第十讲 拟阵（Matroid）

定义：满足下列条件的独立系统 $(E,\mathcal{F})$ 称为拟阵：

(M_1) $\phi \in \mathcal{F}$

(M_2) 若 $Y \subseteq X \in \mathcal{F}$，则 $Y \in \mathcal{F}$

(M_3) 若 $X, Y \in \mathcal{F}$，且 $|X|>|Y|$，则存在 $e \in X \setminus Y$，使得 $Y \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

更多等价定义

(M_3')：若 $X, Y \in \mathcal{F}$，$|X|=|Y|+1$，则 $\exists\, e \in X \setminus Y$，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

(M_3'') 对 $\forall F \subseteq E$，F 上的基有相同的元素个数

$(M_3'') \Rightarrow (M_3)$：对 $X, Y \in \mathcal{F}$，$|X|>|Y|$，Y 不可能是 $X \cup Y$ 的基，故 Y 可以从 $X \setminus Y$ 中扩充

拟阵（Matroid）

由 (M_3'') 知：

- △ 拟阵的秩商为 1
- △ 拟阵的贪心算法 Best-In 是最优的

Worst-Out 也是最优的

定理：拟阵的对偶也是拟阵

且对 $F \subseteq E$，有：

$$r^*(F) = |F| + r(E \setminus F) - r(E)$$

r^*, r 分别是 $(E, \mathcal{F}^*)$ 和 $(E, \mathcal{F})$ 的 $\boxed{\text{秩函数}}$

拟阵的例子

(1) $E=\{$某个矩阵的所有列向量$\}$

$\mathcal{F}=\{F\subseteq E \mid F$中的向量线性无关$\}$

(2) E: 有限个元素的集合

k: 非负整数

$\mathcal{F}=\{F\subseteq E \mid |F|\le k\}$

(3) E: 无向图$G=(V,E)$的边集

$\mathcal{F}=\{F\subseteq E \mid (V(G),F)$是森林$\}$

(3)的证明:

设F_1和F_2为两个森林, $|F_1|>|F_2|$

若$\forall e\in F_1\setminus F_2$, $F_2\cup\{e\}$含有圈

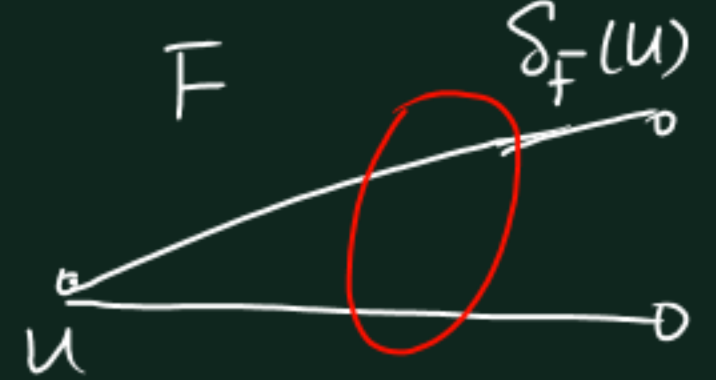
知$e=\{u,v\}$的两个顶点在F_2中属于同一分支. 所以F_2的分支数$\le F_1$的分支数, 矛盾

(4) 给定无向图 $G=(V,E)$ 及其一个顶点独立集 S（S 中的任两点不相邻），下面的独立系统是拟阵：

$E = E(G)$，$k_u \in \mathbb{Z}^+$
$u \in S$

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid |\delta_F(u)| \le k_u,\ u \in S\}$$

$\delta_F(u)$ 为 F 上 u 关联的边集



设 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$，$|F_1| > |F_2|$

$$S' = \{u \in S \mid |\delta_{F_2}(u)| = k_u\}$$

注意：$\forall u \in S'$，$|\delta_{F_1}(u)| \le k_u$

在 $F_1 \setminus F_2$ 中必存在边 $e \notin \delta(u)$，$u \in S'$

知 $F_2 \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

拟阵的交

定义：设 $(E, \mathcal{F}_1)$ 和 $(E, \mathcal{F}_2)$ 为两独立系统，二者的交为 $(E, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$

仍是独立系统

拟阵的交是拟阵吗？

命题：任何一个独立系统 $(E, \mathcal{F})$ 为有限多个拟阵的交

证明：设 C_i 为 $(E, \mathcal{F})$ 上的任一圈

令 $\mathcal{F}_i = \{ F \subseteq E \mid C_i \setminus F \neq \phi \}$

则 $(E, \mathcal{F}_i)$ 为拟阵

则 $\mathcal{F} = \bigcap_i \mathcal{F}_i$

$$\mathcal{F}_i = \{ F \subseteq E \mid C_i \setminus F \neq \phi \}$$

设 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_i$

$$|F_1| = |F_2| + 1$$

△ 若 $\exists\, e \in F_1 \setminus F_2$，且 $e \notin C_i$

那么 $F_2 \cup \{e\} \in \mathcal{F}_i$

△ 若 $F_1 \setminus F_2 \subseteq C_i$

且 $|F_1 \setminus F_2| \geqslant 2$

则 $\forall\, e \in F_1 \setminus F_2$

$F_2 \cup \{e\} \in \mathcal{F}_i$

△ 若 $F_1 \setminus F_2 \subseteq C_i$

且 $|F_1 \setminus F_2| = 1$

那么 $F_1 \supset F_2$

$\{e\} = F_1 \setminus F_2$, $F_1 \cup \{e\} = F_2$

秩商的估计（II）

定理：若独立系统 $(E,\mathcal{F})$ 是 p 个拟阵的交，则 $q(E,\mathcal{F}) \geq 1/p$

由前面的结论可得

例子：二部图 $G=(A \cup B, E)$

$\mathcal{F} = \{M \subseteq E \mid M$ 是 G 中的匹配$\}$

则 $(E,\mathcal{F})$ 是下面两个拟阵之交

$\mathcal{F}_1 = \{F \subseteq E \mid |\delta_F(v)| \leq 1, v \in A\}$

$\mathcal{F}_2 = \{F \subseteq E \mid |\delta_F(v)| \leq 1, v \in B\}$

Worst-Out 证明

极小化问题

$$\frac{G(E,\mathcal{F},c)}{OPT(E,\mathcal{F},c)} \le \max_{F\subseteq E} \frac{|F|-\rho^*(F)}{|F|-r^*(F)}$$

$c(e_1) \geq c(e_2) \geq \cdots \geq c(e_n)$

G_n: worst-out 的解

O_n: 最优解

$E_j = \{e_1, \cdots, e_j\}$

$G_j = G_n \cap E_j$

$O_j = O_n \cap E_j$

$G_j \cup (E\setminus E_j)$ 含有E的基

但 $G_j \cup (E\setminus E_j)\setminus\{e\}$ 不含E的基，$\forall e \in G_j$

$\Longrightarrow E\setminus\{G_j \cup (E\setminus E_j\} \in \mathcal{F}^*$

$\Longrightarrow E_j\setminus G_j \in \mathcal{F}^*$ 为 $(E,\mathcal{F}^*)$ 在 E_j 上的基

$\Longrightarrow |E_j|-|G_j| \geq \rho^*(E_j)$

又因为

$O_n \subseteq E \setminus (E_j \setminus O_j)$

且 O_n 是一个基

所以 $E_j \setminus O_j \in \mathcal{F}^*$

从而 $|E_j| - |O_j| \leq r^*(E_j)$

即: $|E_j| \leq |E_j| - \rho^*(E_j)$

$|O_j| \geq |E_j| - r^*(E_j)$

令 $\lambda = \max\limits_{F \subseteq E} \dfrac{|F| - \rho^*(F)}{|F| - r^*(F)}$

有 $|E_j| \leq \lambda |O_j|$

$$C(G_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(|G_j| - |G_{j-1}|\right) c(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |G_j| \left(c(e_j) - c(e_{j+1}) \right)$$

$$\le \lambda \sum_{j=1}^{n} |O_j| \left(c(e_j) - c(e_{j+1}) \right)$$

$$= \lambda C(O_n)$$

例子:

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e \in F \\ 0, & e \notin F \end{cases}$$

F是使λ取到的集合

设 B_1 是 F 上的关于$(E, \mathcal{F}^*)$的基，且 $|B_1| = \rho^*(F)$

对 e_j 排序使得前 $|B_1|$ 个元素来自 B_1

$e_1, e_2, \cdots, e_{|B_1|}, \cdots\cdots, e_n$

Worst-out 的解:

$$G(E,\mathcal{F},c)=|F|-|B_1|=|F|-\rho^*(F)$$

最优解:

$$OPT(E,\mathcal{F},c)=|F|-r^*(F)$$