第十四讲 Steiner树 and TSP

MST-近似 — Steiner树

MST-松弛 — TSP

先看Steiner树问题：

- 给定 $G=(V,E)$，$w: E \to R^+$
  完全图　　　　（满足度量要求）
  $S \subseteq V$
- 求一个G的连通子图 $G'=(S',E')$
  $S \subseteq S'$，且 $\sum_{e \in E'} w(e)$ 最小

G'必是一棵树，记作Steiner树

$S' \setminus S$ 中的点为Steiner点

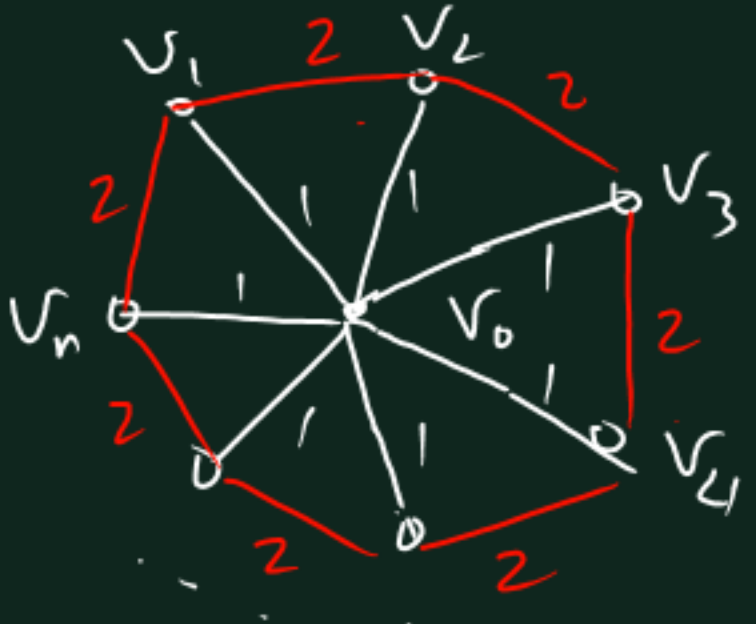
NP-hard

相关问题：欧氏平面上的Steiner树问题，用最短的长度将平面上给定的点连起来。

NP-hard

近似算法：用MST近似

分析该算法：



$S=\{v_1, \cdots, v_n\}$

$$\frac{l_{MST}}{l^*_{SMT}} = \frac{2(n-1)}{n} \longrightarrow 2$$

下面证明该算法的近似比就是2

证明：考虑最优解 T^*

将 T^* 的边复制一遍，得到图 $2T^*$，其为欧拉图

从 S 中的一点出发，沿着欧拉回路的方向，跳过所有Steiner点，和已访问点，得到一条 S 上的路径 P，那么：

$$l_{MST} \leq l(P) \leq l(2T^*) = 2l(T^*)$$

研究进展

$\frac{96}{95}$

负面：No PTAS, if $P \neq NP$

正面：$\frac{11}{6}$-近似, Zelikovsky 1993

⋮

1.59 1999

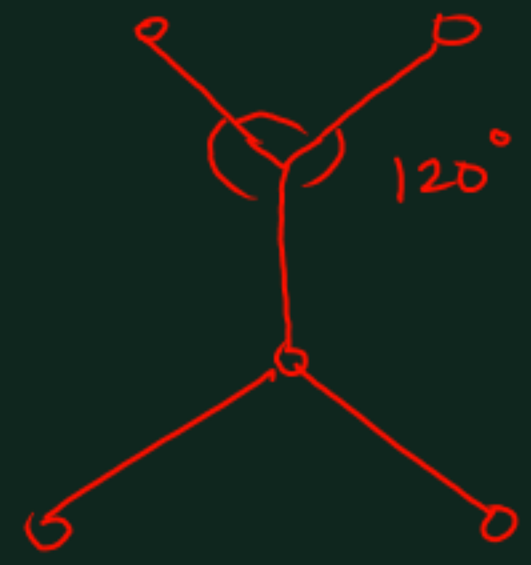
1.55 2000

⋮

$\ln 4 + \varepsilon \approx 1.3863$ Byrka et al.

欧氏平面上的Steiner树问题

MST：$\sqrt{3}$-approximation



Gilbert-Pollak 猜想

$\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155}$

一般间 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

Arora (1998 JACM)

$(1+\varepsilon)$-近似

TSP

问题：$G=(V,E)$ 完全图

$C: E \to R^+$

求 G 上费用最小的哈密顿圈（TSP 环游）

也就是确定顶点的一个顺序 π

使得 $\sum_{i=1}^{n} C(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)})$ 最小，$\pi(n+1)=\pi(1)$

若 C 任意　$K=2^{poly(n)}$

则不存在 K-近似算法

反证

考虑哈密顿圈问题

$G_1=(V,E_1)$ 是否含 H-圈？ NPC

$\Downarrow$

$G=(V,E)$ 完全图，$c(e)=\begin{cases}1, & e\in E_1\\ n\cdot k, & e\notin E_1\end{cases}$

$C_{opt} \begin{cases} = n & \Longleftrightarrow C_A \le nk \\ \ge nk+n-1 & \quad C_A \ge nk+1 \end{cases}$

假设 C 满足三角不等式，即

$$C_{uv} \le C_{uw} + C_{wv}$$

$\boxed{\text{MST 近似算法}}$

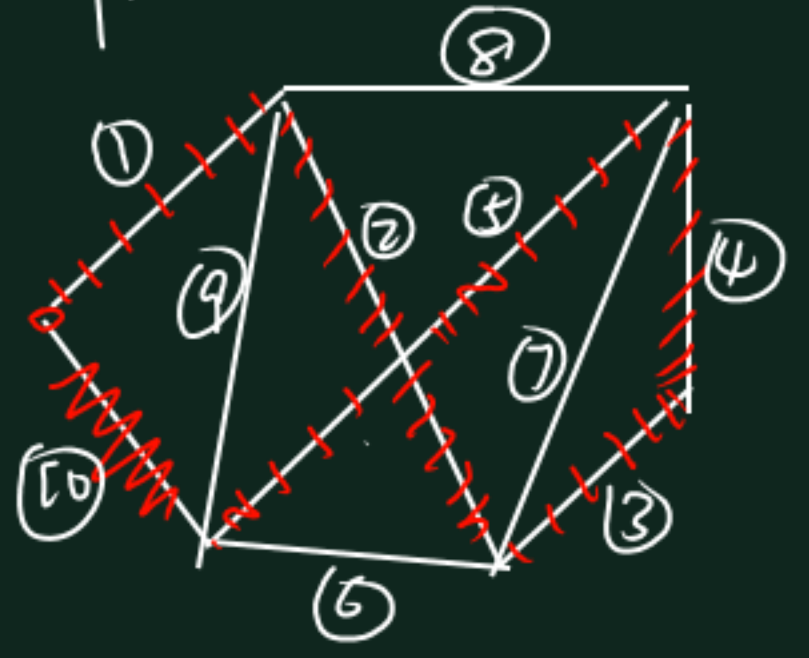
1. 先求 G 的 MST，得 T^*

2. 将 T^* 扩展为欧拉图，得 G_e

3 沿着 G_e 的欧拉回路不重复地构造一个 H-圈 H_c

$$G_e \xrightarrow{\text{short-cut}} H_c$$

例：



2. 将 T^* 上的边复制

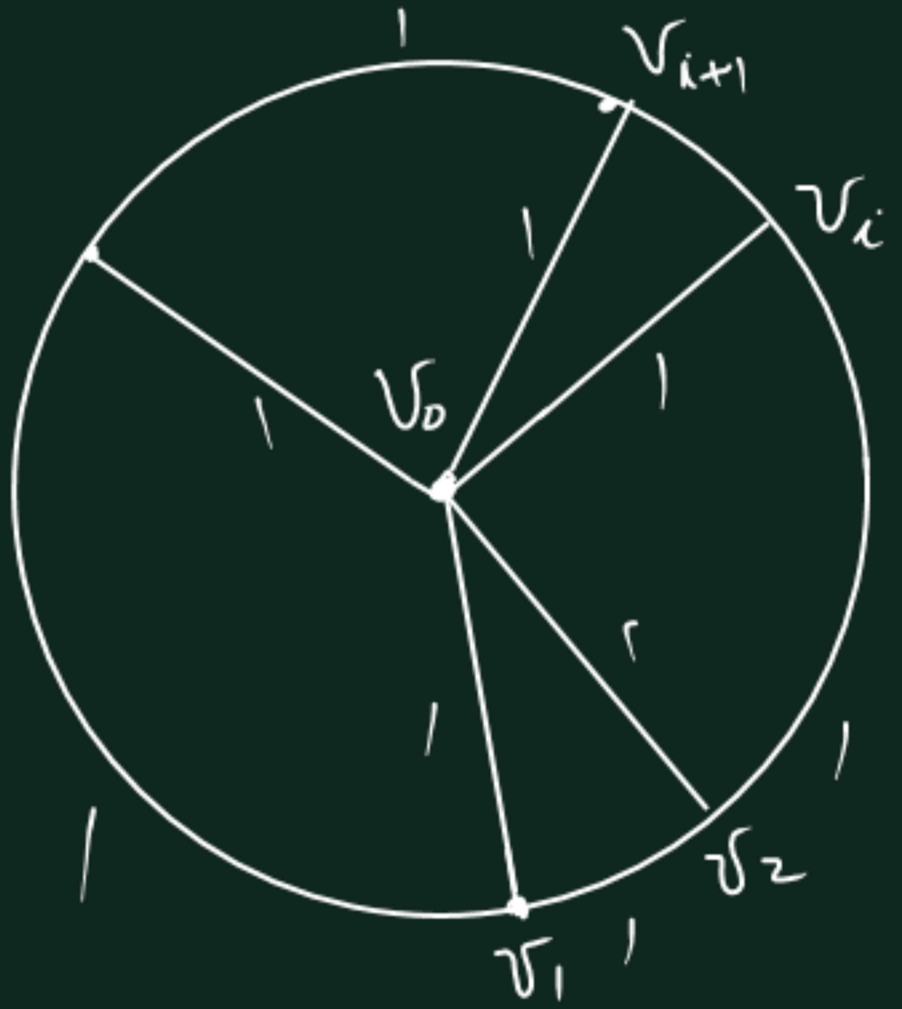
$$G_e = 2T^*$$

知：
$$C(H_c) \le C(G_e) = 2C(T^*) \le 2C(H^*)$$

例子

2n+1 个顶点

T^*: v_0为中心的星图



G_e: $v_0 v_1 v_0 v_3$

$v_0 \cdots v_{2n-1} v_0$

$v_2 v_0 v_4 \cdots\cdots$

$v_{2n} v_0$

H_c: $v_0 v_1 v_3$

$\cdots v_{2n-1} v_2$

$\cdots v_{2n} v_0$

其它边费用为2

$C(H_c^*) = 2n+1$

$C(H_c) = 2(2n-1)+2 = 4n$

改进

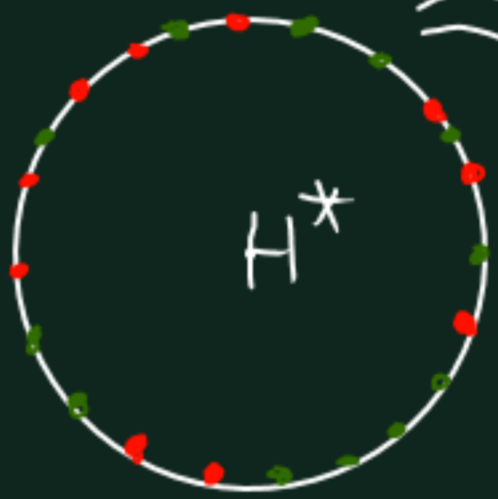
2. 求T^*中奇度点的最小权完美匹配M^*, $G_e = T^* \cup M^*$

$$C(H_c) \leq C(T^*) + C(M^*)$$

$$\leq C(H_c^*) + \frac{1}{2} C(H_c^*)$$

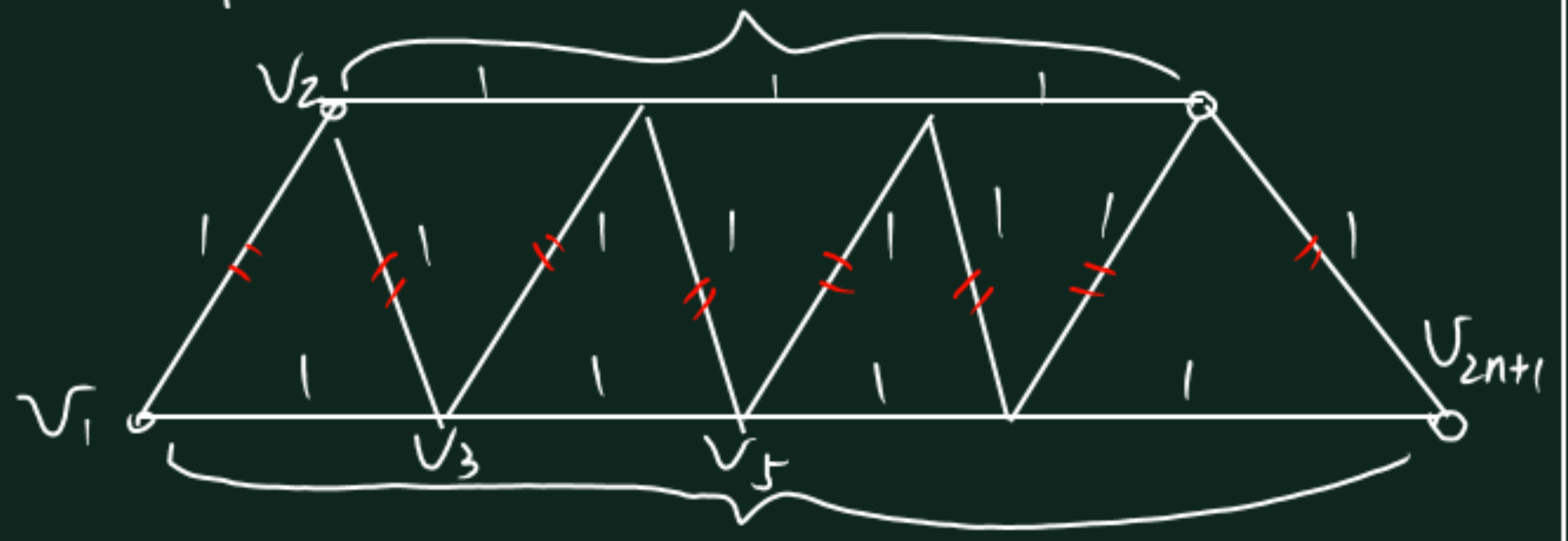
$$= \frac{3}{2} C(H_c^*)$$

分析H_c^*



$\geq 2C(M^*)$

例3



其它顶点间的距离由所给边下的最短路长确定

易知: $C(H_c^*) = 2n+1$

T^* 为 $v_1 v_2 \cdots v_{2n+1}$, $C(T^*)=2n$

M^* 为 $v_1 v_{2n+1}$ $C(M^*)=n$

故 $$\frac{C(H_c)}{C(H_c^*)} = \frac{3n}{2n+1} \to \frac{3}{2}$$

Review

上述算法来自 Christofides (1976)

最新进展: 2020 (88页)

摘要: For some $\varepsilon > 10^{-36}$, we give a $3/2 - \varepsilon$ approximation algorithm for metric TSP

by Karlin, Klein, Gharan

TSP Path

问题：在度量赋权完全图 $G=(V,E)$ 中求得一条最短哈密顿路

MST 扩张算法

(1) 求 G 的 MST，得 T^*

(2) 求 T^* 奇度点（除两点外）的最小权完美匹配 M^*

(3) $T^* \cup M^*$ 给 short-cut 得到 P

分析最优路线 P^*，收缩成只含 T^* 奇度点的路

其长度 $\geq C(M_1) + C(M_2)$

均是去掉两个点后的完美匹配

$\Longrightarrow C(M^*) \leq \frac{1}{2} C(P^*) \Longrightarrow \frac{3}{2}$-近似

如何求这样的匹配 M^* 呢？

(1) 枚举所有可能的点对 (v_i, v_j)

起始

$O(n^2)$ 个匹配中选最好的.

(2) 引入两个虚拟顶点 A 和 B，连接到所有 T^* 的奇度点，权重为 0（小于所有的 $c(e)$）

求最小权完美匹配即得.

TSP Path

固定所求 H-路的一个端点 s

修正 MST 松弛算法的第二步

在 T^* 中定义"误"点

- $V\setminus\{s\}$ 中的奇度点,
- s, 若其为偶度点

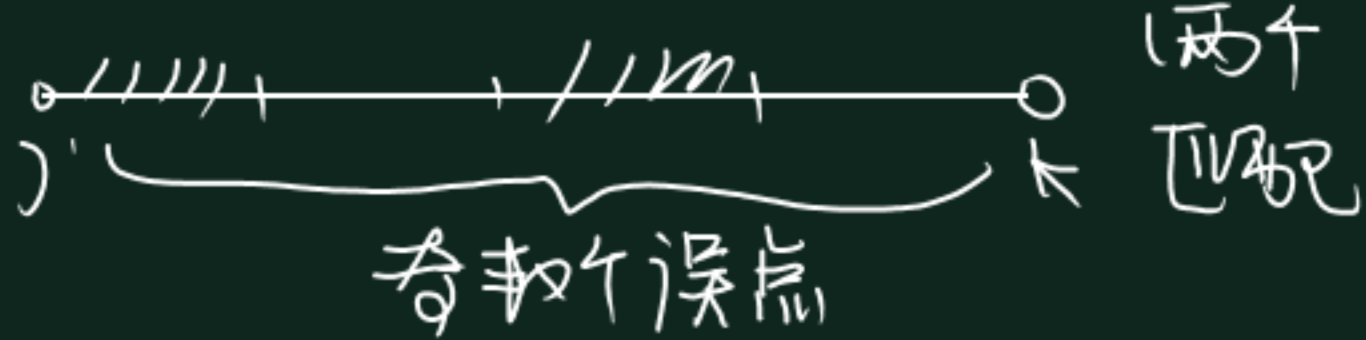
2. 在误点中求除一个顶点外的最小权完美匹配 M^*

注: 若 s 是误点, 且未被匹配, 则 $T^*\cup M^*$ 无奇度点, 删去与 s 关联的任一边

分析最优解 P_s^*

T^*上第一个奇度点、　最后一个奇度点

① s 不是误点 (s 奇度)



② S 是误点（S 在 T^* 中为偶度点）

M_1: $(s, j), \cdots$

M_2 $(j\ l), \cdots$

$$\begin{array}{ccccc} C(M_1) & + & C(M_2) & \leq & C(P_s^*) \\ \geq & & \geq & & \\ C(M^*) & & C(M^*) & & \end{array}$$

TSP Path

固定两端点的最短 H-路 (s-t路)

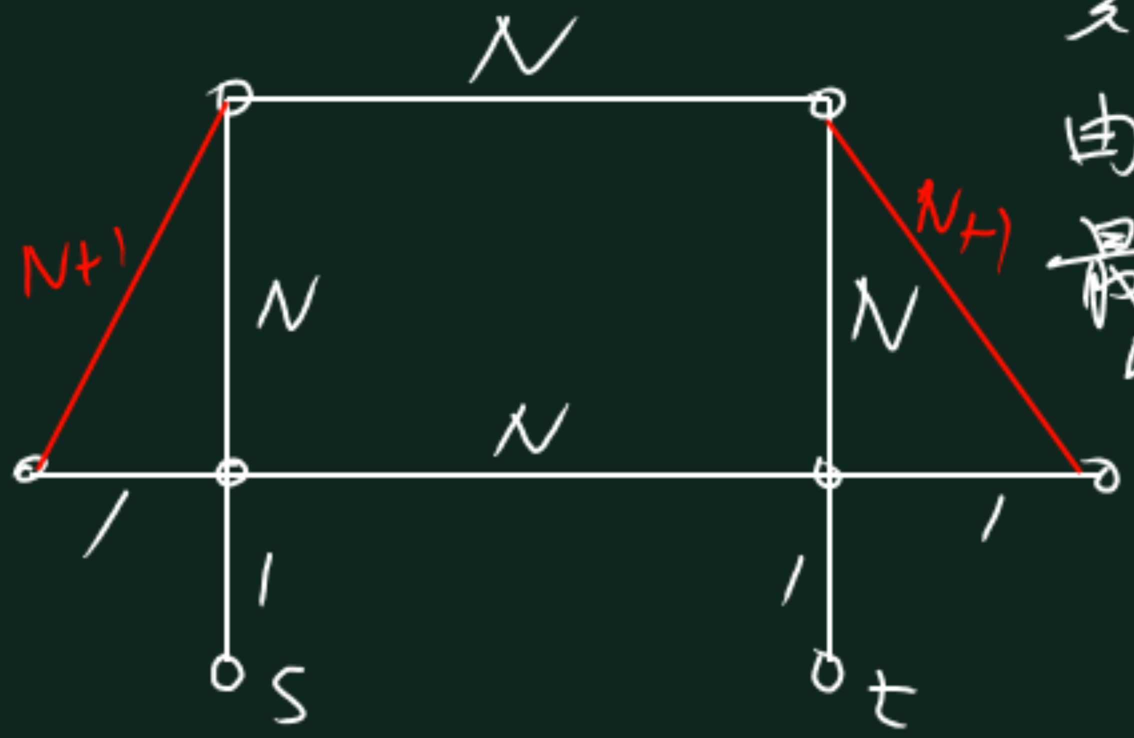
T^*中的误点包括

① $V \setminus \{s,t\}$ 的奇度点

② $\{s,t\}$中的偶度点

2. 在误点中求最小权完美匹配 M^*

先看一个例子.



其余边权由该图上的最短路长确定.

$c(P^*_{st}) = 3N+6$

$C(P_{st}) = 5N+6$

不再是3/2!

分析: 5/3-近似

思路: $C(T^*)+C(P^*_{st}) \geq 3C(M^*)$

$$\Longrightarrow C(M^*) \leq \frac{2}{3}C(P^*_{st})$$

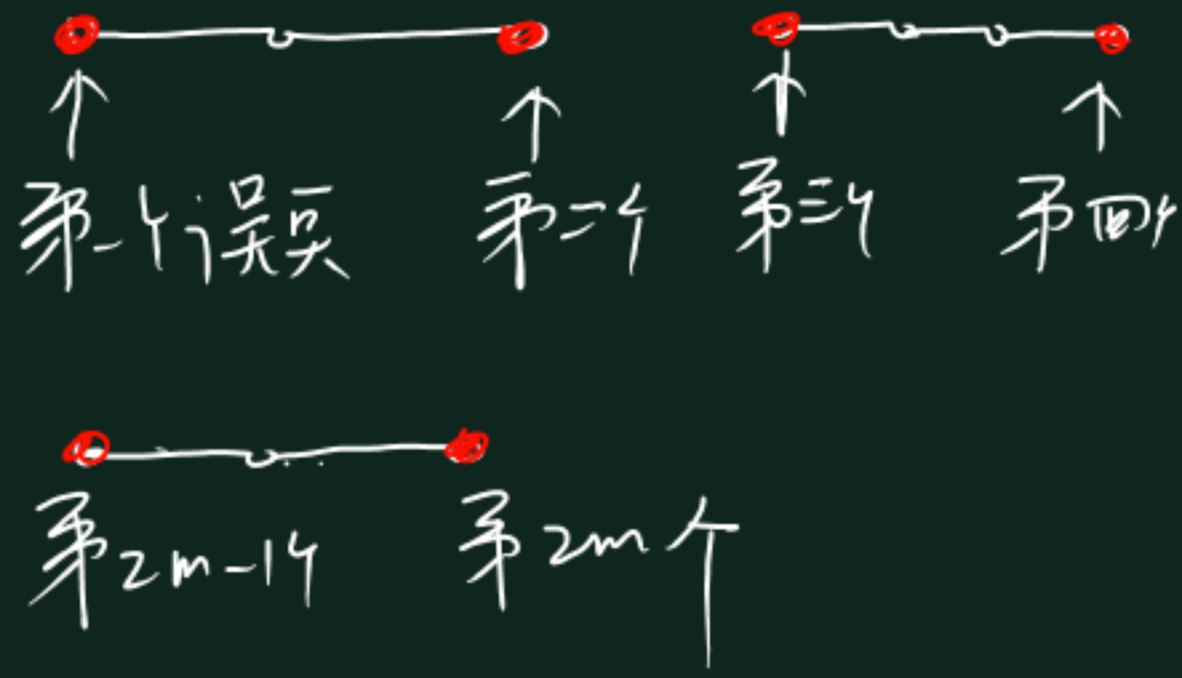
将 T^* 与 P^*_{st} 并在一起得到 Q

T^* 中的奇度点在 Q 中仍是奇度点

共 $2m$ 个误点

将 P^*_{st} 中的点按顺序标号

E_1:



$C(E_1) \geq C(M^*)$

$Q \setminus E_1$ 是欧拉图

经 short-cut 后成为仅含误点的 H-圈, 对应两个匹配 M_1, M_2

有: $C(T^*)+C(P^*_{st})$

$$\geqslant C(E_1)+C(M_1)$$

$$+C(M_2)$$

$$\geqslant 3C(M^*)$$

$\Longrightarrow$

$$C(P_{st})\leqslant C(T^*)+C(M^*)$$

$$\leqslant 5/3\cdot C(P^*_{st})$$

研究进展

$\frac{5}{3}$ Hoogeveen 1991

$\downarrow$

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ An et al. 2012

$\downarrow$

$\frac{8}{5}$ Sebö 2013

$\downarrow$

$\frac{3}{2}$ Zenklusen 2019