第十一讲 次模优化

问题描述

一般的组合优化问题可表述如下:

- 集合系统 $(E, \mathcal{F})$: 有限集 E, 幂集的子集 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$
- 效用函数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

目标为寻找 $\mathcal{F}$ 中的元素使得效用达到最小或最大.

问题描述

一般的组合优化问题可表述如下:

- 集合系统 $(E, \mathcal{F})$: 有限集 E, 幂集的子集 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$
- 效用函数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

目标为寻找 $\mathcal{F}$ 中的元素使得效用达到最小或最大.

很多时候, 我们考虑的效用函数 c 满足:
对任意 $X \subseteq E$, $c(X) := \sum_{e \in X} c(e)$.

- 在背包问题中, 一个集合的价值等于集合中所有单个元素的价值之和.

问题描述

一般的组合优化问题可表述如下:

- 集合系统 $(E, \mathcal{F})$: 有限集 E, 幂集的子集 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$
- 效用函数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

目标为寻找 $\mathcal{F}$ 中的元素使得效用达到最小或最大.

很多时候, 我们考虑的效用函数 c 满足:
对任意 $X \subseteq E$, $c(X) := \sum_{e \in X} c(e)$.

- 在背包问题中, 一个集合的价值等于集合中所有单个元素的价值之和.
- 更一般的费用函数往往是**次模函数**或者**超模函数**.

次模函数 (submodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是次模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

次模函数 (submodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是次模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

超模函数 (supermodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是超模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \leq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

次模函数 (submodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是次模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

超模函数 (supermodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是超模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \leq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

模函数 (modular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) = f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

次模函数 (submodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是次模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

超模函数 (supermodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是超模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \leq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

模函数 (modular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 是模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) = f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

- 函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是模函数当且仅当 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) + f(y) = f(x \wedge y) + f(x \vee y)$.

次模函数 (submodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ 是次模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

超模函数 (supermodular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ 是超模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) \leq f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

模函数 (modular function)

给定基础集合 E, 集合函数 $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ 是模的当且仅当 $\forall S, T \subseteq E$, $f(S) + f(T) = f(S \cap T) + f(S \cup T)$.

- 函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是模函数当且仅当
  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) + f(y) = f(x \wedge y) + f(x \vee y)$.
  模函数不一定是线性函数. [如: 在 $\mathbb{R}$ 上, $f(x) = x^2$]

次模性的等价定义

- 令 $f_j(S) := f(S \cup j) - f(S) := f(S \cup \{j\}) - f(S)$.

(a) $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T), \forall S, T \subseteq E$

(b) $f_j(S) \geq f_j(T), \forall S \subseteq T \subseteq E, \forall j \in E \setminus T$ (一阶条件)

次模性的等价定义

- 令 $f_j(S) := f(S \cup j) - f(S) := f(S \cup \{j\}) - f(S)$.

(a) $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T), \forall S, T \subseteq E$

(b) $f_j(S) \geq f_j(T), \forall S \subseteq T \subseteq E, \forall j \in E \setminus T$ (一阶条件)

$(a) \Rightarrow (b)$: 因为 $S \subseteq T$, 则由 (a) 可得 $f(S \cup j) + f(T) \geq f(T \cup j) + f(S)$.

次模性的等价定义

- 令 $f_j(S) := f(S \cup j) - f(S) := f(S \cup \{j\}) - f(S)$.

(a) $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T), \forall S, T \subseteq E$

(b) $f_j(S) \geq f_j(T), \forall S \subseteq T \subseteq E, \forall j \in E \backslash T$ (一阶条件)

$(a) \Rightarrow (b)$: 因为 $S \subseteq T$, 则由 (a) 可得 $f(S \cup j) + f(T) \geq f(T \cup j) + f(S)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: $\forall S, T \subseteq E$, 令 $S \backslash T = [r] = \{1, \dots, r\}$. 因为 $S \cap T \subseteq T$, 所以有

$$f(S \cap T \cup \{1\}) - f(S \cap T) \geq f(T \cup \{1\}) - f(T),$$

次模性的等价定义

- 令 $f_j(S) := f(S \cup j) - f(S) := f(S \cup \{j\}) - f(S)$.

(a) $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T), \forall S, T \subseteq E$

(b) $f_j(S) \geq f_j(T), \forall S \subseteq T \subseteq E, \forall j \in E \setminus T$ (一阶条件)

$(a) \Rightarrow (b)$: 因为 $S \subseteq T$, 则由 (a) 可得 $f(S \cup j) + f(T) \geq f(T \cup j) + f(S)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: $\forall S, T \subseteq E$, 令 $S \setminus T = [r] = \{1, \dots, r\}$. 因为 $S \cap T \subseteq T$, 所以有

$$f(S \cap T \cup \{1\}) - f(S \cap T) \geq f(T \cup \{1\}) - f(T),$$

同理有:

$$f(S \cap T \cup \{1\} \cup \{2\}) - f(S \cap T \cup \{1\}) \geq f(T \cup \{1\} \cup \{2\}) - f(T \cup \{1\}),$$

$$f(S \cap T \cup \{1,2\} \cup \{3\}) - f(S \cap T \cup \{1,2\}) \geq f(T \cup \{1,2\} \cup \{3\}) - f(T \cup \{1,2\}),$$

$$\cdots$$

$$f(S \cap T \cup [r-1] \cup \{r\}) - f(S \cap T \cup [r-1]) \geq f(T \cup [r-1] \cup \{r\}) - f(T \cup [r-1]).$$

次模性的等价定义

- 令 $f_j(S) := f(S \cup j) - f(S) := f(S \cup \{j\}) - f(S)$.

(a) $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T), \forall S, T \subseteq E$

(b) $f_j(S) \geq f_j(T), \forall S \subseteq T \subseteq E, \forall j \in E \backslash T$ (一阶条件)

$(a) \Rightarrow (b)$: 因为 $S \subseteq T$, 则由 (a) 可得 $f(S \cup j) + f(T) \geq f(T \cup j) + f(S)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: $\forall S, T \subseteq E$, 令 $S \backslash T = [r] = \{1, \ldots, r\}$. 因为 $S \cap T \subseteq T$, 所以有

$$f(S \cap T \cup \{1\}) - f(S \cap T) \geq f(T \cup \{1\}) - f(T),$$

同理有:

$$f(S \cap T \cup \{1\} \cup \{2\}) - f(S \cap T \cup \{1\}) \geq f(T \cup \{1\} \cup \{2\}) - f(T \cup \{1\}),$$

$$f(S \cap T \cup \{1,2\} \cup \{3\}) - f(S \cap T \cup \{1,2\}) \geq f(T \cup \{1,2\} \cup \{3\}) - f(T \cup \{1,2\}),$$

$$\cdots$$

$$f(S \cap T \cup [r-1] \cup \{r\}) - f(S \cap T \cup [r-1]) \geq f(T \cup [r-1] \cup \{r\}) - f(T \cup [r-1]).$$

将上述所有不等式左右分别进行累加, 可得

$$f(S) - f(S \cap T) \geq f(T \cup S) - f(T).$$

即 (a) 得证.

次模性等价定义

- $f_j(S) := f(S \cup j) - f(S) := f(S \cup \{j\}) - f(S)$
- $f_{i,j}(S) := [f(S \cup \{i, j\}) + f(S)] - [f(S \cup i) + f(S \cup j)]$

大家可以自行验证 (a)-(d) 的等价性.

(a) $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T), \forall S, T \subseteq E$

(b) $f_j(S) \geq f_j(T), \forall S \subseteq T \subseteq E, \forall j \in E \backslash T$ (一阶条件)

(c) $f_{i,j}(S) \leq 0 \iff f_j(S \cup i) \leq f_j(S), \forall S \subseteq E, \forall i, j \in E \backslash S$ (二阶条件)

(d) $f(T) \leq f(S) + \sum_{j \in T \backslash S} f_j(S), \forall S \subseteq T \subseteq E$

次模函数典型例子

拟阵的秩函数

拟阵$(E, \mathcal{F})$，且$r(S) := \max\{|Y| : Y \subseteq S, Y \in \mathcal{F}\}$

有 (1) $0 \le r(S) \le |S|$; (2) $r(S)$ 是单增的; (3) $r(S)$ 是次模的.

次模函数典型例子

拟阵的秩函数

$$\text{拟阵}(E, \mathcal{F}), \text{且} r(S) := \max\{|Y| : Y \subseteq S, Y \in \mathcal{F}\}$$

有 (1) $0 \le r(S) \le |S|$; (2) $r(S)$ 是单增的; (3) $r(S)$ 是次模的.
(1) 和 (2) 显然. 下面证明 (3):

证明.

注意到，任何集合增加一个元素，对应秩函数值最多增加 1. 对任何 $S \subseteq T$, 任何 $j \notin T$, 我们只需考虑如下清形:

- $r(T \cup j) - r(T) = 1$. 依据拟阵性质，j 出现在 $T \cup j$ 的每一个基中. 对 S 的一个基 X, 其可扩张为 $T \cup j$ 的一个基. 因此 $X \cup j \in \mathcal{F}$, 从而有 $r(S \cup j) - r(S) = 1$. 即 $r_j(T) \le r_j(S)$.

$\square$

次模函数典型例子

割函数

给定图 $G=(V,E)$, 边权 $c: E \to \mathbb{R}^+$, 对任何点集 S, 定义割函数:

$$f(S) = \sum_{(i,j)\in E, i\in S, j\in V\setminus S} c_{ij}$$

次模函数典型例子

割函数

给定图 $G = (V, E)$, 边权 $c : E \to \mathbb{R}^+$, 对任何点集 S, 定义割函数:

$$f(S) = \sum_{(i,j)\in E, i\in S, j\in V\setminus S} c_{ij}$$

覆盖函数

给定基础集 E 与 $A_1, \ldots, A_m \subseteq E$, 对任何 $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$, 定义覆盖函数:

$$f(S) = |\cup_{j\in S} A_j|$$

次模函数典型例子

割函数

给定图 $G = (V, E)$, 边权 $c : E \to \mathbb{R}^+$, 对任何点集 S, 定义割函数:

$$f(S) = \sum_{(i,j)\in E, i\in S, j\in V\setminus S} c_{ij}$$

覆盖函数

给定基础集 E 与 $A_1, \ldots, A_m \subseteq E$, 对任何 $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$, 定义覆盖函数:

$$f(S) = |\cup_{j\in S} A_j|$$

$f(S)$ 是次模的: 对任意 $S \subseteq T$, 任意 $k \notin T$,

$$f(S \cup k) - f(S) = |A_k - \cup_{j\in S} A_j| \geq |A_k - \cup_{j\in T} A_j| = f(T \cup k) - f(T).$$

次模函数典型例子

割函数

给定图 $G = (V, E)$, 边权 $c : E \to \mathbb{R}^+$, 对任何点集 S, 定义割函数:

$$f(S) = \sum_{(i,j)\in E, i\in S, j\in V\setminus S} c_{ij}$$

覆盖函数

给定基础集 E 与 $A_1, \ldots, A_m \subseteq E$, 对任何 $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$, 定义覆盖函数:

$$f(S) = |\cup_{j\in S} A_j|$$

$f(S)$ 是次模的: 对任意 $S \subseteq T$, 任意 $k \notin T$,

$$f(S \cup k) - f(S) = |A_k - \cup_{j\in S} A_j| \geq |A_k - \cup_{j\in T} A_j| = f(T \cup k) - f(T).$$

进一步, 对 E 上的任何单增次模函数 g, $f(S) := g(\cup_{j\in S} A_j)$ 也是单增次模的.

次模函数的性质

- f 和 g 是次模的，则 $\alpha f + \beta g$ 是次模的 (对任何 $\alpha, \beta \geq 0$). (conic combination)
- f 是次模的 $\Longrightarrow \bar{f}(A) = f(E \backslash A)$ 是次模的. (complement)
- f 是次模的 $\Longrightarrow$ 固定 $S \subseteq E$, $f(A|S) = f(A \cap S)$ 是次模的. (restriction)
- 给定向量 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow f(A) = \max_{j \in A} \omega_j$, $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, 是次模的. (maximization)

次模函数的性质

- f 和 g 是次模的，则 $\alpha f + \beta g$ 是次模的 (对任何 $\alpha, \beta \geq 0$). (conic combination)
- f 是次模的 $\Longrightarrow \bar{f}(A) = f(E \backslash A)$ 是次模的. (complement)
- f 是次模的 $\Longrightarrow$ 固定 $S \subseteq E$, $f(A|S) = f(A \cap S)$ 是次模的. (restriction)
- 给定向量 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow f(A) = \max_{j \in A} \omega_j$, $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, 是次模的. (maximization)

  [**证明**: 对任何 $A, B \subseteq E$,

$$\max\left(\max_{j \in A} \omega_j, \max_{j \in B} \omega_j\right) = \max_{j \in A \cup B} \omega_j;$$

$$\min\left(\max_{j \in A} \omega_j, \max_{j \in B} \omega_j\right) \geq \max_{j \in A \cap B} \omega_j.$$

  两式相加可得结论.]

次模函数的性质

- f 和 g 是次模的, $f - g$ 是单调的 $\Longrightarrow$ $h = \min\{f, g\}$ 是次模的 $\Longrightarrow$ 对任何单调函数 f 和常数 k, $\min\{f, k\}$ 是次模的. (minimization)

次模函数的性质

- f 和 g 是次模的, $f-g$ 是单调的 $\Longrightarrow$ $h=\min\{f,g\}$ 是次模的 $\Longrightarrow$ 对任何单调函数 f 和常数 k, $\min\{f,k\}$ 是次模的. (minimization)

[**证明**: 由对称性, 仅证明 $f-g$ 是单增的情况.

(1) 对任何 S 和 T, $h(S)=f(S)$ 且 $h(T)=f(T)$ (或对称地, $h(S)=g(S)$ 且 $h(T)=g(T)$). 则

$$h(S)+h(T)=f(S)+f(T)\geq f(S\cup T)+f(S\cap T)\geq h(S\cup T)+h(S\cap T).$$

(2) 对任何 S 和 T, $h(S)=f(S)$ 且 $h(T)=g(T)$. 则

$$\begin{aligned} h(S)+h(T) &= f(S)+g(T)=f(S)+f(T)-f(T)+g(T) \\ &\geq f(S\cap T)+[f(S\cup T)-f(T)+g(T)] \\ &\geq f(S\cap T)+g(S\cup T)\geq h(S\cap T)+h(S\cup T), \end{aligned}$$

其中倒数第二个不等式成立是因为 $f-g$ 的单调性.

(3) 对任何 S 和 T, $h(S)=g(S)$ 且 $h(T)=f(T)$. 则

$$\begin{aligned} h(S)+h(T) &= f(T)+g(S)=f(T)+f(S)-f(S)+g(S) \\ &\geq f(S\cap T)+[f(S\cup T)-f(S)+g(S)] \\ &\geq f(S\cap T)+g(S\cup T)\geq h(S\cap T)+h(S\cup T), \end{aligned}$$

其中倒数第二个不等式成立是因为 $f-g$ 的单调性.

]

次模函数的更多例子

最大效用设施选址

给定设施集合 $F = \{1, \dots, n\}$, 顾客集合 $D = \{1, \dots, m\}$. 设施 i 为顾客 j 提供的价值为 v_{ij}. 目标为开设不超过 k 个设施使得提供给所有顾客的总价值达到最大 (每个顾客都会在已开设设施中选择能给自身提供最大价值的设施). 假设 $S \subseteq F$ 是开设设施的集合, 则

$$f(S) = \sum_{j \in D} \max_{i \in S} v_{ij}.$$

次模函数的更多例子

最大效用设施选址

给定设施集合 $F=\{1,\ldots,n\}$, 顾客集合 $D=\{1,\ldots,m\}$. 设施 i 为顾客 j 提供的价值为 v_{ij}. 目标为开设不超过 k 个设施使得提供给所有顾客的总价值达到最大 (每个顾客都会在已开设设施中选择能给自身提供最大价值的设施). 假设 $S\subseteq F$ 是开设设施的集合, 则

$$f(S)=\sum_{j\in D}\max_{i\in S} v_{ij}.$$

$f(S)$ 是单增且次模的 (最大化 + 求和).

集合函数的多线性扩展

多线性扩展 (multilinear extension)

集合函数 $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ 的多线性扩展 $f^M : [0,1]^E \to \mathbb{R}$ 定义为:

$$f^M(x) = \sum_{S \subseteq E} f(S) \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i) = \mathbb{E}[f(R(x))],$$

其中 $R(x)$ 为一个随机集合, 以概率 x_i 独立包含元素 i.

集合函数的多线性扩展

多线性扩展 (multilinear extension)

集合函数 $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ 的多线性扩展 $f^M : [0,1]^E \to \mathbb{R}$ 定义为:

$$f^M(x) = \sum_{S\subseteq E} f(S) \prod_{i\in S} x_i \prod_{i\notin S}(1-x_i) = \mathbb{E}[f(R(x))],$$

其中 $R(x)$ 为一个随机集合, 以概率 x_i 独立包含元素 i.

例子. n=2. 假设 $f(\emptyset) = 0, f(\{1\}) = f(\{2\}) = f(\{1,2\}) = 1$. 或等价地, $f(0,0) = 0, f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$.

集合函数的多线性扩展

多线性扩展 (multilinear extension)

集合函数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ 的多线性扩展 $f^M: [0,1]^E \to \mathbb{R}$ 定义为:

$$f^M(x) = \sum_{S \subseteq E} f(S) \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i) = \mathbb{E}[f(R(x))],$$

其中 $R(x)$ 为一个随机集合, 以概率 x_i 独立包含元素 i.

例子. n=2. 假设 $f(\emptyset) = 0, f(\{1\}) = f(\{2\}) = f(\{1,2\}) = 1$. 或等价地, $f(0,0) = 0, f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$.
对任何 $x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2$, 其多线性扩展为

$$\begin{aligned} f^M(x_1, x_2) &= f(\emptyset)(1 - x_1)(1 - x_2) + f(\{1\}) x_1 (1 - x_2) \\ &\quad + f(\{2\})(1 - x_1) x_2 + f(\{1,2\}) x_1 x_2 \end{aligned}$$

集合函数的多线性扩展

多线性扩展 (multilinear extension)

集合函数 $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ 的多线性扩展 $f^M : [0,1]^E \to \mathbb{R}$ 定义为:

$$f^M(x) = \sum_{S\subseteq E} f(S) \prod_{i\in S} x_i \prod_{i\notin S} (1-x_i) = \mathbb{E}[f(R(x))],$$

其中 $R(x)$ 为一个随机集合, 以概率 x_i 独立包含元素 i.

例子. n=2. 假设 $f(\emptyset)=0, f(\{1\})=f(\{2\})=f(\{1,2\})=1$. 或等价地, $f(0,0)=0, f(1,0)=f(0,1)=f(1,1)=1$.
对任何 $x=(x_1,x_2)\in[0,1]^2$, 其多线性扩展为

$$\begin{aligned} f^M(x_1,x_2) &= f(\emptyset)(1-x_1)(1-x_2)+f(\{1\})x_1(1-x_2) \\ &\quad +f(\{2\})(1-x_1)x_2+f(\{1,2\})x_1x_2 \\ &= x_1(1-x_2)+(1-x_1)x_2+x_1x_2 = x_1+x_2-x_1x_2. \end{aligned}$$

集合函数的多线性扩展

多线性扩展 (multilinear extension)

集合函数 $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ 的多线性扩展 $f^M : [0,1]^E \to \mathbb{R}$ 定义为:

$$f^M(x) = \sum_{S \subseteq E} f(S) \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i) = \mathbb{E}[f(R(x))],$$

其中 $R(x)$ 为一个随机集合, 以概率 x_i 独立包含元素 i.

例子. n=2. 假设 $f(\emptyset) = 0, f(\{1\}) = f(\{2\}) = f(\{1,2\}) = 1$. 或等价地, $f(0,0) = 0, f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = 1$.
对任何 $x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2$, 其多线性扩展为

$$\begin{aligned} f^M(x_1, x_2) &= f(\emptyset)(1 - x_1)(1 - x_2) + f(\{1\}) x_1 (1 - x_2) \\ &\quad + f(\{2\})(1 - x_1) x_2 + f(\{1,2\}) x_1 x_2 \\ &= x_1(1 - x_2) + (1 - x_1) x_2 + x_1 x_2 = x_1 + x_2 - x_1 x_2. \end{aligned}$$

观察到在一般情况下 $f^M(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$, 而在整顶点上, $f^M(\mathbf{1}_S) = f(S)$.

次模优化

次模优化问题一般如下:

$$\max_{S \subseteq E} \setminus \min_{S \subseteq E} [f(S) : S \in \mathcal{F}]$$

其中 f 是次模函数.

- 无约束 $\min_{S \subseteq E}[f(S)]$: 多项式时间可解的

对于 $\max_{S \subseteq E}[f(S) : S \in \mathcal{F}]$, 许多研究致力于

- 无约束 $\max_{S \subseteq E}[f(S)]$
- 基数约束: $|S| \leq k$
- 拟阵约束: $\mathcal{F}$ 是拟阵
- 背包约束: $\sum_{j \in S} c_j \leq C$
- 多约束

$\max[f(S) : |S| \leq k, f$单调增加$]$ 问题

$\max[f(S) : |S| \le k, f$单调增加$]$ 问题

贪心算法

1 $S \leftarrow \varnothing$

2 若$|S| < k$, 则

- $i \leftarrow \arg\max_{i \in E \setminus S} \big(f(S \cup \{i\}) - f(S)\big)$
- $S \leftarrow S \cup \{i\}$
- 返回第 2 步

否则, 返回最终解 S

$\max[f(S) : |S| \leq k, f$单调增加$]$ 问题

贪心算法

1 $S \leftarrow \varnothing$

2 若$|S| < k$, 则

- $i \leftarrow \arg\max_{i \in E \setminus S} \big(f(S \cup \{i\}) - f(S)\big)$
- $S \leftarrow S \cup \{i\}$
- 返回第 2 步

否则, 返回最终解 S

定理 (Nemhauser, Wolsey and Fisher, MP 1978)

问题 $\max[f(S) : |S| \leq k]$ 的贪心算法是 $(1 - 1/e)$-近似的, 其中 $f(S)$ 单调不减.

令 O 为最优解, S 为贪心算法的解. $O \backslash S = \{i_1, \cdots, i_p\}$, $p \leq k$.
$S_0 = \emptyset$, $S_{i+1} = S_i \cup \{\arg\max_{j \in E \backslash S_i} \big(f(S_i \cup \{j\}) - f(S_i)\big)\}$, $0 \leq i \leq k-1$.

令 O 为最优解, S 为贪心算法的解. $O \backslash S = \{i_1, \cdots, i_p\}$, $p \leq k$.
$S_0 = \emptyset$, $S_{i+1} = S_i \cup \{\arg\max_{j \in E \backslash S_i} \left(f(S_i \cup \{j\}) - f(S_i)\right)\}$, $0 \leq i \leq k-1$.

$$f(O) \leq f(O \cup S_i) \qquad \text{(单调性)}$$

令 O 为最优解, S 为贪心算法的解. $O \backslash S = \{i_1, \cdots, i_p\}$, $p \le k$.
$S_0 = \emptyset$, $S_{i+1} = S_i \cup \{\arg\max_{j \in E \backslash S_i} \big(f(S_i \cup \{j\}) - f(S_i)\big)\}$, $0 \le i \le k-1$.

$$
\begin{aligned}
f(O) &\le f(O \cup S_i) && \text{(单调性)} \\
&= f(S_i) + \sum_{j=1}^{p} (f(S_i \cup \{i_1, \ldots, i_j\}) - f(S_i \cup \{i_1, \ldots, i_{j-1}\}))
\end{aligned}
$$

令 O 为最优解, S 为贪心算法的解. $O\backslash S=\{i_1,\cdots,i_p\}$, $p\le k$.
$S_0=\emptyset$, $S_{i+1}=S_i\cup\{\arg\max_{j\in E\backslash S_i}\big(f(S_i\cup\{j\})-f(S_i)\big)\}$, $0\le i\le k-1$.

$$
\begin{aligned}
f(O) &\le f(O\cup S_i) && \text{(单调性)}\\
&= f(S_i)+\sum_{j=1}^{p}(f(S_i\cup\{i_1,\ldots,i_j\})-f(S_i\cup\{i_1,\ldots,i_{j-1}\})) \\
&\le f(S_i)+\sum_{j=1}^{p}[f(S_i\cup\{i_j\})-f(S)] && \text{(次模性)}
\end{aligned}
$$

令 O 为最优解, S 为贪心算法的解. $O \backslash S = \{i_1, \cdots, i_p\}$, $p \leq k$.
$S_0 = \emptyset$, $S_{i+1} = S_i \cup \{\arg\max_{j \in E \backslash S_i} \big(f(S_i \cup \{j\}) - f(S_i)\big)\}$, $0 \leq i \leq k-1$.

$$
\begin{aligned}
f(O) &\leq f(O \cup S_i) && \text{(单调性)} \\
&= f(S_i) + \sum_{j=1}^{p} (f(S_i \cup \{i_1, \ldots, i_j\}) - f(S_i \cup \{i_1, \ldots, i_{j-1}\})) \\
&\leq f(S_i) + \sum_{j=1}^{p} [f(S_i \cup \{i_j\}) - f(S)] && \text{(次模性)} \\
&\leq f(S_i) + \sum_{j=1}^{p} [f(S_{i+1}) - f(S_i)]
\end{aligned}
$$

令 O 为最优解, S 为贪心算法的解. $O\backslash S=\{i_1,\cdots,i_p\}$, $p\le k$.
$S_0=\emptyset$, $S_{i+1}=S_i\cup\{\arg\max_{j\in E\backslash S_i}\big(f(S_i\cup\{j\})-f(S_i)\big)\}$, $0\le i\le k-1$.

$$\begin{aligned}
f(O) &\le f(O\cup S_i) && \text{(单调性)}\\
&= f(S_i)+\sum_{j=1}^{p}(f(S_i\cup\{i_1,\ldots,i_j\})-f(S_i\cup\{i_1,\ldots,i_{j-1}\})) &&\\
&\le f(S_i)+\sum_{j=1}^{p}[f(S_i\cup\{i_j\})-f(S)] && \text{(次模性)}\\
&\le f(S_i)+\sum_{j=1}^{p}[f(S_{i+1})-f(S_i)] && \text{(算法)}
\end{aligned}$$

令 O 为最优解, S 为贪心算法的解. $O\backslash S=\{i_1,\cdots,i_p\}$, $p\le k$.
$S_0=\emptyset$, $S_{i+1}=S_i\cup\{\arg\max_{j\in E\backslash S_i}\big(f(S_i\cup\{j\})-f(S_i)\big)\}$, $0\le i\le k-1$.

$$
\begin{aligned}
f(O) &\le f(O\cup S_i) && \text{(单调性)}\\
&= f(S_i)+\sum_{j=1}^{p}(f(S_i\cup\{i_1,\ldots,i_j\})-f(S_i\cup\{i_1,\ldots,i_{j-1}\}))\\
&\le f(S_i)+\sum_{j=1}^{p}[f(S_i\cup\{i_j\})-f(S)] && \text{(次模性)}\\
&\le f(S_i)+\sum_{j=1}^{p}[f(S_{i+1})-f(S_i)] && \text{(算法)}\\
&= f(S_i)+p(f(S_{i+1})-f(S_i)).
\end{aligned}
$$

从而,

$$f(S_{i+1})-f(S_i)\ge\frac{1}{k}(f(O)-f(S_i)).$$

$$f(S_{i+1}) - f(S_i) \geq \frac{1}{k}(f(O) - f(S_i)).$$

$$\begin{aligned} f(S) &= f(S_k) \\ &\geq \frac{1}{k}f(O) + (1 - \frac{1}{k})f(S_{k-1}) \end{aligned}$$

$$f(S_{i+1}) - f(S_i) \geq \frac{1}{k}(f(O) - f(S_i)).$$

$$\begin{aligned}
f(S) &= f(S_k) \\
&\geq \frac{1}{k}f(O) + (1 - \frac{1}{k})f(S_{k-1}) \\
&\geq \frac{1}{k}f(O) + (1 - \frac{1}{k})(\frac{1}{k}f(O) + (1 - \frac{1}{k})f(S_{k-2})) \\
&\geq \frac{f(O)}{k}(1 + (1 - \frac{1}{k}) + (1 - \frac{1}{k})^2 + \cdots + (1 - \frac{1}{k})^{k-1}) \\
&= \frac{f(O)}{k} \cdot \frac{1 - (1 - \frac{1}{k})^k}{1 - (1 - \frac{1}{k})} = f(O)\big(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\big) \\
&\geq f(O)(1 - \frac{1}{e})
\end{aligned}$$

$$f(S_{i+1}) - f(S_i) \geq \frac{1}{k}(f(O) - f(S_i)).$$

$$\begin{aligned}
f(S) &= f(S_k) \\
&\geq \frac{1}{k}f(O) + (1 - \frac{1}{k})f(S_{k-1}) \\
&\geq \frac{1}{k}f(O) + (1 - \frac{1}{k})(\frac{1}{k}f(O) + (1 - \frac{1}{k})f(S_{k-2})) \\
&\geq \frac{f(O)}{k}(1 + (1 - \frac{1}{k}) + (1 - \frac{1}{k})^2 + \cdots + (1 - \frac{1}{k})^{k-1}) \\
&= \frac{f(O)}{k} \cdot \frac{1 - (1 - \frac{1}{k})^k}{1 - (1 - \frac{1}{k})} = f(O)\big(1 - (1 - \frac{1}{k})^k\big) \\
&\geq f(O)(1 - \frac{1}{e})
\end{aligned}$$

最优性（Nemhauser and Wolsey, MOR 1978): 只允许多项式次次模函数值查询的条件下，$1 - 1/e$ 是不可改进的.

拟阵约束

设 f 是定义在拟阵 $(E, \mathcal{F})$ 上单调不减的次模函数.

贪心算法

1 $S \leftarrow \varnothing$

2 若存在 $i \in E \backslash S$ 使得 $S \cup \{i\} \in \mathcal{F}$,

- $i \leftarrow \arg\max_{i \in E \backslash S, S \cup \{i\} \in \mathcal{F}} \big(f(S \cup \{i\}) - f(S)\big)$
- $S \leftarrow S \cup \{i\}$
- 返回第 2 步

否则, 返回最终解 S

拟阵约束

设 f 是定义在拟阵 $(E, \mathcal{F})$ 上单调不减的次模函数.

贪心算法

1. $S \leftarrow \varnothing$
2. 若存在 $i \in E \backslash S$ 使得 $S \cup \{i\} \in \mathcal{F}$,
    - $i \leftarrow \arg\max_{i \in E \backslash S, S \cup \{i\} \in \mathcal{F}} \big(f(S \cup \{i\}) - f(S)\big)$
    - $S \leftarrow S \cup \{i\}$
    - 返回第 2 步

   否则, 返回最终解 S

定理

贪心算法是 1/2-近似的.

背包约束

贪心算法

- A: 满足背包约束情形下选择边际价值最大的元素. 近似比可以任意差!
- B: 满足背包约束情形下选择边际收益性价比最大的元素. 近似比仍任意差!

改进的贪心算法

- 两个贪心算法 A 和 B 给出的解中选好的. 其近似比至少是 $(1-1/e)/2$. (Leskovec et al., KDD 2007)
- 枚举三个元素，然后再用算法 B，近似比为 $1-1/e$. (Sviridenko, ORL 2004)

伪布尔次模

伪布尔函数 (pseudo-Boolean function)

伪布尔函数 f 是定义在有限个 0-1 变量上的实值函数:

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}.$$

伪布尔次模

伪布尔函数 (pseudo-Boolean function)

伪布尔函数 f 是定义在有限个 0-1 变量上的实值函数:

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B}^n$ 中的元素与 $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ 中的集合是一一对应的.

伪布尔次模

伪布尔函数 (pseudo-Boolean function)

伪布尔函数 f 是定义在有限个 0-1 变量上的实值函数:

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B}^n$ 中的元素与 $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ 中的集合是一一对应的.

定义布尔操作如下: 对 $x, y \in \mathbb{B}^n$,

$$\begin{aligned}
x \wedge y &= (\min\{x_1, y_1\}, \ldots, \min\{x_n, y_n\}) \\
&= (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \\
x \vee y &= (\max\{x_1, y_1\}, \ldots, \max\{x_n, y_n\}) \\
&= (x_1 + y_1 - x_1 y_1, \ldots, x_n + y_n - x_n y_n)
\end{aligned}$$

伪布尔次模

伪布尔函数 (pseudo-Boolean function)

伪布尔函数 f 是定义在有限个 0-1 变量上的实值函数:

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B}^n$ 中的元素与 $E = \{1, 2, \dots, n\}$ 中的集合是一一对应的.

定义布尔操作如下: 对 $x, y \in \mathbb{B}^n$,

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (\min\{x_1, y_1\}, \dots, \min\{x_n, y_n\}) \\ &= (x_1 y_1, \dots, x_n y_n) \\ x \vee y &= (\max\{x_1, y_1\}, \dots, \max\{x_n, y_n\}) \\ &= (x_1 + y_1 - x_1 y_1, \dots, x_n + y_n - x_n y_n) \end{aligned}$$

伪布尔函数次模性表达

$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y), \forall x, y \in \mathbb{B}^n$

推广到格次模

格

偏序集 $\mathbb{L}^n$ 称为格, 若 $\forall x, y \in \mathbb{L}^n$, 有 $x \vee y \in \mathbb{L}^n$ 且 $x \wedge y \in \mathbb{L}^n$.

推广到格次模

格

偏序集 $\mathbb{L}^n$ 称为格, 若 $\forall x, y \in \mathbb{L}^n$, 有 $x \vee y \in \mathbb{L}^n$ 且 $x \wedge y \in \mathbb{L}^n$.

格次模函数

函数 $f \colon \mathbb{L}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 称为格次模, 若 $\forall x, y \in \mathbb{L}^n$,
$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y)$.

推广到格次模

格

偏序集 $\mathbb{L}^n$ 称为格, 若 $\forall x, y \in \mathbb{L}^n$, 有 $x \vee y \in \mathbb{L}^n$ 且 $x \wedge y \in \mathbb{L}^n$.

格次模函数

函数 $f : \mathbb{L}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 称为格次模, 若 $\forall x, y \in \mathbb{L}^n$,
$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y)$.

- $\mathbb{L} = \{0, 1\}$: 伪布尔格 $\iff$ 次模集合函数

推广到格次模

格

偏序集 $\mathbb{L}^n$ 称为格, 若 $\forall x, y \in \mathbb{L}^n$, 有 $x \vee y \in \mathbb{L}^n$ 且 $x \wedge y \in \mathbb{L}^n$.

格次模函数

函数 $f : \mathbb{L}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 称为格次模, 若 $\forall x, y \in \mathbb{L}^n$,
$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y)$.

- $\mathbb{L} = \{0, 1\}$: 伪布尔格 $\iff$ 次模集合函数
- $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$: 整数格
- $\mathbb{L} = \mathbb{R}$: 连续实数格