第二讲

线性规划的单纯形法

线性规划（LP）基本模型

$$
\begin{aligned}
max \quad & z = c^T x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

线性规划的基本原理

极点γ： γ是凸集中的点，其不能表示成凸集中任意两个不同点的严格凸组合

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c^T x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

z的极大值一定能在极点处取得

假设$r(A) = m$ (行满秩)

$$A = (A_B \quad A_N)$$

基矩阵　非基矩阵

$$x = (x_B \quad x_N)$$

基变量　非基变量

$$\begin{cases} x_B = A_B^{-1} b \geq 0 \\ x_N = 0 \end{cases}$$ 基可行解

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，反之亦然。

基本定理：线性规划的基可行解是其极点，反之亦然。

证明:

极点 $\Rightarrow$ 基可行解:

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，反之亦然。

证明:

极点$\Rightarrow$基可行解:

若x不是基可行解，则$x=(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)$

$x_i>0, i=1,\dots,k$

$a_1,\dots,a_k$

线性相关

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，反之亦然。

证明:

极点$\Rightarrow$基可行解:

$x_i > 0, i = 1, \dots, k$

若x不是基可行解，则$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$

$a_1, \dots, a_k$ 线性相关

则存在$\lambda_1, \dots, \lambda_k$不全为零，使得$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，反之亦然。

证明:

极点 $\Rightarrow$ 基可行解:

$x_i > 0, i = 1, \dots, k$

若x不是基可行解，则$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$

$a_1, \dots, a_k$ 线性相关

则存在$\lambda_1, \dots, \lambda_k$不全为零，使得$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$

取$x' = x + \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

$x'' = x - \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，反之亦然。

证明:

极点⇨基可行解:

若x不是基可行解，则$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$

$x_i > 0, i = 1, \dots, k$

$a_1, \dots, a_k$ 线性相关

则存在$\lambda_1, \dots, \lambda_k$不全为零，使得$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$

取$x' = x + \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

$x'' = x - \varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$

$x \neq x' \neq x'' \neq x$

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，反之亦然。

证明:

极点$\Rightarrow$基可行解:

$x_i > 0, i = 1, \ldots, k$

若x不是基可行解，则$x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$

$a_1, \ldots, a_k$ 线性相关

则存在$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$不全为零，使得$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$

取$x' = x + \varepsilon(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)$

$$x'' = x - \varepsilon(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)$$

$$x \neq x' \neq x'' \neq x$$

$$Ax' = Ax + \varepsilon(A(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)^T)$$
$$= Ax + \varepsilon(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) = Ax = \mathrm{b}$$

$$Ax'' = Ax' = Ax = b$$

基本定理： 线性规划的基可行解是其极点，反之亦然。

证明:

极点⇨基可行解:

$x_i > 0, i = 1, \ldots, k$

若x不是基可行解，则$x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$

$a_1, \ldots, a_k$ 线性相关

则存在$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$不全为零，使得$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$

取$x' = x + \varepsilon(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)$

$x'' = x - \varepsilon(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)$

$x \neq x' \neq x'' \neq x$

$$Ax' = Ax + \varepsilon(A(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)^T)$$
$$= Ax + \varepsilon(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) = Ax = \mathrm{b}$$

$Ax'' = Ax' = Ax = b$

x是x'和x''凸组合中的点，不是极点，矛盾。

基可行解$\Longrightarrow$ 极点：

基可行解 ⇨ 极点：

若x不是极点，则可在可行域中找到到不同的两点

$x' = (x_1', \ldots, x_n')^T$， $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'')^T$

使得$x = \lambda x' + (1-\lambda)x'' 0 < \lambda < 1$；

基可行解 $\Longrightarrow$ 极点:

若x不是极点，则可在可行域中找到到不同的两点

$x' = (x_1', \dots, x_n')^T$， $x'' = (x_1'', \dots, x_n'')^T$

使得$x = \lambda x' + (1-\lambda)x'' 0 < \lambda < 1$；

$$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

$a_1, \dots, a_k$

$x_i > 0, i = 1, \dots, k$

$j > k,\ x_j' = x_j'' = x_j = 0$

基可行解 $\Longrightarrow$ 极点:

若x不是极点，则可在可行域中找到到不同的两点

$x' = (x_1', \ldots, x_n')^T$， $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'')^T$

使得$x = \lambda x' + (1-\lambda)x'' 0 < \lambda < 1$；

$$x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

$a_1, \ldots, a_k$ $\boxed{x_i > 0, i = 1, \ldots, k}$ $\boxed{j > k,\ x_j' = x_j'' = x_j = 0}$

由于x'和x''是可行解，所以有$\sum_{j=1}^{k} a_j\, x_j' = \mathrm{b}, \sum_{j=1}^{k} a_j\, x_j'' = \mathrm{b}$,

二者相减，得$\sum_{j=1}^{k} a_j (\, x_j' - x_j'') = 0$；

基可行解 $\Longrightarrow$ 极点:

若x不是极点，则可在可行域中找到到不同的两点

$x' = (x_1', \dots, x_n')^T$， $x'' = (x_1'', \dots, x_n'')^T$

使得$x = \lambda x' + (1-\lambda)x'' 0 < \lambda < 1$；

$$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

$a_1, \dots, a_k$ $\boxed{x_i > 0, i = 1, \dots, k}$ $\boxed{j > k,\ x_j' = x_j'' = x_j = 0}$

由于x'和x''是可行解，所以有$\sum_{j=1}^{k} a_j\, x_j' = \mathrm{b}, \sum_{j=1}^{k} a_j\, x_j'' = \mathrm{b}$,

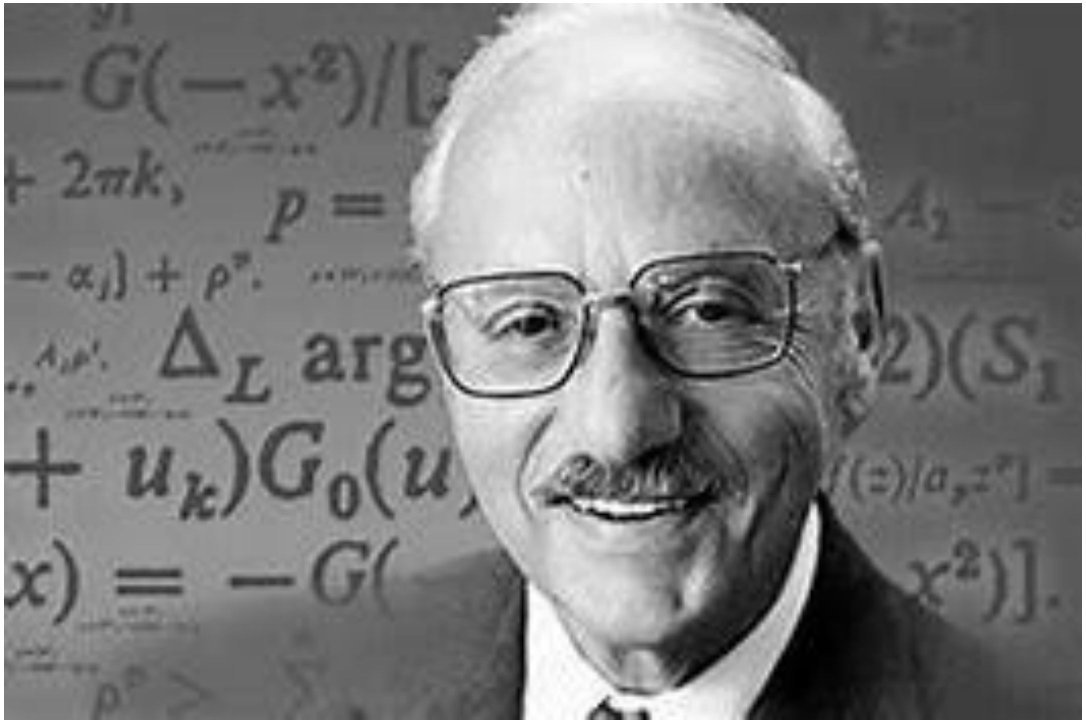
二者相减，得$\sum_{j=1}^{k} a_j(\, x_j' - x_j'') = 0$；

x'和x''不相等，所以$x_j' - x_j''$不全为零，$a_1, \dots, a_k$ 线性相关;

故$x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ 不是基可行解。

单纯形法 (Simplex Method 1947)

George Dantzig
(1914-2004)



单纯形法

例:

$$\max \ z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

单纯形法

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ 标准形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

单纯形法

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

标准形式 $\Rightarrow$

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0,0,3,1)^T$，$z = 0$

单纯形法

例:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}
\quad \xrightarrow{\text{标准形式}} \quad
\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0,0,3,1)^T$， $z = 0$

典则形式：用非基变量表示基变量与目标函数

单纯形法

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

标准形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0,0,3,1)^T$， $z = 0$

典则形式：用非基变量表示基变量与目标函数

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

单纯形法

例：

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

标准形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0,0,3,1)^T$，$z = 0$

典则形式：用非基变量表示基变量与目标函数

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

x_2入基

x_1不变

单纯形法

例：

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$\xrightarrow{\text{标准形式}}$

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

构造初始基本可行解 $x^{(0)} = (0,0,3,1)^T$，$z = 0$

典则形式：用非基变量表示基变量与目标函数

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

x_2入基

x_1不变

x_4出基 $x^{(1)} = (0,1,2,0)^T$，$z = 2$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

x_2入基

x_1不变

x_4出基　$x^{(1)} = (0,1,2,0)^T$,　$z = 2$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

x_2入基

x_1不变

x_4出基 $x^{(1)} = (0,1,2,0)^T$, $z = 2$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_4 \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 \end{cases}$$

x_1入基

x_2不变

x_3出基

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

x_2入基

x_1不变

x_4出基 $x^{(1)} = (0,1,2,0)^T$, $z = 2$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_4 \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 \end{cases}$$

x_1入基

x_2不变

x_3出基 $x^{(2)} = (2,1,0,0)^T$, $z = 4$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

x_2入基

x_1不变

x_4出基　$x^{(1)} = (0,1,2,0)^T$,　$z = 2$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_4 \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 \end{cases}$$

x_1入基

x_2不变

x_3出基　$x^{(2)} = (2,1,0,0)^T$,　$z = 4$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ z = 4 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

x_2入基

x_1不变

x_4出基 $x^{(1)} = (0,1,2,0)^T$, $z = 2$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_4 \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 \end{cases}$$

x_1入基

x_2不变

x_3出基 $x^{(2)} = (2,1,0,0)^T$, $z = 4$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ z = 4 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

检验数均小于等于零，
此时达到最优解

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

x_2入基

x_1不变

x_4出基　$x^{(1)} = (0,1,2,0)^T$，$z = 2$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_4 \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 \end{cases}$$

x_1入基

x_2不变

x_3出基　$x^{(2)} = (2,1,0,0)^T$，$z = 4$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ z = 4 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

检验数均小于等于零，
此时达到最优解

$x^{(*)} = (2,1,0,0)^T$，$z = 4$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} A_B & A_N \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = (A_B \quad A_N)$$

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = (A_B \quad A_N)$$

$$\boxed{\text{典则形式}} \begin{cases} x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1} b + (\underbrace{c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N}_{\boxed{\text{检验数}}}) x_N \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = (A_B \quad A_N)$$

$$\boxed{\text{典则形式}} \begin{cases} x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N \\ c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1} b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\boxed{\text{检验数}}} x_N \end{cases}$$

$$\bar{A} = A_B^{-1} A_N = (\bar{a}_{ij})_{m\times(n-m)}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = (A_B \quad A_N)$$

$$\boxed{\text{典则形式}}\ \begin{cases} x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N \\ c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1} b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\boxed{\text{检验数}}} x_N \end{cases}$$

$$\bar{A} = A_B^{-1} A_N = (\bar{a}_{ij})_{m\times(n-m)}$$

非基变量$x_j(j = m+1, \ldots, n)$的检验数$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i\, \bar{a}_{ij}$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = (A_B \quad A_N)$$

$$\text{典则形式}\begin{cases} x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1} b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\text{检验数}} x_N \end{cases}$$

$$\bar{A} = A_B^{-1} A_N = (\bar{a}_{ij})_{m\times(n-m)}$$

非基变量$x_j(j = m+1, \dots, n)$的检验数$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i\, \bar{a}_{ij}$

若$\sigma_j \le 0(j = m+1, \dots, n)$，则$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$为最优解；

若$\exists \sigma_j > 0$且$\bar{a}_{ij} \le 0$，$\forall i = 1, \dots, m$，则最优值无限大。

	$\boldsymbol{c_B}$	$\boldsymbol{c_N}$	
x_B	$\boldsymbol{A_B}$	$\boldsymbol{A_N}$	b

检验数

目标值相反数

	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{c_N} - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$\boldsymbol{I_{m\times m}}$	$A_B^{-1} \boldsymbol{A_N}$	$A_B^{-1} b$

	$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{c}_N$	
x_B	$\boldsymbol{A}_B$	$\boldsymbol{A}_N$	b

检验数　　目标值相反数

	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{c}_N - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}}$	$A_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$	$A_B^{-1} b$

$$x_i + \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$$

$min_{\bar{a}_{ij}>0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$对应的$i$出基

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

标准形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1

例:

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

标准形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1

	1	0	0	-2	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

例：

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ 标准形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1

$\Rightarrow$

	1	0	0	-2	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

$\Downarrow$

	0	0	-1	-1	-4
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

例：

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

标准形式

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1

	1	0	0	-2	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

	0	0	-1	-1	-4
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

$$x^{(*)} = (2,1,0,0)^T, \quad z = 4$$

初始可行解-两阶段法

$$\begin{aligned} &\max \quad z = c^T x \\ &s.t. \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \\ &s.t. \quad Ax + \bar{x} = b \\ &\qquad\quad x, \bar{x} \geq 0 \end{aligned}$$

初始可行解-两阶段法

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \\ s.t. \quad & Ax + \bar{x} = b \\ & x, \bar{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- 若$min\ \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i = 0$，则后者得到的解是原问题的一个可行解
- 若$min\ \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i > 0$，则原问题无解