IV 1 a

Welchen Bereich deckt ein 5-Bit 2er-Komplement ab?

⇓

Länge	Darstellbare Zahlen
5 Bit	$-2^4 \,...\, 2^4 - 1$ $=$ $-16 \,...\, 15$

IV 1 b

Welchen Bereich deckt eine 6-Bit Dualzahl ab?

Länge	Darstellbare Zahlen
6 Bit	$0 \,...\, 2^6 - 1$ $=$ $0 \,...\, 63$

JÜ 1 c

Zahl zur B. 10	2-er Komplem. (4 Bit)
4	0 1 0 0
-1	1 1 1 1
-6	1 0 1 0
-7	1001
-2	1110
6	0110

1) $4_{(10)} \rightarrow ?_{(2K)}$

I) Man wandelt die Zahl $4_{(10)}$ in Dualzahl, und lässt hochwertigstes Bit frei

$$4_{(10)} = 100_{(2)}$$

II) Vorzeichen positiv.

$$\boxed{4_{(10)} = 0100_{(2K)}}$$

2) $-1_{(10)} \to ?_{(2K)}$

I) Man nimmt die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandelt diese in eine Dualzahl um.

$$1_{(10)} = 001_{(2)}$$

II) Man schreibt die Dualzahl in alle 4 Bit des Zweierkomplementes

$$001_{(2)} \to 0001_{(2)}$$

III) Die Zahl wird invertiert:

$$0001_{(2)} \xrightarrow{\text{(Inverse)}} 1110_{(2)}$$

IV) Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,0 \\ +\;0\,0\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,1_{(2K)} \end{array}$$

$$\boxed{-1_{(10)} = 1111_{(2K)}}$$

3) $-6_{(10)} \rightarrow ?_{(2K)}$

I) Man nimmt die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandelt diese in eine Dualzahl um.

$$6_{(10)} = 110_{(2)}$$

II) Man schreibt die Dezimalzahl in alle 4 Bit des Zweierkomplements

$$110_{(2)} \rightarrow 0110_{(2)}$$

III) Die Zahl wird invertiert:

$$0110_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 1001_{(2)}$$

IV) Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ + & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0_{(2K)} \end{array}$$

⇓

$$\boxed{-6_{(10)} = 1010_{(2K)}}$$

4) $1001_{(2K)} \longrightarrow ?_{(10)}$

I) Wir subtrahieren 1 von dem 2er-Komplement:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,1 \\ -\ 0\,0\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0_{(2)} \end{array}$$

II) Wir invertieren die Zahl und vergessen aber das Minuszeichen nicht.

$$1000_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 0111_{(2)}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{1001_{(2K)} \longrightarrow -7_{(10)}}$$

5) $1110_{(2K)} \longrightarrow ?_{(10)}$

I) Wir subtrahieren 1 von dem 2er - Komplement

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,0 \\ -\;0\,0\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,1_{(2)} \end{array} \quad \text{bzw} \quad \begin{array}{r} 1\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 1 \\ \hline 1\,1\,0\,1_{(2)} \end{array}$$

II) Wir invertieren die Zahl und vergessen über das Minuszeichen nicht.

$$1101_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 0010_{(2)}$$

↓

$$\boxed{1110_{(2K)} \longrightarrow -2_{(10)}}$$

~~6) $0110_{(2K)} \longrightarrow ?_{(10)}$~~

~~I) Wir subtrahieren 1 von dem 2er - Komplement.~~

~~$-\;0110$~~

6) $0110_{(2K)} \to ?_{(10)}$

Ursprüngl. Zahl	0 1 1 0
XOR mit dem Vorz.-bit (0)	0 1 1 0
Vorz.-bit addiert (0)	0 1 1 0
Zahl:	$6_{(10)}$

$$\boxed{0110_{(2K)} \to 6_{(10)}}$$

5) Anderes Vorgehen

Ursprüngl. Zahl	1 1 1 0
XOR mit dem Vorzeichenbit (1)	0 0 0 1
Vorzeichenbit (1) addiert	$\begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 1 \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$
Zahl	$-2_{(10)}$

Aufgabe 2

a) Addition / Subtraktion

i) $(-4) + (-8)$

Umwandlung ins 2er-Kompl. um

$(-4)_{(10)} \longrightarrow ?_{(2K)}$

$\Downarrow$

I) Man nimmt die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandelt diese in eine Dezimalzahl um.

-4

$(4)_{(10)} \longrightarrow 100_{(2)}$

II) Man schreibt die Dezimalzahl in alle 4 Bit des Zweierkomplementes

$100_{(2)} \longrightarrow 0100_{(2)}$

III) Man invertiert die Zahl

$0100_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 1011_{(2)}$

IV) Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement.

$$
\begin{array}{r}
1\;0\;1\;1 \\
+\;0\;0_1\;0_1\;1 \\
\hline
1\;1\;0\;0_{(2K)}
\end{array}
\qquad \text{bzw} \qquad
\begin{array}{r}
1\;0\;1\;1 \\
+\;0\;0\;0\;1 \\
1\;1\; \\
\hline
1\;1\;0\;0_{(2K)}
\end{array}
$$

$$(-4)_{(10)} \longrightarrow 1100_{(2K)}$$

−8 I. Man nimmt die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandelt diese in eine Dezimalzahl um

$$(-8)_{10} \longrightarrow 1000_{(2K)}$$

II. Man invertiert die Zahl

$$1000_{(2K)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 0111_{(2K)}$$

III. Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement.

$$
\begin{array}{r}
0\;1\;1\;1 \\
0\;0_1\;0_1\;1 \\
\hline
1\;0\;0\;0_{(2K)}
\end{array}
$$

$$(-8)_{(10)} \longrightarrow 1000_{(2K)}$$

Wir haben

$(-4)_{10} = 1100_{(2K)}$

$(-8)_{10} = 1000_{(2K)}$

2K - Darstellung	$\begin{array}{r} 1100 \\ +\ 1000 \end{array}$
Checkbit dazu	[1] 1 1 0 0 [1] 1 0 0 0
Rechenoperation	$\begin{array}{r} [1]\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ +\ 1\ [1]_1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 1\ [1]\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{array}$ (2K) *
Check	ist ungleich => Überlauf ([1] 0)

$$\begin{array}{rcccccc} * & & [1] & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & + & [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & & & & \\ \hline & 1 & [1] & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}_{(2K)}$$

iii) $5 - (-6)$

5 I. Man nimmt die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandelt diese in eine Dualzahl um.

$$5_{(10)} \longrightarrow 101_{(2)}$$

"Hochwertigstes Bit" wird dabei freigelassen.

II. Vorzeichen positiv:

$$5_{(10)} \longrightarrow 0101_{(2K)}$$

-6 I. Man nimmt die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandelt diese in eine Dualzahl um.

$$6_{(10)} \longrightarrow 110_{(2)}$$

II. Man schreibt die Dualzahl in alle 4 Bit des Zweierkomplementes.

$$110_{(2)} \longrightarrow 0110_{(2)}$$

III. Man invertiert die Zahl

$$0110_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 1001_{(2)}$$

IV. Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement:

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0^{1} & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0_{(2K)}
\end{array}
$$

$$-6_{(10)} = 1010_{(2K)}$$

Die Differenz

2K - Darstellung	0101 $- 1010$
Checkbit dazu	$[0]0101$ $[1]1010$
Rechenoperation	*
Check	ist ungleich => Überlauf ([0] 1)

*

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & [0] & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & - & [1] & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
\hline
 & 1 & [0] & 1 & 0 & 1 & 1_{(2K)}
\end{array}
$$

iii) $2 + 3 + 1$

2 I. Man wandelt die Zahl

$$2_{(10)}$$

in Dualzahl um, und lässt höchstwertigstes Bit frei:

$$2_{(10)} = 010_{(2)}$$

II. Vorzeichen positiv:

$$\underline{2_{(10)} = 0010_{(2K)}}$$

3 I. Man wandelt die Zahl

$$3_{(10)}$$

in Dualzahl um, und lässt höchstwertigstes Bit frei:

$$3_{(10)} = 011_{(2)}$$

II. Vorzeichen positiv:

$$3_{(10)} = 0011_{(2K)}$$

1 I. Man wandelt die Zahl

$1_{(10)}$

in Dualzahl um, und lässt hochwertigstes Bit frei

$1_{(10)} = 001_{(2)}$

II. Vorzeichen positiv:

$1_{(10)} = 0001_{(2K)}$

Summen

I $2_{(10)} + 3_{(10)} = 0010_{(2K)} + 0011_{(2K)}$

2K - Darstellung	$0010 + 0011$
Checkbit dazu	$[0]0010 + [0]0011$
Rechnen	$[0]\ 0\ 0\ 1\ 0$ * $[0]\ 0\ 0\ 1\ 1$ $[0]\ 0\ 1\ 0\ 1_{(2K)}$
Check	ist gleich => ohne Über-/Unterlauf ([0] 0)

*

$$
\begin{array}{r}
[0]\,0010 \\
+\ [0]\,0011 \\
\scriptstyle 1 \\
\hline
[0]\,0101_{(2K)}
\end{array}
$$

$0101_{(2K)} = 5_{(10)}$

II

$5_{(10)} + 1_{(10)} = 0101_{(2K)} + 0001_{(2K)}$

2K - Darstellung	$0101 + 0001$
Checkbit dazu	$[0]0101 + [0]0001$
Rechnen	$\begin{array}{r} [0]\,0\,1\,0\,1 \\ [0]\,0\,0\,0\,1 \\ \scriptstyle 1 \\ \hline [0]\,0\,1\,1\,0_{(2K)} \end{array}$
Check	ist gleich => ohne Über-/Unterlauf ([0] 0)

Ergebnis:

$2_{(10)} + 3_{(10)} + 1_{(10)} = (0010_{(2K)} + 0011_{(2K)}) +$
$+ 0001_{(2K)} = 0110_{(2K)} = \underline{\underline{6_{(10)}}}$

iv) $5 + (-1) + (-6)$

Aus vorherigen Aufgaben nehmen wir folgende 2K - Darstellungen:

$-6_{(10)} = 1010_{(2K)}$

$5_{(10)} = 0101_{(2K)}$

-1

I. Man nimmt die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandelt diese in eine Dualzahl um.

$1_{(10)} = 001_{(2)}$

II. Man schreibt die Dualzahl in alle 4 Bit des Zweierkomplementes

$001_{(2)} \longrightarrow 0001_{(2)}$

III. Die Zahl wird invertiert

$0001_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 1110_{(2)}$

IV. Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement.

$$
\begin{array}{r}
1\ 1\ 1\ 0 \\
+\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
\hline
1\ 1\ 1\ 1_{(2K)}
\end{array}
$$

$-1_{(10)} = 1111_{(2K)}$

Summen

I. $5_{(10)} + (-1)_{(10)} = 0101_{(2K)} + 1111_{(2K)}$

2K - Darstellung	0101 + 1111
Checkbit dazu	[0] 0101 + [1] 1111
Rechnen	*
Check	ist gleich => Ohne Über- / Unterlauf ([0] 0)

* [0] 0 1 0 1
\+ [1] 1 1 1 1
1 1 1 1 1 (Überträge)

1 [0] 0 1 0 0 (2K)

I. $5_{(10)} + (-1)_{(10)} = 0101_{(2K)} + 1111_{(2K)} =$

$= 0100_{(2K)}$

$= +4_{(10)}$

II

$4_{(10)} + (-6)_{10} = 0100_{(2K)} + 1010_{(2K)}$

2K - Darstellung	$\begin{array}{r} 0100 \\ + \ 1010 \end{array}$
Checkbit dazu	$\begin{array}{r} [0]\ 0100 \\ + \ [1]\ 1010 \end{array}$
Rechnen	$\begin{array}{r} [0]\ 0100 \\ [1]\ 1010 \\ \hline [1]\ 1110_{(2K)} \end{array}$
Check	=> ist gleich Ohne Über- / Unterlauf ([1] 1)

✓

II

$4_{(10)} + (-6)_{10} = 0100_{(2K)} + 1010_{(2K)} =$

$= 1110_{(2K)}$

$= -2_{(10)}$

b) Multiplikation

i) $(-3) \cdot 5$

Umwandlung ins 4-Bit Zer-Komp.

Aus vorherigen Beispielen:

$5_{(10)} = 0101_{(2K)}$

$(-3)_{(10)} = ?_{(2K)}$

I. Man nimmt die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandelt diese in eine Dualzahl um.

$3_{(10)} = 011_{(2)}$

II. Man schreibt die Dualzahl in alle 4 Bits des Zweierkomplementes

$011_{(2)} \rightarrow 0011_{(2)}$

III. Die Zahl wird invertiert

$0011_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 1100_{(2)}$

IV. Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement.

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1_{(2K)}
\end{array}
$$

$$-3_{(10)} = 1101_{(2K)}$$

Multiplikation

$$(-3_{(10)}) \cdot 5_{(10)} = 1101_{(2K)} \cdot 0101_{(2K)}$$

I. Erweitern der Zahlen auf die doppelte Breite durch mehrmaliges Voranstellen des Vorzeichenbits.

1. $-3_{(10)}$: $11111101_{(2K)}$

   $5_{(10)}$: $00000101_{(2K)}$

2. Multiplikation durch Verschieben

$$
\begin{array}{ccc|cccccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Überst. Zahlen werden vergessen

Ergebnis:

$$(-3)_{(10)} \cdot 5_{(10)} = \overset{1111}{1101}_{(2K)} \cdot \overset{0000}{0101}_{(2K)} =$$

$$= 11110001_{(2K)}$$

$$= -15_{(10)}$$

Das Ergebnis hat den Zahlenbereich der Operanden verlassen.

Umwandlung vom Zweierkomp. in Dezimalart.

I. Wir subtrahieren 1:

$$\begin{array}{r} 1111\,0001 \\ -\,0000\,0001 \\ \hline 1111\,0000_{(2)} \end{array}$$

II. Wir invertieren die Zahl und vergessen über Minuszeichen nicht

$$11110000_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 00001111_{(2)}$$

III. Wir wandeln die Zahl $00001111_{(2)}$ in Dezimalzahl um und vergessen den Minuszeichen nicht

$$0\;0\;0\;0\;1\;1\;1\;1$$

$$-(2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)$$

$$-(8 + 4 + 2 + 1)$$

$$-\underline{\underline{15}}$$

ii) $(-1)_{10} \cdot (-7)_{10} = ?_{(2K)}$

Wir nehmen 2K - Darstellung von $(-1)_{10}$ von vorherigen Aufgaben.

$$-1_{(10)} = 1111_{(2K)}$$

-7

I. Wir nehmen die positive Zahl in Dualdarstellung und wandeln diese in eine Dualzahl um.

$$7_{(10)} = 111_{(2)}$$

II. Wir schreiben die Dualzahl in alle 4 Bit des Zweierkomplementes

$$111_{(2)} \longrightarrow 0111_{(2)}$$

III. Die Zahl wird invertiert

$$0111_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 1000_{(2)}$$

IV. Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0 \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1_{(2K)} \end{array}$$

$-7_{(10)} = 1001_{(2K)}$

Multiplikation

$-7_{(10)} = 1001_{(2K)}$

$-1_{(10)} = 1111_{(2K)}$

1) Erweitern der Zahlen auf die doppelte Breite durch mehrmaliges Voranstellen des Vorzeichenbits.

$-7_{(10)} = 1111\,1001_{(2K)}$

$-1_{(10)} = 1111\,1111_{(2K)}$

2) Multiplikation auf der nächsten Seite

$1001_{(2K)}$

$1111_{(2K)} \cdot 1001_{(2K)}$

Multiplikation

	1 1 1 1 1 0 0 1
×	1 1 1 1 1 1 1 1
· · ·	· · ·
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 1 1

3. Ergebnis

$(-1)_{(10)} \cdot (-7)_{10} =$

$= 1111\,1111_{(2K)} \cdot 11111001_{(2K)}$

$= 0000\,0111_{(2K)} = 7_{(10)}$

Das Ergebnis hat den Zahlenbereich nicht verlassen.!

Umwandlung	
Urspr. Zahl	0 0 0 0 0 1 1 1
XOR mit V-zeichen (0)	0 0 0 0 0 1 1 1
Vorz-bit addiert (0)	0 0 0 0 0 1 1 1
Zahl	$7_{(10)}$

Verlassen von Bereichen

c) Versuchen wir, die Zahl

$$-15_{(10)}$$

als ~~im~~ 2er - Komplement darzustellen.

I. Wir nehmen die positive Zahl in Dezimaldarstellung und wandeln diese in eine Dualzahl um.

$$15_{(10)} = 1\ 1\ 1\ 1_{(2)}$$

II. Die Zahl wird invertiert

$$1\ 1\ 1\ 1_{(2)} \xrightarrow{\text{Inverse}} 0\ 0\ 0\ 0_{(2)}$$

III. Man addiert 1 zu dieser Zahl und erhält die Darstellung im Zweierkomplement

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 0 \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 1_{(2K)} \end{array} \quad \hat{=} \quad 1$$

⇓ (und der vorherigen Multiplikation)

Das Ergebnis der Rechenoperation überschreitet den darstellbaren Zahlenbereich. (4 Bit)

ii) Versuchen wir, die Zahl

$$7_{(10)}$$

als 2er - Komplement darzustellen.

I. Man wandelt die Zahl

$$7_{(10)}$$

in Dualzahl um und lässt hochwertigstes Bit frei:

$$7_{(10)} = 111_{(2)}$$

II. Vorzeichen positiv:

$$7_{(10)} = 0111_{(2K)}$$

Das Ergebnis der Rechenoperation (und der vorherigen Multiplikation) überschreitet den darstellbaren Zahlenbereich (4 Bit) nicht!