МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №1-3
1. Методы простой итерации и Зейделя
2. Методы касательных и секущих, метод деления отрезка пополам
Группа ФН11-51Б

Вариант 1

Студент: Авилов О.Д.

Преподаватель: Кутыркин В.А

Оценка:

Москва 2022

Задание 1.1

Используя метод простой итерации с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $\mathbf{A} \cdot {}^{>}\mathbf{x} = {}^{>}\mathbf{b}$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица A этой СЛАУ приведена ниже в зависимости от варианта задания. Кроме того, используя неравенство (3), найти в методе простой итерации число шагов, необходимое для того чтобы гарантировать абсолютную погрешность приближённого решения не более 0,01. Сравнить это расчётное количество шагов с реальным количеством шагов, обеспечившим заданную погрешность.

$N = 1, \beta = 1 - 0,02(49 - 51) = 1,04$

$$A = \begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10,4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10,4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10,4 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\text{Найдем вектор } b = A \cdot x = \begin{pmatrix} 10,4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10,4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10,4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,4 \\ 16,4 \\ 16,4 \\ 16,4 \end{pmatrix}$$

Приведем СЛАУ к виду ${}^{>}x = F \cdot {}^{>}x + {}^{>}g$, где $F = E - D \cdot A, ||F|| < 1$ и ${}^{>}g = D \cdot {}^{>}b$
Т.к. матрица A имеет диагональное преобладание, то можно D выбрать в виде:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{10,4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,09615 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,09615 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,09615 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,09615 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } F = E - D \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -0,0962 & -0,1923 & -0,2885 \\ -0,0962 & 0 & -0,2885 & -0,1923 \\ -0,1923 & -0,2885 & 0 & -0,0962 \\ -0,2885 & -0,1923 & -0,0962 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{>}g = \begin{pmatrix} 1,57692 \\ 1,57692 \\ 1,57692 \\ 1,57692 \end{pmatrix}$$

$$\text{Положим начальный вектор итераций } {}^{>}x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем количество шагов, гарантирующее абсолютную погрешность приближённого решения не более 0,01, используя неравенство:

$$||^{>}x_{(k)} - {}^{>}x_{*}|| \leqslant \frac{||F||^k}{1 - ||F||} \cdot ||^{>}g|| + ||F||^k \cdot ||^{>}x_{(0)}||$$

Решая данное неравенство получаем количество итераций $k \geqslant 11$
Тогда равносильная СЛАУ:

$$^{>}x = F \cdot {}^{>}x + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 0 & -0,0962 & -0,1923 & -0,2885 \\ -0,0962 & 0 & -0,2885 & -0,1923 \\ -0,1923 & -0,2885 & 0 & -0,0962 \\ -0,2885 & -0,1923 & -0,0962 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}^{>}x + \begin{pmatrix} 1,57692 \\ 1,57692 \\ 1,57692 \\ 1,57692 \end{pmatrix}$$

Рабочая формула метода простой итерации: $^{>}x_{(k+1)} = F \cdot {}^{>}x_{(k)} + {}^{>}g$ Итерируем по шагам:

$$^{>}x_1 = F \cdot {}^{>}x_0 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 1,57692 \\ 1,57692 \\ 1,57692 \\ 1,57692 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_1 = 0,57692 > 0,01$$

$$^{>}x_2 = F \cdot {}^{>}x_1 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 0,66716 \\ 0,66716 \\ 0,66716 \\ 0,66716 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_2 = 0,33284 > 0,01$$

$$^{>}x_3 = F \cdot {}^{>}x_2 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 1,19202 \\ 1,19202 \\ 1,19202 \\ 1,19202 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_3 = 0,19202 > 0,01$$

$$^{>}x_4 = F \cdot {}^{>}x_3 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 0,88922 \\ 0,88922 \\ 0,88922 \\ 0,88922 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_4 = 0,11078 > 0,01$$

$$^{>}x_5 = F \cdot {}^{>}x_4 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 1,06391 \\ 1,06391 \\ 1,06391 \\ 1,06391 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_5 = 0,06391 > 0,01$$

$$^{>}x_6 = F \cdot {}^{>}x_5 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 0,96313 \\ 0,96313 \\ 0,96313 \\ 0,96313 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_6 = 0,03687 > 0,01$$

$$^{>}x_7 = F \cdot {}^{>}x_6 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 1,02127 \\ 1,02127 \\ 1,02127 \\ 1,02127 \end{pmatrix}, \;\; \varepsilon_7 = 0,02127 > 0,01$$

$$^{>}x_8 = F \cdot {}^{>}x_7 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 0,98773 \\ 0,98773 \\ 0,98773 \\ 0,98773 \end{pmatrix}, \ \ \varepsilon_8 = 0,01227 > 0,01$$

$$^{>}x_9 = F \cdot {}^{>}x_8 + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 1,00708 \\ 1,00708 \\ 1,00708 \\ 1,00708 \end{pmatrix}, \ \ \varepsilon_9 = 0,00708 < 0,01$$

Получили приближённое решение СЛАУ $^{>}x_9 = \begin{pmatrix} 1,00708 \\ 1,00708 \\ 1,00708 \\ 1,00708 \end{pmatrix}$ с погрешностью не более 0,01 за 9 итераций (k = 9)

Результаты

Методом простых итераций было получено решение СЛАУ на 9 итерации с точностью 0,01. По формуле оценки точность решения не более 0,01 достигается на 11 итерации.

Задание 1.2

Используя метод Зейделя с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $\mathbf{A} \cdot {}^{>}\mathbf{x} = {}^{>}\mathbf{b}$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица A этой СЛАУ приведена в Таблицах 1а,б. Сравнить в методах простой итерации и Зейделя количество шагов для достижения абсолютной погрешности, не превышающей величины 0,01.

$N = 1, \beta = 1 - 0,02(49 - 51) = 1,04$

$$A = \begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10,4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10,4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10,4 \end{pmatrix}$$

Решение

Аналогично заданию 1.1 найдем равносильную СЛАУ (такая же как в задании 1.1):

$$^{>}x = F \cdot {}^{>}x + {}^{>}g = \begin{pmatrix} 0 & -0,0962 & -0,1923 & -0,2885 \\ -0,0962 & 0 & -0,2885 & -0,1923 \\ -0,1923 & -0,2885 & 0 & -0,0962 \\ -0,2885 & -0,1923 & -0,0962 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}^{>}x + \begin{pmatrix} 1,57692 \\ 1,57692 \\ 1,57692 \\ 1,57692 \end{pmatrix}$$

Рабочая формула метода Зейделя: ${}^{>}y_{(k)} = P \cdot {}^{>}y_{(k-1)} + Q \cdot {}^{>}y_{(k)} + {}^{>}g, k \in \mathbb{N}$, где

$$B = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ f_1^n & f_2^n & \dots & f_n^n \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_n^n \end{pmatrix}, \ Q = B - D, P = F - Q, F = (f_j^i)_n^n$$

Найдем P и Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0962 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1923 & -0,2885 & 0 & 0 \\ -0,2885 & -0,1923 & -0,0962 & 0 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 0 & -0,0962 & -0,1923 & -0,2885 \\ 0 & 0 & -0,2885 & -0,1923 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0962 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

${}^{>}y_{(k)} = (E-Q)^{-1} \cdot P \cdot {}^{>}y_{(k-1)} + (E-Q)^{-1} \cdot {}^{>}g, k \in \mathbb{N}$, итерируем по шагам:

$$ {}^{>}y_1 = \begin{pmatrix} 1,57692 \\ 1,4253 \\ 0,86253 \\ 0,76501 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_1 = 0,57692 > 0,01$$

$$ {}^{>}y_2 = \begin{pmatrix} 1,05333 \\ 1,07972 \\ 0,98934 \\ 0,97031 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_2 = 0,07972 > 0,01$$

$$ {}^{>}y_3 = \begin{pmatrix} 1,00295 \\ 1,0085 \\ 0,99984 \\ 0,99753 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_3 = 0,0085 < 0,01$$

Таким образом, необходимая точность достигается уже на 3 итерации.

Результаты

Методом Зейделя было получено решение данной СЛАУ на 3 итерации с точностью 0,01. Следовательно, приближенное решение сходится к истинному быстрее, чем методом простых итераций.

Задание 2

С погрешностью, не превосходящей величину $\varepsilon = 0,0001$, найти все корни уравнения:

$$[N+5,2+(-1)^N\alpha] \cdot x^3 - [2N^2+10,4N+(-1)^{N+1}\alpha] \cdot x^2 - N^2(N+5,2)(x-2N) + (-1)^N\alpha = 0$$

Нарисовать график функции, стоящей в левой части уравнения. Используя этот график отделить корни уравнения. Для определения левого корня использовать метод касательных, правого – метод секущих. Для определения срединного корня использовать метод деления отрезка пополам.

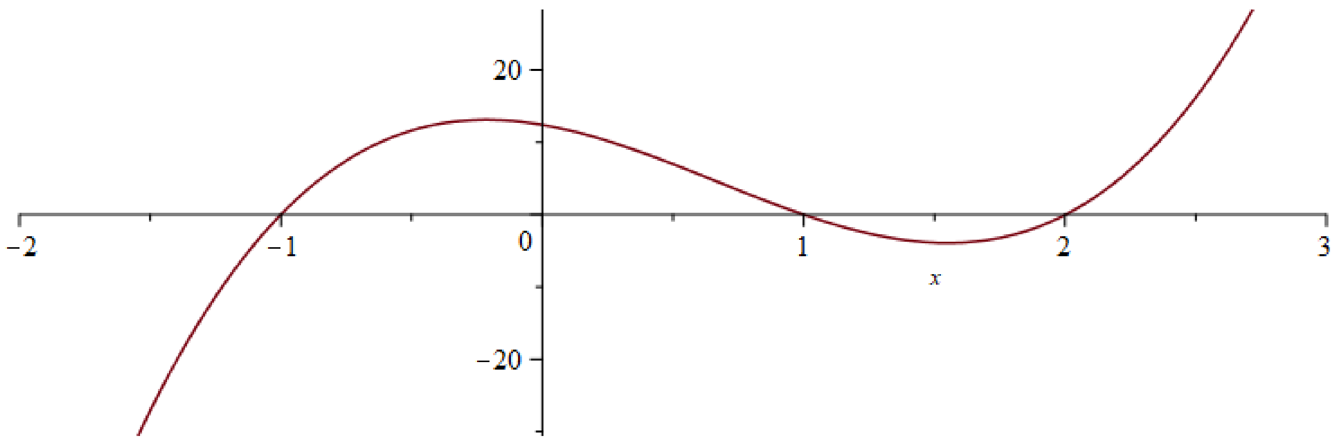
$N = 1, \alpha = 0,003 \cdot (51 - 50) = 0,003$

Наше уравнение:

$$6,197 \cdot x^3 - 12,403 \cdot x^2 - 6,2 \cdot x + 12,397 = 0$$

Решение

Построим график и найдем корни уравнения:



$$x_1 = -0,9999193429$$
$$x_2 = 0,9992753320$$
$$x_3 = 2,002096327$$

1) **Определим левый корень методом касательных**

Рабочая формула для метода касательных имеет вид:

$$x_k = x_{k-1} - (f'(x_{k-1}))^{-1} \cdot f(x_{k-1})$$

Возьмем отрезок $[-1,5; -0.5]$, на этом отрезке $f' > 0$ и $f'' < 0$, $f(-1,5) < 0, f(-0.5) > 0$, соответственно на этом отрезке есть 1 корень уравнения, функция монотонно возрастает, сохраняя при этом направление выпуклости. Возьмем в качестве начального приближения $x_0 = -1,5$

Получаем приближенные решения:

$$x_1 = -1,1276071154, \ \ \varepsilon_1 = 0,1276877725 > 0,0001$$

$$x_2 = -1,0116152683, \ \ \varepsilon_2 = 0,0116959254 > 0,0001$$

$$x_3 = -1,0000316716, \ \ \varepsilon_3 = 0,0001123287 > 0,0001$$

$$x_4 = -0,9999193534, \ \ \varepsilon_4 = 1,05e - 08 < 0,0001$$

Получили необходимую точность на 4 итерации.

2) Определим правый корень методом секущих

Рассмотрим отрезок $[1,5;2,5]$. На этом отрезке выполняются соотношения:
$f(1,5)\cdot f(2,5)<0$ и $f(2,5)\cdot f''>0$

Тогда рабочая формула для метода секущих имеет вид:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(b-k_{k-1})f(x_{k-1})}{f(b)-f(x_{k-1})}, (k\in N),$$

где $b=2,5$. Возьмем в качестве начального приближения $x_0=1,5$
Получаем приближенные решения:

$$x_1 = 1,6937628257,\ \ \varepsilon_1 = 0,3083335013 > 0,0001$$
$$x_2 = 1,8394531563,\ \ \varepsilon_2 = 0,1626431707 > 0,0001$$
$$x_3 = 1,9247925463,\ \ \varepsilon_3 = 0,0773037807 > 0,0001$$
$$x_4 = 1,9674072239,\ \ \varepsilon_4 = 0,0346891031 > 0,0001$$
$$x_5 = 1,9869570229,\ \ \varepsilon_5 = 0,0151393041 > 0,0001$$
$$x_6 = 1,9955716259,\ \ \varepsilon_6 = 0,0065247011 > 0,0001$$
$$x_7 = 1,9992997515,\ \ \varepsilon_7 = 0,0027965755 > 0,0001$$
$$x_8 = 2,0009005181,\ \ \varepsilon_8 = 0,0011958089 > 0,0001$$
$$x_9 = 2,001585522,\ \ \varepsilon_9 = 0,000510805 > 0,0001$$
$$x_{10} = 2,0018782249,\ \ \varepsilon_{10} = 0,0002181021 > 0,0001$$
$$x_{11} = 2,0020032195,\ \ \varepsilon_{11} = 0,0000931075 < 0,0001$$

Получили необходимую точность на 11 итерации.

3) Определим срединный корень методом деления отрезка пополам

Смотря на график, выберем отрезок $[0,5;1,5]$, он нам подходит, т.к. $f(0,5)\cdot f(1,5)<0$.
Получаем приближенные решения:

$$x_1 = 1,0,\ \ \varepsilon_1 = 0,000724668 > 0,0001$$
$$x_2 = 0,75,\ \ \varepsilon_2 = 0,249275332 > 0,0001$$
$$x_3 = 0,875,\ \ \varepsilon_3 = 0,124275332 > 0,0001$$
$$x_4 = 0,9375,\ \ \varepsilon_4 = 0,061775332 > 0,0001$$
$$x_5 = 0,96875,\ \ \varepsilon_5 = 0,030525332 > 0,0001$$
$$x_6 = 0,984375,\ \ \varepsilon_6 = 0,014900332 > 0,0001$$
$$x_7 = 0,9921875,\ \ \varepsilon_7 = 0,007087832 > 0,0001$$
$$x_8 = 0,99609375,\ \ \varepsilon_8 = 0,003181582 > 0,0001$$
$$x_9 = 0,998046875,\ \ \varepsilon_9 = 0,001228457 > 0,0001$$
$$x_{10} = 0,9990234375,\ \ \varepsilon_{10} = 0,0002518945 > 0,0001$$
$$x_{11} = 0,9995117188,\ \ \varepsilon_{11} = 0,0002363868 > 0,0001$$
$$x_{12} = 0,9992675781,\ \ \varepsilon_{12} = 0,0000077539 < 0,0001$$

Получили необходимую точность на 12 итерации.

Результаты

Наибольшей скоростью сходимости из трех рассмотренных в данном задании методов для выбранных начальных значений и отрезков обладает метод касательных. Следующий по скорости - метод секущих. Наименьшей скоростью сходимости в данной задаче обладает метод деления отрезка пополам.