# Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Letný semester 2017/2018

## Obsah

**I. prednáška**

# O logike a tomto kurze
# Syntax výrokovej logiky

19. februára 2018

## 1. Úvod

### 1.1. O logike

I.1 Čo je logika

- Logika je vedná disciplína, ktorá študuje formy usudzovania
  - filozofická, matematická, informatická, výpočtová
- Tri dôležité predmety záujmu:

  **Jazyk** zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

  *Syntax* pravidlá zápisu tvrdení

  *Sémantika* význam tvrdení

  **Usudzovanie (inferencia)** odvodenie nových dôsledkov z doterajších poznatkov

  **Dôkaz** presvedčenie ostatných o správnosti záverov usudzovania

I.2 Poznatky a teórie

- V logike slúži **jazyk** na zápis tvrdení, ktoré vyjadrujú informácie — poznatky o svete
- Súbor poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, tvorí **teóriu**

*Príklad* 1.1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a chceme na ňu pozvať niektorých z nich.
Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

### I.3 Možné svety a logické dôsledky

- Tvrdenie rozdeľuje množinu **možných stavov sveta** na tie stavy, v ktorých je pravdivé (**modely**), a tie stavy, v ktorých je nepravdivé
- Teória môže mať viacero modelov (ale aj žiaden)

  *Príklad* 1.2. Vymenujme možné stavy prítomnosti Kim, Jima a Sarah na párty a zistime, v ktorých sú pravdivé jednotlivé tvrdenia našej teórie a celá teória.
- **Logickými dôsledkami** teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých* modeloch teórie (svetoch, v ktorých je pravdivá)

*Príklad* 1.3. Logickým dôsledkom teórie (P1), (P2), (P3) je napríklad:
Sarah nepôjde na párty.

### I.4 Logické usudzovanie

- Vymenovanie všetkých svetov je často nepraktické až nemožné
- Logické dôsledky môžeme *odvodzovať* ***usudzovaním*** (*inferovať*)
- Pri odvodení vychádzame z **premís** (*predpokladov*) a postupnosťou **úsudkov** dospievame k **záverom**

  *Príklad* 1.4. Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).
  Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
  Potom podľa (P2) pôjde aj Kim.
  Potom podľa (P1) nepôjde Sarah.
  Teda: Ak na párty pôjde Jim, nepôjde Sarah.
- Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je logickým dôsledkom premís a odvodenie je jeho **dôkazom** z premís

## I.5 Usudzovacie pravidlá, korektnosť, dedukcia

- Už Aristoteles zistil, že správne úsudky sa dajú rozpoznať podľa ich *formy*, bez ohľadu na obsah

| Ak pôjde Jim, tak pôjde Kim. | Ak je dilítium dekryštalizované, tak antihmota neprúdi. |
| --- | --- |
| Pôjde Jim. | Dilítium je dekryštalizované. |
| Pôjde Kim. | Antihmota neprúdi. |

- **Usudzovacie (inferenčné) pravidlo** je *vzor* úsudkov daný formou tvrdení, s ktorými pracuje

| | |
| --- | --- |
| Ak $A$, tak $B$.<br>$A$. | vzory premís |
| $B$. | vzor záveru |

- **Korektné** pravidlo odvodí z pravdivých premís pravdivý záver

- **Dôkaz** je teda **postupnosť použití korektných usudzovacích pravidiel** (najlepšie *samozrejmých* pre čitateľa dôkazu)

- **Dedukcia** — usudzovanie iba pomocou korektných pravidiel

## I.6 Nededuktívne pravidlá

Niektoré **nie korektné** usudzovacie pravidlá sú prakticky užitočné:

**Indukcia** — zovšeobecnenie:

Videl som tisíc havranov.
Žiaden nebol inej farby ako čiernej.
———
Všetky havrany sú čierne.

Platí aj pre červené Fabie?

**Abdukcia** — odvodzovanie možných príčin z následkov:

Ak je batéria vybitá, auto nenaštartuje.
Ak je nádrž prázdna, auto nenaštartuje.
Nádrž nie je prázdna.
Auto nenaštartovalo.
———
Batéria je vybitá.

Čo ak nám kuna prehrýzla káble?

**Usudzovanie na základe analógie** (podobnosti)

$$\frac{\text{Venuša má atmosféru, podobne ako Zem.} \quad \text{Na Zemi sa prejavuje skleníkový efekt.}}{\text{Na Venuši sa prejavuje skleníkový efekt.}}$$

A čo: Atmosféra Zeme je dýchateľná?

## I.7 Nededuktívne pravidlá

- **Závery nededuktívnych pravidiel** treba považovať za **hypotézy** — plauzibilné, ale **neoverené** tvrdenia
- Hypotézy je **nutné preverovať!**
- Niektoré špeciálne prípady sú správne,
  napríklad *matematická indukcia*
- Usudzovanie s nededuktívnymi pravidlami je teda *hypotetické*
- Hypotetické usudzovanie je dôležité pre umelú inteligenciu
  - Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský predmet)
- **V tomto kurze sa budeme zaoberať iba dedukciou**

## I.8 Formálny jazyk

- **Prirodzený jazyk** je problematický — tvrdenia môžu byť viacznačné, ťažko zrozumiteľné, používať obraty a ustálené výrazy so špeciálnym významom
  - Mišo *je* myš.
  - Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
  - Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; ak sa rozhoduje o nadstavbe alebo o vstavbe v podkroví alebo povale, vyžaduje sa zároveň súhlas všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome na najvyššom poschodí. — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Nikto nie je dokonalý.

- Tieto ťažkosti sa obchádzajú použitím **formálneho** jazyka
  - Presne definovaná, zjednodušená syntax (pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam) — podobne ako programovací jazyk

- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv **formalizovať**, a potom naň môžeme použiť logický aparát

## I.9 Formalizácia poznatkov

- S formalizáciou ste sa už stretli pri riešení slovných úloh

  Karol je trikrát starší ako Mária.
  Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. ⇝
  Koľko rokov majú Karol a Mária?

  $$k = 3 \cdot m$$
  $$k + m = 12$$

- Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky

  *Príklad* 1.5. Sformalizujme náš párty príklad:

  P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

  P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

  P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

  P3: Sarah nepôjde bez Jima.

## I.10 Kalkuly — formalizácia usudzovania

- Pre mnohé logiky sú známe **kalkuly** —
  množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

  **korektné** — odvodzujú iba logické dôsledky

  **úplné** — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky

- Kalkuly existujú aj v iných častiach matematiky
  - na počítanie s číslami, zlomkami (aritmetický kalkul),

  - riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
  - derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

  ...

  Nie vždy sú úplné

## I.11 Výpočtová logika — automatizácia usudzovania

- Základná idea **výpočtovej logiky**:
  - Napíšeme program,
    ktorý systematicky aplikuje pravidlá logického kalkulu,
    kým neodvodí želaný dôsledok,
    alebo nevyčerpá všetky možnosti (nie vždy je ich konečne veľa!)
- Skutočnosť je komplikovanejšia, ale existuje množstvo automatických usudzovacích systémov
- *Jeden* z prienikov informatiky a logiky

## I.12 Výpočtová logika — aplikácie

- Overovanie, dopĺňanie, hľadanie dôkazov matematických viet
- Špecifikácia a verifikácia hardvérových obvodov, programov, komunikačných protokolov
  - Špecifikácia a verifikácia programov (3. ročník)
  - Formálne metódy tvorby softvéru (magisterský)
- Logické programovanie
  - Programovacie paradigmy (3. ročník)
  - Výpočtová logika (magisterský)
  - Logické programovanie ASP (magisterský)
- Databázy — pohľady, integritné obmedzenia, optimalizácia dopytov

    - Deduktívne databázy (3. ročník)

- Sémantický web a integrácia dát z rôznych zdrojov
    - Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský)
    - Ontológie a znalostné inžinierstvo (magisterský)

- Analýza zákonov, regulácií, zmlúv

I.13

***Spomeňte si I.1***
Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých svetoch, v ktorých je pravdivá teória, je jej

A. premisou,
B. logickým dôsledkom,
C. záverom,
D. implikáciou.

***Spomeňte si I.2***
Účelom dôkazu je presvedčiť ostatných o správnosti nášho úsudku. Preto musí pozostávať z . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

***Spomeňte si I.3***
Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, sa nazýva:

A. abdukcia,
B. interpretácia,
C. formalizácia,
D. dedukcia,
E. indukcia,
F. inferencia.

## 1.2. O tomto kurze

I.14 Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

**Teoreticky**

- Jazykmi výrokovej a predikátovej logiky, ich syntaxou a sémantikou
- Korektnosťou usudzovacích pravidiel

- Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulov
- Automatizovateľnými kalkulmi

**Prakticky**
- Vyjadrovaním problémov v jazyku logiky
- Automatizovaním riešenia problémov použitím SAT-solverov
- Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov — formúl a termov)
- Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov

**Filozoficky**
- Zamýšľanými a nezamýšľanými okolnosťami platnosti tvrdení
- Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

I.15 Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

# 2. Výroková logika

## 2.1. Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

I.16 Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

*Výrok* – veta, o pravdivosti ktorej má zmysel uvažovať (zväčša oznamovacia).

*Príklady* 2.1.

- Miro je v posluchárni F1.
- Slnečná sústava má deviatu planétu.
- Mama upiekla koláč, ale Editka dostala z matematiky štvorku.
- Niekto zhasol.

***Negatívne príklady***

- Toto je čudné.
- Píšte všetci modrým perom!

- Prečo je obloha modrá?

Výrokom priraďujeme *pravdivostné hodnoty*

### I.17 Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Operácie s výrokmi – *logické spojky*

- Vytvárajú nové výroky, zložené (súvetia).
- Majú povahu *funkcií* na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov (*boolovských* funkcií), teda pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

*Príklad* 2.2. Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, …

***Negatívny príklad***

Spojku „pretože“ nepovažujeme za *logickú* spojku.

Pravdivostná hodnota výroku „Emka ochorela, pretože zjedla babôčku“ sa nedá určiť funkciou na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov.

### I.18 (Meta) matematika výrokovej logiky

- Stredoškolský prístup príliš **neoddeľuje** samotný *jazyk* výrokovej logiky od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*
- V tomto kurze sa budeme snažiť byť **presní**
  - *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito
- Pojmy z výrokovej logiky budeme **definovať matematicky**
  - ako množiny, postupnosti, funkcie, atď. ←-- Matematika (1), (3)
- Na praktických cvičeniach veľa pojmov **zadefinujete programátorsky**
  - ako reťazce, slovníky, triedy a ich metódy ←-- Programovanie (1), (2)
- Budeme sa pokúšať **dokazovať** ich vlastnosti

- Budeme teda hovoriť *o formálnej logike* pomocou matematiky, ktorá je ale sama postavená na *logike v prirodzenom jazyku*
- Matematickej logike sa preto hovorí aj *meta* matematika, matematika ***o*** logike (a v konečnom dôsledku aj o matematike)

## 2.2. Syntax výrokovej logiky

I.19 Syntax výrokovej logiky

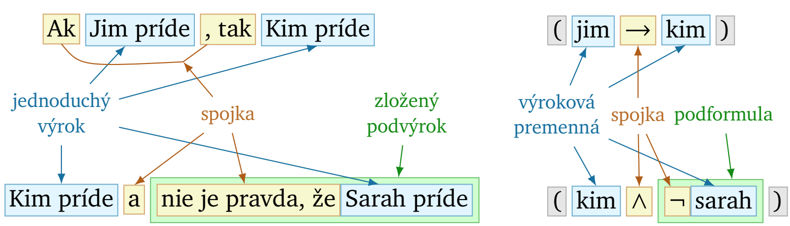
- Syntax sú pravidlá budovania viet v jazyku
- Pri formálnych jazykoch sú popísané matematicky
- Nedajte sa tým odradiť, nie je to oveľa iné ako programovanie
- Viac sa budete formálnymi jazykmi zaoberať na Úvode do teoretickej informatiky
- Naše definície vychádzajú prevažne z kníh [Smullyan, 1979] a [Švejdar, 2002]

I.20 Syntax výrokovej logiky

Aké tvrdenia chceme zapisovať vo výrokovej logike?

- Jednoduché výroky, ktorých štruktúra nás nebude zaujímať
  - „Miro sa nachádza v F1“, „Kim príde“

  Ich formálnu verziu nazveme **výrokové premenné**
- Zložené výroky, tvorené podvýrokmi a spojkou:



Ich formálnu verziu nazveme **formuly**

- Čo sú *základné* stavebné kamene týchto výrokov?
  - jednoduché výroky a spojky

  Tieto základné prvky nazveme **symboly**

### I.21 Symboly jazyka výrokovej logiky

**Definícia 2.3.** *Symbolmi jazyka výrokovej logiky* sú:

- *výrokové premenné* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$, ktorej prvkami nie sú symboly ¬, ∧, ∨, →, ( a ), ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- *logické* symboly (*logické spojky*): ¬, ∧, ∨, →
  (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie* a čítané „*nie*“, „*a*“, „*alebo*“, „*ak …, tak …*“);
- *pomocné* symboly: ( a ) (*ľavá zátvorka* a *pravá zátvorka*).

Spojka ¬ je *unárna* (má jeden argument).

Spojky ∧, ∨, → sú *binárne* (spájajú dve formuly).

*Poznámka* 2.4. Definícia je **záväzná** dohoda o význame pojmov.

### I.22 Symboly, výrokové premenné

Symbol je základný pojem, ktorý matematicky nedefinujeme (netvrdíme, že je to množina alebo podobne).

Je o čosi všeobecnejší ako pojem znak.

*Príklad* 2.5. Ako množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ môžeme zobrať všetky slová (teda konečné postupnosti) nad slovenskou abecedou a číslicami. Výrokovými premennými potom sú aj Jim, Kim, Sarah.

**Dohoda**

Výrokové premenné budeme *označovať* písmenami $p$, $q$, …, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Výrokové premenné formalizujú jednoduché výroky.

- Povedzme, že máme množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}\}$
- Ako môžu vyzerať formuly vybudované nad touto množinou?
  - Samotné premenné, napr. sarah.
  - Negácie premenných, napr. ¬sarah.
  - Premenné alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. (¬kim∨sarah).
  - Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. (¬(kim ∧ sarah) → (¬kim ∨ ¬sarah)).
- Ako presne popíšeme, čo je formula?

  *Induktívnou* definíciou:

  1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
  2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.



**Definícia 2.6.** Množina $\mathcal{E}$ všetkých *výrokových formúl* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

i. každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je výrokovou formulou z $\mathcal{E}$ (hovoríme jej *atomická formula* alebo iba *atóm*);

ii. ak $A$ je výroková formula z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je výrokovou formulou z $\mathcal{E}$ (*negácia* formuly $A$);

iii. ak $A$ a $B$ sú výrokové formuly z $\mathcal{E}$, tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú výrokovými formulami z $\mathcal{E}$ (*konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* formúl $A$ a $B$).

**Dohoda**

Výrokové formuly skrátene nazývame iba *formuly* a označujeme ich veľkými písmenami $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$, $Z$, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

### I.25 Výrokové formuly

*Príklad* 2.7. Nech $\mathcal{V} = \{\mathrm{kim}, \mathrm{jim}, \mathrm{sarah}\}$.
Ako vyzerá množina $\mathcal{E}$ všetkých výrokových formúl nad $\mathcal{V}$?

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} = \{&\mathrm{kim}, \mathrm{jim}, \mathrm{sarah}, && \text{podľa (i)}\\
&\neg\mathrm{kim}, \neg\mathrm{jim}, \neg\mathrm{sarah}, && \text{podľa (ii)}\\
&(\mathrm{kim} \land \mathrm{kim}), (\mathrm{kim} \land \mathrm{jim}), (\mathrm{kim} \land \mathrm{sarah}), && \text{podľa (iii) pre } \land\\
&(\mathrm{kim} \land \neg\mathrm{kim}), (\mathrm{kim} \land \neg\mathrm{jim}), (\mathrm{kim} \land \neg\mathrm{sarah}), &&\\
&(\mathrm{jim} \land \mathrm{kim}), (\mathrm{jim} \land \mathrm{jim}), (\mathrm{jim} \land \mathrm{sarah}), &&\\
&(\mathrm{jim} \land \neg\mathrm{kim}), (\mathrm{jim} \land \neg\mathrm{jim}), (\mathrm{jim} \land \neg\mathrm{sarah}), &&\\
&(\neg\mathrm{kim} \land \mathrm{kim}), (\neg\mathrm{kim} \land \mathrm{jim}), (\neg\mathrm{kim} \land \mathrm{sarah}), \dots, &&\\
&(\neg\mathrm{jim} \land \neg\mathrm{sarah}), \dots, && \text{podľa (iii) pre } \to\\
&(\mathrm{sarah} \lor (\mathrm{kim} \to \mathrm{jim})), \dots, && \text{a potom pre } \lor\\
&(\neg(\mathrm{kim} \land \mathrm{sarah}) \lor (\neg\mathrm{jim} \to \neg\mathrm{sarah})), \dots\} && \text{podľa (iii) pre } \land, \to, \lor
\end{aligned}
$$

### I.26 Vytvárajúca postupnosť

**Definícia 2.8.** *Vytvárajúcou postupnosťou* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen je výroková premenná z $\mathcal{V}$, alebo má tvar $\neg A$, pričom $A$ je nejaký predchádzajúci člen postupnosti, alebo má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde $A$ a $B$ sú nejaké predchádzajúce členy postupnosti.

*Vytvárajúcou postupnosťou pre $X$* je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je $X$.

**Tvrdenie 2.9.** *Postupnosť symbolov $A$ je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre $A$.*

### I.27 Vytvárajúca postupnosť

*Príklad* 2.10. Nájdime vytvárajúcu postupnosť pre formulu $(\neg\mathrm{kim} \to (\mathrm{jim} \lor \mathrm{sarah}))$.

## II. prednáška

# Sémantika výrokovej logiky

26. februára 2018

### II.1

***Spomeňte si II.1***
Ktoré z nasledujúcich postupností symbolov sú formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r, \ldots\}$?

A. $(p \lor \neg q \lor \neg r)$,

B. $(p \land \neg(q \to r))$,

C. $\neg(\neg(\neg p))$,

D. $(p \leftrightarrow \neg q)$.

### II.2 Ekvivalencia

**Dohoda**
Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.

### II.3 Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

- Predpokladajme, že by sme zadefinovali „formuly“ takto:

  Množina $\mathcal{E}$ všetkých *výrokových „formúl“* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

  i. každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je „formulou“ z $\mathcal{E}$;

  ii. ak $A$ je „formula“ z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je „formulou“ z $\mathcal{E}$;

  iii. ak $A$ a $B$ sú „formuly“ z $\mathcal{E}$, tak aj $A \land B$, $A \lor B$ a $A \to B$ sú „formulami“ z $\mathcal{E}$;

iv. ak $A$ je „formula“ z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov $(A)$ je „formulou“ z $\mathcal{E}$.

- Bola by potom $(jim \rightarrow kim \rightarrow \neg sarah)$ „formulou“?
- Aký by bol jej význam?

  Formulu by sme mohli čítať ako $A = (jim \rightarrow (kim \rightarrow \neg sarah))$ alebo ako $B = ((jim \rightarrow kim) \rightarrow \neg sarah)$.

  Čítanie $A$ hovorí, že Sarah nepríde, ak prídu Jim a Kim súčasne. To neplatí v *práve jednej* situácii: keď všetci prídu.

  Čítanie $B$ hovorí, že Sarah nepríde, ak alebo nepríde Jim alebo príde Kim. To však neplatí *v aspoň dvoch* rôznych situáciách: keď prídu všetci a keď príde Sarah a Kim, ale nie Jim.

## II.4 Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

**Tvrdenie 2.11** (o jednoznačnosti rozkladu). *Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}$ nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:*

- *$X$ je výroková premenná z $\mathcal{V}$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}$ taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}$ a jedna spojka $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ také, že $X = (A\, b\, B)$.*

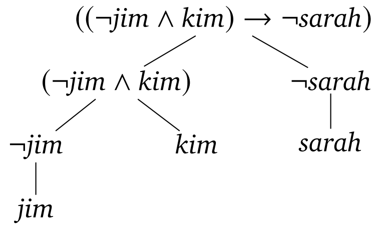
## II.5 Vytvárajúca postupnosť a vytvárajúci strom

- Konštrukciu formuly podľa definície si vieme predstaviť pomocou vytvárajúcej postupnosti:

$$jim, sarah, \neg jim, kim, \neg sarah, (\neg jim \wedge kim), ((\neg jim \wedge kim) \rightarrow \neg sarah)$$

- Postupnosť ale jasne nevyjadruje, *ktoré* z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

- Konštrukciu formuly si ale vieme predstaviť ako *strom*:




- Takéto stromy voláme vytvárajúce.
- Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zadefinujeme?

## II.6 Vytvárajúci strom formuly

**Definícia 2.12.** *Vytvárajúci strom* pre formulu $X$ je binárny strom $T$ obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni $T$ je formula $X$,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu $A$,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A b B)$, kde $b$ je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu $A$ a pravé formulu $B$,
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami.

## II.7 Podformuly

- Ako by ste nazvali formuly, z ktorých daná formula vznikla?

  Napríklad formuly $sarah$, $\neg jim$, $(\neg jim \wedge kim)$ pre

  $$((\neg jim \wedge kim) \to \neg sarah).$$

- Ako by ste nazvali formuly, z ktorých daná formula *bezprostredne/priamo* vznikla?

  V príklade vyššie sú to $(\neg jim \wedge kim)$ a $\neg sarah$.

- Ako tieto pojmy presne zadefinujeme?

**Definícia 2.13** (Priama podformula)**.**

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula $A$.
- Priamymi podformulami $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú formuly $A$ (*ľavá* priama podformula) a $B$ (*pravá* priama podformula).

**Definícia 2.14** (Podformula)**.** Vzťah *byť podformulou* je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca:

- Ak $X$ je priamou podformulou $Y$, tak $X$ je podformulou $Y$.
- Ak $X$ je podformulou $Y$ a $Y$ je podformulou $Z$,
  tak $X$ je podformulou $Z$.

## II.9 Meranie zložitosti formúl

- Zložitosť formúl by sa mohla merať napríklad jej dĺžkou (počtom symbolov)
- Prirodzenejšie je ale merať zložitosť počtom netriviálnych krokov potrebných na konštrukciu formuly:
  - pridanie negácie pred formulu,
  - spojenie formúl spojkou
- Tejto miere hovoríme *stupeň formuly*

  *Príklad* 2.15. Aký je stupeň formuly $((p \lor \neg q) \land \neg(q \to p))$?
- Ako stupeň zadefinujeme?

  Induktívne, podobne ako sme zadefinovali formuly:
  1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
  2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

**Definícia 2.16** (Stupeň formuly)**.**

- Výroková premenná je stupňa 0.
- Ak $A$ je formula stupňa $n$, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak $A$ je formula stupňa $n_1$ a $B$ je formula stupňa $n_2$, tak $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

**Definícia 2.16** (Stupeň formuly stručne, symbolicky)**.** *Stupeň* $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}$ definujeme pre každú výrokovú premennú $p \in \mathcal{V}$ a pre všetky formuly $A$, $B \in \mathcal{E}$ nasledovne:

- $\deg(p) = 0$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \land B)) = \deg((A \lor B)) = \deg((A \rightarrow B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

## II.11 Indukcia na stupeň formuly

**Veta 2.17** (Princíp indukcie na stupeň formuly)**.** *Nech $P$ je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}$). Ak platí súčasne*

báza indukcie: *každá formula stupňa* 0 *má vlastnosť $P$,*

indukčný krok: *pre každú formulu $X$ z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako* $\deg(X)$ *majú vlastnosť $P$,*
*vyplýva, že aj $X$ má vlastnosť $P$,*

*tak všetky formuly majú vlastnosť $P$ ($P = \mathcal{E}$).*

**Definícia 2.18** (Množina výrok. prem. formuly [vars($X$)])**.**

- Ak $p$ je výroková premenná, množinou výrokových premenných atomickej formuly $p$ je $\{p\}$.
- Ak $V$ je množina výrokových premenných formuly $A$, tak $V$ je tiež množinou výrok. prem. formuly $\neg A$.
- Ak $V_1$ je množina výrok. prem. formuly $A$ a $V_2$ je množina výrok. prem. formuly $B$, tak $V_1 \cup V_2$ je množinou výrok. prem. formúl $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$.

**Definícia 2.18** (vars($X$) stručnejšie)**.**

- Ak $p$ je výroková premenná, tak $\mathrm{vars}(p) = \{p\}$.
- Ak $A$ a $B$ sú formuly, tak $\mathrm{vars}(\neg A) = \mathrm{vars}(A)$ a $\mathrm{vars}((A \wedge B)) = \mathrm{vars}((A \vee B)) = \mathrm{vars}((A \rightarrow B)) = \mathrm{vars}(A) \cup \mathrm{vars}(B)$.

***Spomeňte si II.2***
Je nasledujúce tvrdenie pravdivé? Odpovedzte áno/nie.

> Vďaka jednoznačnosti rozkladu má každá formula práve jednu priamu podformulu.

***Spomeňte si II.3***
Určte pre formulu $((p \vee \neg q) \wedge \neg(q \rightarrow p))$ jej:

i. priame podformuly,

ii. podformuly,

iii. vytvárajúci strom.

***Spomeňte si II.4***
Stupeň formuly $((\neg p \leftrightarrow q) \wedge q)$ je ............................................
$\mathrm{vars}(((\neg p \leftrightarrow q) \wedge q)) =$ ..............................................

## 2.3. Sémantika výrokovej logiky

### II.14 Sémantika výrokovej logiky

- Syntax jazyka výrokovej logiky hovorí iba tom, ako sa zapisujú formuly ako postupnosti symbolov.
- Samé o sebe tieto postupnosti *nemajú* žiaden ďalší *význam*.
- Ten im dáva *sémantika* jazyka výrokovej logiky.
- Za význam výrokov považujeme ich pravdivostnú hodnotu.

### II.15 Ohodnotenie výrokových premenných

- Výrokové premenné predstavujú jednoduché výroky.
- Ich *význam* (pravdivosť) nie je pevne daný.
- Môže závisieť od situácie, stavu sveta
(Sára ide na párty, svieti slnko, zobral som si čiapku, ...).
- Ako vieme *programátorsky* popísať pravdivosť výrokových premenných v nejakom stave sveta? A *matematicky*?

**Definícia 2.19.** Nech $(t, f)$ je usporiadaná dvojica pravdivostných hodnôt, $t \neq f$, pričom hodnota $t$ predstavuje pravdu a $f$ nepravdu.

*Ohodnotením* množiny výrokových premenných $\mathcal{V}$ nazveme každé zobrazenie $v$ množiny $\mathcal{V}$ do množiny $\{t, f\}$ (teda každú funkciu $v\colon \mathcal{V} \to \{t, f\}$).

Výroková premenná $p$ je *pravdivá* pri ohodnotení $v$, ak $v(p) = t$.
Výroková premenná $p$ je *nepravdivá* pri ohodnotení $v$, ak $v(p) = f$.

### II.16 Ohodnotenie výrokových premenných

*Príklad* 2.20. Zoberme $t \neq f$ (napr. $t = 1, f = 0$), $\mathcal{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{á}, \mathrm{ä}, \dots, \mathrm{ž}, 0, \dots, 9, \_\}^+$.

Dnešné ráno by popísalo ohodnotenie $v_1$ množiny $\mathcal{V}$, kde (okrem iného):

$$v_1(\text{svieti\_slnko}) = t \qquad v_1(\text{zobral\_som\_si\_čiapku}) = f$$

Pondelkové ráno pred týždňom opisuje ohodnotenie $v_2$, kde okrem iného

$$v_2(\text{svieti\_slnko}) = f \qquad v_2(\text{zobral\_som\_si\_čiapku}) = f$$

Jednu zo situácií v probléme pozývania kamarátov na párty by popísalo ohodnotenie, v ktorom (okrem iného):

$$v_3(\text{sarah}) = t \qquad v_3(\text{kim}) = f \qquad v_3(\text{jim}) = t$$

Prečo „okrem iného“?

Kde v informatickej praxi **nie je** $f = 0$ a $t = 1$?

### II.17 Spĺňanie výrokových formúl

- Na formulu sa dá pozerať ako na **podmienku**,
  ktorú stav sveta buď **spĺňa** (je v tomto stave pravdivá)
  alebo **nespĺňa** (je v ňom nepravdivá).
- Z pravdivostného ohodnotenia výrokových premenných v nejakom stave sveta, vieme *jednoznačne* povedať,
  ktoré formuly sú v tomto stave splnené.

*Príklad* 2.21. Nech $v_3$ je ohodnotenie množiny $\mathcal{V} = \{\text{a}, \dots, \text{z}\}^+$, také že

$$v_3(\text{kim}) = t \qquad v_3(\text{jim}) = f \qquad v_3(\text{sarah}) = t.$$

Spĺňa svet s týmto ohodnotením formulu $(\neg\text{jim} \to \neg\text{sarah})$?

Zoberieme vytvárajúcu postupnosť, prejdeme ju zľava doprava:

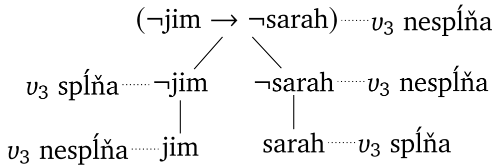
| Formulu | jim | sarah | ¬jim | ¬sarah | (¬jim → ¬sarah) |
|---|---|---|---|---|---|
| ohodnotenie $v_3$ | nespĺňa | spĺňa | spĺňa | nespĺňa | nespĺňa |

### II.18 Spĺňanie výrokových formúl — vytvárajúci strom

*Príklad* 2.21 (pokračovanie).

$$v_3(\text{kim}) = t \qquad v_3(\text{jim}) = f \qquad v_3(\text{sarah}) = t.$$

Iná možnosť je použiť vytvárajúci strom:




### II.19 Splĺňanie výrokových formúl — program

- Proces zisťovania, či ohodnotenie splĺňa formulu, vieme naprogramovať:

```
  def satisfies(v, A):
...
```

- Veľmi podobne vieme zadefinovať splnenie matematicky.

### II.20 Splĺňanie výrokových formúl — definícia

**Definícia 2.22.** Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech $v$ je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné $p$ z $\mathcal{V}$ a všetky formuly $A$, $B$ nad $\mathcal{V}$ definujeme:

- $v$ splĺňa atomickú formulu $p$ vtt $v(p) = t$;
- $v$ splĺňa formulu $\neg A$ vtt $v$ nesplĺňa $A$;
- $v$ splĺňa formulu $(A \land B)$ vtt $v$ splĺňa $A$ a $v$ splĺňa $B$;
- $v$ splĺňa formulu $(A \lor B)$ vtt $v$ splĺňa $A$ alebo $v$ splĺňa $B$;
- $v$ splĺňa formulu $(A \to B)$ vtt $v$ nesplĺňa $A$ alebo $v$ splĺňa $B$.

**Dohoda**

- Skratka *vtt* znamená *vtedy a len vtedy, keď*.
- Vzťah *ohodnotenie $v$ splĺňa formulu $X$* skrátene zapisujeme $v \models X$, *ohodnotenie $v$ nesplĺňa formulu $X$* zapisujeme $v \not\models X$.
- Namiesto *$v$ (ne)splĺňa $X$* hovoríme aj *$X$ je (ne)pravdivá pri $v$*.

*Príklad* 2.23. Nech $v_3$ je ohodnotenie množiny $\mathcal{V} = \{\mathrm{a}, \dots, \mathrm{z}\}^+$, také že

$$v_3(\mathrm{kim}) = t \qquad v_3(\mathrm{jim}) = f \qquad v_3(\mathrm{sarah}) = t.$$

Zistime, ktoré z formúl

$$((\mathrm{kim} \lor \mathrm{jim}) \lor \mathrm{sarah})$$

$$(\mathrm{kim} \to \neg\mathrm{sarah}) \qquad (\mathrm{jim} \to \mathrm{kim}) \qquad (\neg\mathrm{jim} \to \neg\mathrm{sarah})$$

ohodnotenie $v_3$ spĺňa a ktoré nespĺňa.

| deg($X$) | $v_3$ spĺňa $X$ | $v_3$ nespĺňa $X$ |
|---|---|---|
| 0 | kim, sarah | jim |
| 1 | ¬jim, (kim ∨ jim), (jim → kim) | ¬sarah |
| 2 | ((kim ∨ jim) ∨ sarah) | (kim → ¬sarah) |
| 3 | | (¬jim → ¬sarah) |

## 2.4. Tautológie, (ne)splniteľnosť, falzifikovateľnosť

### II.22 Spĺňanie z hľadiska formuly

- Doteraz sme sa na spĺňanie pozerali z hľadiska **jedného ohodnotenia** (stavu sveta) a zisťovali sme, **ktoré formuly** sú v ňom splnené
- Obráťme teraz perspektívu:
  vyberme si **jednu formulu** a zisťujme, **ktoré ohodnotenia** ju spĺňajú, teda ktoré stavy sveta vyhovujú podmienke vyjadrenej formulou

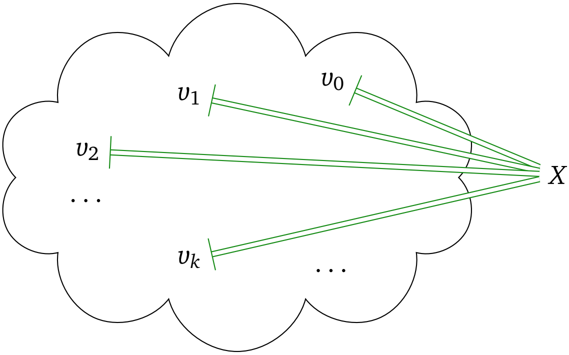
**Dohoda**

V ďalších definíciách a tvrdeniach predpokladáme, že sme si *pevne zvolili* nejakú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a hodnoty $t$, $f$.

*Formulou* rozumieme formulu nad množinou výrok. prem. $\mathcal{V}$.

*Ohodnotením* rozumieme ohodnotenie množiny výrok. prem. $\mathcal{V}$.

## II.23 Tautológia




**Definícia 2.24.** Formulu $X$ nazveme *tautológiou* (skrátene $\models X$) vtt **každé** ohodnotenie výrokových premenných **spĺňa** $X$ (teda **pre každé** ohodnotenie výrokových premenných $v$ platí $v \models X$).

## II.24 Tautológia — testovanie

- Ak máme nekonečne veľa výrokových premenných, máme aj nekonečne veľa ohodnotení
- Musíme skúmať **všetky**, aby sme zistili, či je formula $X$ tautológiou?
- Platí

  **Tvrdenie 2.25.** *Splnenie výrokovej formuly pri ohodnotení výrokových premenných závisí iba od ohodnotenia (konečného počtu) výrokových premenných, ktoré sa v nej vyskytujú.*

  Presnejšie: *Pre každú formulu $X$ a všetky ohodnotenia $v_1$ a $v_2$, ktoré zhodujú na množine* $\mathrm{vars}(X)$ *výrokových premenných vyskytujúcich sa v $X$, platí $v_1 \models X$ vtt $v_2 \models X$.*

- Takže stačí skúmať ohodnotenia, ktoré sa **líšia** na výrokových premenných **vyskytujúcich** sa v $X$, ktorých je iba konečne veľa
- **Koľko** je takých ohodnotení?

### II.25 Tautológia — testovanie

*Príklad* 2.26. Zistime, či je $X = (\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$ tautológiou.

Preskúmame všetky rôzne ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú v $X$:

| $v$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $(p \wedge q)$ | $\neg(p \wedge q)$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $(\neg p \vee \neg q)$ | $(\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$ |
| $f$ | $f$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ |
| $t$ | $f$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ |
| $f$ | $t$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ |
| $t$ | $t$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ |

Pretože všetky skúmané ohodnotenia spĺňajú $X$, je $X$ tautológiou.

### II.26 Ohodnotenia zhodujúce sa na premenných formuly

*Dôkaz.* Indukciou na stupeň formuly $X$.

**Báza:** Nech $X$ je stupňa 0. Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu a definície stupňa musí byť $X = p$ pre nejakú výrokovú premennú. Zoberme ľubovoľné ohodnotenia $v_1$ a $v_2$, ktoré sa zhodujú na premenných v $X$, teda aj na $p$. Podľa definície spĺňania $v_1 \models p$ vtt $v_1(p) = t$ vtt $v_2(p) = t$ vtt $v_2 \models p$.

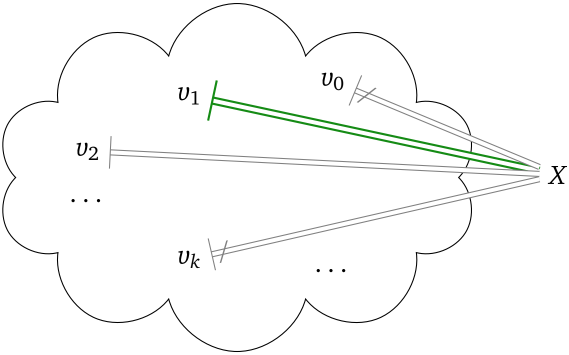
**Krok:** Nech $X$ je stupňa $n > 0$ a tvrdenie platí pre všetky formuly stupňa nižšieho ako $n$ (indukčný predpoklad). Zoberme ľubovoľné ohodnotenia $v_1$ a $v_2$, ktoré sa zhodujú na premenných v $X$. Podľa definície stupňa a jednoznačnosti rozkladu nastáva práve jeden z prípadov:

- $X = \neg A$ pre práve jednu formulu $A$. Pretože $\deg(X) = \deg(A) + 1 > \deg(A)$, podľa ind. predpokladu tvrdenie platí pre $A$. Ohodnotenia $v_1$ a $v_2$ sa zhodujú na premenných v $A$ (rovnaké ako v $X$). Preto $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models A$, a teda $v_1 \models \neg A$ vtt $v_1 \not\models A$ vtt $v_2 \not\models A$ vtt $v_2 \models \neg A$.

- $X = (A \wedge B)$ pre práve jednu dvojicu formúl $A$, $B$. Pretože $\deg(X) = \deg(A) + \deg(B) + 1 > \deg(A)$ aj $\deg(B)$, podľa ind. predpokladu pre $A$ aj $B$ tvrdenie platí. Podobne pre ďalšie binárne spojky.

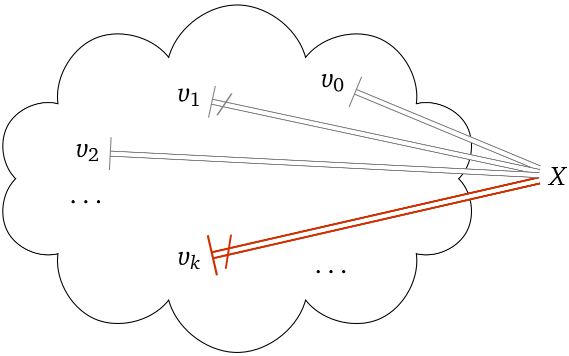
□

## II.27 Splniteľnosť



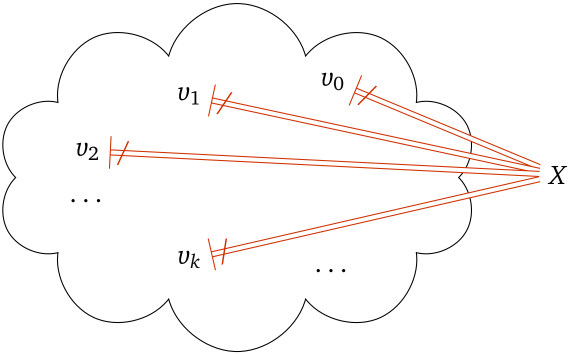

**Definícia 2.27.** Formulu $X$ nazveme *splniteľnou* vtt **nejaké** ohodnotenie výrokových premenných **spĺňa** $X$ (teda **existuje** také ohodnotenie výrokových premenných $v$, že $v \models X$).

## II.28 Falzifikovateľnosť



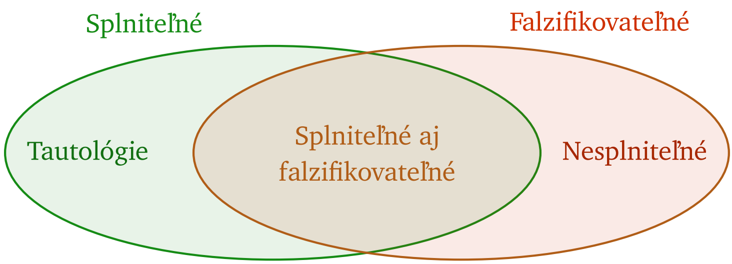

**Definícia 2.28.** Formulu $X$ nazveme *falzifikovateľnou* vtt **nejaké** ohodnotenie výrokových premenných **nespĺňa** $X$ (teda **existuje** také ohodnotenie výrokových premenných $v$, že $v \not\models X$).

## II.29 Nesplniteľnosť




**Definícia 2.29.** Formulu $X$ nazveme *nesplniteľnou*
vtt **každé** ohodnotenie výrokových premenných **nespĺňa** $X$
(teda **pre každé** ohodnotenie výrokových premenných $v$ platí $v \not\models X$).

## II.30 „Geografia“ výrokových formúl podľa spĺňania




- Tautológie sú výrokovologické pravdy. Sú zaujímavé najmä pre klasický pohľad na logiku ako skúmanie správneho usudzovania.
- Vo výpočtovej logike je zaujímavá splniteľnosť a konkrétne spĺňajúce ohodnotenia.

---

Obrázok podľa [Papadimitriou, 1994]

***Zamyslite sa II.5***
Ak formula *nie* je falzifikovateľná, je:

A. splniteľná, B. nesplniteľná, C. tautológia.

# III. prednáška

# Vyplývanie, ekvivalentné úpravy

5. marca 2018

## III.1 Tautológie a (ne)splniteľnosť

**Tvrdenie 2.30.** *Formula $X$ je tautológia vtt keď $\neg X$ je nesplniteľná.*

*Dôkaz.* ($\Rightarrow$) Nech $X$ je tautológia, teda je splnená pri každom ohodnotení výrokových premenných. To znamená, že $\neg X$ je nesplnená pri každom ohodnotení (podľa definície splnenia formuly ohodnotením), a teda $\neg X$ je nesplniteľná.

($\Leftarrow$) Opačne, nech $\neg X$ je nesplniteľná. To znamená, že pri každom ohodnotení výrokových premenných je $\neg X$ nesplnená. Podľa definície spĺňania je teda $X$ pri každom ohodnotení splnená, a teda je tautológia. □

## III.2 Teórie

Neformálne slovom *teória* označujeme nejaký súbor presvedčení o fungovaní sveta alebo jeho časti.

**Definícia 2.31.** *(Výrokovologickou) teóriou* nazývame každú množinu formúl.

**Dohoda**

Teórie budeme označovať písmenami $T$, $S$, podľa potreby s indexmi.

*Príklad* 2.32. Formalizácia problému pozývania známych na párty je teóriou:

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{\, & ((\text{kim} \lor \text{jim}) \lor \text{sara}), && (\text{kim} \to \neg\text{sara}), \\ & (\text{jim} \to \text{kim}), && (\neg\text{jim} \to \neg\text{sara}) \,\} \end{aligned}$$

III.3 Splnenie teórie, model

Pojem spĺňania sa jednoducho rozšíri na teórie.

**Definícia 2.33.** Nech $T$ je teória. Ohodnotenie $v$ *spĺňa teóriu* $T$ (skrátene $v \models T$) vtt $v$ spĺňa každú formulu $X$ z množiny $T$.

Spĺňajúce ohodnotenie nazývame *modelom* teórie $T$.

*Príklad* 2.34. Aké ohodnotenie spĺňa (teda je modelom) $T_{\text{party}}$?

**Tvrdenie 2.35.** *Splnenie teórie $T$ pri ohodnotení výrokových premenných závisí iba od ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú vo formulách v $T$.*

Presná formulácia je podobná ako pri spĺňaní formúl. Dôkaz sporom, lebo množina formúl môže byť nekonečná.

## 2.5. Výrokovologické vyplývanie

III.4 Splniteľnosť teórie

- Kedy je teória „zlá“?
- Keď nepopisuje žiaden svet (stav sveta).
- „Dobrá“ je teda taká teória, ktorá má aspoň jeden model.

**Definícia 2.36.** Teória $T$ je *súčasne výrokovologicky splniteľná* (skrátene *splniteľná*) vtt existuje aspoň jeden model $T$.

Teória je *nesplniteľná* vtt nie je splniteľná.

*Príklad* 2.37. $T_{\text{party}}$ je súčasne splniteľná množina formúl.

$T_{\text{party}} \cup \{\text{sara}\}$ je súčasne nesplniteľná množina formúl.

III.5 Logické dôsledky a vyplývanie

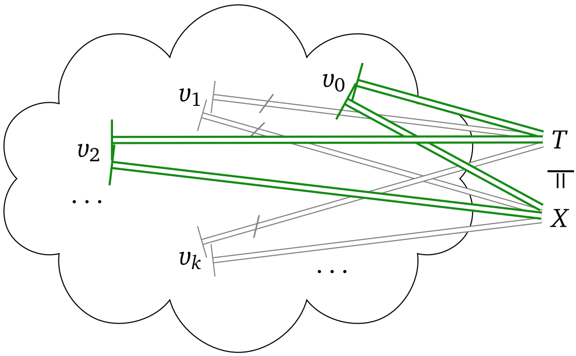
- Aký je *účel* teórií? Kedy je teória užitočná?
  - Keď z nej dokážeme *odvodiť* (uvažovaním alebo počítaním) <presentation> *doteraz neznáme skutočnosti* (teda nezapísané v teórii),
    ktoré platia vo všetkých stavoch sveta spĺňajúcich teóriu.

- Takéto skutočnosti nazývame **logickými dôsledkami teórie** a hovoríme, že z nej *vyplývajú*.

*Príklad* 2.38. Všimnime si, že v *každom* ohodnotení, ktoré spĺňa $T_{\mathrm{party}}$, je splnená aj premenná *kim*.

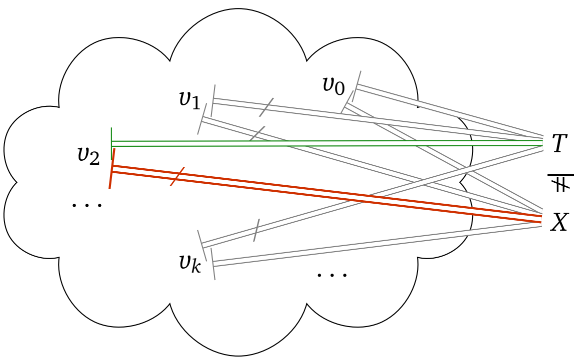
Ktorá ďalšia formula vyplýva z $T_{\mathrm{party}}$?

## III.6 Výrokovologické vyplývanie




**Definícia 2.39** (Výrokovologické vyplývanie)**.** Z teórie $T$ *výrokovologicky vyplýva* formula $X$
(tiež $X$ je *výrokovologickým dôsledkom* $T$, skrátene $T \models X$) vtt
každé ohodnotenie výrokových premenných, ktoré spĺňa $T$, spĺňa aj $X$.

## III.7 Nevyplývanie



*Príklad* 2.40. Ktoré atomické formuly a ich negácie nevyplývajú z $T_{\text{party}}$?
Vyplýva z $T_{\text{party}}$ formula $(kim \to jim)$?

### III.8 Vyplývanie a (ne)splniteľnosť

Použitie SAT solvera na rozhodovanie vyplývania je založené na:

**Tvrdenie 2.41.** *Formula $X$ výrokovologicky vyplýva z teórie $T$ vtt množina $T_1 = T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná.*

*Dôkaz.* Nech $T = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$.

($\Rightarrow$) Predpokladajme, že $X$ vyplýva z množiny $T$. Nech $v$ je nejaké ohodnotenie $\mathcal{V}$. Potrebujeme ukázať, že $v$ nespĺňa $T_1$. Máme dve možnosti:

- Ak $v$ nespĺňa $T$, tak nespĺňa ani $T_1$.
- Ak $v$ spĺňa $T$, tak $v$ musí spĺňať aj $X$ (definícia vyplývania). To znamená, že $\neg X$ je nesplnená pri $v$, a teda $v$ nespĺňa $T_1$.

($\Leftarrow$) Opačne, nech $T_1$ je nesplniteľná a nech $v$ je nejaké ohodnotenie $\mathcal{V}$. $v$ teda nespĺňa $T_1$. Potrebujeme ukázať, že ak $v$ spĺňa $T$, tak potom $v$ spĺňa aj $X$. Ak $v$ spĺňa $T$, potom spĺňa každé $X_i$. Keďže ale $v$ nespĺňa $T_1$, $v$ musí nespĺňať $\neg X$ (jediná zostávajúca formula z $T_1$), čo znamená, že $v$ spĺňa $X$. $\square$

### III.9 Nezávislosť

**Definícia 2.42.** Formula $X$ je *nezávislá* od teórie $T$, ak existuje dvojica ohodnotení $v_1$, $v_2$ spĺňajúcich $T$, pričom $v_1$ spĺňa $X$, ale $v_2$ nespĺňa $X$.

*Príklad* 2.43. Ktorá atomická formula je nezávislá od $T_{\text{party}}$?
Je aj jej negácia nezávislá od $T_{\text{party}}$?

### III.10 Vzťahy vyplývania, implikácií a tautológií

**Tvrdenie 2.44.** *Nech $S$ a $T$ sú teórie, $S \subseteq T$, $A$ je formula.
Ak $S \models A$, tak $T \models A$.*

**Tvrdenie 2.45.** *Nech $T$ je teória, nech $A$, $B$, $A_1$, $A_2$, $\dots$, $A_n$ sú formuly.*

*a)* $T \cup \{A\} \models B$ *vtt* $T \models (A \to B)$.

*b)* $\{\} \models A$ *vtt* $A$ *je tautológia* ($\models A$).

*c) Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

*i.* $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$

*ii.* $\{((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n)\} \models B$

*iii.* $\{\} \models ((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n) \to B)$

*iv.* $\models (((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n) \to B)$

III.11 Hlasujte

***Spomeňte si III.1***
*Formula $X$ vyplýva z teórie $T$ vtt každý model $T$ spĺňa $X$.*
Pravda alebo nepravda?

## 2.6. Ekvivalencia formúl

III.12 Ekvivalencia formúl

Ako vieme pomocou doterajších **sémantických** pojmov vyjadriť, že dve formuly sú ekvivalentné?

**Definícia 2.46.** Dve formuly $X$ a $Y$ sú *(výrokovologicky) ekvivalentné* ($X \Leftrightarrow Y$) vtt
pre každé ohodnotenie $v$ výrokových premenných platí,
že $v$ spĺňa $X$ vtt $v$ spĺňa $Y$.

Ako súvisí takto sémanticky zadefinovaná ekvivalencia formúl so skratkou $\leftrightarrow$?
Podľa dohody z 2. prednášky je $(X \leftrightarrow Y)$ je skráteným zápisom $((X \to Y) \land (Y \to X))$.

**Tvrdenie 2.47.** *Formuly $X$ a $Y$ sú výrokovologicky ekvivalentné vtt formula $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.*

## III.13 Ekvivalencia a vyplývanie

Ako súvisí ekvivalencia formúl s vyplývaním?

**Tvrdenie 2.48.** *Formuly $X$ a $Y$ sú ekvivalentné vtt $\{X\} \models Y$ a $\{Y\} \models X$.*

*Dôkaz.* ($\Rightarrow$) Nech $X$ a $Y$ sú ekvivalentné formuly. Chceme dokázať, že $\{X\} \models Y$, teda že (podľa definície vyplývania) pre každé ohodnotenie $v$ platí, že ak $v \models \{X\}$, tak $v \models Y$.

Nech $v$ je ľubovoľné ohodnotenie, nech $v \models \{X\}$. Potom $v \models X$ (podľa definície splnenia teórie), a teda $v \models Y$ (z predpokladu a podľa definície ekvivalencie). Teda platí, že ak $v \models \{X\}$, tak $v \models Y$. Pretože $v$ bolo ľubovoľné, môžeme túto vlastnosť zovšeobecniť na všetky ohodnotenia, a teda $\{X\} \models Y$.

Dôkaz $\{Y\} \models X$ je podobný.

($\Leftarrow$) Nech $X$ a $Y$ sú formuly a nech $\{X\} \models Y$ a $\{Y\} \models X$. Chceme dokázať, že $X$ a $Y$ sú ekvivalentné.

Nech $v$ je ľubovoľné ohodnotenie. Ak $v \models X$, tak $v \models \{X\}$ a podľa prvého predpokladu $v \models Y$. Ak $v \models Y$, tak $v \models \{Y\}$ a podľa druhého predpokladu $v \models X$. Teda $v \models X$ vtt $v \models Y$. Pretože $v$ bolo ľubovoľné, môžeme túto vlastnosť zovšeobecniť na všetky ohodnotenia, a teda $X$ a $Y$ sú ekvivalentné. $\square$

## III.14 Tranzitivita ekvivalencie

**Tvrdenie 2.49** (Tranzitivita ekvivalencie). *Nech X, Y a Z sú formuly.*
*Ak X je ekvivalentná s Y a Y je ekvivalentná so Z,*
*tak X je ekvivalentná so Z.*

*Dôkaz.* Nech $X$, $Y$ a $Z$ sú formuly. Nech $X$ je ekvivalentná s $Y$ a $Y$ je ekvivalentná so $Z$. Nech $v$ je ľubovoľné ohodnotenie.

Ak $v \models X$, tak $v \models Y$ podľa prvého predpokladu, a teda $v \models Z$ podľa druhého predpokladu. Ak $v \models$ , tak $v \models Y$ podľa druhého predpokladu, a teda $v \models X$ podľa prvého predpokladu. Teda $v \models X$ vtt $v \models Z$.

Zovšeobecnením na všetky ohodnotenia dostávame, že $X$ a $Z$ sú ekvivalentné. $\square$

## 2.7. Ekvivalentné úpravy

III.15 Ekvivalentné úpravy

- Už ste určite ekvivalente upravovali formuly
- Aké kroky ste pri tom robili?

  *Príklad* 2.50. $A = \neg\neg(r \land q)$ $\quad B = (r \land q)$ $\quad X = (p \to \neg \boxed{\neg\neg(r \land q)})$

  $$\Downarrow$$

  $$Y = (p \to \neg \boxed{(r \land q)})$$

  *Nahradenie* podformuly $A$ vo formule $X$ formulou $B$, ktorá je ekvivalentná s $A$

III.16 Pravidlá ekvivalentných úprav

- Ako vieme, že $A$ a $B$ sú ekvivalentné?
  - Môžeme odvodiť sémanticky
  - Naozaj ste *dosadili* $(r \land q)$ za $p$ v *známej ekvivalencii* medzi $\neg\neg p$ a $p$ (princíp dvojitej negácie)

    *Príklad* 2.51. $C = \neg\neg \boxed{p}$ $\quad D = \boxed{p}$

    $$A = \neg\neg \boxed{(r \land q)} \quad B = \boxed{(r \land q)}$$

III.17 Korektnosť ekvivalentných úprav

- *Prečo* sú tieto úpravy *korektné* (správne)?
- Teda:
  *Prečo*, ak je $C$ ekvivalentné s $D$,
  tak je aj $A$ ekvivalentné s $B$ a $X$ ekvivalentné s $Y$?

Oba druhy dosadení pri ekvivalentných úpravách sú *substitúcie*

**Definícia 2.52** (Substitúcia)**.** Nech $X$, $A$, $B$ sú formuly.
*Substitúciou* $B$ *za* $A$ v $X$ (skrátene $X[A|B]$)) nazývame formulu, ktorá vznikne nahradením každého výskytu $A$ v $X$ formulou $B$.

Substitúciu si vieme predstaviť ako cyklus prechádzajúci cez $X$

nech $\ell$ je dĺžka $A$
**kým** nie si na konci $X$:
  **ak** sa nasledujúcich $\ell$ symbolov zhoduje s $A$:
    nahraď ich za $B$
    pokračuj za posledným nahradeným symbolom
  **inak**:
    pokračuj ďalším symbolom

alebo ako rekurzívne definovanú operáciu: (cv02)

Pre všetky formuly $A$, $B$, $X$, $Y$, všetky výrokové premenné $p$ a všetky binárne spojky $b \in \{\land, \lor, \to\}$:

$$
\begin{aligned}
A[A|B] &= B \\
p[A|B] &= p && \text{ak } A \neq p \\
(\neg X)[A|B] &= \neg(X[A|B]) && \text{ak } A \neq \neg X \\
(X\, b\, Y)[A|B] &= ((X[A|B])\, b\, (Y[A|B])) && \text{ak } A \neq (X\, b\, Y)
\end{aligned}
$$



Korektnosť ekvivalentných úprav vyjadrujú nasledujúce tvrdenia:

**Tvrdenie 2.53** (Dosadenie do ekvivalentných formúl)**.** *Nech $A$ a $B$ sú navzájom ekvivalentné formuly, $p$ je výroková premenná a $Y$ je formula. Potom formuly $A[p|Y]$ a $B[p|Y]$ sú ekvivalentné.*

**Veta 2.54** (Ekvivalentné úpravy)**.** *Nech $X$ je formula, $A$ a $B$ sú ekvivalentné formuly.*
*Potom formuly $X$ a $X[A|B]$ sú tiež ekvivalentné.*

### III.20 Sémantické vlastnosti substitúcie

Obe tvrdenia o korektnosti sú dôsledkami nasledujúcej lemy:

**Lema 2.55.** *Nech $X$ je výroková formula, $p$ je výroková premenná, $A$ je formula a $v$ je ohodnotenie výrokových premenných.*
*Potom $v \models X[p|A]$ vtt $v_{p|A} \models X$, kde $v_{p|A}$ je ohodnotenie, pre ktoré platí:*

- *$v_{p|A}(r) = v(r)$, ak $r$ je výroková premenná a $p \neq r$;*
- *$v_{p|A}(p) = t$, ak $v \models A$;*
- *$v_{p|A}(p) = f$, ak $v \not\models A$.*

O jej platnosti sa môžeme presvedčiť indukciou na stupeň formuly $X$.

### III.21 Ekvivalencie pre ekvivalentné úpravy

**Veta 2.56.** *Nech $A$, $B$ a $C$ sú ľubovoľné formuly, $\top$ je ľubovoľná tautológia a $\bot$ je ľubovoľná nesplniteľná formula.*
*Nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:*

| | |
|---|---|
| $(A \land (B \land C))$ *a* $((A \land B) \land C)$ | *asociatívnosť* |
| $(A \lor (B \lor C))$ *a* $((A \lor B) \lor C)$ | |
| $(A \land B)$ *a* $(B \land A)$ | *komutatívnosť* |
| $(A \lor B)$ *a* $(B \lor A)$ | |
| $(A \land (B \lor C))$ *a* $((A \land B) \lor (A \land C))$ | *distributívnosť* |
| $(A \lor (B \land C))$ *a* $((A \lor B) \land (A \lor C))$ | |
| $\neg(A \land B)$ *a* $(\neg A \lor \neg B)$ | *de Morganove* |
| $\neg(A \lor B)$ *a* $(\neg A \land \neg B)$ | *pravidlá* |
| $\neg\neg A$ *a* $A$ | *dvojitá negácia* |

### III.22 Ekvivalencie pre ekvivalentné úpravy

**Veta 2.56** (Pokračovanie)**.**

$$\begin{array}{rl}
(A \wedge A) \text{ a } A & \textit{idempotencia} \\
(A \vee A) \text{ a } A & \\[1em]
(A \wedge \top) \text{ a } A & \textit{identita} \\
(A \vee \bot) \text{ a } A & \\[1em]
(A \vee (A \wedge B)) \text{ a } A & \textit{absorpcia} \\
(A \wedge (A \vee B)) \text{ a } A & \\[1em]
(A \vee \neg A) \text{ a } \top & \textit{vylúčenie tretieho} \\
(A \wedge \neg A) \text{ a } \bot & \textit{spor} \\[1em]
(A \to B) \text{ a } (\neg A \vee B) & \textit{nahradenie} \to
\end{array}$$

## 2.8. Konjunktívna a disjunktívna normálna forma

**Dohoda**
Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je konečná postupnosť formúl.

- Formulu $(((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \cdots \wedge A_n)$ budeme skrátene zapisovať $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \cdots \wedge A_n)$, prípadne $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$
a nazývať *konjunkcia postupnosti formúl* $A_1, \ldots, A_n$.
- Formulu $(((A_1 \vee A_2) \vee A_3) \vee \cdots \vee A_n)$ budeme skrátene zapisovať $(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \cdots \vee A_n)$, prípadne $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$
a nazývať *disjunkcia postupnosti formúl* $A_1, \ldots, A_n$.
- Pre $n = 1$ chápeme samotnú formulu $A_1$ ako konjunkciu aj ako disjunkciu jednoprvkovej postupnosti formúl $A_1$.
- Konjunkciu prázdnej postupnosti formúl ($n = 0$) chápeme ako ľubovoľnú tautológiu (napríklad $(p_1 \vee \neg p_1)$) a označujeme ju $\top$.
- Disjunkciu prázdnej postupnosti formúl chápeme ako ľubovoľnú nesplniteľnú formulu (napríklad $(p_1 \wedge \neg p_1)$)
a označujeme ju $\bot$ alebo $\square$.

**Definícia 2.53.**

- Výrokovú premennú alebo negáciou premennej nazývame *literál*.
- Disjunkciu literálov nazývame *klauzula* (tiež „klauza“).
- Hovoríme, že formula $X$ je v *konjunktívnom normálnom tvare* (CNF), ak $X$ je *konjunkciou* klauzúl.
- Hovoríme, že formula $X$ je v *disjunktívnom normálnom tvare* (DNF), ak $X$ je *disjunkciou* formúl, z ktorých každá je konjunkciou literálov.

*Príklad* 2.54. Ktoré z nasledujúcich formúl sú literálmi, klauzulami, sú v CNF, v DNF:

$$\begin{aligned} A_1 &= p & A_6 &= ((p \land \neg q) \lor (\neg p \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r)) \\ A_2 &= \neg q & A_7 &= ((\neg p \lor q \lor \neg r) \land (q \to r)) \\ A_3 &= \Box & A_8 &= ((\neg p \lor \neg q) \land (p \lor r) \land (p \lor q \lor \neg r)) \\ A_4 &= (p \lor \neg q) & A_9 &= ((\neg p \lor (p \land r)) \land (p \lor q \lor \neg r)) \\ A_5 &= (p \land \neg q) & A_{10} &= ((\neg p \lor p \lor r) \land (\neg(p \lor q) \lor \neg r)) \end{aligned}$$

## Literatúra


Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.