^\top b \ge 0$.

第一步: 限制$\|\mathbf{x}\|_\infty$上界

为了证明定理成立, 需要借助以下两个引理.

引理

令A为$m \times m$的非奇异整矩阵. 则$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$的解的分量均为有理数, 且分子分母的大小均不超过$(ma)^m$.

证明.

由Cramer法则可得, 求解$m \times m$的非奇异整系数矩阵所构成的线性方程组, 其解的分量的分子分母绝对值的大小均不超过$m!(a^m)$, 即不超过$(ma)^m$. □

引理

令$\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$均为$\{0,\pm1,\ldots,\pm a\}^m$中的向量, $M=(ma)^{m+1}$. 则下述四条件等价:

(a) 存在不全为零的k个实数$\alpha_1,\ldots,\alpha_k\geq 0$, 使得$\sum_{j=1}^k \alpha_j\mathbf{v}_j=\mathbf{0}$.

(b) 存在不全为零的k个整数$\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, $0\leq\alpha_j\leq M$, $j=1,\ldots,k$, 使得$\sum_{j=1}^k \alpha_j\mathbf{v}_j=\mathbf{0}$.

(c) 不存在向量$\mathbf{h}\in\mathbb{R}^m$对所有$j=1,\ldots,k$, $p_j=\mathbf{h}^\top\mathbf{v}_j>0$均成立.

(d) 不存在向量$\mathbf{h}\in\{0,\pm1,\ldots,\pm M\}^m$对所有$j=1,\ldots,k$, $\mathbf{h}^\top\mathbf{v}_j\geq 1$均成立.

$(a)\Rightarrow(b)$. 直接由前一引理推得.

$(b)\Rightarrow(c)$. 若存在向量$\mathbf{h}\in\mathbb{R}^m$对所有$j=1,\ldots,k$, $p_j=\mathbf{h}^\top\mathbf{v}_j>0$均成立, 则$0=\mathbf{h}^\top\sum_{j=1}^k\alpha_j\mathbf{v}_j=\sum_{j=1}^k\alpha_jp_j>0$. 矛盾.

$(c)\Rightarrow(d)$. 显然.

引理

令$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$均为$\{0, \pm 1, \ldots, \pm a\}^m$中的向量, 且令$M = (ma)^{m+1}$. 则下述条件等价:

(a) 存在不全为零的k个实数$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$, 使得$\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$.

(d) 不存在向量$\mathbf{h} \in \{0, \pm 1, \ldots, \pm M\}^m$对所有$j = 1, \ldots, k$, $\mathbf{h}^\top \mathbf{v}_j \geq 1$均成立.

$(d) \Rightarrow (a)$. 由前一引理, 可知(d)等价于如下线性规划没有可行解:

$$(P): \qquad \min \mathbf{h}^\top \cdot \mathbf{0}, \quad s.t. \quad \mathbf{h}^\top \mathbf{v}_j = 1, j = 1, \ldots, k.$$

写出对偶规划:

$$\begin{aligned} (D): \qquad \max \qquad & \sum_{j=1}^k \alpha_j \\ s.t. \qquad & \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \\ & \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

因为(P)无解, (D)有可行解, 所以(D)无界, 即存在非零解, (a)成立.

证毕.

定理证明.

令$M = (ma)^m$. 考虑 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$的最小整数解$\mathbf{x}$(分量绝对值之和最小). 若$\mathbf{x}$所有分量都不超过M, 证明结束. 否则, 不失一般性, 我们假设$x_j > M$, $j = 1, \ldots, k$. 考虑对应的k列 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

1. 存在不全为零的整数$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $0 \le \alpha_j \le M$, $j = 1, \ldots, k$, 使得$\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$. 则向量 $\mathbf{x}' = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_k - \alpha_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$为$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$的另一解, 且$\mathbf{x}'$比$\mathbf{x}$小, 矛盾.

2. 若不是上述情况, 则由后一引理可得: 存在向量 $\mathbf{h} \in \{0, \pm 1, \ldots, \pm M\}^m$对所有$j = 1, \ldots, k$, $\mathbf{h}^\top \mathbf{v}_j \ge 1$均成立. 将$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$两边同时乘以$\mathbf{h}^\top$, 可得: $\sum_{j=1}^k \mathbf{h}^\top \mathbf{v}_j x_j = \mathbf{h}^\top \mathbf{b} - \sum_{j=k+1}^n \mathbf{h}^\top \mathbf{v}_j x_j$.
   因此$\sum_{j=1}^k x_j \le \sum_{j=1}^k \mathbf{h}^\top \mathbf{v}_j x_j \le nmaM^2 = n(ma)^{2m+1}$.

$\square$

第二步：寻找优化问题最优解

需要证明优化问题的最优目标函数值存在上下界.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ s.t. \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

该整数规划的线性松弛为:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ s.t. \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

引理

若(1)有可行解，(2)无界，则(1)无界.

引理

假设(1)有可行解且有界，令z为其最优值. 则$|z| \leq (\sum_{j=1}^{n} |c_j|) \cdot B$，其中$B = n(ma)^{2m+1}$.

已知$|z| \leq (\sum_{j=1}^{n} |c_j|) \cdot B$, 对于每个$z$可能取到的值(二分搜索), 将$\mathbf{c}'\mathbf{x} = z$添加至约束中, 判定此时的整数规划有无可行解, 经过伪多项式时间后可从中挑选出最优解.

然而, 大量的整数线性规划问题的约束和变量数目往往不是常数, 在结构特殊的整数规划问题上拓展Papadimitriou和Lenstra的奠基性工作是有意义的.

特殊分块结构整数规划

考虑IP(3):

$$\min\{\mathbf{w}\cdot\mathbf{x} : H\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d\}, \tag{3}$$

其中$r \times d$维的矩阵H为如下形式的分块矩阵:

$$H := \begin{pmatrix} C & D & D & \cdots & D \\ B & A & 0 & & 0 \\ B & 0 & A & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ B & 0 & 0 & & A \end{pmatrix}$$

- $s_C = s_D$, $s_A = s_B$, $t_B = t_C$, $t_A = t_D$, $r = s_C + ns_B$且 $d = t_B + nt_A$.
- $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n)$, 其中$\mathbf{x}^0 \in \mathbb{Z}^{t_B}$ 且$\mathbf{x}^i \in \mathbb{Z}^{t_A}$, $1 \leq i \leq n$.
  - 称IP(3)为**4-block n-fold IP**. 矩阵H相应被称为4-block n-fold矩阵.
  - 去掉矩阵H的第一列, 此IP称为**n-fold IP**; 去掉矩阵H的第一行, 此IP称为**两阶段随机整数规划**(two-stage stochastic IP).

特殊分块结构整数规划

$$\begin{pmatrix} D & D & \cdots & D \\ A & 0 & & 0 \\ 0 & A & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B & A & 0 & & 0 \\ B & 0 & A & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ B & 0 & 0 & & A \end{pmatrix}$$

特殊分块结构整数规划

$$\begin{pmatrix} D & D & \cdots & D \\ A & 0 & & 0 \\ 0 & A & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B & A & 0 & & 0 \\ B & 0 & A & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ B & 0 & 0 & & A \end{pmatrix}$$

- 当矩阵中n个A可能为不同的矩阵, 即$A_1, \ldots, A_n$, 但维数相同, n个B和D也类似分别有$B_1, \ldots, B_n$, 与$D_1, \ldots, D_n$, 则上述分别称为**广义4-block n-fold IP**, **广义n-fold IP**与为**广义两阶段随机整数规划**.

特殊分块结构整数规划

$$\begin{pmatrix} D & D & \cdots & D \\ A & 0 & & 0 \\ 0 & A & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B & A & 0 & & 0 \\ B & 0 & A & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ B & 0 & 0 & & A \end{pmatrix}$$

- 当矩阵中n个A可能为不同的矩阵, 即$A_1, \ldots, A_n$, 但维数相同, n个B和D也类似分别有$B_1, \ldots, B_n$, 与$D_1, \ldots, D_n$, 则上述分别称为**广义4-block n-fold IP**, **广义n-fold IP**与为**广义两阶段随机整数规划**.

公开问题

4-block n-fold IP

- 当前最好结果 $\mathcal{O}_{FPT}(n^{s_D t_B})$
- 是否存在FPT的参数算法?

参数包括 Δ, s_A, s_B, s_C, s_D, t_A, t_B, t_C, t_D的参数,
Δ为A_i, B_i, C, D_i中的最大绝对值参数.

群组排序问题

给定n_j个加工时长为p_j的工件, 其中$1 \le j \le k$, 目标是将所有工件安排到m台平行机上且最大完工时间不超过T, 寻找可行解.

建模.令x_j^i表示安排在机器i上的加工时长为p_j的工件数量.

$$\sum_{i=1}^{m} x_j^i = n_j, \quad \forall 1 \le j \le k$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_j x_j^i \le T, \quad \forall 1 \le i \le m$$

整理决策变量:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\cdot}^{1}, \mathbf{x}_{\cdot}^{2}, \ldots, \mathbf{x}_{\cdot}^{m}), \text{ 且对所有 } i, \mathbf{x}_{\cdot}^{i} = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_k^i).$$

则:

$$H = \begin{pmatrix} I & I & I & \cdots & I \\ \mathbf{p} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{p} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{p} \end{pmatrix},$$

其中I为$k \times k$维单位矩阵, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$. H是n-fold 矩阵.