



Počítačové zpracování signálů - Přednáška V.

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

Organizační poznámky

První desetiminutovka na cvičeních

- **Datum:** 5.4.2016
- **Struktura:** Krátký početní příklad (10 minut), samostatná práce
- **Témata:**
 - 1 Diskrétní deterministický signál a základní manipulace s ním (posunutí, otočení ...)
 - 2 Impulsní odezva a konvoluce
 - 3 Frekvenční charakteristika a její výpočet z diferenční rovnice/impulsní odezvy LTI systému
 - 4 Řešení diferenční rovnice pomocí DTFT (nalezení impulsní odezvy z diferenční rovnice)
 - 5 Zapojení více systémů (sériové, paralelní)

Část II

Vzorkování

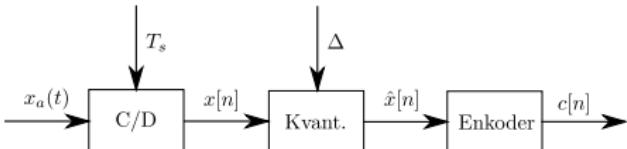
- Většina diskrétních signálů vzniká *vzorkováním* spojitého signálu
Př: záznam zvuku, biologické signály apod.
- Transformace spojitých signálů na diskrétní se označuje jako *A/D konverze* (Analog to Digital Conversion)
- Reverzní proces je označován jako *D/A konverze* - Digital to Analog Conversion
- *Vzorkovací teorém* určuje, za jakých podmínek je spojitý signál jednoznačně určen svými vzorky

A/D konverze

- **A/D konverze** - Proces konverze spojitého signálu $x_a(t), t \in \mathcal{R}$ na diskrétní řadu $x[n]$
- Amplituda $x_a(t)$ je libovolné reálné číslo, $x[n]$ je *kvantovaný* - konečný počet možných amplitud
- **A/D převodník** se skládá obvykle ze tří částí:
 - 1 (*Ideální*) vzorkování - selekce hodnot $x_a(t)$ v časech rovných celočíselnému násobku *vzorkovací periody* T_s

$$x[n] = x_a(nT_s) \quad (1)$$

- 2 *Kvantizace* spojitých hodnot $x_a(nT_s)$ do diskrétní množiny amplitud
- 3 *Kódování* diskrétních hodnot do sekvence binárních kódových slov



Vzorkování I

- Vzorkovací perioda $T_s [s, s/sample]$, vzorkovací frekvence $F_s [Hz, sample/s]$, frekvence $F [Hz]$
- *Ekvidistantní vzorkování* - násobení $x_a(t)$ periodickou řadou impulsů
- PODROBNOSTI kolem ekvidistantního vzorkování
- Vzorkování zobrazuje frekvence spojitého signálu $-\infty < \Omega < \infty$ na frekvence digitálního signálu $-\pi < \omega < \pi$

$$\omega = \Omega T_s = \frac{\Omega}{F_s} = \frac{2\pi F}{F_s} \quad (2)$$

- Normalizované frekvence digitálního signálu jsou periodické s periodou 2π
- PODROBNOSTI kolem přechodu od frekvence spojitého signálu k normalizované frekvenci číslicového signálu

Vzorkování II

- **Vzorkovací teorém** - Je-li Ω_0 nejvyšší frekvencí obsaženou v analogovém signálu $x_a(t)$ (signál je pásmově omezen), pak $x_a(t)$ je možné jednoznačně rekonstruovat z jeho vzorků $x_a(nT_s)$ pokud

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\Omega_0 \quad (3)$$

Ω_0 - Nyquistova frekvence

- OTÁZKA: Co se stane, není-li vzorkovací teorém dodržen?
- *Aliasing* - Překládání spektrálních komponent signálu $x_a(t)$, spektrum vzorkovaného signálu $X(e^{j\omega})$ je poškozeno a spojitý signál není možné jednoznačně rekonstruovat
- Běžné signály často NEJSOU pásmově omezené, aplikujeme *antialiasingový filtr*

Kvantizace I

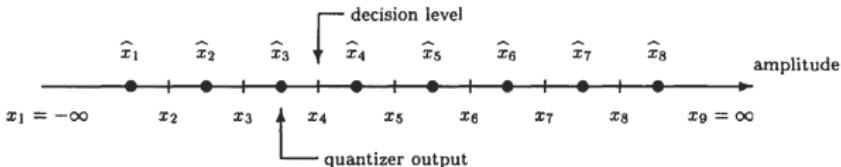
- **Kvantizace** - Transformace spojitých amplitud diskrétní řady $x[n]$ na diskrétní konečnou množinu amplitud

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \quad (4)$$

- Kvantizace rozděluje spojituu amplitudu $x[n]$ na L nepřekrývajících se intervalů I_k pomocí $L + 1$ rozhodovacích hladin x_1, x_2, \dots, x_{L+1}

$$I_k = [x_k, x_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (5)$$

- Pokud vstup $x[n]$ patří do intervalu I_k , kvantizace přiřadí $\hat{x}[n]$ hodnotu \hat{x}_k



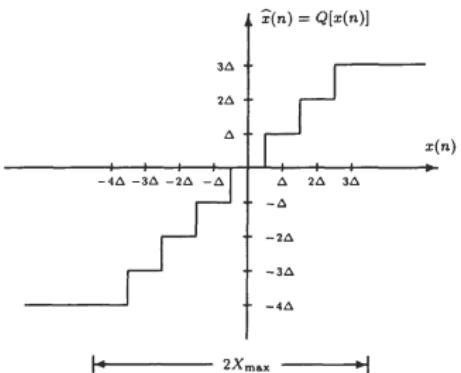
Kvantizace II

- **Kvantizační krok/rozlišení** - šířka intervalu I_k , obvykle konstantní pro všechny intervaly - *lineární/stejnoměrná kvantizace*
- Počet rozhodovacích hladin je obvykle $L = 2^B + 1$, kvůli binárnímu kódování, B -Počet bitů
- **Kvantizační chyba** - $e[n] = x[n] - Q(x[n])$ - Rozdíl mezi kvantovanou a skutečnou hodnotou signálu
- **SQNR[dB]** - *Odstup signálu od kvantizačnímu šumu* (Signal to Quantization Noise Ratio)

$$\text{SQNR} = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \approx 6.02B[\text{dB}] \quad (6)$$

SQNR tedy roste přibližně o 6dB s každým přidaným bitem
Předpoklad: signál rovnoměrně pokrývá všechny kvantizační úrovně

Kvantizace III, Kódování

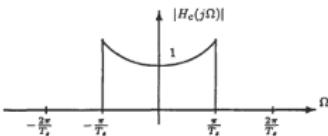
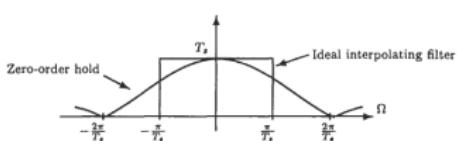
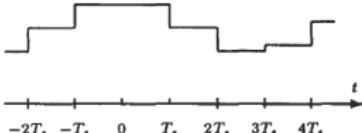
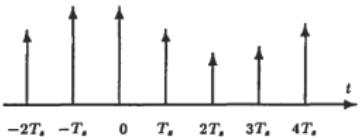


Zdroj: MONSON H. HAYES, Schaum's Outlines of Digital Signal Processing

- **Enkodér** - Zařízení přiřazující každé kvantizační úrovni nějaké binární slovo
- Celočíselné typy, s/bez znaménka, pevná/plovoucí desetinná čárka...
- Existuje mnoho kódovacích schémat, např. pro kódování celých čísel je nejběžnější *dvojkový doplněk*

- **D/A konverze** - Převod diskrétní řady na analogový signál
- Pokud je dodržen *vzorkovací teorém*, pak je možné analogový signál jednoznačně obnovit z jeho vzorků
- Kvantizační chyby ale přesnou rekonstrukci znemožňují!!!
- Ideální D/A konverze probíhá ve dvou krocích:
 - 1 Spojitá sekvence pulsů $x_s(t)$ je sestavena se vzorků diskrétní řady $x[n]$
 - 2 Ideální dolnopropustný filtr - *rekonstrukční filtr* - je aplikován na $x_s(t)$
- PODROBNOSTI - Ideální D/A konverze
- Ideální rekonstrukční filtr není v praxi realizovatelný
- Místo něj se používá *zero-order hold* systém a *kompenzační filtr*
- PODROBNOSTI - Reálná D/A konverze

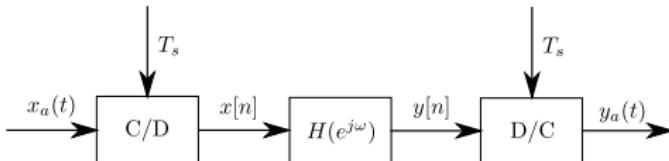
D/A konverze II



Zdroj: MONSON H. HAYES, Schaum's Outlines of Digital Signal Processing

- (a) Spojitá sekvence pulsů
- (b) Zero-Order Hold signál
- (c) Frekvenční charakteristiky: Ideální DP, ZOH
- (d) Frekvenční charakteristika: Ideální kompenzační filtr

- A/D a D/A převodníky se používají také pokud má být analogový signál zpracován diskrétním systémem (řízení procesů...)
- Zde se předpokládá že:
 - Signál není kvantován (v praxi musí být zaručeno dostatečné rozlišení A/D převodníku)
 - Ideální dolní propust je použita pro rekonstrukci (v praxi zero-order hold a kompenzační filtr)
- Při dodržení všech předpokladů je možné výsledný systém považovat za spojitý a vliv vzorkování zanedbat



Část III

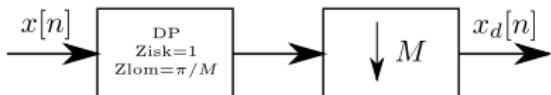
Vzorkování - Změna vzorkovací
frekvence

Změna vzorkovací frekvence

- **Změna vzorkovací frekvence** je častá úloha ze zpracování signálu
- Dva základní způsoby provedení:
 - 1 Provedení D/A konverze a navzorkování vyšší vzorkovací frekvencí F_s (nevýhodné)
 - 2 *Převzorkování* přímo v číslicové oblasti
- Tři základní úlohy:
 - 1 Snížení F_s celočíselně-krát
 - 2 Zvýšení F_s celočíselně-krát
 - 3 Změna F_s o racionální faktor

Snížení vzorkovací frekvence celočíselně-krát

- **Podvzorkování** (Down-sampling)
- Chceme-li podvzorkovat signál $x[n]$ M-krát, do podvzorkovaného signálu $x_d[n]$ uložíme každý M -tý vzorek původního signálu
- POZOR - Podvzorkování obecně vede k aliasingu!
- PODROBNOSTI - Aliasing při podvzorkování
- Prevence aliasingu: Filtrování $x[n]$ DP filtrem se zlomovou frekvencí $\omega_c = \pi/M$
- Kaskáda filtrování DP a podvzorkování se nazývá *decimace*

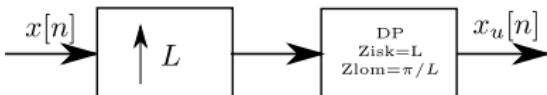


Zvýšení vzorkovací frekvence celočíselně-krát

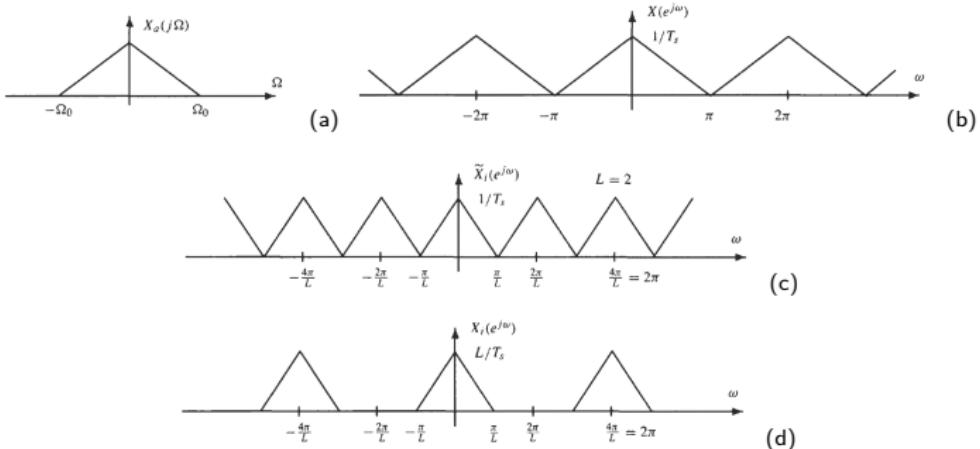
- **Nadvzorkování (Up-sampling)**
- Chceme-li nadvzorkovat signál $x[n]$ L -krát, do nadvzorkovaného signálu $x_u[n]$ uložíme mezi každý vzorek $x[n]$ $L - 1$ nul, tedy

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & jinak \end{cases} \quad (7)$$

- Aproximace nulových vzorků se provádí pomocí filtrace DP se zlomovou frekvencí π/L a zesílením L .
- Kaskáda nadvzorkování a filtrování DP se nazývá *interpolace*
- PODROBNOSTI - Interpolace a spektrum



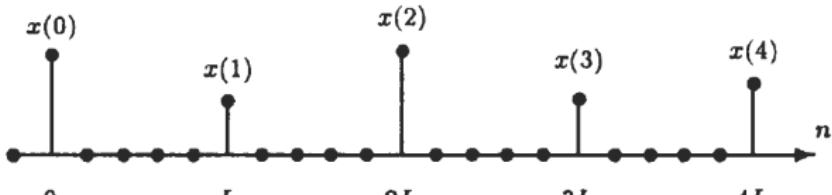
Interpolace a Spektrum



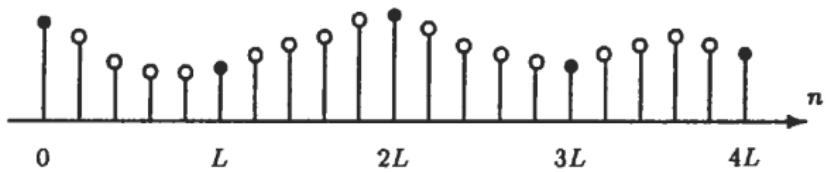
Zdroj: MONSON H. HAYES, Schaum's Outlines of Digital Signal Processing

- (a) Spektrum spojitého pásmově omezeného signálu
- (b) Spektrum vzorkovaného signálu
- (c) Spektrum nadvzorkovaného signálu
- (d) Spektrum interpolovaného signálu (nadvzorkovaný, filtrovaný DP)

Interpolace v časové oblasti



(a)



(b)

Zdroj: MONSON H. HAYES, Schaum's Outlines of Digital Signal Processing

(a) Nadvzorkovaný signál $x_u[n]$

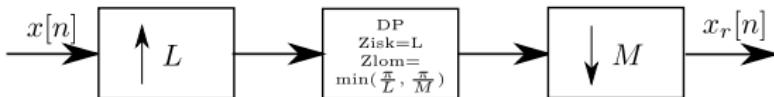
(b) Interpolovaný signál (nadzorkovaný, filtrovaný DP)

Změna vzorkovací frekvence o racionální faktor

- Chceme-li změnit vzorkovací frekvenci signálu $\frac{L}{M}$ -krát, použijeme interpolaci L -krát následovanou decimací M -krát
- Kaskádu dvou DP můžeme nahradit jediným DP filtrem se zlomovou frekvencí

$$\omega_c = \min \left\{ \frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{L} \right\} \quad (8)$$

a zesílením L .



- PŘÍKLAD: Změna vzorkovací frekvence o racionální faktor
- MATLAB: `resample(x,L,M);`

Část IV

Diskrétní Fourierova Transformace (DFT)

Diskrétní Fourierova Transformace (DFT)

- DTFT umožňuje transformovat diskrétní řadu $x[n]$ na spojitou funkci číslicové frekvence ω , tj. $X(e^{j\omega})$ (perioda 2π)
- Pro diskrétní signál $x[n]$ je $X(e^{j\omega})$ DTFT spektrum
- Jednoznačná zpětná transformace je možná, pokud známe hodnoty obrazu pro všechny číslicové frekvence $\omega \in [0, 2\pi)$
- Pokud je trvání řady $x[n]$ konečné ($x[n] \neq 0, 0 < n < N - 1$), pak je možné $x[n]$ zrekonstruovat známe-li N vhodně zvolených frekvenčních bodů
- DTFT je definovaná jako:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \quad (9)$$

- Má-li řada $x[n]$ konečné trvání, pak pouze N členů sumy je nenulových

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jn\omega} \quad (10)$$

Diskrétní Fourierova Transformace II

- Vzorkujeme-li ekvidistantně jednu periodu obrazu $X(e^{j\omega})$, $\omega \in [0, 2\pi)$, (vzdálenost frekvenčních vzorků je $2\pi/N$), tedy používáme frekvence:

$$\omega[k] = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (11)$$

pak je možné původní konečnou řadu $x[n]$ z těchto frekvencí jednoznačně zrekonstruovat

- **Diskrétní Fourierova Transformace** je tedy definována jako

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (12)$$

- Řada komplexních hodnot $X[k]$ se nazývá N-bodová DFT konečné diskrétní řady $x[n]$
- Pokud je vzorec (12) vyhodnocen pro všechna k (nejen pro $0 \leq k < N$) získáme nekonečný periodický DFT obraz s periodou N (označme $\tilde{X}[k]$)

Diskrétní Fourierova Transformace III

- Inverzní Diskrétní Fourierova Transformace je definována:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (13)$$

- Opět, je-li (13) vyhodnocena pro všechna n získáme periodické prodloužení konečné řady $x[n]$ s periodou N ($\tilde{x}[n]$)
- Rovnice (12) a (13) formují DFT pář

$$x[n] \xrightleftharpoons{DFT} X[k] \quad (14)$$

- Aplikací N -bodové DFT na **signál** $x[n]$ získáme N -bodové **diskrétní komplexní spektrum** $X[k]$, které odpovídá navzorkovanému DTFT spektru v bodech $\frac{2\pi k}{N}$, $k = 0 \dots N-1$
- DFT je výhodná z hlediska jednoduchosti výpočtu na počítačích
- PŘÍKLAD: Výpočet 4-bodové DFT

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška VI

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

V minulé přednášce jste se dozvěděli...

... o Diskrétní Fourierově transformaci

- Diskrétní Fourierova Transformace je definována jako

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq k < N - 1 \quad (1)$$

- Aplikací N-bodové DFT na signál $x[n]$ ($x[n] \neq 0, 0 < n < N - 1$) získáme N-bodové **diskrétní komplexní spektrum** $X[k]$, které odpovídá navzorkovanému DTFT spektru v bodech $\frac{2\pi k}{N}$, $k = 0 \dots N - 1$
- Inverzní Diskrétní Fourierova Transformace je definována:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq n < N - 1 \quad (2)$$

- Rovnice (1) a (2) formují DFT pář

$$x[n] \xrightleftharpoons{\text{DFT}} X[k] \quad (3)$$

Část II

Diskrétní Fourierova transformace
(DFT)

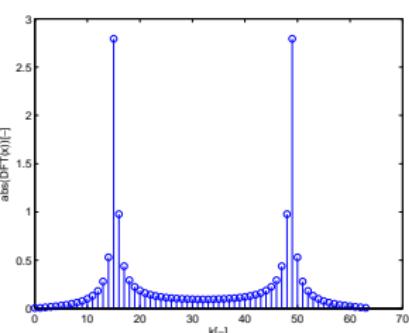
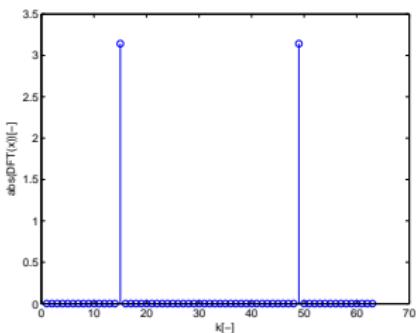
Srovnání DFT a DTFT

- **DTFT:** nekonečné, neperiodické, diskrétní signály $x[n]$
- Výstup DTFT: spojité, komplexní, periodické spektrum $X(e^{j\omega})$ (perioda 2π)
- **DFT:** nekonečné, periodické, diskrétní signály $\tilde{x}[n]$
- Jedna perioda periodického signálu $\tilde{x}[n]$ má trvání N vzorků, značíme ji $x[n]$
- Výstup DFT: diskrétní, komplexní, periodické spektrum $\tilde{X}[k]$ (perioda N)
- V praxi se vyhodnocuje jediná perioda $\tilde{X}[k]$, značíme ji $X[k]$ (N -bodová DFT)
- *DFT spektrum* odpovídá vzorkování DTFT spektra v bodech $\frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$
- Vzdálenost frekvenčních vzorků $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ se nazývá *frekvenční rozlišení*
- S rostoucím N se vzdálenost mezi vzorky $\Delta\omega$ zmenšuje

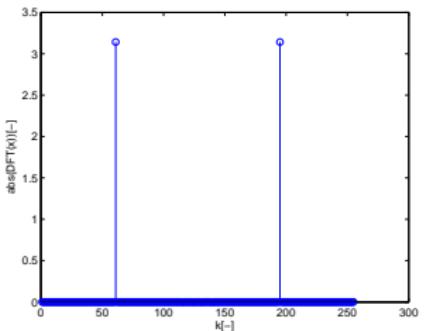
Prosakování ve spektru

- V praxi mohou být signály, na které je aplikována DFT neperiodické, nebo jejich přesná perioda není známa
- Pro výpočet spektra se tedy vybírá nějaký konečný interval (délky N) těchto signálů
- Toto odpovídá vynásobení signálu obdélníkovým oknem délky N
- Tato konečná sekvence se pak považuje za jednu periodu periodického signálu
- Násobení v čase odpovídá (spojitě) kruhové konvoluci ve frekvenční oblasti
- Výsledné spektrum je tedy konvolucí skutečného spektra signálu a spektra obdélníkového okénka - *Prosakování ve spektru*
- **PŘÍKLAD:** Jak se projevuje prosakování ve spektru?
- Prosakování ve spektru je možné omezit výběrem vhodnějšího okénka, než je obdélníkové, při výběru jedné periody (Hann, Hamming, ..., viz Praktická spektrální analýza)

Prosakování ve spektru II



Obrázek: $x_1[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{64} n\right)$, $N_1 = 64$; $x_2[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{64} 15,25 n\right)$, $N_1 = 64$;



Obrázek: $x_2[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{64} 15,25 n\right)$, $N_2 = 256$;

Vlastnosti DFT I

- **Linearita:** Signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$ mají spektra $X_1[k]$ a $X_2[k]$.

Platí, že:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{DFT} aX_1[k] + bX_2[k] \quad (4)$$

- Sekvence musí být stejně dlouhé, nejsou-li doplňuje se kratší nulami
- **Symetrie:** Pokud je $x[n] \in \mathcal{R}$, pak $X[k]$ je konjugovaně symetrické:

$$X[k] = X^*[-k] = X^*[N - k]_N \quad (5)$$

- Pokud je $x[n]$ je imaginární, pak $X[k]$ je konjugovaně antisymetrické:

$$X[k] = -X^*[-k] = -X^*[N - k]_N \quad (6)$$

- **PŘÍKLAD:** Symetrie DFT

Vlastnosti DFT II

■ Zjednodušené značení:

$$W_N \stackrel{\text{def.}}{=} e^{-j2\pi/N} \quad (7)$$

$$W_N^{nk} \stackrel{\text{def.}}{=} e^{-j2\pi kn/N} \quad (8)$$

■ Kruhový posun: Kruhový posun o n_0 vzorků je definován jako

$$(x[n - n_0])_N R_N[n] = \tilde{x}[n - n_0] R_N[n] \quad (9)$$

kde $R_N[n]$ je obdélníkové okno délky N

- PŘÍKLAD: Kruhový posun
- Kruhový posun v časové oblasti způsobí vynásobení spektra komplexní exponenciálou (změna fázového spektra)

$$(x[n - n_0])_N R_N[n] \xrightleftharpoons{DFT} W_N^{n_0 k} X[k] \quad (10)$$

Vlastnosti DFT III

- **Kruhová konvoluce:** Jsou-li $x[n]$ a $h[n]$ dvě konečné sekvence s N -bodovou DFT $X[k]$ a $H[k]$,
- pak sekvence s DFT rovnou $Y[k] = H[k]X[k]$ je dána vztahem

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = \left[\sum_{k=0}^{N-1} h[k] \tilde{x}[n-k] \right] R_N[n] \quad (11)$$

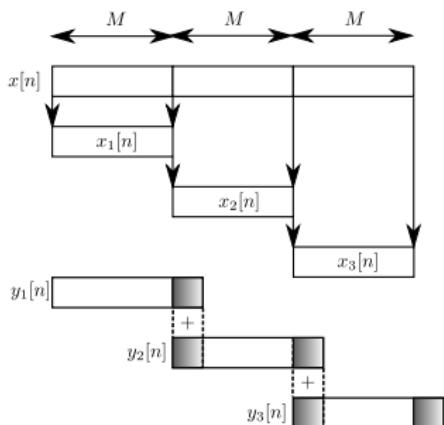
- Jedná se tedy o konvoluci $h[n]$ s periodicky prodlouženým signálem $x[n]$ vyhodnocenou na jedné periodě o délce N
- *Kruhová konvoluce obecně NEMÁ stejnou hodnotu jako lineární konvoluce*
- Při vhodném doplnění nulami se však používá právě pro rychlý výpočet lineární konvoluce (výstup z FIR filtru) pomocí DFT
- **PŘÍKLAD:** Výpočet kruhové konvoluce

Výpočet lineární konvoluce pomocí kruhové

- DFT a kruhová konvoluce se používá pro efektivní výpočet konvoluce bez nutnosti vyhodnocovat konvoluční sumu
- Máme-li konečné sekvence $h[n]$ o délce N_1 a $x[n]$ o délce N_2 , pak jejich konvoluci lze vypočítat následovně
 - 1 Doplnit sekvence nulami $h[n]$ a $x[n]$ na délku $N \geq N_1 + N_2 - 1$
 - 2 Výpočet N-bodové DFT signálů $h[n]$ a $x[n]$
 - 3 Vynásobení $Y[k] = H[k]X[k]$
 - 4 Inverzní transformace IDFT z $Y[k]$
- Výpočet DFT je možné provést efektivně pomocí Rychlé Fourierovy Transformace (FFT)
- Tento postup je nevhodný pro dlouhé sekvence $x[n]$
 - Při vyhodnocování konv. sumy získáváme výsledek po vzorcích
 - Při výpočtu DFT výsledek celý najednou - *zpoždění*
 - Toto negativum se v praxi obchází *blokovým výpočtem konvoluce*

Overlap-Add (Bloková konvoluce)

- **Overlap-Add (OA,OLA)** poskytuje efektivní postup pro vyhodnocení konvoluce *dlouhého* signálu $x[n]$ s impulsní odezvou FIR filtru $h[n]$ (délka L)
 - Nejprve je signál $x[n]$ rozdělen na nepřekrývající se sekvence $x_i[n]$ délky M
 - Výstupní signál $y[n]$ pak je možné vyjádřit jako součet konvolucí $x_i[n]$ s $h[n]$
 - Částečné konvoluce $y[i]$ mají délku $N = L + M - 1$ a jsou sečteny s posunem M , odtud *Overlap-Add*
 - Výpočet $y_i[n]$ se provádí pomocí N -bodové DFT (v implementaci FFT)
- DETAILY: Postup Overlap-Add

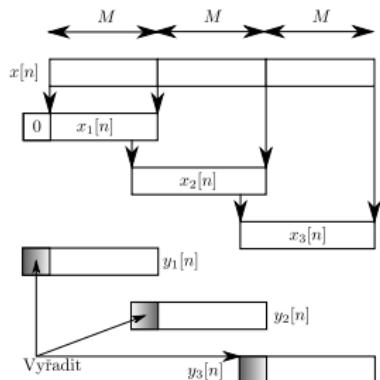


Overlap-Save (Bloková konvoluce)

- **Overlap-Save:** Mějme dlouhý signál $x[n]$ délky N a impulsní odezvu $h[n]$ délky L
- Aliasing v kruhové konvoluci postihuje pouze část sekvence, zbytek je rovný lineární konvoluci
- Předpokládáme-li, že $N > L$, pak N -bodová kruhová konvoluce je dána

$$h[n] \circledast x[n] = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n+kN] \right] R_N[n] \quad (12)$$

- Pouze člen $y[n+N]$ se promítne do intervalu $0 < n < N-1$ a jeho aliasing postihne pouze prvních $L-1$ vzorků kruhové konvoluce
- Lineární konvoluci je tedy možné spočítat vhodným skládáním částí kruhové konvoluce

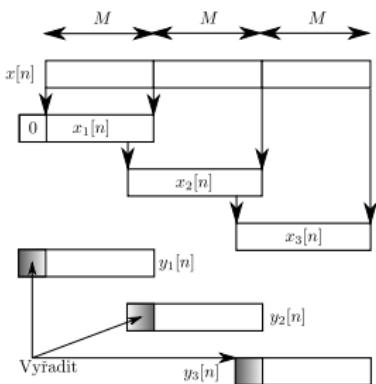


Overlap-Save II

- Vytvoření sekvence $x_1[n]$

$$x_1 = \begin{cases} 0 & 0 \leq n < L - 1 \\ x[n - L + 1] & L - 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (13)$$

- Výpočet $y_1[n] = x_1[n] \circledast h[n]$ pomocí DFT
 $L - 1$ hodnot se liší od lineární konvoluce
 Posledních $N - L + 1$ hodnot jsou prvními vzorky
 $y[n]$
- Vytvoření $x_2[n]$ z hodnot $x[n]$, $L - 1$ vzorků se
 překrývá s $x_1[n]$
- Výpočet $y_2[n] = x_2[n] \circledast h[n]$ pomocí DFT
 $L - 1$ hodnot se liší od lineární konvoluce
 Posledních $N - L + 1$ hodnot tvoří další blok $y[n]$
- Opakujeme 3. a 4. dokud není vyhodnocena celá
 lin. konvoluce



Část III

Rychlá Fourierova Transformace (FFT)

Rychlá Fourierova Transformace

- **Rychlá Fourierova Transformace** (Fast Fourier Transform) je skupina algoritmů umožňující výpočetně optimalizovaný výpočet DFT a IDFT
- DFT se používá pro transformaci konečné (periodické) řady čísel na konečný (periodický) vektor frekvenčních komponent
- Výpočetní náročnost DFT vypočtené podle definice je $O(N^2)$ aritmetických operací
- FFT je schopna spočítat *stejný* výsledek v $O(N \log(N))$ operacích
- Rozdíl ve výpočetní náročnosti je zřejmý zejména pro velká N
- Rychlý výpočet DFT umožnil její rozšíření do mnoha různých oblastí (zpracování signálů, obrazů, řešení parciálních diferenciálních rovnic ...)

Rychlá Fourierova Transformace II

- Nejznámější FFT algoritmy jsou postaveny na faktorizaci počtu vzorků, tedy dělení N -bodové DFT na transformace o menším počtu bodů
- Existují ale algoritmy i pro prvočíselná N
- Pomocí FFT algoritmů je možné lehce spočítat i IDFT (liší se pouze znaménkem v exponentu a normalizací)
- **Srovnání FFT a DFT:**
 - Vyhodnocení DFT dle definice vyžaduje N^2 komplexních součinů a $N(N - 1)$ komplexních součtů
 - Nejznámější FFT algoritmus radix-2 Cooley-Tukey pro N je mocninou dvou vyžaduje $(N/2) \log_2(N)$ komplexních součinů a $N \log_2(N)$ komplexních součtů

Rychlá Fourierova Transformace III

- **Radix-2 Cooley-Tukey FFT:** Algoritmus určený pro sekvence délky $N = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$
- Výpočetních úspor je dosaženo díky periodicitě komplexních exponenciál a možnosti vypočítat N -bodovou DFT pomocí dvou $N/2$ -bodových DFT
- Algoritmus je ve své podstatě rekurzivní
- Je možné jej implementovat i nerekurzivně, pokud jsou vstupní vzorky vhodně permutovány
- DETAILY: Radix-2 Cooley-Tukey FFT

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška VII

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

V předminulé přednášce jste se
dozvěděli...

... detaily o DFT ...

- **DTFT:** nekonečné, neperiodické, diskrétní signály $x[n]$
- Výstup DTFT: spojité, komplexní, periodické spektrum $X(e^{j\omega})$ (perioda 2π)
- **DFT:** nekonečné, periodické, diskrétní signály $\tilde{x}[n]$
- Jedna perioda periodického signálu $\tilde{x}[n]$ má trvání N vzorků, značíme ji $x[n]$
- Výstup DFT: diskrétní, komplexní, periodické spektrum $\tilde{X}[k]$ (perioda N)
- V praxi se vyhodnocuje jediná perioda $\tilde{X}[k]$, značíme ji $X[k]$ (N -bodová DFT)
- *DFT spektrum* odpovídá vzorkování DTFT spektra v bodech $\frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$
- Vzdálenost frekvenčních vzorků $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ se nazývá *frekvenční rozlišení*
- S rostoucím N se vzdálenost mezi vzorky $\Delta\omega$ zmenšuje

... o rychlé Fourierově transformaci (FFT)

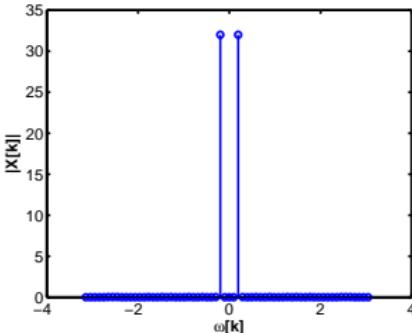
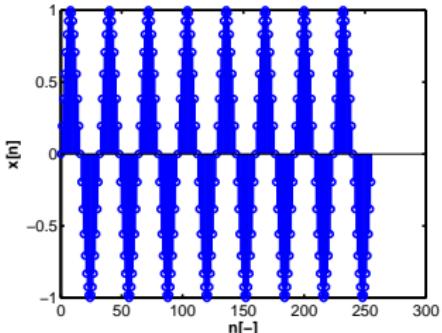
- **Rychlá Fourierova Transformace** (Fast Fourier Transform) je skupina algoritmů umožňující výpočetně optimalizovaný výpočet DFT a IDFT
- DFT se používá pro transformaci konečné (periodické) řady čísel na konečný (periodický) vektor frekvenčních komponent
- Výpočetní náročnost DFT vypočtené podle definice je $O(N^2)$ aritmetických operací
- FFT je schopna spočítat *stejný* výsledek v $O(N \log(N))$ operacích
- Nejznámější FFT algoritmus *radix-2 Cooley-Tukey* pro N je mocninou dvou vyžaduje $(N/2) \log_2(N)$ komplexních součinů a $N \log_2(N)$ komplexních součtů

Část II

Praktická spektrální analýza, okénkování

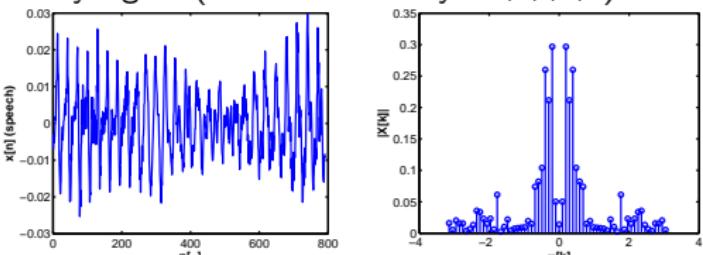
Praktická spektrální analýza I

- Spektrální analýza: pátrání po pravidelné vnitřní struktuře / periodicitě obsažené v signálu
- Komplikace: konečná délka signálu, potenciální nestacionarita, šum..
- **Signály s harmonickou strukturou** (energie ve spektru soustředěna do úzkých pásem, v ideálním případě čárové spektrum)
- **PŘÍKLAD:** Signály vzniklé v kontextu rotujících součástek strojů, hudební tóny, střídavé elektrické signály...
- *Harmonická analýza* - Analýza spektra harmonických signálů, snaží se o „přesné“ určení omezeného počtu harmonických složek

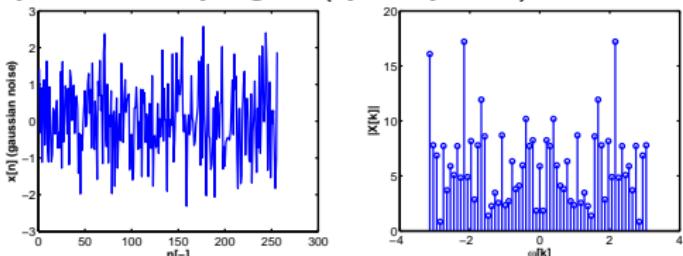


Praktická spektrální analýza II

- (Lokálně) (kvasi)-periodické signály (mají „určitou“ harmonickou strukturu, energie rozprostřena ve spektru s několika výraznými špičkami)
- PŘÍKLAD: Řečový signál (znělé samohlásky - a,e,i,o,u)



- Neperiodické signály (nemají harmonickou strukturu, energie (nerovnoměrně) rozprostřena v rámci spektra, širokopásmové signály)
- PŘÍKLAD: Bílý šum, řečový signál (sykavky - s,z)

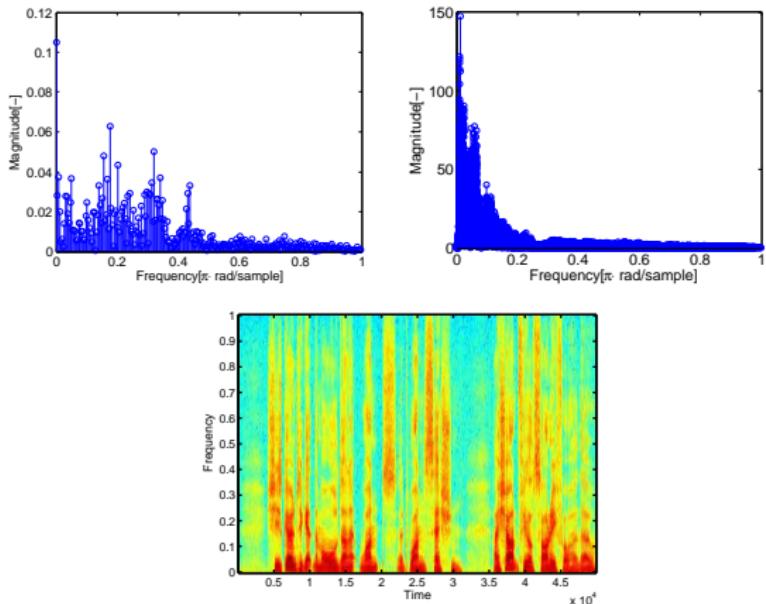


- Spektrální analýza - Pracuje s pásmeny frekvencí (výpočet příznaků MFCC pro rozpoznávání řeči), zabývá se „tvarem“ spektra (distribuce energie ve spektru, např. detekce formantů)

- Ke spektrální analýze signálů se používá v praxi DFT/FFT
- Ideální případ: dlouhý (nekonečný) signál, stacionární (nemění spektrum v čase), nezatížený šumem
- Reálný případ: signál může být stacionární pouze v rámci krátkých intervalů (řeč - 20ms), je přítomen šum z různých zdrojů (kvantizační, šum snímače/čidla, šum okolí).
- Tyto jevy snižují přesnost spektrální analýzy a je nutné s jejich vlivem počítat

Krátkodobá spektrální analýza

- Signály jsou v praxi často nestacionární, tedy mění své parametry v čase
- Při spektrální analýze takových signálů není vhodné počítat DFT signálu jako celku
 - Výpočetní nároky jsou při takovém přístupu zbytečně velké
 - Výsledné spektrum má sice vynikající spektrální rozlišení ($\Delta\omega = 2\pi/N$)...
 - ...ale prakticky žádné časové rozlišení
- Výhodnější je sekvence krátkých DFT, která bude kompromisem mezi spektrálním a časovým rozlišením
- *Krátkodobá spektrální analýza + okénka*
(short time spectral analysis + windowing)
- PŘÍKLAD: Analýza zvukové nahrávky



- (a) Krátkodobé DFT spektrum ($N = 512$, $\Delta\omega \approx 3 \cdot 10^{-3}\pi$, $\Delta f \approx 40\text{Hz}$),
- (b) DFT spektrum ($N = 10^5$, $\Delta\omega = 2 \cdot 10^{-5}\pi$, $\Delta f = 0.2\text{Hz}$),
- (c) Spektrogram

Prosakování ve spektru - násobení obdélníkovým okénkem

- Mějme nekonečný signál $y[n]$, z něhož vybereme krátký segment $x[n]$ tak, že

$$x[n] = \begin{cases} y[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (1)$$

- Tato operace odpovídá vynásobení $y[n]$ obdélníkovým oknem $w_r[n]$
- Násobení v časové oblasti odpovídá konvoluci ve frekvenční oblasti
- Vztah DTFT spektra dlouhého signálu $y[n]$ a signálu $x[n]$ zváženého obdélníkovým oknem je tedy

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \{ Y(e^{j\omega}) * W_r(e^{j\omega}) \} \quad (2)$$

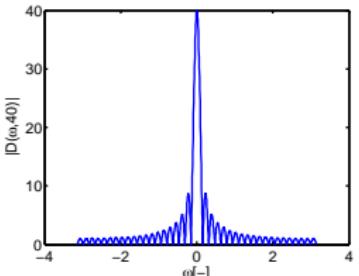
- Funkce $W_r(e^{j\omega})$ je DTFT($w_r[n]$) daná jako

$$W_r(e^{j\omega}) = \frac{\sin(0.5\omega N)}{\sin(0.5\omega)} e^{-j0.5\omega(N-1)} = D(\omega, N) e^{-j0.5\omega(N-1)} \quad (3)$$

Násobení obdélníkovým okénkem II

Dirichletův kernel - Magnituda DTFT($w_r[n]$) - $D(\omega, N)$

- Maximální hodnota N nastává na frekvenci $\omega = 0$
- Nejbližší nuly se nacházejí na frekvenci $\pm 2\pi/N$
Frekvenční interval mezi nulami se označuje jako *hlavní lalok* (main lobe)
- Další nuly leží na frekvencích $\omega = 2m\pi/N$, $m = \pm 2, \pm 3, \dots$
Frekvenční intervaly mezi nimi označujeme jako *postranní laloky* (side lobes)
- Nejvyšší postranní lalok (v absolutní hodnotě) nastává na frekvenci $\omega = \pm 3\pi/N$ a poměr jeho magnitudy k magnitudě hlavního laloku je -13.5dB.



Násobení obdélníkovým okénkem III

V čem se tedy liší spektrum $X(e^{j\omega})$ signálu $x[n]$ (signál násobený obdélníkovým oknem) od spektra $Y(e^{j\omega})$ původního signálu $y[n]$?

- Dochází k **rozmazání spektra** a ztrátě frekvenčního rozlišení
Pokud jsou dvě frekvenční komponenty v $Y(e^{j\omega})$ vzdáleny méně než $2\pi/N$ (šířka postranního laloku), pak splývají.
- Dochází k **maskování slabých frekvenčních komponent**
Je-li v signálu obsažena silná harmonická komponenta a další slabé, pak postranní laloky silné komponenty zamaskují hlavní lalok slabých komponent.
Tento efekt je nejhorší, liší-li se vzájemně komponenty o lichý násobek π/N

Jinými slovy: Oříznutí (okénkování obdélníkovou funkcí) má nechtěný vliv na spektrum původního signálu a v některých případech silně zkresluje výsledky krátkodobé spektrální analýzy

- K rozmazání spektra (prosakování) dochází **vždy** když "významně" řadu $y[n]$ okénkem a transformaci (DTFT/DFT) počítáme pouze z řady $x[n]$
- **PŘÍKLAD:** Jak je tedy například možné, že když vyřízneme přesně jednu periodu harmonického signálu, pak se její DFT spektrum jeví jako nerozmazané?

Okénkování

Nechtěné efekty oříznutí je možné omezit pomocí volby vhodnějšího okénka $w[n]$, než je obdélníkové $w_r[n]$

Okénkování - $x[n] = y[n]w[n]$

Požadovaná sekvence $w[n]$ není libovolná, musí splňovat následující vlastnosti:

- Sekvence $w[n]$ má konečné trvání (duration)
- Délka okna N_w musí být stejná jako délka segmentu, který chceme analyzovat
- Sekvence $w[n]$ by měla být nezáporná

Navíc pro okénko požadujeme:

- Hlavní lalok by měl být co nejužší
- Vedlejší laloky by měli mít co nejmenší magnitudu

DTFT sekvence $w[n]$ značená $W(e^{j\omega})$ se nazývá jádrová funkce (kernel function)

Okénkování II

- Ideální jádrová funkce $W(e^{j\omega})$: blíží se $\delta(\omega)$, pak konvoluce

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \{ Y(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \} \quad (4)$$

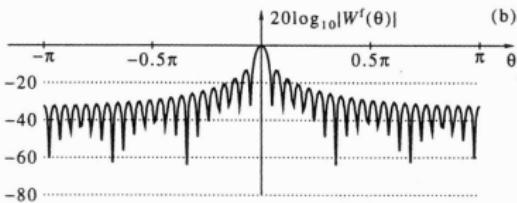
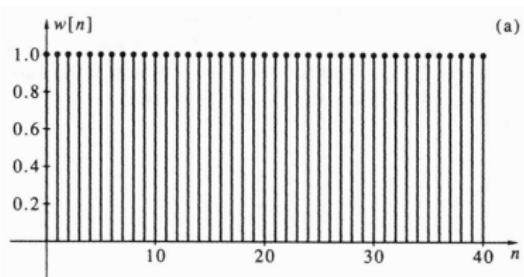
příliš nerozmazává spektrum $Y(e^{j\omega})$.

- Bohužel okénko odpovídající jádrové funkci $W(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$ je $w[n] = 1$, tedy je nekonečné

- Volba vhodného okénka:** je kompromis mezi ...
 - ... malou šířkou hlavního laloku a ...
 - ... magnitudou vedlejšího laloku
- Čím užší je hlavní lalok, tím vyšší je magnituda vedlejšího laloku

Obdélníkové okénko

- **Obdélníkové okénko:** Má nejužší hlavní lalok ze všech okének: $4\pi/N$
- *Magnituda postranních laloků* je ovšem největší: $-13.5dB$, což je pro praktické aplikace nevhodné - dochází k maskování slabých frekvenčních komponent



(a) Obdélníkové okénko $w_r[n]$, (b) Magnitudová charakteristika $W_r(e^{j\omega})$

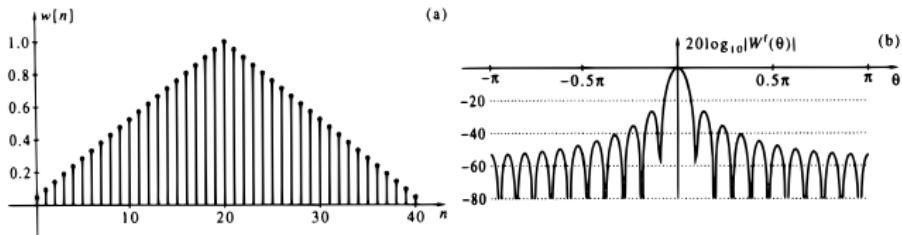
ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Bartlettovo/trojuhelníkové okénko

- Vychází z umocnění jádrové funkce $W_r(e^{j\omega})$ na druhou
- Zmenšení magnitudy vedlejších laloků $2 \times$ (dB)
- Umocnění $W_r(e^{j\omega})$ ve frekvenční oblasti odpovídá $w_r[n] * w_r[n]$ v časové oblasti
(délka $w_r[n]$ je $(N + 1)/2$ pro $w_t[n]$ délky N)

$$w_t[n] = \frac{2}{N+1} \{ w_r[n] * w_r[n] \} = 1 - \frac{|2n - N + 1|}{N+1} \quad (5)$$

- Šířka hlavního laloku je: $8\pi/(N + 1)$
- Magnituda postranního laloku je: -27dB



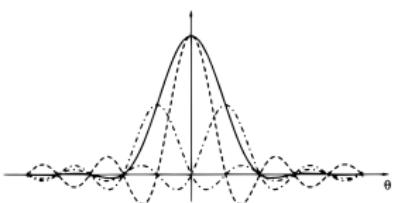
(a) Trojúhelníkové okénko $w_t[n]$, (b) Mag. charakteristika $W_t(e^{j\omega})$

Hannovo okénko

- Vychází ze superpozice tří Dirichletových okének posunutých ve frekvenci ($\Delta\omega = \pm 2\pi/(N - 1)$), čímž se částečně zruší jejich postranní laloky
- Magnituda centrálního laloku je 0.5, magnitudy postranních jsou 0.25

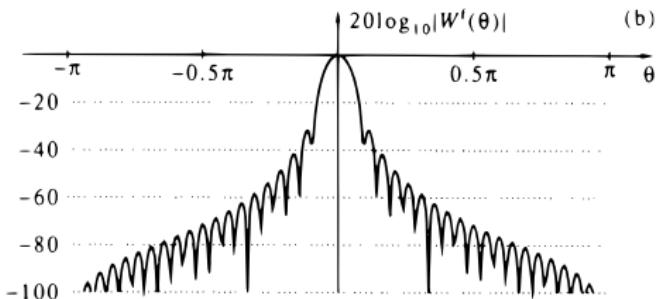
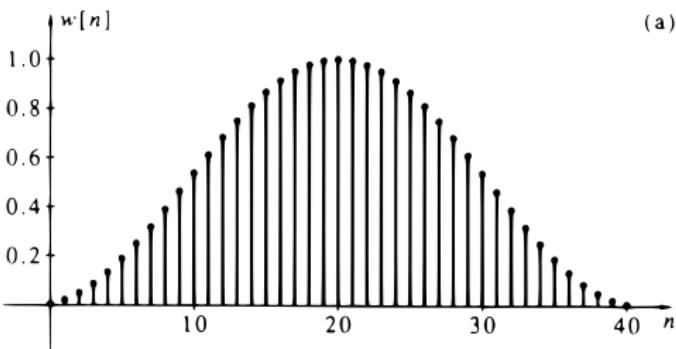
$$w_{hn}[n] = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6)$$

- Omylem označováno jako Hanningovo
- Šířka hlavního laloku je: $8\pi/(N)$
- Mag. postranního laloku je: $-32dB$
- Dva krajní body Hannova okna jsou rovny 0 (maže body $y[0]$ a $y[N-1]$)



ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Hannovo okénko II



(a) Hannovo okénko $w_{hn}[n]$, (b) Mag. charakteristika $W_{hn}(e^{j\omega})$

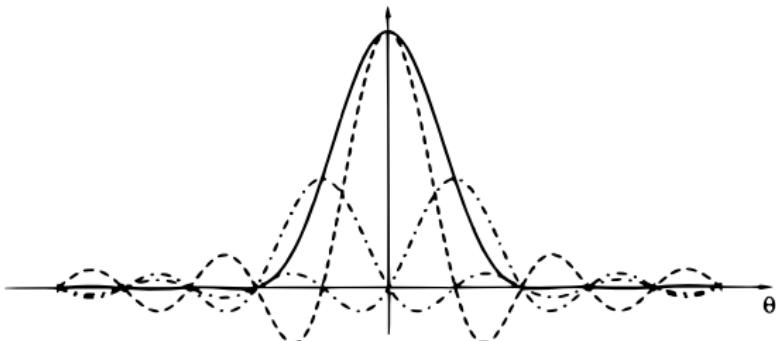
ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Hammingovo okénko

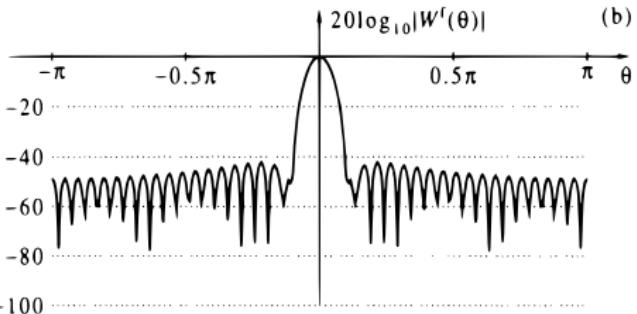
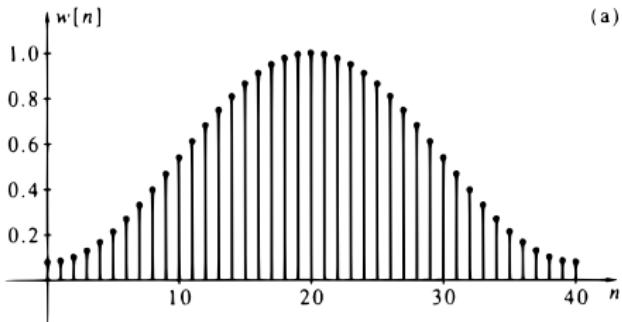
- Hammingovo okénko získáme modifikací magnitud sčítaných Dirichletových kernelů v rámci Hannova okna

$$w_{hm}[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad (7)$$

- Nejvyšší postranní lalok není nejblíže hlavnímu laloku
- Šířka hlavního laloku je: $8\pi/(N)$
- Mag. postranního laloku je: $-43dB$



Hammingovo okénko II



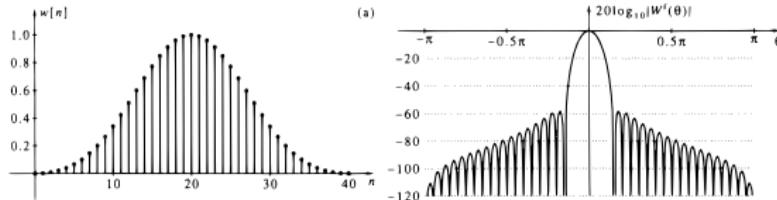
(a) Hammingovo okénko $w_{hm}[n]$, (b) Mag. charakteristika $W_{hm}(e^{j\omega})$

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

- Blackmannovo okénko vychází ze superpozice pěti Dirichletových okének posunutých ve frekvenci ($\Delta\omega = \pm 2\pi/(N-1)$)

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \quad (8)$$

- Šířka hlavního laloku je: $12\pi/(N)$
- Mag. postranního laloku je: $-57dB$
- Dva krajní body Blackmannova okna jsou rovny 0 (maže body $y[0]$ a $y[N-1]$)



(a) Blackmannovo okénko $w_b[n]$, (b) Mag. charakteristika $W_b(e^{j\omega})$

Kaiserovo okénko

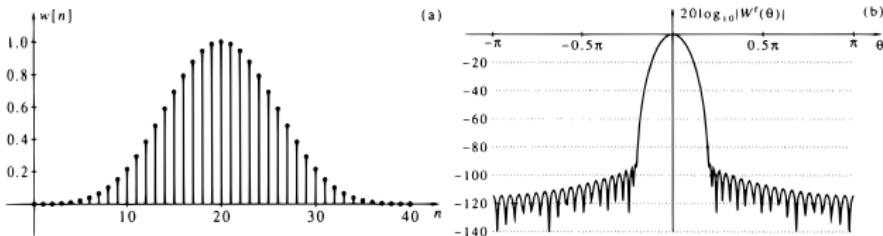
- Předcházející okénka jsou považována za klasická - jsou založena na intuici a odborných odhadech
- Kaiserovo okénko je příkladem moderních okének, postavených na kritériích optimality
- **Kaiserovo kritérium:** Minimalizace šířky hlavního laloku za předpokladu, že šířka okna je fixní a energie postranních laloků nepřekročí dané procento celkové energie
- **Kaiserovo okénko** je dáno jako

$$w_k[n] = \frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{|2n-N+1|}{N-1} \right)^2} \right]}{I_0[\alpha]}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (9)$$

kde $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{2^k k!} \right)^2$ je modifikovaná Besselova funkce řádu 0, $\alpha \in R$ - parametr ovlivňující tvar okénka

Kaiserovo okénko II

- **Parametr α** Kaiserova okénka ovlivňuje šířku hlavního laloku a magnitudu postranních laloků
- Pro rostoucí α roste šířka hlavního laloku a snižuje se magnituda postranních laloků
- *Příklad Kaiserova okénka: $N = 41, \alpha = 12$*
- *Šířka hlavního laloku je: $16\pi/(N)$*
- *Mag. postranního laloku je: $-90dB$*



(a) Kaiserovo okénko $w_k[n]$, (b) Mag. charakteristika $W_k(e^{j\omega})$

Část III

Harmonická analýza

Měření frekvence periodických signálů

- Měření frekvence periodických signálů, zejména harmonických, je důležitou úlohou číslicového zpracování signálu
- Fourierova analýza je přirozeným nástrojem v této úloze
- V praxi jsou signály samozřejmě měřeny pouze v rámci nějakého konečného intervalu
- Spektrum takových signálů pak může být vyhodnocenou pouze na nějaké diskrétní konečné množině frekvencí (pomocí DFT)

Měření frekvence pro jednu komplexní exponenciálu

- Mějme spojitou komplexní exponenciálu $y(t) = Ae^{j(\Omega t + \phi_0)}$ a chtějme změřit frekvenci Ω_0
- Vzorkujeme signál s vzorkovací periodou T_s tak, že platí $-\pi < \Omega_0 T_s < \pi$
- Získáme signál $y[n] = Ae^{j(\omega_0 n + \phi_0)}$, $0 \leq n \leq N - 1$ a $\Omega_0 T_s = \omega_0$
- Dirichletův kernel má jediné maximum v bodě $\omega = 0$, proto je možné ω_0 najít jako frekvenci, kde magnitudové spektrum $|Y(e^{j\omega})|$ nabývá maxima
- POZOR - v praxi není možné najít globální maximum zcela přesně, vyhodnocujeme $|Y(e^{j\omega})|$ pouze v konečném množství bodů pomocí DFT
- Pokud je to nutné, je možné (pro zlepšení frekvenčního rozlišení) doplnit sekvenci $y[n]$ nulami

Měření frekvence pro dvě komplexní exponenciály

- Mějme spojitý signál daný jako
 $y(t) = A_1 e^{j(\Omega_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{j(\Omega_2 t + \phi_2)}$ a chtějme změřit frekvence Ω_1, Ω_2
- Vzorkujeme signál s vzorkovací periodou T_s tak, že platí
 $-\pi < \Omega_{1,2} T_s < \pi$
- Získáme signál ($\Omega_1 T_s = \omega_1, \Omega_2 T_s = \omega_2$)
 $y[n] = A_1 e^{j(\omega_1 n + \phi_1)} + A_2 e^{j(\omega_2 n + \phi_2)}, \quad 0 \leq n \leq N - 1$
- Hledejme nejprve ω_1 , pro $Y(e^{j\omega})$ v bodě $\omega = \omega_1$ platí

$$Y(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1} = N A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{-j(0.5(\omega_1 - \omega_2)(N-1) - \phi_2)} D(\omega_1 - \omega_2, N)$$
- Pokud $A_2 \neq 0$ a

$$|A_2 D(\omega_1 - \omega_2, N)| \ll N A_1 \quad (10)$$

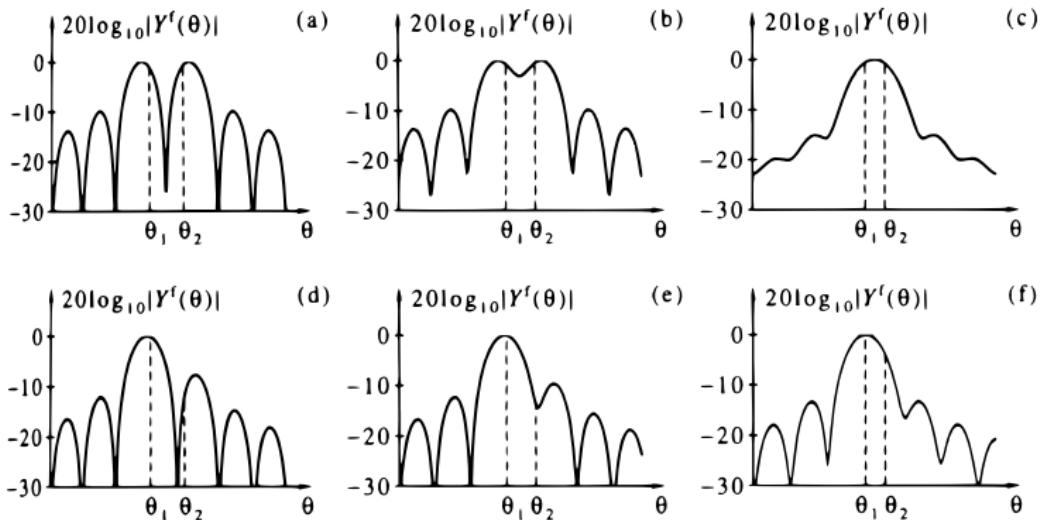
pak je *lokální* maximum $Y(e^{j\omega})$ poblíž ω_1 dobře patrné.

- Podmínka (10) platí, pokud $|\omega_2 - \omega_1| \geq 2\pi/N$ a pokud A_2 není "příliš" větší než A_1

Stejné podmínky platí symetricky při hledání ω_2

Měření frekvence pro dvě komplexní exponenciály II

PŘÍKLAD: Měření frekvence pro dvě komplexní exponenciály:
(a,b,c): $A_1 = A_2$, (d,e,f): $A_2 = 0.25A_1$



- (a) $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi/N$, (b) $\omega_1 - \omega_2 = 1.5\pi/N$, (c) $\omega_1 - \omega_2 = \pi/N$
(d) $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi/N$, (e) $\omega_1 - \omega_2 = 1.5\pi/N$, (f) $\omega_1 - \omega_2 = \pi/N$

Měření frekvence pro dvě komplexní exponenciály III

- Podmínu (10) může být těžké splnit při použití obdélníkového okénka (velká magnituda postranních laloků)
- Tento problém je možné částečně potlačit použitím okénkování
- Pro hodnotu spektra $Y(e^{j\omega})$ na frekvenci ω_1 při použití okénka $w[n]$ délky N (jehož DTFT označíme $W(e^{j\omega})$) platí

$$Y(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_1} = A_1 e^{j\phi_1} W(e^{j0}) + A_2 e^{j\phi_2} W(e^{j(\omega_1-\omega_2)})$$

- Podmínka (10) použitím okénka $w[n]$ přechází v

$$|A_2 W(e^{j(\omega_1-\omega_2)})| \ll A_1 \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \quad (11)$$

kde $W(e^{j0}) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]$

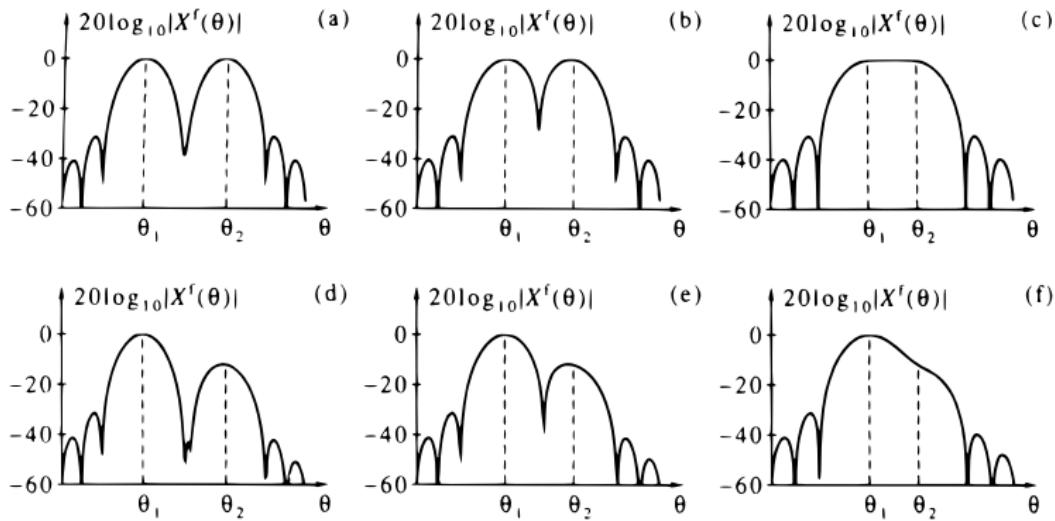
- Podmínka (11) platí:

- 1 pokud $|\omega_1 - \omega_2|$ je větší než $\frac{1}{2}$ šířky hlavního laloku $W(e^{j\omega})$
- 2 pokud $20 \log_{10}(A1/A2)$ je větší než magnituda vedlejšího laloku

Měření frekvence pro dvě komplexní exponenciály IV

PŘÍKLAD: Měření frekvence - dvě komplexní exponenciály:
(okénkování Hannovým oknem)

$$(a, b, c): A_1 = A_2, (d, e, f): A_2 = 0.25A_1$$



- (a) $\omega_1 - \omega_2 = 8\pi/N$, (b) $\omega_1 - \omega_2 = 6\pi/N$, (c) $\omega_1 - \omega_2 = 4\pi/N$
(d) $\omega_1 - \omega_2 = 8\pi/N$, (e) $\omega_1 - \omega_2 = 6\pi/N$, (f) $\omega_1 - \omega_2 = 4\pi/N$

Měření frekvence pro množinu harmonických funkcí

ÚLOHA: Chceme zjistit frekvence M reálných harmonických funkcí

- Reálné harmonické funkce mají oboustranné symetrické spektrum

Pro dobrou odlišitelnost jednotlivých komponent je nutné:

- 1 Všechny komponenty $\omega_k, k = 1 \dots M$ od sebe musí být vzdáleny alespoň $2\pi/N$
- 2 Žádná z komponent ω_k není menší než π/N a větší než $\pi(1 - 1/N)$
- 3 Všechny amplitudy $A_k, k \neq m, k = 1 \dots M$ jsou menší nebo "nepříliš" větší než A_m

Opět: vedlejší laloky Dirichletova kernelu budou maskovat slabé frekvenční komponenty - použijeme tedy opět okénkování

Měření frekvence pro množinu harmonických funkcí II

Použití okénka $w[n]$ mění podmínky rozlišitelnosti dvou frekvenčních komponent následovně:

- 1 Všechny komponenty $\omega_k, k = 1 \dots M$ jsou od sebe vzdáleny alespoň polovinu šířky hlavního laloku $W(e^{j\omega})$
- 2 Žádná z frekvencí komponent ω_k není menší než polovina šířky hlavního laloku $W(e^{j\omega})$ a větší než π minus polovina šířky hlavního laloku $W(e^{j\omega})$
- 3 Poměr logaritmovaných magnitud $20 \log_{10} A_k$ nesmí být větší než velikost magnitudy postranního laloku $W(e^{j\omega})$

Při měření frekvence harmonických funkcí tedy postupujeme takto:

- 1 Zvolíme okénko, které reflektuje (magnitudou postranního laloku) předpokládaný poměr nejslabší a nejsilnější frekvenční komponenty
- 2 Vynásobíme signál $y[n]$ okénkem zvolené délky - kompromis mezi frekvenčním/časovým rozlišením
- 3 Vypočteme $Y(e^{j\omega})$, v praxi jeho vzorkovanou variantu (DFT spektrum) $Y[k]$ (skrze FFT)
- 4 Pokud bylo vhodně zvoleno okénko a platí podmínky rozlišitelnosti, pak jsou hledané frekvence poblíž lokálních maxim $Y[k]$ (máme pouze omezené frekvenční rozlišení a dochází také k frekvenčnímu biasu)

Vhodnými apriorními informacemi v této úloze je znalost:

- 1 Vzdálenosti jednotlivých frekvenčních komponent
- 2 Maximálního poměru amplitud jednotlivých frekvenčních komponent
- 3 Vzdálenosti hledaných frekvencí ω_k od 0 a π

Vliv šumu na harmonickou analýzu

- Nějaký druh šumu je do určité míry přítomen prakticky ve všech signálech
- Harmonická analýza za přítomnosti šumu probíhá stejně jako v bezšumovém případě, s následujícími rozdíly:
- **Šum maskuje slabé komponenty** spektra (vedle maskování vzniklého laloky okénka)
- *Detekce signálu* (Signal Detection) Rozlišení slabých harmonických komponent v přítomnosti mnoha šumových špiček
- **Šum posunuje frekvenční maxima** DFT/DTFT spektra
- *Odhad frekvence* (Frequency estimation) Nalezená maxima jsou určena s chybou zapříčiněnou náhodným charakterem šumu

Vliv šumu na harmonickou analýzu II

- Vliv šumu na detekci signálu i odhad frekvence je možné kvantifikovat
- Analýza je však přesná pouze pro signály obsahující jednu/ „několik málo“ harmonických komponent
- Pro přibližnou představu se používá následující „orientační pravidlo“
- Frekvenční komponenta za přítomnosti šumu je detektovatelná, pokud:
 - 1 Platí podmínky rozlišitelnosti (viz slide 34)
 - 2 Platí nerovnost

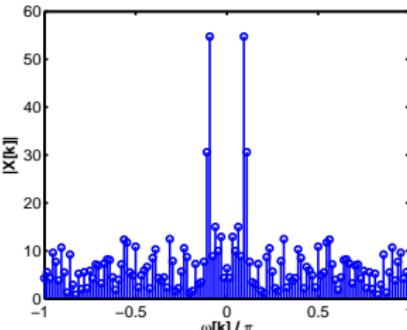
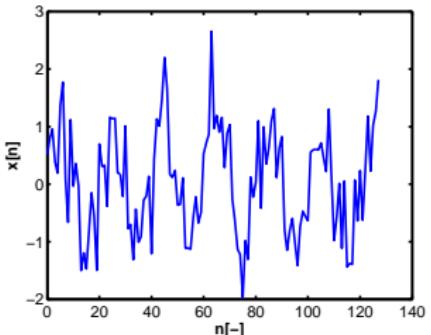
$$\frac{N \cdot A^2 \cdot PG}{P_v} \geq 100 \quad (12)$$

- N - Počet vzorků okna
- A - Amplituda harmonické komponenty
- PG - *Processing gain* - Parametr charakteristický pro dané okénko, charakterizuje zesílení signálu vůči šumu během okénkování (čím více, tím lépe)
- P_v - Výkon bílého šumu (uvažuje se nulová stejnosměrná složka)

Vliv šumu na harmonickou analýzu III

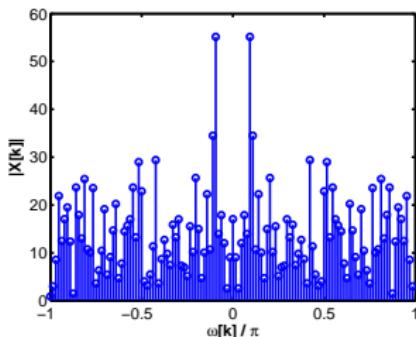
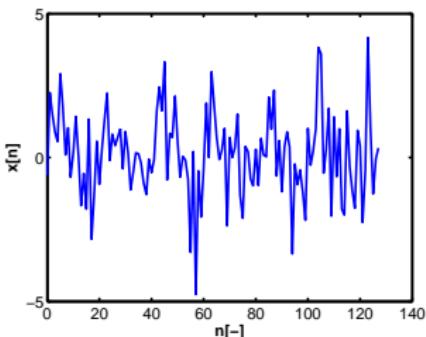
Okénko	Obdélníkové	Bartlett	Hann	Hamming	Blackman	Kaiser($\alpha = 12$)
PG	1	0.74	0.67	0.73	0.58	0.50

- DETAILY: Boaz Porat, *A course in digital signal processing*, 185 / kapitola 6.5
- PŘÍKLAD: Detekce harmonického signálu za přítomnosti šumu
- Signál: $x[n] = \sin(0.1\pi \cdot n) + v[n]$, $v[n]$ - bílý šum
- P_{lim} : Limitní výkon šumu umožňující detektovat harmonickou funkci dle rovnice (12)
- Scénář 1: Výkon šumu $P_v = 0.25P_{lim}$

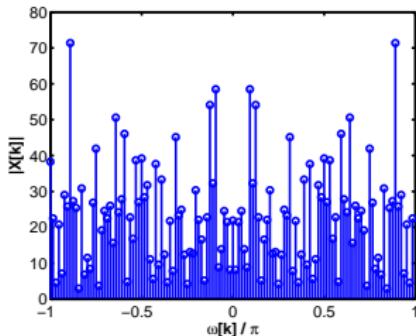
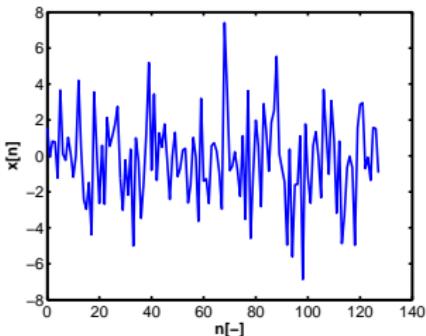


Vliv šumu na harmonickou analýzu IV

Scénář 2: Výkon šumu $P_v = P_{lim}$



Scénář 3: Výkon šumu $P_v = 4P_{lim}$



Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška VIII

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.

Část I

Organizační poznámky

Druhá desetiminutovka na cvičeních

- **Datum:** 26.4.2016
- **Struktura:** Krátký početní příklad (10 minut), samostatná práce
- **Témata:**
 - 1 DTFT spektrum signálu
 - 2 DFT a DFT spektrum signálu
 - 3 Kruhová konvoluce

Část II

Aplikace číslicového zpracování signálů

Využití číslicového zpracování signálu

Číslicové zpracování signálů se používá v mnoha různých technických oblastech:

- *Biomedicínské aplikace* (diagnostika, monitorování pacientů, prevence)
- *Komunikace* (kódování, dekódování, šifrování, filtrace)
- *Řídicí systémy* (servomechanismy, autopiloti)
- *Analýza signálů* (modelování signálů, rozpoznávání, komprese)
- *Zpracování obrazu* (úpravy obrazu, rozpoznávání tvarů)
- *Multimédia* (filmy, digitální televize, videokonference)
- *Hudební a zvukové aplikace* (nahrávání, reprodukce, speciální efekty)
- *Řečové aplikace* (Odstranění šumu, komprese, rozpoznávání, syntéza)

Tak široké spektrum oblastí nelze pokrýt v jedné přednášce, hovořit budeme jen o několika vybraných témaitech

- Počítačové zpracování hudebních signálů
- Počítačové zpracování biologických signálů (EKG)
- Počítačové zpracování řeči
- Slepá separace signálů
- Filtry pro potlačení signálu

Část III

Počítačové zpracování hudebních signálů

Zpracování hudebních signálů I

- Zvukové signály generované hudebními nástroji mají jednoduchý matematický model

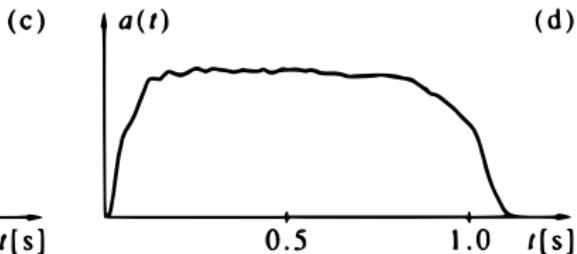
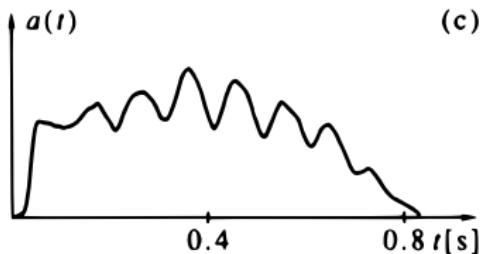
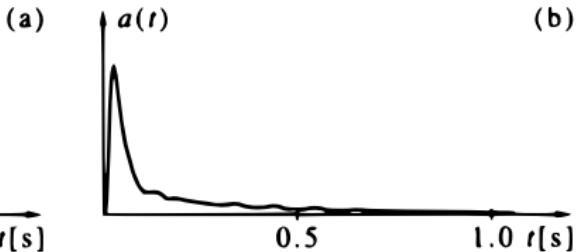
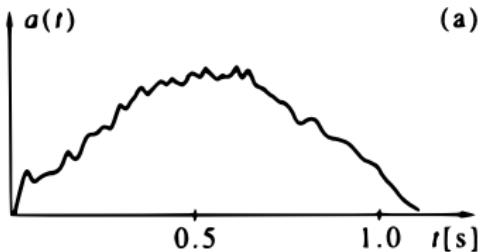
$$x(t) = a(t) \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(2\pi m f_0 t + \phi_m) \quad (1)$$

kde f_0 je základní frekvence (pitch), c_m je amplituda a ϕ_m je fáze m -té harmonické, $a(t)$ je obálka (dynamika) tónu, nízkofrekvenční signál modulující amplitudu zvuku

- DETAILY: Trocha hudební teorie
- **Příklad:** Stejný tón pro různé hudební nástroje

*Violoncello, Klasická kytara
Zobcová flétna, Lesní roh*

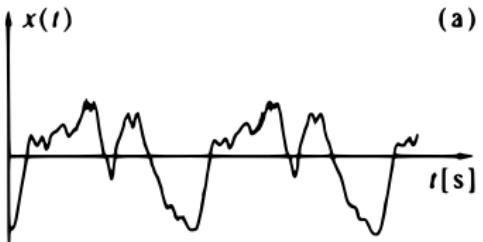
Zpracování hudebních signálů II



Dynamika tónu: (a) Violoncello, (b) Klasická kytara, (c) Zobcová flétna,
(d) Lesní roh

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Zpracování hudebních signálů III



Časový průběh tónu: (a) Violoncello (220 Hz), (b) Klasická kytara (440 Hz),
(c) Zobcová flétna (880 Hz), (d) Lesní roh (440 Hz)

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Zpracování hudebních signálů IV

Jednoduchá syntéza hudebních signálů:

- Pro základní syntézu je možné využít model (1)
- Abychom vytvořili tón konkrétního nástroje je třeba znát jeho charakteristikou obálku (dynamiku) a charakteristikou harmonickou strukturu
- Akordy pak tvoříme superpozicí jednotlivých not - *Aditivní syntéza*
- Tato metoda je velmi jednoduchá a dnes je pro profesionální zpracování hudby již překonaná

Příklad:

Violoncello, Lesní roh,
Violoncello + Lesní roh

Zvukové efekty pomocí DSP:

- DSP je využíváno při výrobě *zvukových efektů* - uměle vytvořených nebo modifikovaných zvucích, které se používají hojně ve filmu, elektronické hudbě, počítačových hrách i živých představeních
- Pro výrobu zvukových efektů se využívá (adaptivní) filtrace a také různé nelineární metody
- Více se o tvorbě zvukových efektů můžete dozvědět v předmětu **Biologické a akustické signály (BSI)**, který pro posluchače 2. roč. NMS FM vede
Doc. Ing. Zbyněk Koldovský, PhD.

Příklad: Digitální efekty aplikované na zvuk elektrické kytary

Originální zvuk

Delay

Tremolo

Vibrato

Chorus

Wah-wah

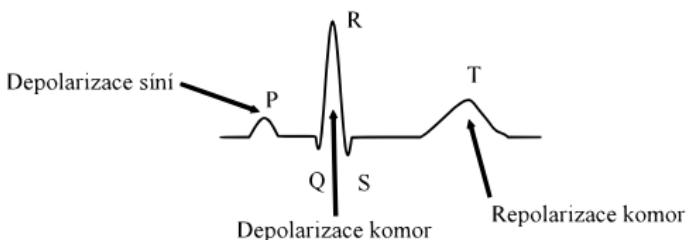
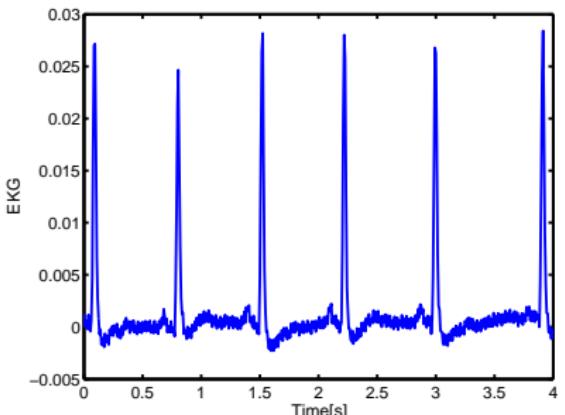
Část IV

Počítačové zpracování biologických
signálů

Zpracování biologických signálů - EKG

- Biologických signálů je celá řada, jejich analýza se liší případ od případu
- **Elektrokardiogram** je elektrický signál měřící srdeční aktivitu
- EKG signál zdravého srdce nabývá klasického tvaru - QRS komplex
- Analýza tvaru QRS komplexu v časové oblasti umožňuje lékařům určit diagnózu
- Pro digitální zpracování se volí vzorkovací frekvence $F_s = 500\text{Hz}$ a více
- EKG může obsahovat celou řadu **artefaktů**:
 - **Úzkopásmové rušení**: drift izoelektrické linie (pomalé pohyby pacienta, dýchání), síťové rušení
 - **Širokopásmové rušení**: Myopotenciály (pohyby kosterních svalů), skokové změny izolinie (špatný kontakt elektrody)
- Odstranění artefaktů filtrací se provádí až když není možné odstranit chybu nastavením podmínek vyšetření
- **Kritéria věrnosti** v nejpřísnějším pojetí nepřipouštějí lineární filtraci síťového brumu v EKG
- Pro případnou filtraci se používají adaptivní filtry, FIR s lineární fází, je možné použít i IIR, ale je nutné kompenzovat nelineární fázi

Zpracování biologických signálů - EKG II



EKG signál a jeho fáze

Zpracování biologických signálů - EKG III

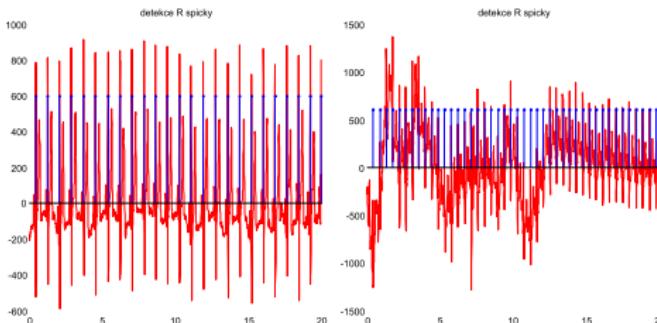
Příklad: Detekce R špičky v EKG signálu

- 1 Pásmová filtrace, propustné pásmo 2-30Hz
- 2 Diferenciace: $y[n] = x[n] - x[n - 1]$,
 $y[n] = 0.5(x[n] - x[n - 2])$
- 3 Umocnění - zvýrazní velké a potlačí malé hodnoty
- 4 Vyhlassení MA filtrem
- 5 Prahování
- 6 Detekce R špiček

Více se o technikách zpracování biologických signálů můžete dozvědět v předmětu

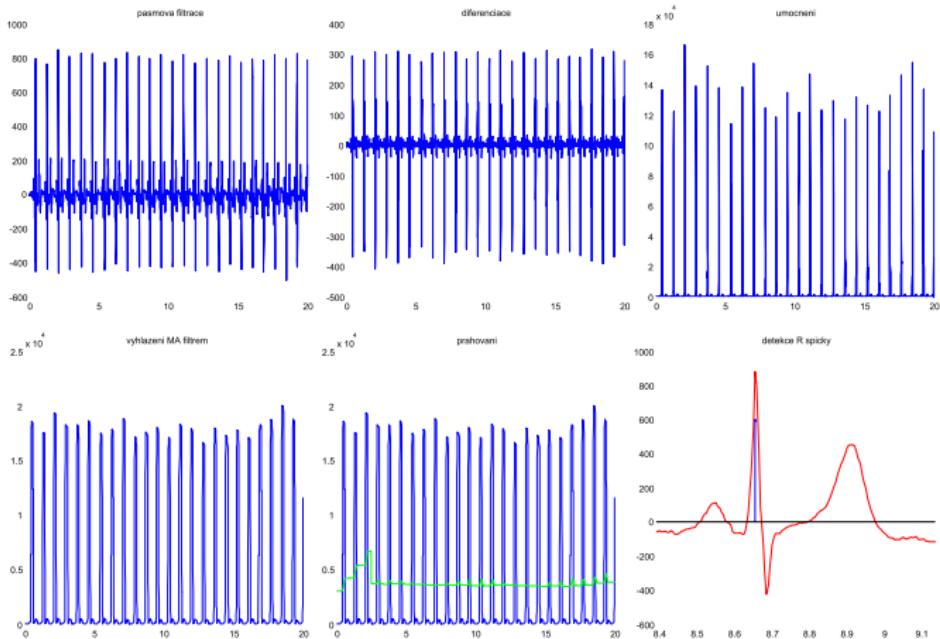
Biologické a akustické signály (BSI), který pro posluchače 2. roč. NMS FM vede *Doc.*

Ing. Zbyněk Koldovský, PhD.



Zpracování biologických signálů - EKG IV

Příklad: Detekce R špičky v EKG signálu



Část V

Počítačové zpracování řeči

Počítačové zpracování řeči I

- Mezioborová vědní disciplína: akustika, zpracování signálů, umělá inteligence, statistika, fonetika, lingvistika a psychologie
- Snaha o použití řeči jako prostředku komunikace s počítačem
- Dvě základní větve výzkumu
 - 1 Syntéza řeči
 - 2 Analýza řeči - rozpoznávání řeči, řečníka, identifikace jazyka

Spojením obou odvětví je obor dialogových systémů
(automatické informační systémy, rezervace po telefonu)

Syntéza řeči

- Proces, kdy je počítačem uměle vygenerovaná promluva nesoucí informaci předávána naslouchající osobě
- Nejčastěji je první informace textová - systémy *Text to Speech*
- Různá úroveň komplexity: Syntéza po slovech (hlášení na nádražích), po hláskách (větší variabilita)...
- Moderní systémy umožňují měnit i menší detaily: tempo řeči, zabarvení hlasu a prosodické rysy (melodie)
- Často modulární stavba: Normalizace textu (nahrazení číslic, zkratek), fonetický přepis, prosodická analýza, převod na akustický signál
- PŘÍKLAD:

Syntetizovaný text (Diplomová práce)
Syntetizovaný text (Epos)

Počítačové zpracování řeči III

Analýza řeči:

- **Rozpoznávání řečníka:** Identifikace a verifikace mluvčího
- **Rozpoznávání jazyka**
- **Počítačové zpracování řeči:** hlasové vytáčení, diktování SMS, ovládání PC (handicapované osoby), spojitý diktát do počítače, přepis zpravodajských pořadů, automatický záznam jednání
- **Komplikovaná úloha:** lidskou řeč, která je velmi složitá a variabilní, je analyzována nedokonalým strojem bez vlastní inteligence
- **Rozsáhlý slovník:** v češtině více než 1 milion slov a tvarů
- **Plynulost přirozené řeči:** "rozpoznávání řeči je složitá úloha"
- **Variabilita přirozené řeči:** pro různé řečníky se liší výslovnost, výška a barva hlasu, intonace, volba slov, momentální stav - vhodnost adaptace
- **Podmínky prostředí:** mikrofon vždy snímá i okolní ruch, hluky, řeč jiné osoby atd. - Nastavení podmínek rozpoznávání, odšumování (denoising), zlepšování řeči (speech enhancement), robustní rozpoznávání (robust speech recognition / distant speech recognition)

Rozpoznávání řeči je spolehlivé v oblastech:

- Rozpoznávání slovních povelů
- Diskrétní diktování po slovech (v tichém prostředí)
- Rozpoznávání plynulé řeči (do určité míry, v tichém prostředí)

Řešení úlohy rozpoznávání je závislé na jazyku a není plně mezi jazyky přenositelné

Nejdále je rozvinuto řešení pro angličtinu

Rozpoznávání řeči není spolehlivé v oblastech:

- Rozpoznávání v hlučném prostředí / mluvčích hovořících daleko od mikrofonu
- Rozpoznávání současně hovořících osob
- Rozpoznávání „ohebných“ jazyků (čeština, slovenština, polština, ruština)

Systémy rozpoznávání také neumí *pochopit* obsah mluvené řeči a domýšlet si nevyslovené souvislosti

Počítačové zpracování řeči V

- V rámci TUL se analýzou řeči zabývá **Laboratoř zpracování řeči** (Speechlab, ITE)
- Laboratoř se zabývá aplikovaným výzkumem v oborech rozpoznávání řeči, rozpoznávání řečníka, dialogové systémy a audiovizuální komunikace (rozpoznávání/syntéza za podpory vizuální informace)
- Další informace ohledně rozpoznávání řeči se dozvíte v rámci předmětů **Počítačové zpracování řeči** a **Pokročilé metody rozpoznávání řeči**, které vede prof. Ing. Jan Nouza CSc.
- PŘÍKLAD: **Diktování do počítače (Newton dictate)**
Vyvinul Speechlab ve spolupráci s firmou Newton
Počítačový překladatel
Rozpoznávání řeči - Speechlab, překlad - Google Translate,
mluvící hlava - University of California, kompletace systému -
Speechlab

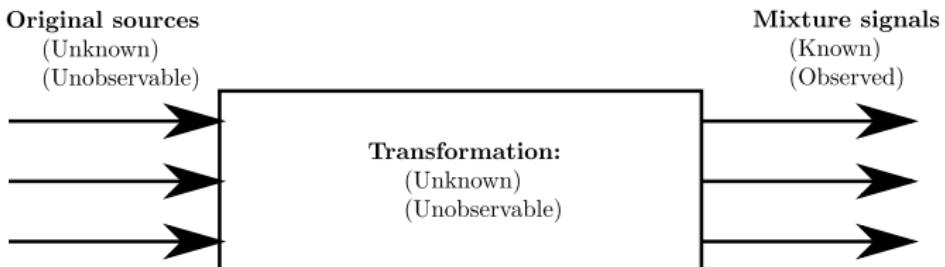
Část VI

Slepá separace signálů

Slepá separace signálů I

Blind Source Separation (BSS)

- Slepá separace se zabývá odhadem neznámých zdrojů z jejich známých směsí, bez znalostí jakýchkoli informací o těchto zdrojích a metodě jakou byly smíchány
- Takto obecně zadaná úloha je neřešitelná, je nutné zavést nějaké obecné předpoklady



Assumptions about sources:

- Non-gaussian iid
- Gaussian with time structure
- Discrete valued
- Sparse
- Non-negative
- Non-correlated
- Independent



Models of the transformation:

- Linear Instantaneous
- Linear Convulsive
- Nonlinear
- Noiseless/Noisy



Modely procesu vzniku směsí:

1 Lineární okamžikový model

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}, \quad (2)$$

X-Matice $m \times N$ směsí, **A**-Matice $m \times d$ směsí, **S**-Matice $d \times N$ neznámých zdrojů

Model předpokládá, že se signály dostanou ke všem senzorům najednou, bez zpoždění (EEG, MEG)

2 Lineární konvolutorní model

$$x_i[n] = \sum_{k=1}^d \sum_{\tau=0}^{M_{ik}} a_{ik}[\tau] \cdot s_k[n - \tau], \quad (3)$$

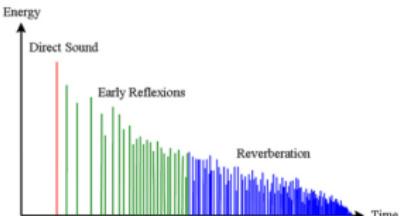
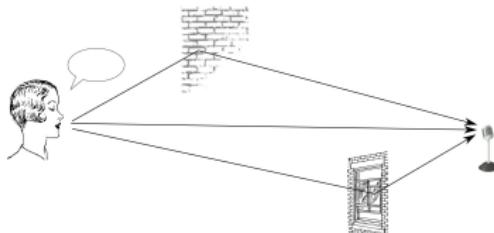
$x_i[n]$ -Směsový signál z i -tého senzoru, $s_k[n]$ - k -tý zdroj
 $a_{ik}[\tau]$ -Impulsní odezva šíření k -tého zdroje k i -tému senzoru
Předpokládá zpoždění a ozvěny, vhodný k modelování akustických signálů (Cocktail party problem)

Model šíření akustického signálu v prostředí

- Šíření signálu $s[n]$ v akustickém prostředí zhruba odpovídá filtraci LTI systémem.
- Signál $s_m[n]$ zachycený na mikrofonu je tedy dán jako

$$s_m[n] = \sum_{\tau=0}^{M-1} h[\tau] \cdot s[n - \tau], \quad (4)$$

- $h[n]$ - **Room impulse response (RIR)** - Impulsní odezva charakterizující šíření zvuku od zdroje k senzoru
- RIR vzniká (částečnými) odrazy zvuku na stěnách/překážkách v prostředí.
- Délka RIR se velmi liší podle místonosti (pokoj / koncertní hala).

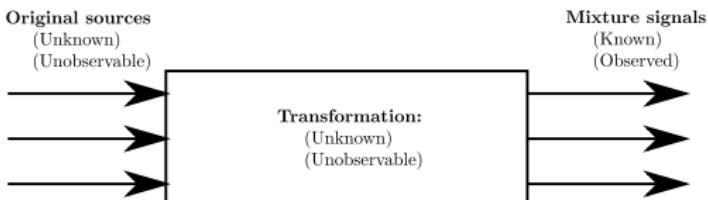


ZDROJ: <http://www.acoustics.org>

Slepá separace signálů III

Předpoklady o neznámých zdrojích:

- Analýza hlavních komponent (PCA) - Zdroje jsou vzájemně nekorelované
- Analýza nezávislých komponent (ICA) - Zdroje jsou vzájemně statisticky nezávislé
- Analýza řídkých komponent (SCA) - Zdroje jsou řídké *signály* (řeč)
- FaktORIZACE na nezáporné matice (NMF) - Zdroje jsou nezáporné (obraz)



Assumptions about sources:

- Non-gaussian iid
- Gaussian with time structure
- Discrete valued
- Sparse
- Non-negative
- Non-correlated
- Independent



Models of the transformation:

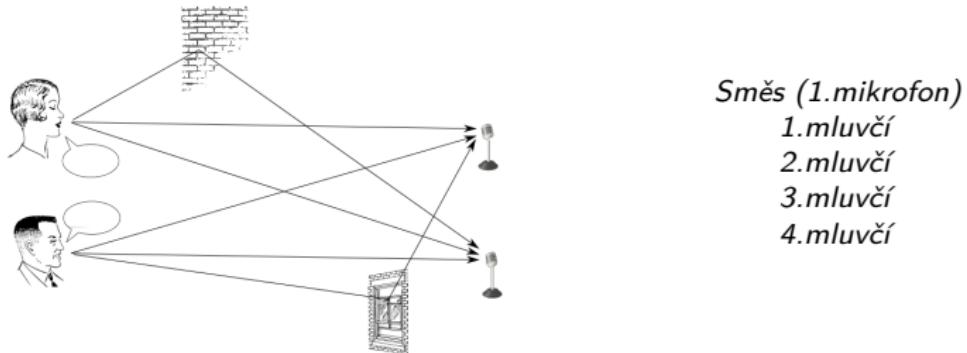
- Linear Instantaneous
- Linear Convulsive
- Nonlinear
- Noiseless/Noisy



Aplikace BSS/ICA:

- Cocktail party problém
- EKG/EEG - odstraňování artefaktů
- Odstranění šumu, kódování/komprese

PŘÍKLAD: Separace čtyř současně mluvících osob ze čtyř reálných mikrofonních nahrávek



Metoda¹ využitá k řešení vyvinuta na TUL ve spolupráci s Akademií věd
Neurčitosti BSS/ICA: Zdroje je možné odhadnout kromě

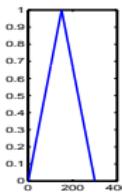
- Pořadí signálů
- Energie signálů
- Znaménko/zabarvení

¹Z. Koldovský and P. Tichavský, "Time-Domain Blind Separation of Audio Sources on the basis of a Complete ICA Decomposition of an Observation Space", IEEE Trans. on Speech, Audio and Language Processing, Vol. 19, No. 2, pp. 406-416, ISSN 1558-7916, February 2011.

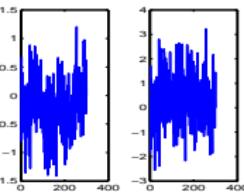
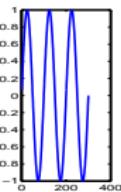
Slepá separace signálů V

PŘÍKLAD:

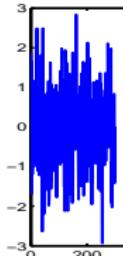
- Míchání tří signálů (Hann,Sinus,šum) podle (2) a jejich zpětná separace
- Použitá ICA metoda² je vyvinuta na TUL ve spolupráci s akademiií věd ČR



(k) Zdroje



(l) Směsi

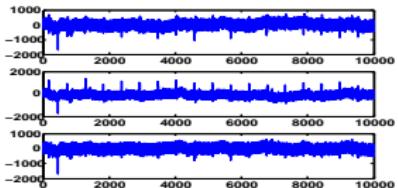


(m) Odhad zdrojů

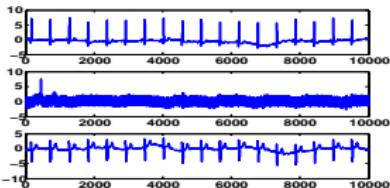
²Z. Koldovský, P.Tichavský, E. Oja, Efficient Variant of Algorithm FastICA for Independent Component Analysis Attaining the Cramér-Rao Lower Bound, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol.17, No. 5, pp. 1265-1277, 2006.

PŘÍKLAD: Odstranění síťového artefaktu z EKG

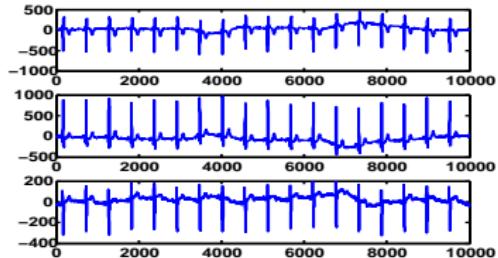
- 1 Aplikace ICA
- 2 Identifikace ruchové komponenty
- 3 Zpětná rekonstrukce bez ruchové komponenty



(n) Měření



(o) Komponenty



(p) Měření - odstraněný brum

Část VII

Filtry pro potlačení signálu

Filtry pro potlačení signálu I

- BSS metody pracují pouze s obecnými vlastnostmi separovaných signálů
- Pokud jsou o separovaných signálech známy nějaké jejich konkrétnější vlastnosti (např. poloha v prostoru), je vhodné je v rámci separačního algoritmu zohlednit => přesnější separace
- BSS metody založené na konvolučním modelu (3) nejsou navržené pro separaci
 - Všesměrových zdrojů (hluk ulice na pozadí hovoru)
 - Pohybujících se zdrojů

Uvažujme tedy úlohu:

- Chceme separovat dva zdroje, jeden se pohybuje v prostoru, druhý je fixní (dva hovořící lidé, jeden chodí a druhý sedí)
- Alespoň v jednu chvíli během nahrávky zní fixní zdroj samostatně

Pro řešení této úlohy je možné použít tzv. **filtr pro potlačení signálu** a **adaptivní filtraci**.

Filtry pro potlačení signálu II

Formální zadání úlohy:

- Mějme stereo nahrávku zachycující současně aktivní fixní zdroj $s[n]$ a pohybující se zdroj $y[n]$ danou jako

$$\begin{aligned}x_L[n] &= \{h_L * s\}[n] + y_L[n], \\x_P[n] &= \{h_P * s\}[n] + y_P[n].\end{aligned}\tag{5}$$

- $x_L[n]$, $x_P[n]$... dva kanály dostupné nahrávky
- $y_L[n]$, $y_P[n]$... záznam $y[n]$ na levém a pravém mikrofonu
- $h_L[n]$, $h_P[n]$... impulsní odezvy šíření $s[n]$ k levému a pravému mikrofonu

Filtry pro potlačení signálu III

- **Filter pro potlačení signálu:** Cancellation filter (CF)
- CF zcela potlačuje zvolený signál a propouští všechny ostatní.
- CF je časově *invariantní*, potlačovaný zdroj nesmí měnit svou pozici.
- CF má dva vstupní kanály a jeden kanál výstupní (Multi Input Single Output, MISO).
- **Adaptivní filtr:** modifikuje svou frekvenční charakteristiku v čase.
- Je nutný v případech, kdy se požadovaná funkce filtru mění v čase, případně její přesné parametry nejsou předem přesně známy.

Filtry pro potlačení signálu IV

- CF je dvou kanálový MISO filtr, skládající se například z filtru $g[n]$ a filtru s impulsní odezvou $g_2[n] = -\delta[n]$.
- Filtr g se volí tak, aby platilo

$$\{g * h_L\}[n] = h_P[n], \quad (6)$$

ekvalizujeme tedy impulsní odezvu levého senzoru (vztaženou k signálu $s[n]$), tak aby se rovnala impulsní odezvě pravého mikrofonu.

- Aplikujeme-li CF, pak

$$\begin{aligned} v[n] &= \{g * x_L\}[n] + \{g_2 * x_P\}[n] \\ &= \{g * x_L\}[n] - x_P[n] \\ &= \{g * h_L * s\}[n] + \{g * y_L\}[n] - \{h_P * s\}[n] - y_P[n] \\ &= \{g * y_L\}[n] - y_P[n] \end{aligned} \quad (7)$$

- neobsahuje vůbec $s[n]$, zatímco y_L and y_R jsou propuštěny.
- Signál $v[n]$ tedy představuje náš odhad signálu $y[n]$.

Filtrování signálu V

Výpočet koeficientů g v praxi:

- Filter g se hledá za použití intervalu ($n = N_1, \dots, N_2$) v rámci signálů $x_L[n]$ a $x_R[n]$, kde je aktivní pouze fixní zdroj.
- Platí-li tedy, že $y_L(n) = y_R(n) = 0$, pak g je dán jako řešení soustavy rovnic

$$g = \arg \min_g \sum_{n=N_1}^{N_2} \left| \{g * x_L - x_R\}[n] \right|^2. \quad (8)$$

- Délka použitého intervalu nemusí být dlouhá, postačuje 1s signálu.

Filtry pro potlačení signálu VI

Adaptivní filtrace:

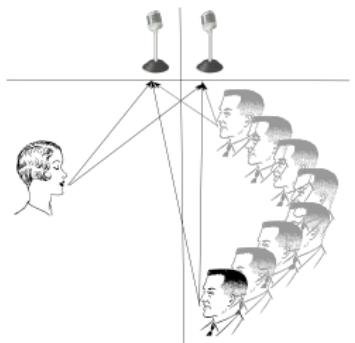
- Odhad zdroje $s[n]$ získáme pomocí adaptivní filtrace, která v původní směsi potlačí odhadnutý nestacionární signál $y[n]$.
- Adaptivní filter je dán ve spektrální oblasti jako

$$W[k, \ell] = \frac{|X[k, \ell]|^2}{|X[k, \ell]|^2 + \tau |V[k, \ell]|^2}. \quad (9)$$

- $X[k, \ell], V[k, \ell]$... krátkodobá Diskrétní Fourierova Transformace (ST-DFT) signálů $x_L[n], v[n]$
- k ... index spektrální komponenty
- ℓ ... časový index
- τ ... volný parametr (separace/zkreslení signálu)
- Výsledná krátkodobá spektrální reprezentace odhadu signálu $s[n]$ pak je

$$\hat{S}[k, \ell] = W[k, \ell]X[k, \ell]. \quad (10)$$

Ukázka:



- **Pohyblivý zdroj:** pravý poloprostor, proměnná vzdálenost 0.5 m - 1.2 m, separován pomocí CF.
- **Fixní zdroj:** levý poloprostor, vzdálenost 1 m, separován pomocí adaptivní filtrace.

Původní stereo záznam:

Směs kanál 1

Směs kanál 2

Odhady zdrojů:

Pohyblivý zdroj

Fixní zdroj

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška X

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

V minulé přednášce jste se dozvěděli...

.. o Z-transformaci

- **Z-transformace** - zobrazení z množiny posloupností (*diskrétní signál, impulsní odezva*) do množiny komplexních funkcí komplexní proměnné (*z-obraz, z-přenos*)
- Zobecnění DTFT pro signály, které nejsou absolutně sčitatelné
- Z-transformace diskrétní řady $x[n]$ je definována jako:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (1)$$

$$z = re^{j\omega}, z \in \mathcal{C}, r > 0$$

- DTFT ze Z-obrazu získáme dosazením $z = e^{j\omega}$, tedy DTFT je tvořena body na *jednotkové kružnici* v *Z rovině*
- **Region konvergence** (Region of Convergence - ROC) - hodnoty z , pro které je součet řady konečný
- Z-obraz řady je jednoznačně určen pouze tehdy, pokud je znám také ROC
- Mnoho diskrétních řad lze jednoznačně popsat pomocí Z-transformace jako racionalní funkci:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}} \quad (2)$$

- Čitatel i jmenovatel je možné zapsat ve formě součinu kořenových činitelů

$$X(z) = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})} \quad (3)$$

- Kořeny čitatele - *nuly* (β_k), kořeny jmenovatele - *póly* (α_k)

Část II

Analýza systémů pomocí Z-transformace

Z-přenos (přenosová funkce)

- Odezva LTI systému daného *impulsní odezvou* $h[n]$ na vstup $x[n]$ je dána konvolucí

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (4)$$

- Aplikace DTFT na (4) udává vztah spektra vstupního a výstupního signálu skrze *frekvenční charakteristiku*

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (5)$$

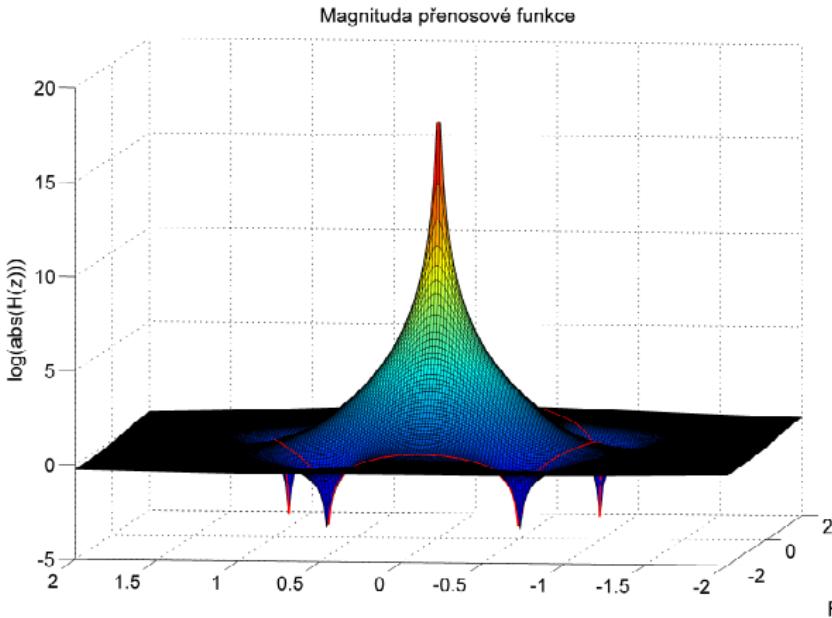
- Obdobně aplikace z-transformace na (4) udává vztah z-obrazu vstupního a výstupního signálu skrze *z-přenos* (přenosovou funkci) $H(z)$

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (6)$$

- Přenosová funkce je velmi důležitá z hlediska analýzy systémů (stabilita, kauzalita, systémy s lineární fází, minimální fází apod.)

Z-přenos (přenosová funkce) II

- Z-přenos je komplexní funkce komplexní proměnné
- Zobrazuje se jako magnitudová a fázová část (obě 3D graf - reálná funkce komplexní proměnné)



Z-přenos (přenosová funkce) III

- Přenosová funkce je tedy dána jako z-transformace *impulsní odezvy* systému

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (7)$$

- Frekvenční charakteristiku* získáme vyhodnocením $H(z)$ na jednotkovém kruhu

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (8)$$

- Pro LTI systém popsaný *diferenční rovnicí*

$$y[n] + \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] \quad (9)$$

je přenosová funkce racionální funkce ve tvaru

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})} \quad (10)$$

- LTI systém je tedy jednoznačně popsán (až na zesílení C) i pomocí nul a pólů
- Člen $(1 - \beta_k z^{-1}) = \frac{z - \beta_k}{z}$ přispívá přenosové funkci nulou v β_k a pólem v 0
- Člen $\frac{1}{(1 - \alpha_k z^{-1})} = \frac{z}{z - \alpha_k}$ přispívá přenosové funkci pólem v α_k a nulou v 0
- Jsou-li vzorky impulsní odezvy reálná čísla, pak komplexní nuly a póly jsou *komplexně sdružené*

Z-přenos: kauzalita, stabilita, realizovatelnost

- **Stabilita:** Pokud je LTI systém stabilní, pak ROC jeho přenosové funkce musí zahrnovat jednotkovou kružnici
- **PODROBNOSTI:** Proč tomu tak je?
- **Kauzalita:** Impulsní odezva kauzálního LTI systému je pravostranná řada, ROC přenosové funkce je tedy vnějšek kruhu $|z| > \alpha$. Víme, že žádné póly nesmí ležet uvnitř ROC
- Všechny póly kauzálního systému *musí* ležet uvnitř nebo na kružnici $|z| \leq \alpha$
- **Realizovatelnost:** Realizovatelný systém je *stabilní* a *kauzální*
- Přenosová funkce má ROC ve formě $|z| > \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, póly tedy *musí* ležet uvnitř jednotkové kružnice

Inverzní systém

- Má-li LTI systém přenosovou funkci $H(z)$, pak **inverzní systém** $G(z)$ je definován jako

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (11)$$

- ROC inverzního přenosu $G(z)$ musí mít průnik s ROC přenosu $H(z)$
- PŘÍKLAD: Nalezení inverzního systému a jeho vlastnosti

Racionální přenosová funkce a impulsní odezva

- Mějme LTI systém s racionální přenosovou funkcí

$$X(z) = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})}, \quad (12)$$

která má pouze jednonásobné póly. Pokud $p > q$, $H(z)$ může být rozložen na

$$X(z) = \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}. \quad (13)$$

Je-li systém kauzální, pak *impulsní odezva* je tvaru

$$h[n] = \sum_{k=1}^p A_k (\alpha_k)^n u[n] \quad (14)$$

- PŘÍKLAD: Přenosová funkce a impulsní odezva

Racionální přenosová funkce a impulsní odezva II

- Pokud $p \leq q$, $H(z)$ nabývá tvaru

$$X(z) = \sum_{k=0}^{q-p} B_k z^{-k} + \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}, \quad (15)$$

pak je-li systém kauzální má *impulsní odezva* tvar

$$h[n] = \sum_{k=0}^{q-p} B_k \delta[n - k] + \sum_{k=1}^p A_k (\alpha_k)^n u[n] \quad (16)$$

- Pokud $H(z)$ má jen nuly

$$X(z) = \prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1}), \quad (17)$$

impulsní odezva má konečnou délku a je dána jako

$$h[n] = \sum_{k=0}^q B_k \delta[n - k] \quad (18)$$

Allpass filtry I

- Allpass filtr je systém s konstantní magnitudovou charakteristikou

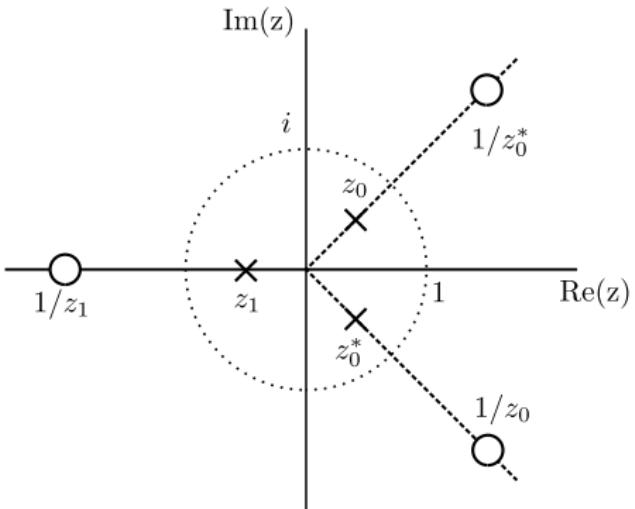
$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad (19)$$

- Allpass filtry se používají pro *ekvalizaci skupinového zpoždění*, tedy ke kompenzaci fázových nelinearit jiných typů filtrů, aniž by změnily magnitudovou charakteristiku původního filtru
- Omezení frekvenční charakteristiky určuje polohu *nul a pólů*, které se vyskytují v konjugovaně reciprokých párech

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \quad (20)$$

- Stabilní/kauzální allpass filtr má *nezáporné* skupinové zpoždění
- Stabilní/kauzální allpass filtr má všechny póly uvnitř a nuly mimo jednotkové kružnice
- PŘÍKLAD: Ekvalizace fázové charakteristiky filtru

Allpass filtry II



Omezení v poloze nul a pólů realizovatelného allpass filtru

Systémy s minimální fází I

- Mějme systém s přenosovou funkcí

$$H(z) = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})} \quad (21)$$

- Tento systém je realizovatelný, pokud se póly α_k nacházejí uvnitř jednotkové kružnice
- Poloha nul může být libovolná v z-rovině
- Systém $H_{min}(z)$ má **minimální fázi**, pokud má *realizovatelný inverzní* systém (nuly uvnitř jednotkové kružnice)
- Každý realizovatelný systém je možné převést na systém s minimální fází
- Převod $H(z)$ na systém s minimální fází se provádí pokud:
 - Je třeba zajistit existenci inverzního systému
 - Je třeba, aby systém $H(z)$ měl při dané magnitudové charakteristice, minimální skupinové zpozdění τ_g

Systémy s minimální fází II

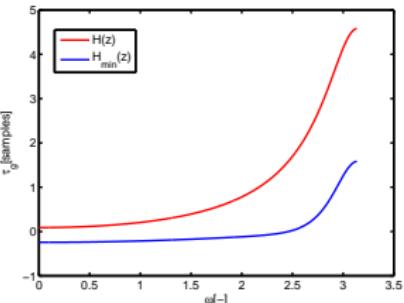
- Mechanismus převodu $H(z)$ na systém s minimální fází:
- Frekvenční charakteristiku každého realizovatelného systému je možné zapsat jako součin systému s minimální fází a realizovatelného *allpass filtru*

$$H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z) \quad (22)$$

- Díky této faktorizaci má $H_{min}(z)$ minimální skupinové zpoždění, neboť platí

$$\tau(\omega) = \tau_{min}(\omega) + \tau_{ap}(\omega) \quad (23)$$

- Za účelem získání $H_{min}(z)$ je nutné nuly systému $H(z)$, které leží mimo jenotkovou kružnici "vhodně přemístit dovnitř"
- Tomuto se říká kompenzace pomocí fázovacího článku (inverzní systém k $H_{ap}(z)$, nuly uvnitř, póly mimo jednotkové kružnice, nekauzální)
- Póly fázovacího článku se vykompenzují s nulami $H(z)$, tedy jeho nerealizovatelnost není na překážku
- PŘÍKLAD: Převod $H(z)$ na systém s minimální fází



Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška XI

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

Organizační informace

Třetí desetiminutovka

Datum: 17.5.2015

Témata:

- Modely LTI systému
- Systém s minimální fází a převod na něj
- Dopředná a zpětná Z-transformace

- Odpadne přednáška
- Následující cvičení bude opakovací před zkouškou (17.5.)
 - Na toto cvičení si připravte otázky k úlohám ke zkoušce
 - To jsou hlavně úlohy řešené na cvičeních a přednáškách, částečně úlohy z dobrovolných domácích úkolů

Část II

Úvod do číslicové filtrace

Digital filtering:

- Změna frekvenčních charakteristik číslicového signálu
- **Magnitudová filtrace:** Změna magnitudového spektra, při zachování fázového spektra
- Je povoleno zpoždění signálu, (v ideálním případě) nedeformuje signál v časové oblasti (pokud se jeho frekvenční pásmo nachází v propustném pásmu filtru)
- **Filtrace fázovacími články:** Ekvalizace fázové charakteristiky při zachování magnitudového spektra, prováděná allpass filtry
- **Aplikace:**
 - *Potlačení šumu:* biosignály - EKG/EEG, digitalizace analogových záznamů
 - *Zdůraznění zvolených frekvenčních pásem:* Ekvalizace zvukových signálů, zdůraznění hran (vysokých frekvencí) v obrazových datech
 - *Pásmové omezování:* Vzorkování (prevence aliasingu), radiový a televizní přenos
 - *Nulování specifických frekvenčních komponent:* Potlačení stejnosměrné složky, potlačení síťového brumu
 - *Speciální operace:* Diferenciace, integrace, Hilbertova transformace

Analogová vs digitální filtrace

Analogová filtrace:

- Operuje se spojitými signály, v obvodech složených z operačních zesilovačů, odporů, kondenzátorů ...
- Teoreticky neomezené frekvenční pásmo, v praxi omezené použitou technologií
- Citlivá na šum, kvalitu součástek, malá flexibilita a opakovatelnost

Digitální filtrace:

- Operuje s diskrétními signály, implementována v počítačích nebo specializovaném hardwaru (signálové procesory)
- Konečné frekvenční pásmo, rovné polovině vzorkovací frekvence
- Libovolný stupeň přesnosti, vysoké lineární, flexibilní (adaptivní filtrace), dokonale opakovatelné.
- Umožňuje operace, které v analogové oblasti nelze (lze jen obtížně provést (čisté zpoždění, v čase se měnící filtry, adaptivní filtrace))
- Nutné před/post zpracování (A/D-D/A převod), aliasing, omezení frekvenčního pásma z důvodu výpočetní náročnosti

Digitální filtrace

- Číslicové LTI filtry se obvykle popisují pomocí Z-přenosu ve formě

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}} = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})}. \quad (1)$$

- Filtry mající $p \geq 1$ označujeme jako *IIR*, mají nekonečnou impulsní odezvu $h[n]$ kvůli zavedené zpětné vazbě
- Filtry mající $p = 0$ označujeme jako *FIR*, mají konečnou impulsní odezvu $h[n]$, jejíž nenulové vzorky jsou rovny koeficientům $b[k]$
- RKSР - Reálné, kauzální, stabilní, racionální filtry

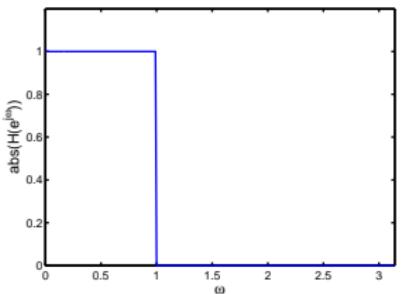
Magnitudová specifikace filtrů - toleranční schéma

Toleranční schéma:(Filter specifications)

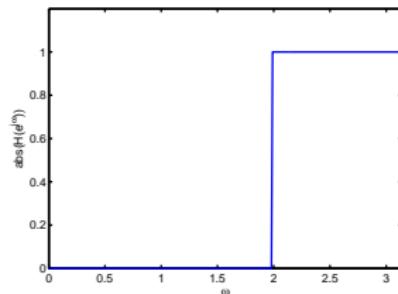
- Definuje požadavky na magnitudové vlastnosti filtru
- *Dolní propust, horní propust, pásmová zádrž, pásmová propust, vícepásmové filtry*
- Požadujeme reálné koeficienty filtrů, magnituda $H(e^{j\omega})$ je tedy sudá a fáze lichá
- T. schéma se definuje v intervalu $0 < \omega < \pi$

Parametry tolerančního schématu:

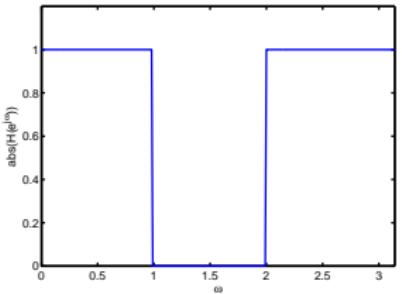
- Propustné pásmo (pass band) / závěrné pásmo (stop band) / přechodové pásmo (transition band)
- Hraniční frekvence propustného ω_p /závěrného ω_s pásmo
- Positivní δ^+ /negativní δ^- tolerance v propustném pásmu
- Nominální (požadovaná) magnituda v propustném pásmu je 1
- Tolerance v závěrném pásmu δ_s
- Nominální (požadovaná) magnituda v závěrném pásmu je 0



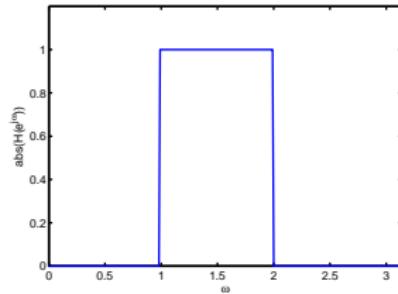
(a)



(b)



(c)



(d)

Obrázek: (a) Dolní propust (b) Horní propust (c) Pásmová zádrž (d)
Pásmová propust

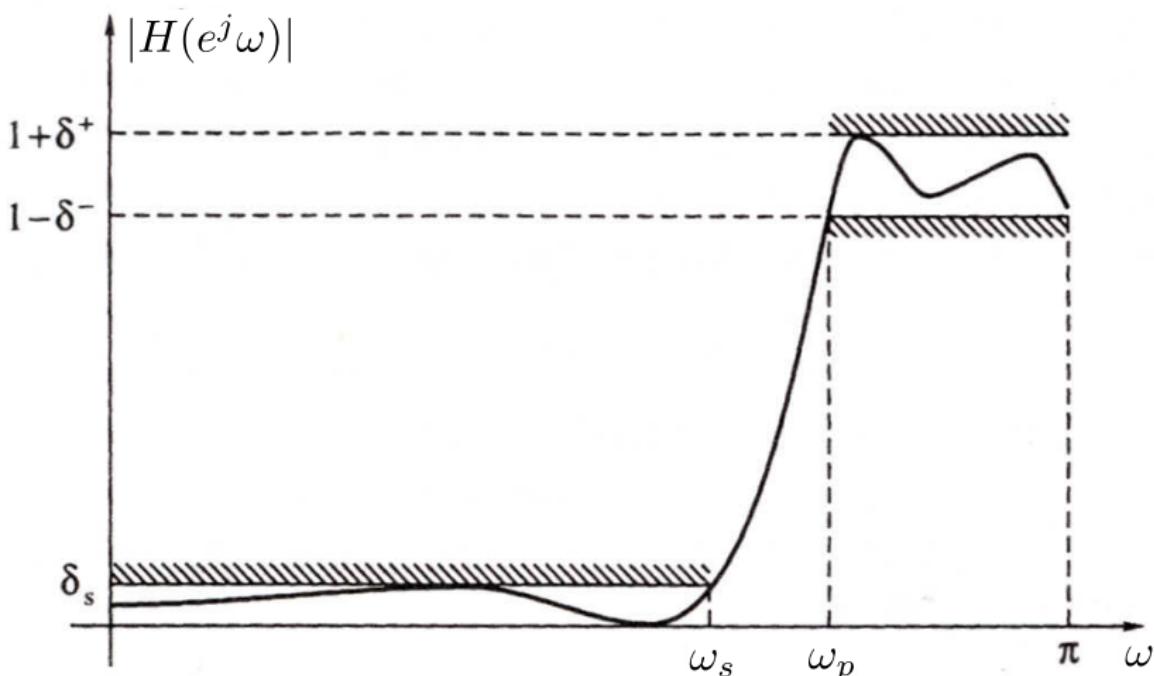
Magnitudová specifikace filtrů - toleranční schéma II

Parametry tolerančního schématu: (pokračování)

- Zvlnění v propustném pásmu (pass band ripple): $\max(\delta^+, \delta^-)$
- Zvlnění v propustném pásmu v dB:
$$A_p = \max\{20 \log_{10}(1 + \delta^+), -20 \log_{10}(1 - \delta^-)\}$$
- Tolerance δ se obvykle uvádějí jinak pro FIR a IIR filtry
- **IIR:** $\delta^+ = 0, \delta^- = \delta_p$ - Maximální magnituda IIR je tedy 1
- **FIR:** $\delta^+ = \delta^- = \delta_p$ - Středová magnituda FIR je tedy 1
- Toleranční schéma IIR má někdy (z historických důvodů, analogové filtry) jako závisle proměnnou čtverec magnitudy
- Útlum v závěrném pásmu v dB: $A_s = -20 \log_{10}(\delta_s)$

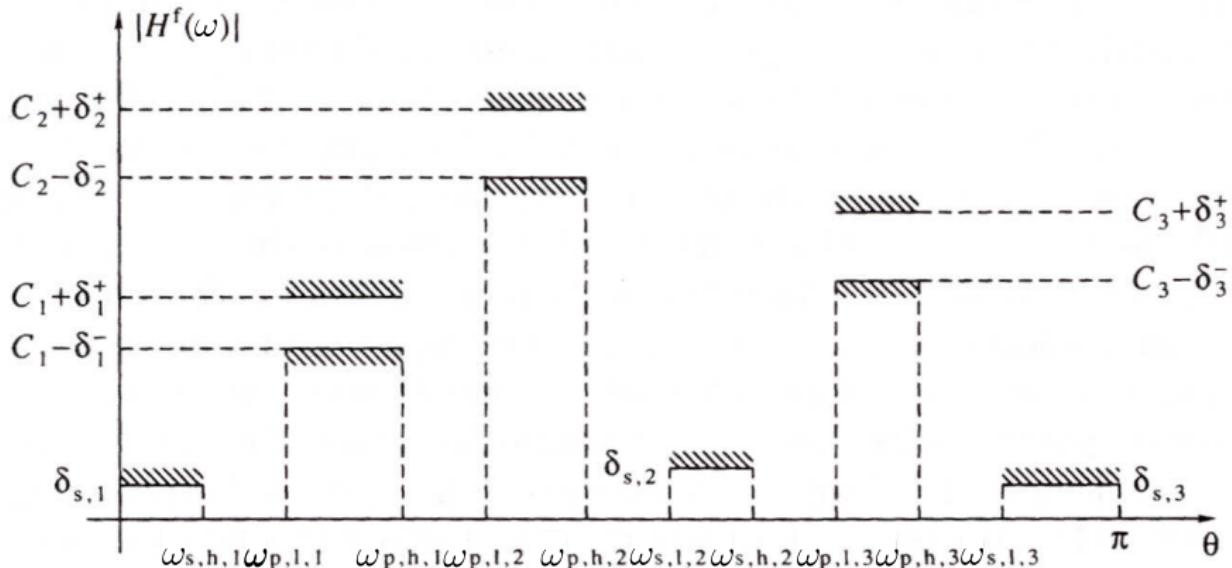
Více pásmové filtry:

- Umožňují různé zesílení/potlačení pro více frekvenčních pásem
- **Po častech konstantní vícepásmový filtr:**
- Rozděluje frekvenční rozsah $[0, \pi]$ do konečného množství pásem, některá pásmá jsou propustná, jiná zádržná, zbytek tvoří přechodová pásmá
- Každé propustné/zádržné pásmo má vlastní tolerance δ a zesílení A_p, A_s



Toleranční schéma hornopropustního filtru

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing



Toleranční schéma vícepásmového filtru

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Fázová odezva filtrů

- **Fázová charakteristika** udává změnu fáze harmonické funkce o dané frekvenci při průchodu systémem
- Nejsou-li všechny harmonické složky signálu zpozděně stejně, dochází k **fázovému zkreslení**
- Toto zkreslení ovlivňuje tvar signálu v časové oblasti
- Systémy/filtry, které (téměř) nedeformují spektrum signálu se označují jako **filtry se (zobecněnou) lineární fází**
- Digitální filtr má **lineární fázi**, pokud platí

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}, \quad \alpha \in \mathcal{R} \quad (2)$$

- Digitální filtr má **zobecněnou lineární fázi**, pokud platí

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega - \beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{R} \quad (3)$$

$A(e^{j\omega}) \in \mathcal{R}$ - Amplituda (může být kladná i záporná)

- Takto zapsaná frekvenční charakteristika se vyznačuje **spojitou fází**
- DETAILY: Spojitá reprezentace fázové charakteristiky

Fázová odezva filtrů II

- Skupinové zpoždění je definováno jako

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (4)$$

kde $\phi(\omega)$ je fázová charakteristika LTI systému

- Jednotkou τ_g je vzorek (sample)
- Udává zpoždění úzkopásmového signálu složeného ze „skupiny“ harmonických komponent v okolí frekvence ω_0 po průchodu LTI systémem (ve vzorcích)
- Systémy se (zobecněnou) lineární fází se vyznačují konstantním skupinovým zpožděním

$$\tau_g(\omega) = \alpha, \quad (5)$$

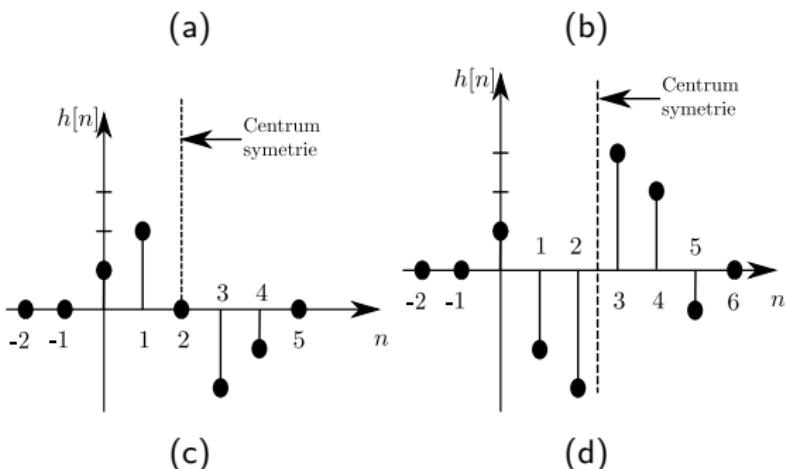
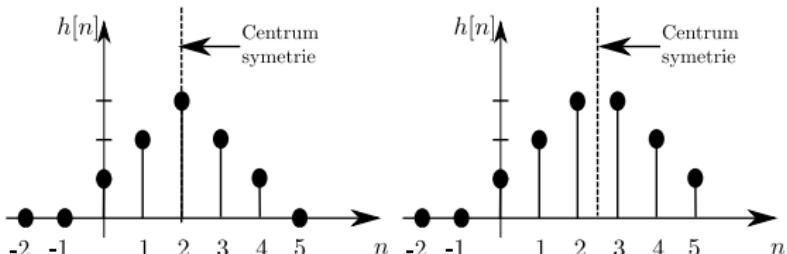
tedy pouze zpožďují signál a (téměř) jej nedeformují v časové oblasti (pokud frekvenční pásmo signálu leží v propustném pásmu filtru).

- Skupinové zpoždění nemusí být celočíselné
- DETAILY: Neceločíselné skupinové zpoždění

Fázová odezva filtrů III

- Jak jsme již uváděli dříve (4.přednáška), filtr se (zobecněnou) lineární fází musí být FIR
- Na základě impulsní odezvy $h[n]$ s délkou $N + 1$ existují čtyři typy filtrů s lineární fází:
 - 1 1.typ - symetrická $h[n]$, N je sudé číslo, lineární fáze
 - 2 2.typ - symetrická $h[n]$, N je liché číslo, lineární fáze
 - 3 3.typ - antisymetrická $h[n]$, N je sudé číslo, zobecněná lin. fáze
 - 4 4.typ - antisymetrická $h[n]$, N je liché číslo, zobecněná lin. fáze
- N - řád FIR filtru
- Skupinové zpoždění těchto typů FIR filtrů je rovno $\tau_g = N/2$

Fázová odezva filtrů IV



- (a) Impulsní charakteristika filtru s lineární fází - typ I,
- (b) Impulsní charakteristika filtru s lineární fází - typ II
- (c) Imp. charakteristika filtru se zob. lineární fází - typ III,
- (d) Imp. charakteristika filtru se zob. lineární fází - typ IV

Část III

Filtry s konečnou impulsní odezvou

Filtry s konečnou impulsní odezvou (FIR)

Finite Impulse Response:

- Mají konečný počet nenulových vzorků impulsní charakteristiky $h[n]$
- Jsou popsány nerekurzivní diferenční rovnicí

$$y[n] = \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] \quad (6)$$

- Jsou vždy stabilní a jejich Z-přenos nabývá tvar

$$X(z) = \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} = C \sum_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1}), \quad (7)$$

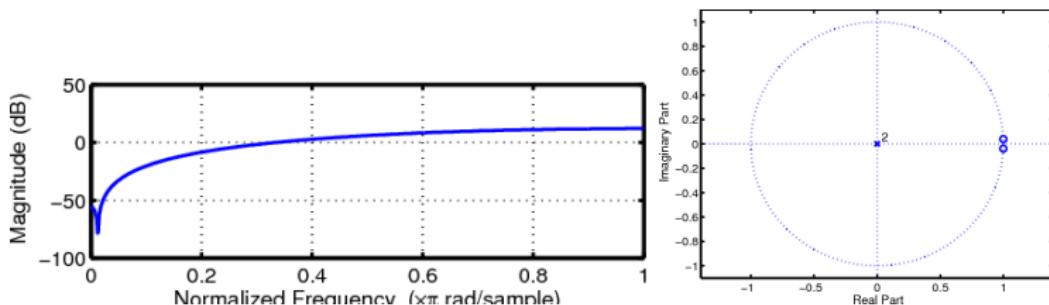
má tedy q nul a q násobný pól v počátku z roviny.

- FIR filtry je možné navrhnut tak, aby měli (*zobecněnou*) lineární fázovou charakteristiku, tedy aby nedeformovali signál v časové oblasti.

Návrh FIR filtrů

Nulovací filtr (notch filter):

- Úplně potlačuje harmonický signál na konkrétní frekvenci
- Navrhujeme se umístěním nuly v z-rovině na příslušnou ω_0
- PŘÍKLAD: Potlačení síťové frekvence v signálu



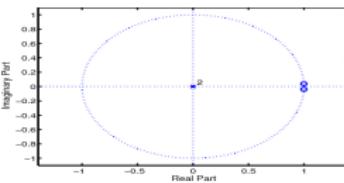
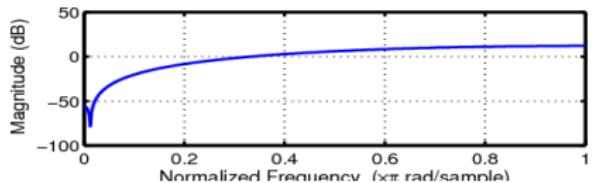
Nulovací filtr - Magnitudová charakteristika, Z-rovina

Vsvuka: Nulovací IIR filtr

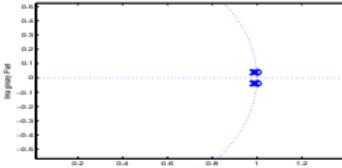
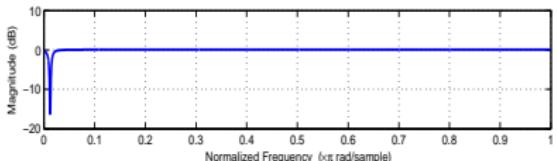
IIR Notch filter:

- Úplně potlačuje harmonický signál na konkrétní frekvenci
- Navrhoje se umístěním nuly v z-rovině na příslušnou ω_0
- Kvůli kompenzaci zkreslení se do "blízkosti" nuly umístí pól
- PŘÍKLAD: Potlačení síťové frekvence v signálu
- $H(z) = \frac{z^2 - 1.9985z^1 + 1}{z^2 - 1.9785z^1 + 1} = \frac{(z - e^{\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{8000}})(z - e^{-\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{8000}})}{(z - 0.99 \cdot e^{\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{8000}})(z - 0.99 \cdot e^{-\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{8000}})}$

FIR:



IIR:



Metoda zkrácení impulsní odezvy I

Impulse Response Truncation: (IRT)

- Impulsní odezva $h[n]$ ideálního filtru je nekonečná a nekauzální
- Má však konečnou energii, je tedy možné ji "oříznout"
- Oříznutá a posunutá impulsní odezva pak náleží filtru, jež approximuje ideální filtr
- Čím delší je zvolený úsek impulsní odezvy, tím je získaný filtr blíže ideálnímu filtru
- Ideální pásmová propust má amplitudovou charakteristiku dánu jako:

$$A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} \quad (8)$$

- Dolní propust získáme je-li $\omega_1 = 0$, horní propust je-li $\omega_2 = \pi$
- Požadujeme lineární fázovou charakteristiku, fáze $e^{j\phi(\omega)}$ je tedy dána jako: (FIR filtr I nebo II druhu)

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\omega N/2, & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} \quad (9)$$

Metoda zkrácení impulsní odezvy II

- Impulsní odezvu požadované PP získáme jako

$$\begin{aligned} h_{PP}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{j\omega(n-0.5N)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega(n-0.5N)} d\omega \\ &= \frac{\omega_2}{\pi} \text{sinc} \left[\frac{\omega_2(n-0.5N)}{\pi} \right] - \frac{\omega_1}{\pi} \text{sinc} \left[\frac{\omega_1(n-0.5N)}{\pi} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

- Dolnopropustní filtr získáme dosazením $\omega_1 = 0$

$$h_{DP}[n] = \frac{\omega_2}{\pi} \text{sinc} \left[\frac{\omega_2(n-0.5N)}{\pi} \right] \quad (11)$$

- Je-li N sudé, horní propust získáme dosazením $\omega_2 = \pi$ (nelze navrhnut pro N liché, FIR typu II není vhodný na HP):

$$h_{HP}[n] = \delta[n - 0.5N] - \frac{\omega_1}{\pi} \text{sinc} \left[\frac{\omega_1(n-0.5N)}{\pi} \right] \quad (12)$$

Metoda zkrácení impulsní odezvy III

Vícepásmové filtry

- Amplitudovou odezvu ideálního vícepásmového filtru získáme superpozicí K vhodných pásmových propustí

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^K A_k(e^{j\omega}), \quad (13)$$

kde

$$A_k(e^{j\omega}) = \begin{cases} C_k, & \omega_{1,k} \leq |\omega| \leq \omega_{2,k} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} \quad (14)$$

- Impulsní odezva vícepásmového filtru je tedy dána jako

$$h_{VP}[n] = \sum_{k=1}^K \frac{C_k}{\pi} \left\{ \omega_{2,k} \operatorname{sinc} \left[\frac{\omega_{2,k}(n - 0.5N)}{\pi} \right] - \omega_{1,k} \operatorname{sinc} \left[\frac{\omega_{1,k}(n - 0.5N)}{\pi} \right] \right\} \quad (15)$$

- Je-li N sudé, (FIR typu II není vhodný na HP), pak pásmovou zádrž získáme pro $k = 2$ dosazením

$$C_1 = C_2 = 1, \omega_{1,1} = 0, \omega_{2,2} = \pi$$

Metoda zkrácení impulsní odezvy IV

Volba řádu filtru

- Impulsní odezva $h_{ID}[n]$ ideálního filtru je nekonečná
- Zkrácením $h_{ID}[n]$ získáme impulsní odezvu $h[n]$ filtru, který se od ideálního liší zvlněním v propustném/závěrném pásmu δ_p/δ_s a existencí přechodového pásma.
- S rostoucím řádem filtru N se zužuje přechodové pásmo filtru, ale zvlnění zůstává prakticky stejné - *Gibbsův* jev
- Oříznutí impulsní odezvy lze vyjádřit jako

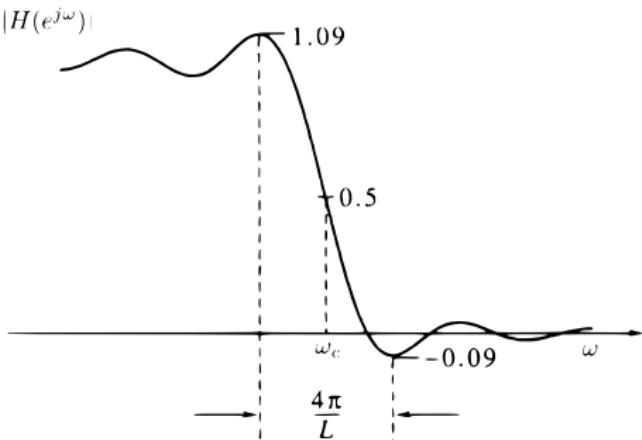
$$h[n] = h_{ID}[n]w_r[n] \quad (16)$$

kde $w_r[n]$ je obdélníkové okno délky $L = N + 1$ (N - řád filtru).

- **Šířka přechodového pásma** filtru se odvíjí od šířky hlavního laloku Dirichletova kernelu a je rovna $4\pi/L$
- **Zvlnění** A_p, A_s se odvíjí od magnitudy postranního laloku Dirichletova kernelu a prakticky nezávisí na délce okna $w_r[n]$
- Zvlnění je přibližně rovno $\delta_p \approx \delta_s \approx 0.09$, tedy $A_p = 0.75\text{dB}$, $A_s = 21\text{dB}$.

Metoda zkrácení impulsní odezvy V

- Tolerance δ dosažené použitím $w_r[n]$ jsou pro mnoho reálných aplikací nevhodné. Zvlnění je možné potlačit volbou jiných okének (s menší magnitudou postranního laloku) při zkracování impulsní charakteristiky - *Návrh filtru metodou oken*



Přechodové pásmo filtru navrženého metodou IRT

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Metoda oken

Filter design using windows:

- Zobecnění metody zkrácení impulsní odezvy - IRT (Impulse Response Truncation)
- Oříznutí impulsní odezvy lze vyjádřit jako

$$h[n] = h_{ID}[n]w[n], \quad (17)$$

$w[n]$ je okénko délky $L = N + 1$ (N - požadovaný řád filtru)

- Tvar okénka ovlivňuje vlastnosti navrženého filtru, protože

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \left\{ H_{ID}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{ID}(e^{j\lambda})W(e^{j\omega-\lambda})d\lambda \quad (18)$$

- Jedná se tedy o vyhlazování $H_{ID}(e^{j\omega})$ pomocí spektra okénka
- **Šířka hlavního laloku:** okénko ovlivňuje šířku přechodového pásma
- **Magnituda postranního laloku:** okénko ovlivňuje zvlnění v propustném a závěrném pásmu

Metoda oken II

Postup návrhu:

- 1 Podle požadovaného zvlnění zvolíme typ okna
- 2 Podle požadované šířky přechodového pásma zvolíme délku/řád $h[n]$, ($N = L - 1$)
- 3 Podle vztahů uvedených pro metodu IRT vypočteme L koeficientů impulsní odezvy, které převážíme zvoleným okem

MATLAB: $B=FIR1(n, Wn)$

Parametry nejpoužívanějších oken:

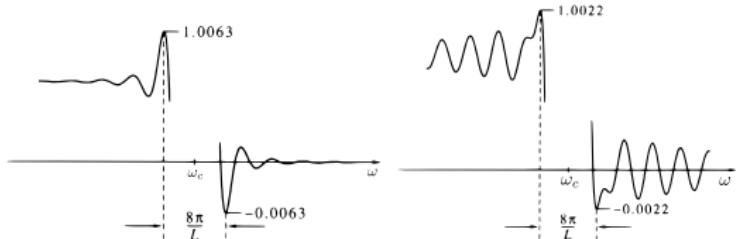
Okno	Šířka hl. l.	Magnituda post. l. [dB]	δ_p, δ_s
Obdélníkové	$4\pi/L$	-13,5	0.09
Bartlett	$8\pi/L$	-27	0.05
Hann	$8\pi/L$	-32	0.0063
Hamming	$8\pi/L$	-43	0.0022
Blackman	$12\pi/L$	-57	0.0002
Kaiser	Záleží na α		

- $A_p = \max\{20 \log_{10}(1 + \delta^+), -20 \log_{10}(1 - \delta^-)\} \approx 8.6859 \max(\delta^+, \delta^-)$
- $A_s = -20 \log_{10}(\delta_s)$

Metoda oken III

Vlastnosti nejpoužívanějších okének

- **Bartlettovo okénko:** Vykazuje monotónní amplitudu $A(\omega)$ (bez zvlnění) v blízkosti přechodového pásma
- Zvlnění tedy není dobře definováno, běžně se uvádí tolerance $\delta_p = \delta_s = 0.05$
- Vykazuje pouze malé zmenšení tolerancí oproti obdélníkovému okénku, přechodové pásmo je však dvojnásobně široké ($8\pi/L$)
- **Hannovo a Hammingovo okénko:** Stejně široké přechodové pásmo (o málo méně než $8\pi/L$)
- *Hann:* Větší amplituda kmitů, prudší útlum než Hamming
- *Hamming:* Menší amplituda kmitů, pozvolnější útlum vůči Hannovu oknu



Zvlnění filtrů navržených pomocí Hannova a Hammingova okna

Metoda oken IV

Vlastnosti nejpoužívanějších okének (pokračování)

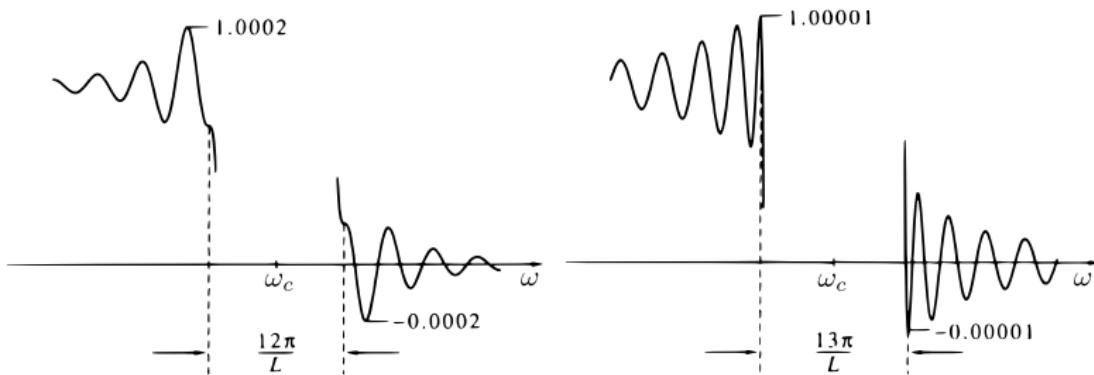
- **Blackmanovo okénko:** Široké přechodové pásmo ($12\pi/L$), vynikající tolerance $\delta_p = \delta_s = 0.0002$
- **Kaiserovo okénko:** Preferované okénko při návrhu filtrů metodou oken
- Jeho tvar a vlastnosti je možné řídit pomocí parametru α
- Existují empirické vzorce popisující závislost parametru α a tolerančních parametrů navrhovaného filtru
- Řád filtru se volí jako nejbližší celé (sudé/liché) číslo nad nalezeným neceločíselným N
- Vzorce jsou empirické, navržený filtr tedy nemusí nutně splňovat dané toleranční parametry (pak se iteračně volí vyšší řád)

$$A = -20 \log_{10}(\min \{\delta_p, \delta_s\}) \quad (19)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 < A \leq 50 \\ 0, & A \leq 21 \end{cases} \quad (20)$$

$$N = \frac{A - 7.95}{2.285|\omega_p - \omega_s|} \quad (21)$$

Metoda oken V



Zvlnění filtrů navržených pomocí Blackmanova a Kaiserova okna
($\alpha = 10$)

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška XII

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

Návrh FIR filtrů (pokračování)

Metoda vzorkování frekvenční charakteristiky

Frequency Sampling Filter Design:

- Metoda spočívá v ekvidistantním vzorkování požadované ideální frekvenční charakteristiky $H_{ID}(e^{j\omega})$ v L bodech
- Získáme vzorky

$$H[k] = H_{ID}(e^{j2\pi k/L}), \quad k = 0, \dots, L-1 \quad (1)$$

které představují L -bodovou DFT impulsní odezvy $h[n]$ FIR filtru řádu $N = L - 1$.

- Frekvenční charakteristika navrhovaného filtru $H(e^{j\omega})$ ve vzorkovaných bodech přesně odpovídá frekvenční charakteristice ideálního filtru $H_{ID}(e^{j\omega})$
- Metoda ovšem neposkytuje žádnou kontrolu, jak se frekvenční charakteristika $H(e^{j\omega})$ chová mezi vzorky $H[k]$
- Filtry navržené touto jednoduchou metodou se proto nepovažují za příliš kvalitní
- Pro zlepšení vlastností se zařazují vzorky popisující přechodové pásmo
- MATLAB: `B=FIR2(N,F,M)`

Návrh filtrů na základě kriterií optimality

- Návrh filtrů metodou oken je jednoduchý a vede ke slušné navrženým filtrům
- Přesto je ze dvou hledisek suboptimální
- **Tolerance δ_p, δ_s se rovnají** a nelze je nezávisle na sobě měnit
- V praxi ovšem vyžadujeme většinou δ_s výrazně menší než δ_p
- Nemožnost nezávislého návrhu vede k nutnosti předimenzovat tolerance filtru v propustném pásmu, abychom dodrželi specifikace v závěrném pásmu
- **Zvlnění je nerovnoměrné** pro většinu oken a utlumuje se směrem od přechodových pásem

Obecnější návrhové metody umožňují svobodněji tvarovat amplitudovou charakteristiku filtru, nezávisle měnit tolerance δ_p, δ_s nebo vhodněji rozložit zvlnění

Least square design of FIR filters:

- Metoda pro návrh filtrů s nezávislou volbou tolerancí δ_p/δ_s
- Je založena na minimalizaci kritéria daného jako

$$\epsilon^2 = \int_0^\pi (V(\omega)[A_d(\omega) - A(\omega)])^2 d\omega, \quad (2)$$

kde $V(\omega)$ je váha dané frekvence ω v rámci návrhu a $(A_d(\omega) - A(\omega))$ je odchylka navrhované amplitudové charakteristiky od požadované

- **Váha** $V(\omega)$ je nezáporné číslo určující důležitost odchylky $(A_d(\omega) - A(\omega))$ pro konkrétní frekvenci
- Obvykle se volí reciproká k tolerancím δ , tedy čím menší tolerance, tím větší váha
- Přechodová pásma mají nulovou váhu
- Požadujeme-li lineární fázi filtru, získáme jeden z typů FIR se symetrickou $h[n]$
- MATLAB: `B=FIRLS(N,F,A,W)`

Filtry se stejnoměrným zvlněním

Equiripple design of FIR filters

- Metoda pro návrh filtrů s rovnoměrným zvlněním a nezávislou volbou tolerancí δ_p/δ_s
- Složitý výpočet koeficientů numerickým řešením optimalizačního problému
- Minimalizaci kritéria daného jako

$$\epsilon = \max_{\omega \in S} |E(\omega)| \quad (3)$$

kde

$$E(\omega) = \tilde{V}(\omega)[\tilde{A}_d(\omega) - G(\omega)] \quad (4)$$

$$\tilde{V}(\omega) = V(\omega)F(\omega), \tilde{A}_d = \frac{A_d(\omega)}{F(\omega)} \quad (5)$$

- Funkce $F(\omega)$ závisí na typu filtru, např. FIR 1. typu: $F(\omega) = 1$
- $V(\omega)$ je váhová funkce, $A(\omega)$ - amplituda navrhovaného filtru
- $A(\omega) = F(\omega)G(\omega)$
- S - Množina frekvencí v intervalu $<0, \pi>$, které odpovídají propustným a závěrným pásmům navrhovaného filtru
- $A_d(\omega)$ představuje požadovanou amplitudovou charakteristiku

Filtry se stejnoměrným zvlněním II

- Optimalizace kritéria (3) je založena na *alternačním teorému*
- Řešení optimalizačního problému bylo navrženo numericky Remezem (1957) - *Remez exchange algorithm*
- Dnes se pro návrh používá algoritmus navržený Parksem a McClellanem (1982) - *Parks-McClellan algorithm*
- Řád filtru se volí podle empirického vzorce navrženého Kaiserem

$$N = \frac{-20 \log_{10} \sqrt{\delta_p \delta_s} - 13}{2.32 |\omega_p - \omega_s|} \quad (6)$$

- MATLAB:
 - [N, Fo, Ao, W] = FIRPMORD(F, A, DEV, Fs) - Určí řád filtru pro dané specifikace
 - B=FIRPM(N, Fo, Ao, W) - Výpočet koeficientů impulsní odezvy
- PŘÍKLAD: Srovnání probraných metod při návrhu DP (FIRDesignMethodsComparison.m)

Část II

Návrh IIR filtrů

Filtry s nekonečnou impulsní odezvou (IIR)

Infinite Impulse Response:

- Impulsní odezva $h[n]$ je nekonečná pravostranná řada
- Jsou popsány rekurzivní diferenční rovnicí

$$y[n] = \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] \quad (7)$$

- Při nesprávném návrhu mohou být nestabilní, jejich Z-přenos nabývá tvar

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \quad (8)$$

má tedy q nul a p pólů

- IIR filtry není možné navrhnut, aby měli (*zobecněnou*) lineární fázovou charakteristiku
- V porovnání s FIR filtry je možné dosáhnout užšího přechodového pásma při nižším řádu filtru

Návrh IIR filtrů

- Analogové filtry mají vždy nekonečnou impulsní odezvu a metody jejich návrhu jsou dlouhou dobu známé
- Návrh digitálních IIR filtrů se nejčastěji provádí **diskretizací analogových filtrů**
- Výhoda: velmi dobře fungující postupy, které jsou podrobně prozkoumány
- Nevýhoda: omezená flexibilita návrhu - prakticky se navrhují pouze základní typy filtrů (DP,HP,PP,PZ)
- Vícepásmové filtry se v analogové oblasti navrhují velmi obtížně
- IIR filtry je možné navrhovat i přímo v číslicové oblasti, ale tyto návrhové metody nejsou příliš oblíbené (nedostačující vlastnosti filtrů nebo přílišná složitost)
- Analogový a digitální filtr se nemohou shodovat pro všechny frekvence (digitální filtr je omezen Nyquistovou frekvencí), shoduje se tedy frekvenční pásmo nízkých frekvencí
- Návrh IIR filtru se většinou soustřeďuje na magnitudovou odezvu filtrů, fázová charakteristika je druhořadá
- Fázové zkreslení díky proměnnému skupinovému zpoždění může být značné

Butterworthovy filtry I

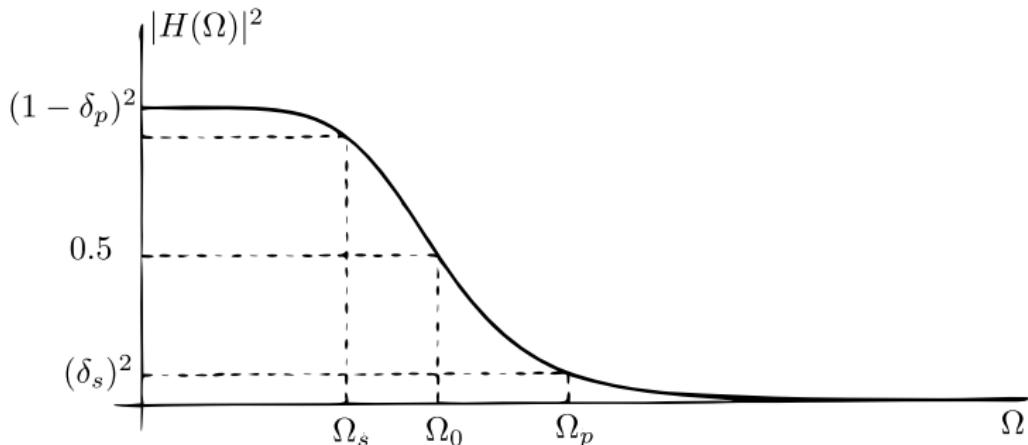
- Butterworthovy filtry jsou definovány ve smyslu čtverce analogové magnitudové charakteristiky jako

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{2N}} \quad (9)$$

■ Vlastnosti Butterworthových filtrů:

- Magnitudová charakteristika je monotónně klesající funkce Ω
- Maximum nastává pro $|H(\Omega)|_{\Omega=0} = 1$
- Pokles čtverce magnitudy o 3dB (na 0.5) nastává v bodě Ω_0
- Magnitudová charakteristika je prakticky konstantní pro nízké frekvence
- MATLAB:
 - [N, Wn] = BUTTORD(Wp, Ws, Rp, Rs) - Určí řád filtru pro dané specifikace
 - [B, A] = BUTTER(N, Wn) - Výpočet koeficientů diferenční rovnice

Butterworthovy filtry II



Čtverec magnitudové odezvy analogového Butterworthova filtru ($N=3$)

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Čebyševovy filtry I

- Dva druhy filtrů navržené na základě Čebyševova polynomu
- Na základě vlastností tohoto polynomu vznikají filtry, které vykazují rovnoměrné zvlnění buď v propustném (Čebyšev-I) nebo závěrném (Čebyšev-II) pásmu
- Zvlnění umožňuje ostřejší přechod z propustného pásma do závěrného v porovnání s Butterworthovým filtrem
- **Čebyševovy filtry I.druhu** jsou definovány ve smyslu čtverce analogové magnitudové charakteristiky jako

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)}, \quad (10)$$

Ω_0, ϵ - parametry, $T_N(\cdot)$ - Čebyševův polynom řádu N

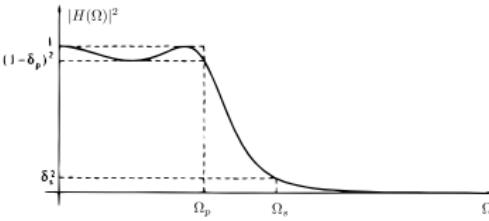
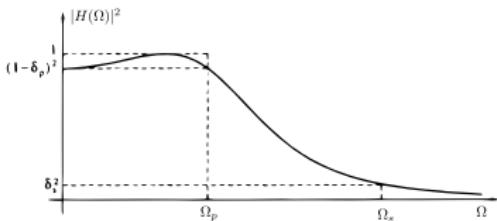
- **Vlastnosti Čebyševových filtrů I.druhu:**

- Magnitudová charakteristika v propustném pásmu vykazuje zvlnění
- Hodnota čtverce magnitudy pro stejnosměrnou složku je 1 (liché N) nebo $1/(1 + \epsilon^2)$ (sudé N)
- Maximální hodnota 1 nastává několikrát v intervalu propustného pásma (v závislosti na řádu filtru N)
- Pro hodnoty $\Omega > \Omega_0$ je magnitudová charakteristika monotónně klesající

Čebyševovy filtry II

MATLAB:

$[N, Wp] = \text{CHEB1ORD}(Wp, Ws, Rp, Rs)$ - Určí řád filtru pro dané specifikace
 $[B, A] = \text{CHEBY1}(N, R, Wp)$ - Výpočet koeficientů diferenční rovnice



Čtverec magnitudové odezvy analogového Čebyševova filtru (I.druh, $N=2/N=3$)

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Čebyševovy filtry III

- Čebyševovy filtry II.druhu jsou definovány ve smyslu čtverce analogové magnitudové charakteristiky jako

$$|H(\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)}, \quad (11)$$

Ω_0, ϵ - parametry, $T_N(\cdot)$ - Čebyševův polynom řádu N

- Vlastnosti Čebyševových filtrů II.druhu:

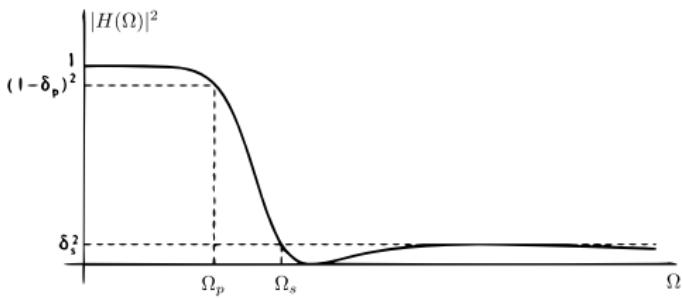
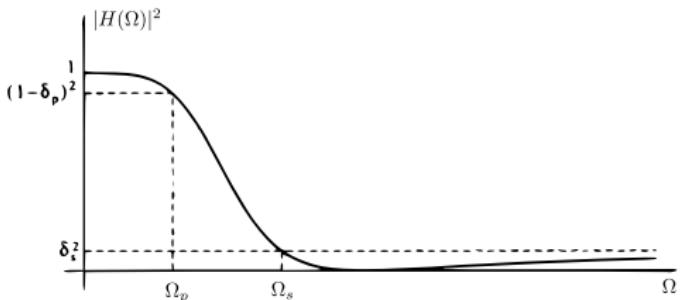
- Pro hodnoty $\Omega > \Omega_0$ je magnitudová charakteristika zvlněná
- Hodnota čtverce magnitudy pro stejnosměrnou složku je 1 pro všechna N
- Pro hodnoty $\Omega < \Omega_0$ je magnitudová charakteristika monotónně klesající

- MATLAB:

`[N, Ws] = CHEB2ORD(Wp, Ws, Rp, Rs)` - Určí řadu filtru pro dané specifikace

`[B, A] = CHEBY2(N, R, Wst)` - Výpočet koeficientů diferenční rovnice

Čebyševovy filtry IV



Čtverec magnitudové odezvy analogového Čebyševova filtru
(II.druh, N=2/N=3)

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Eliptické filtry

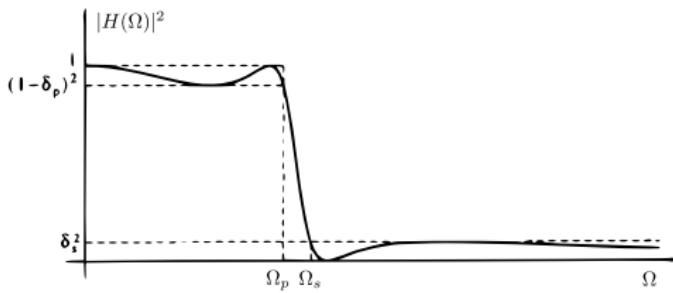
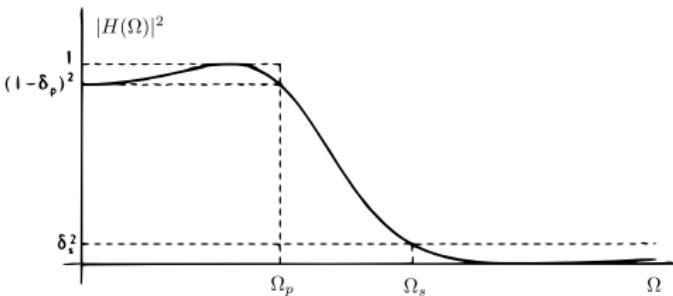
- Eliptické filtry jsou definovány ve smyslu čtverce analogové magnitudové charakteristiky jako

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)}, \quad (12)$$

Ω_0, ϵ - parametry, $R_N(\cdot)$ - Čebyševova racionální funkce rádu N

- Magnitudová charakteristika eliptických filtrů je rovnoměrně zvlněná v rámci propustného i závěrného pásma
- Zvlnění umožňuje ostřejší přechod z propustného pásma do závěrného v ostatními typy IIR filtrů
- MATLAB:
 - [N, Wp] = ELLIPORD(Wp, Ws, Rp, Rs) - Určí řadu filtru pro dané specifikace
 - [B, A] = ELLIP(N, Rp, Rs, Wp) - Výpočet koeficientů diferenční rovnice

Eliptické filtry II



Čtverec magnitudové odezvy analogového eliptického filtru ($N=2/N=3$)

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

Srovnání FIR a IIR

FIR:

- Obvykle se navrhují s lineární fází - minimální fázové zkreslení
- Intuitivnější metody návrhu
- Vždy stabilní

IIR:

- Nižší latence při stejných parametrech tolerančního schématu
- Nižší výpočetní náročnost aplikace

Fázové zkreslení IIR/FIR:

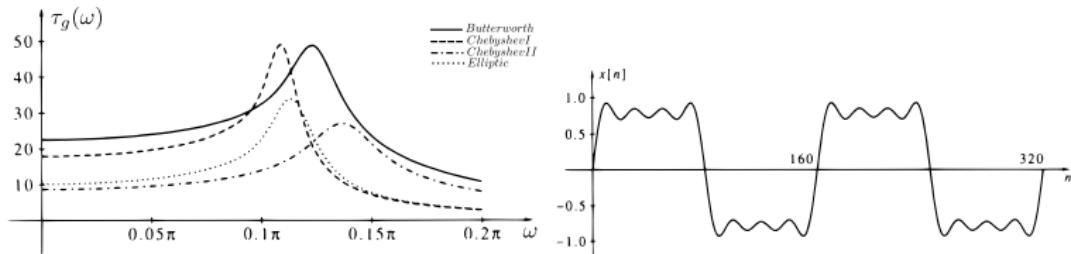
- IIR filtry nemají lineární fázi ani pokud se omezíme pouze na propustné pásmo
- Signály procházející IIR filtrem jsou zkresleny (každá frekvenční komponenta je zpozděna jinak) i pokud se spektrálně nachází zcela v propustném pásmu filtru
- PŘÍKLAD: Srovnání - fázové zkreslení FIR/IIR

Fázové zkreslení signálu v propustném pásmu FIR/IIR

- Mějme zadáno toleranční schéma: $\omega_p = 0.1\pi$, $\omega_s = 0.2\pi$, $\delta_p = \delta_s = 0.001$
- Máme navrženy IIR filtry všech základních typů (s minimálním řádem) splňující specifikace
- Vygenerujme testovací signál (první čtyři harmonické čtvercové vlny)

$$x[n] = \sum_{m=1}^4 \frac{1}{2m-1} \sin(0.0125\pi(2m-1)n) \quad (13)$$

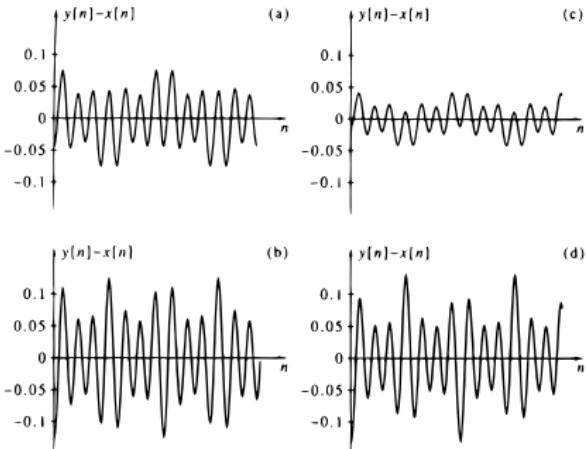
- Signál je pásmově omezen nejvyšší frekvencí 0.0875π , leží tedy v propustném pásmu filtrů



(a) Skupinové zpoždění, (b) Testovací signál $x[n]$

Fázové zkreslení signálu v propustném pásmu FIR/IIR II

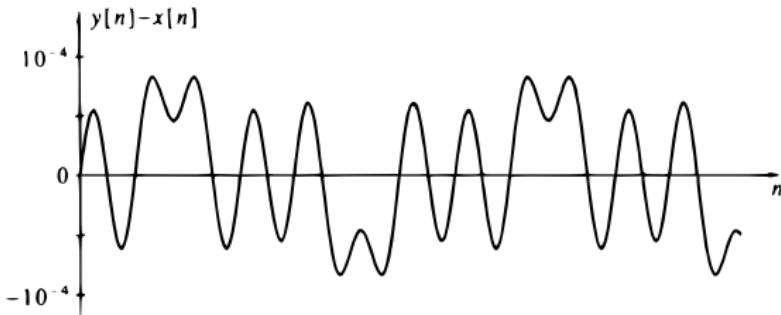
- Nachází-li se signál v propustném pásmu filtrů, pak požadujeme po průchodu filtrem co nejmenší zkreslení
- Podívejme se na rozdíly mezi výstupním signálem $y[n]$ a původním signálem $x[n]$
- (Signály jsou posunuty, aby se vykompenzovalo různé skupinové zpoždění pro základní frekvenci signálu $w = 0.0125\pi$)



$y[n] - x[n]$, (a) Butterworth, (b) Chebyshev I, (c) Chebyshev II, (d) Eliptický

Fázové zkreslení signálu v propustném pásma FIR/IIR III

- Tolerance $\delta_p = 0.001$, fázové zkreslení ovšem způsobuje chybu o dva řády větší
- Zopakujme experiment s FIR filtrem navrženým metodou oken a Kaiserovým okénkem



$y[n] - x[n]$ pro FIR navržený metodou okének s Kaiserovým okénkem

ZDROJ: BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing

- Vidíme, že chyba FIR je menší než požadovaná tolerance
- FIR tedy poskytuje výhodu oproti IIR spočívající v téměř úplné eliminaci fázového zkreslení
- Latence FIR je ovšem vyšší ($\tau_{g,FIR} = 38$; $9 < \tau_{g,IIR} < 23$)

Část III

Nástroje Matlabu pro návrh číslicových
filtrů

FIR filtry:

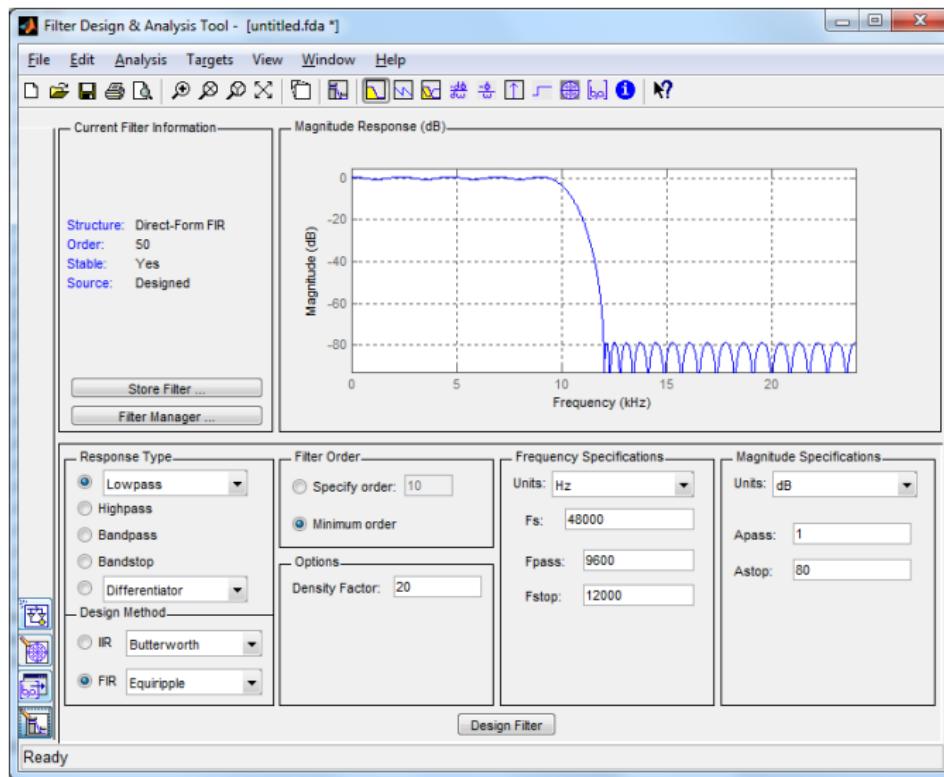
- $B=FIR1(n,Wn)$ - Návrh FIR metodou oken
- $B=FIR2(N,F,M)$ - Návrh FIR metodou vzorkování frekvenční charakteristiky
- $B=FIRLS(N,F,A,W)$ - Návrh FIR na základě kriteria nejmenších čtverců
- $[N,Fo,Ao,W] = FIRPMORD(F,A,DEV,Fs)$ - Určí řád FIR filtru se stejnoměrným zvlněním
- $B=FIRPM(N,Fo,Ao,W)$ - Výpočet koeficientů impulsní odezvy

IIR filtry:

- $[N, Wn] = BUTTORD(Wp, Ws, Rp, Rs)$ - Určí řád Butterworthova IIR filtru
- $[B, A] = BUTTER(N, Wn)$ - Výpočet koeficientů diferenční rovnice (DR) Butterworthova IIR filtru
- $[N, Wp] = CHEB1ORD(Wp, Ws, Rp, Rs)$ - Určí řád Čebyševova IIR filtru, druh 1
- $[B, A] = CHEBY1(N, R, Wp)$ - Výpočet koeficientů DR Čebyševova IIR filtru, druh 1
- $[N, Ws] = CHEB2ORD(Wp, Ws, Rp, Rs)$ - Určí řád Čebyševova IIR filtru, druh 2
- $[B, A] = CHEBY2(N, R, Wst)$ - Výpočet koeficientů DR Čebyševova IIR filtru, druh 2
- $[N, Wp] = ELLIPORD(Wp, Ws, Rp, Rs)$ - Určí řád Eliptického IIR filtru
- $[B, A] = ELLIP(N, Rp, Rs, Wp)$ - Výpočet koeficientů DR Eliptického IIR filtru

Nástroje Matlabu pro návrh číslicových filtrů III

fdatool - Grafický návrh číslicového filtru (Signal Processing Toolbox)



Nástroje Matlabu pro návrh číslicových filtrů IV

- PŘÍKLAD: Návrh filtru pomocí `fdatool`
- Navrhněme Butterworthův filtr z předchozího příkladu:
 $\omega_p = 0.1\pi, \omega_s = 0.2\pi, \delta_p = \delta_s = 0.001$
- 1 Zvolme typ filtru "**Lowpass**" v menu "**Response Type**"
- 2 Zvolme návrhovou metodu "**IIR: Butterworth**" v menu "**Design method**"
- 3 Zvolme minimální možný řád filtru "**Minimum order**" v menu "**Filter Order**"
- 4 Zadejme mezní frekvence tolerančního schématu v menu "**Frequency specifications**"
Zvolme jako jednotky normalizované číslicové frekvence a hodnoty $w_{pass} = 0.1$ a $w_{stop} = 0.2$, kde 1 odpovídá polovině vzorkovací frekvence, tedy $\omega = \pi$
- 5 Zvolme tolerance filtru v menu "**Magnitude specifications**"
Zvolme jednotky dB a tolerance $A_{pass} = 0.009\text{dB}$, $A_{stop} = 60\text{dB}$

Nástroje Matlabu pro návrh číslicových filtrů V

- fdatool umožňuje **zobrazení různých charakteristik filtru** jako je:
- Magnitudová charakteristika, fázová charakteristika, skupinové zpoždění, impulsní odezvu, zero-pole plot...
- fdatool umožňuje **faktorizovat IIR filtry vysokých řadů** na kaskádu IIR filtrů druhého řádu (digital biquadratic filter, second order filter)
- Toto se dělá kvůli nestabilitě IIR vysokých řadů, dojde-li ke kvantizaci koeficientů
- Na filtraci pomocí IIR rozloženého do kaskády filtrů druhého řádu se v Matlabu používá příkaz sosfilt

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška I.

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Předpoklady:

- Znalost programovacího prostředí MATLAB
- Elementární znalosti z matematiky:
 - Soustava lineárních rovnic
 - Kvadratická rovnice
 - Komplexní čísla
 - Komplexní funkce (reálné proměnné, komplexní proměnné)

Organizace předmětu II.

Přednášky:

- Jedna přednáška týdně
- Účast není povinná, ALE!!
- Témata:
 - Diskrétní signály (deterministické) a systémy
 - Návrh, implementace a použití číslicových filtrů
 - Praktická spektrální analýza
 - Vybrané aplikace zpracování číslicových signálů

Studijní materiály

Doporučená literatura:

- Podrobná učebnice:
BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing. Wiley, 1997. ISBN 10: 0471149616.
- Přehledová učebnice a sbírka řešených příkladů:
MONSON H. HAYES, Schaum's outlines of Theory and Problems of Digital Signal Processing, McGraw-Hill, 1999, ISBN 0-07-027389-8

Materiály z přednášek a aktuální informace:

- E-learning TUL: <https://elearning.fm.tul.cz/>
- Kurz: ITE/PZS (2015)
- Přístup k e-learning TUL pomocí hesla do LIANE
- Přihlášení do kurzu ITE/PZS (2015) automaticky, jakmile máte kurz zapsaný ve STAGu

Cvičení a zkouška

Cvičení: Bodový systém

- Možnost získat +5/-5 bodů ke zkoušce
- Účast opět není povinná, ALE!!
- Jedna absence zdarma, každá další -2 body
- Aktivní účast (perfektní znalost +1 bod)
- Hrubá neznalost (-1 bod)
- 2-4 krátké testy v průběhu semestru (+1/-1 bod)
- Pokud bude mít někdo na konci roku -6 a méně bodů, nemá nárok na zápočet

Zkouška:

- Písemná, max. 40 bodů
- Úspěšné absolvování 22-40 bodů
- "Přechodové pásmo" 18-22 bodů

Co Vám předmět může přinést...

Absolvováním předmětu získáte:

- Solidní základy ze široké oblasti zpracování signálů
- Schopnost vyřešit jednodušší problémy zpracování signálů zcela samostatně (a obvykle i velmi rychle)
- Znalost klíčových pojmu (i v angličtině), které jsou nutné pro vyhledání dalších informací a jejich *porozumění*
- Možnost pokračovat samostatně v získávání pokročilých informací (předměty TUL, samostudium literatury, návodů Matlabu)

Část I

Úvod do zpracování signálů

Spojité signály a jejich zpracování I.

- **Signál** je (matematická) funkce, která reprezentuje informaci o vývoji nějaké fyzikální veličiny
- Signály v reálném světě jsou většinou **spojité** - *Analogové*
 - Elektrické signály (napětí, proudy ...)
 - Mechanické signály (posunutí, úhly, rychlosti...)
 - Akustické signály (vibrace, zvukové signály, řeč)
 - A mnohé další fyzikální veličiny (tlaky, teploty, koncentrace)
- Častý převod do *elektrických veličin* za účelem zpracování

Analog Signal Processing - ASP:

- Zesílení, filtrace, integrace, nelineární operace
- Elektrické obvody: zesilovače, odpory, kondenzátory...

Spojité signály II.

Omezení analogového zpracování:

- Limitace přesnosti (tolerance komponent, nelinearity součástek ...)
- Omezená opakovatelnost (podmínky prostředí - teplota, vibrace)
- Náchylnost k elektrickému šumu
- Omezená rychlosť zpracování kvůli fyzikálním zpožděním
- Malá flexibilita (vůči změnám ve zpracování, např. změny parametrů filtrů)
- Obtížná implementace systémů s časově proměnnými parametry
- Obtížné (a drahé) ukládání dat

Analogové zpracování signálu je využíváno pro:

- jednoduché úlohy, kde je více ekonomické než číslicové
- úlohy, kde je díky vysokým frekvencím vzorkování nepraktické
- úlohy, kde jsou analogové vstupy do číslicových procesorů apod.

Číslicové zpracování signálu I.

Digital signal processing - DSP

- Spojité funkce nahrazeny číselnými řadami
- Číslicové operace: Sčítání, odčítání, logické operace apod.
- Realizace číslicového systému zahrnuje implementaci:
 - Převod analogového signálu na číslicový (sampling, A/D conversion)
 - Provedení výše jmenovaných operací
 - Zpětný převod na analogový signál (D/A conversion, reconstruction)

Omezení číslicového zpracování:

- Vzorkování vede ke ztrátě informace
- Cena a složitost A/D, D/A převodníků při vysokých rychlostech a přesnostech
- Chyby vzniklé softwarovým zpracováním
- Nedostatečná rychlosť pro některé aplikace (radiové vlny až 300GHz)

Číslicové zpracování signálu II.

Využití číslicového zpracování signálu:

- Biomedicínské aplikace (diagnostika, monitorování pacientů, prevence)
- Komunikace (kódování, dekódování, šifrování, filtrace)
- Řídicí systémy (servomechanismy, autopiloti)
- Analýza signálů (modelování signálů, rozpoznávání, komprese)
- Zpracování obrazu (úpravy obrazu, rozpoznávání tvarů)
- Multimédia (filmy, digitální televize, videokonference)
- Hudební a zvukové aplikace (nahrávání, reprodukce, speciální efekty)
- Řečové aplikace (Odstranění šumu, komprese, rozpoznávání, syntéza)

Zpracování signálů a strojové učení

Strojové učení: (Machine learning)

- Skupina algoritmů snažící se naučit počítače schopnostem lidí; snaží se o vývoj (slabé) umělé inteligence
- Pro mnohé úlohy se protíná s klasickým zpracováním signálů (odstranění šumu, přepis hudby do not, syntéza řeči ...)
- Používá obecné modely s mnoha volnými parametry
- Vyžaduje trénovací fázi s **velkým** množstvím referenčních dat (Big Data)

Klasické zpracování signálu: (Conventional signal processing)

- Používá konkrétní modely s několika volnými parametry
- Nevyžaduje (rozsáhlou) trénovací fázi, používá předem známé předpoklady o signálech (nikoliv databáze signálů)

Nejlepší výsledky dosahuje spojení obou principů ¹.

¹Vincent, Emmanuel. "Is audio signal processing still useful in the era of machine learning?." Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA), 2015 IEEE Workshop on. IEEE, 2015.

- Reálná čísla značíme \mathcal{R}
- Komplexní čísla značíme \mathcal{C}
- Celá čísla značíme \mathbb{Z}
- Spojité signály, tj. spojité funkce na \mathcal{R} nebo \mathcal{C} značíme $x(t)$

Diskrétní signály a systémy:

- Diskrétní signály:
 - Indexovaná nekonečná posloupnost čísel z \mathcal{R} nebo \mathcal{C}
 - Značíme $x[n]$
- Diskrétní systémy:
 - Matematický operátor transformující vstupní diskrétní signál $x[n]$ na výstupní diskrétní signál $y[n]$
 - Značíme $y[n] = T(x[n])$

Klasifikace signálů

Deterministické signály

- Popis exaktním matematickým vzorcem v libovolném čase
- Př. $x[n] = \sin(\omega n)$
- Generovány elektronickými generátory funkcí, rotujícími stroji, hudebními nástroji...
- Lze je exaktně predikovat a reprodukovat
- Je možné exaktně určit odezvy kauzálních deterministických systémů (identifikace systémů)
- Jednoduší analýza, začneme s deterministickými signály

Stochastické signály

- Nelze popsát matematickým vztahem, využívá se statistický popis
- Př. $x[n] = N(0, 1)$
- Popis charakteristickými parametry, zde střední hodnota a rozptyl
- Vznikají měřením reálných přírodních fenoménů s mnoha neznámými vlivy
- Budoucí hodnoty je nutné odhadovat z minulých hodnot

Část II

Diskrétní deterministické signály

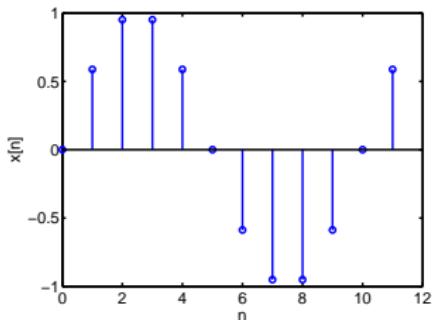
Časově diskrétní signál

- Signál $x[n]$ - indexovaná nekonečná posloupnost čísel z \mathcal{R} nebo \mathcal{C}
- Zatím uvažujeme: diskrétní signály nejsou kvantované
- **Vznik diskrétního signálu:**

- 1 Vzorkování spojitého signálu $x(t)$ v ekvidistantních okamžicích vzdálených T_s :
 - Je-li **vzorkovací frekvence** $F_s = 1/T_s$, pak platí:
 - $x[n] = x(nT_s)$
- 2 Přirozeně diskrétní sekvence (denní vývoj cen akcií na burze, měnových kurzů apod.)

■ Periodicitu signálu:

- $x[n] = x[n + N], \forall n, N \in \mathbb{Z}, N > 0$
- Hodnoty signálu $x[n]$ se opakují s periodou N



Základní diskrétní signály I.

Složité řady je často možné rozložit na součet základních funkcí

- **Jednotkový puls** (Unit sample)

- $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

- **Jednotkový skok** (Unit step)

- $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

- Jednotkový skok a jednotkový puls spolu souvisí:

- $u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$

- $\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$

Základní diskrétní signály II.

- **Exponenciální řada** (Exponential sequence)

- $x[n] = a^n$
 $a \in \mathcal{R}$ nebo $a \in \mathcal{C}$

- Speciální případ - komplexní exponenciela

- Důležitá pro DSP (Fourierova dekompozice signálu)

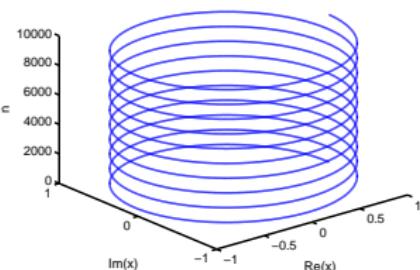
- $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$$\omega_0 \in \mathcal{R}$$

- Eulerův vztah:

$$e^{j\omega_0 n} = \cos[\omega_0 n] + j \sin[\omega_0 n]$$

$$e^{j2\pi i 0.001 n}$$



Základní operace se signálem I.

Složitější manipulace se signálem se obvykle skládají z několika základních

Transformace nezávisle proměnné n

- $y[n] = x[f(n)]$

$f(n)$ je nějaká funkce n

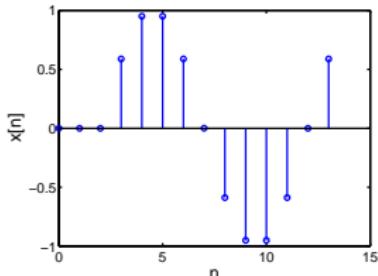
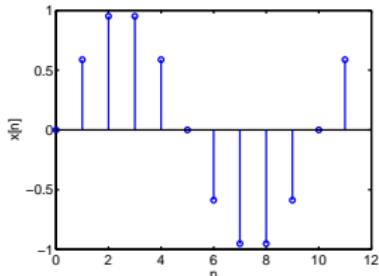
Pokud vychází $f(n)$ neceločíselně, pak $y[n] = x[f(n)]$ není definován

- **Posun signálu (Shifting)**

- $f(n) = n - n_0$

 - Kladné n_0 znamená zpoždění - Posun doprava

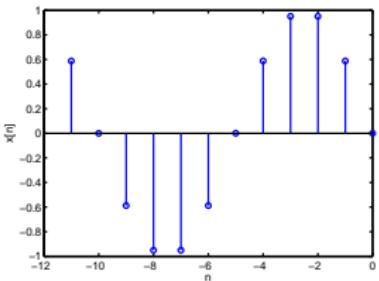
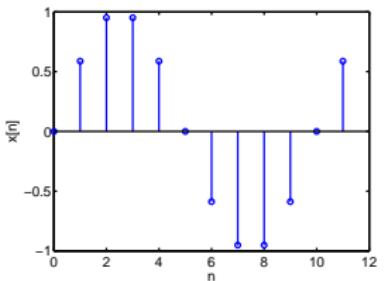
 - Záporné n_0 znamená posun vpřed - Posun vlevo



Základní operace se signálem II.

■ Otočení (Reversal)

- $f(n) = -n$
- Otočení signálu podle amplitudové osy



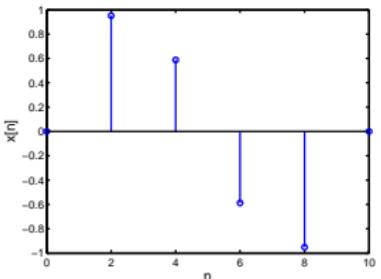
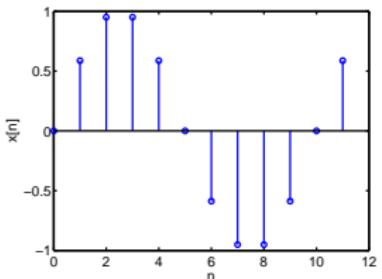
■ Převzorkování (Time scaling)

- Podvzorkování (Down-sampling)
 - $f(n) = Mn, M \in \mathbb{Z}$,
 - Nový signál obsahuje každý M -tý vzorek původního
- Nadvzorkování (Up-sampling)
 - $f(n) = n/N, N \in \mathbb{Z}$,
 - Mezi každý vzorek původního signálu vložíme $N - 1$ nul

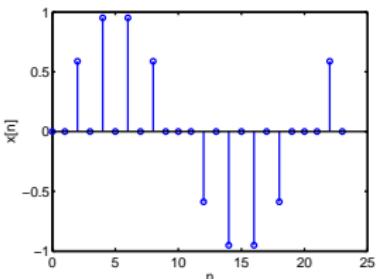
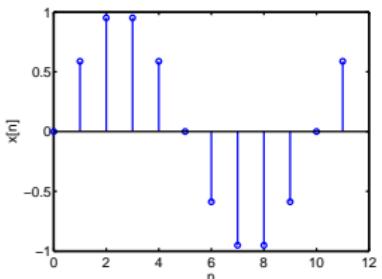
■ POZOR - Tyto operace jsou závislé na pořadí

Základní operace se signálem III.

■ Podvzorkování:



■ Nadvzorkování:



- PŘÍKLAD: Je dán signál $x[n] = (6 - n)(u[n] - u[n - 6])$
Nakreslete signál $y[n] = x[2n - 3]$
- PŘÍKLAD: Dekompozice libovolného $x[n]$ na součet $\delta[n]$

Základní operace se signálem IV.

Transformace závisle proměnné $x[n]$ - Změna amplitudy

■ Sčítání signálů (Addition)

- $y[n] = x_1[n] + x_2[n], -\infty < n < \infty$
- Sčítáme signály vzorek po vzorku

■ Násobení signálů (Multiplication)

- $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n], -\infty < n < \infty$
- Násobíme signály vzorek po vzorku

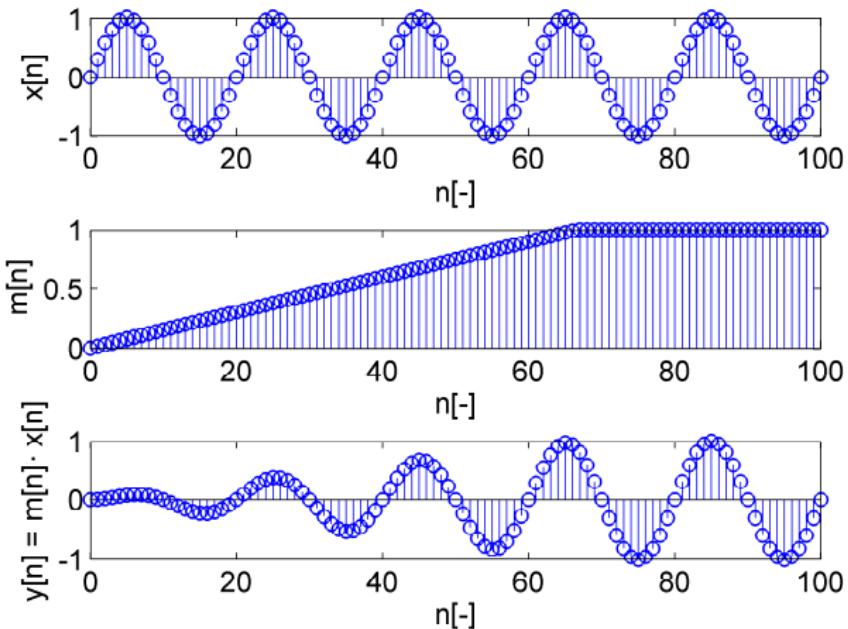
■ Násobení konstantou (Scaling)

- $y[n] = c \cdot x[n], -\infty < n < \infty$
- Amplituda $x[n]$ je zesílena c -krát.

Základní operace se signálem V.

Transformace závisle proměnné $x[n]$ - Změna amplitudy

- PŘÍKLAD: Audio efekty fade-in a fade-out



Fade-in efekt

Část III

Diskrétní systémy

Časově diskrétní systém I.

- Matematický operátor transformující vstupní diskrétní signál na výstupní diskrétní signál, značíme $T(\cdot)$
- $y[n] = T(x[n])$,
 $y[n]$ - odezva systému $T(\cdot)$ na vstupní signál $x[n]$
- **Diferenční rovnice:** (Difference Equation)
- Vztah rekurzivně definující výstup ze systému jako (obecně časově proměnnou) kombinaci (minulých současných a budoucích) hodnot vstupu a minulých hodnot výstupu
- PŘÍKLAD: $y[n] = x[n]^2$ nebo $y[n] = 0.5 \cdot n \cdot y[n-1] + x[n]$

Vlastnosti systémů:

- **Systém bez paměti** (Memoryless)
- Výstup v čase $n = n_0$ závisí pouze na vstupu v čase $n = n_0$.
- **Kauzalita** (Causality)
- Systém je kauzální, pokud pro každé $n_0 \in \mathbb{Z}$ odezva systému v čase n_0 závisí pouze na hodnotách vstupu pro $n \leq n_0$.
- LTI systém je kauzální pouze pokud $h[n] = 0, \forall n < 0$.
- PŘÍKLAD: Rozhodněte o kauzalitě systémů:

$$\begin{aligned}y_1[n] &= x[n] + x[n-1] \\y_2[n] &= x[n] + x[n+1]\end{aligned}$$

Časově diskrétní systém II.

- **Stabilita** (Stability)
- BIBO stabilita (Bounded Input - Bounded Output)
- Systém je stabilní, pokud pro $|x[n]| < A < \infty$ platí $|y[n]| < B < \infty$, $A, B \in \mathbb{R}$
- Pro LTI systém je tato podmínka totožná s podmínkou $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$
- PŘÍKLAD: Rozhodněte o stabilitě systémů:
$$h_1[n] = a^n u[n]$$
$$y_2[n] = nx[n]$$

- **Invariantnost vůči posunu** (Shift invariance)
- Nechť $y[n]$ je odezva $T(\cdot)$ na $x[n]$
- Pak $T(\cdot)$ je invariantní vůči posunu, pokud pro libovolné zpoždění n_0 platí, že odezva na $x[n - n_0]$ je $y[n - n_0]$.

- **Aditivita** (Additivity)
- $T(x_1[n] + x_2[n]) = T(x_1[n]) + T(x_2[n])$
- **Homogenita** (Homogeneity)
- $T(cx[n]) = cT(x[n])$

Část IV

LTI systémy

LTI systém

■ Linearita (Linearity)

- Systém je lineární, pokud je *aditivní* a *homogenní*
- $T(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = a_1 T(x_1[n]) + a_2 T(x_2[n])$

■ LTI systém (Linear time-invariant system)

- LTI systém je *lineární* a *invariantní vůči posunu*

- Linear constant coefficient difference equation (LCCDE)
- Speciální případ diferenčních rovnic popisující LTI systémy

$$y[n] = \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] \quad (1)$$

$a[k], b[k]$ - Konstanty definující systém

- Vztah rekurzivně definující výstup ze systému jako lineární kombinaci hodnot vstupu a minulých hodnot výstupu
- Konkrétní příklad:

$$y[n] = 3x[n] + x[n-1] - 5x[n-2] - y[n-1] + y[n-2],$$

$$y[-1] = 2, y[-2] = 4$$

- Rekurzivní/nerekurzivní DR
- Rekurzivní DR vyžadují počáteční podmínky

Řešení diferenčních rovnic:

- Vyjádření výstupu z LTI systému (pro konkrétní vstupní signál) pomocí nerekurzivní funkce s nezávisle proměnnou n
 - 1 Tabulka vstupů a výstupů (rekurzivní dosazování)
 - 2 (Řešení v časové oblasti (*homogenní* a *partikulární* řešení))
 - 3 Řešení pomocí DTFT (za předpokladu nulových počátečních podmínek)
 - 4 Řešení pomocí Z-transformace

PŘÍKLAD: Určení výstupu ze systému daného LCCDE pomocí rekurzivního dosazování

Impulsní odezva LTI systému

- **Impulsní odezva $h[n]$** (Impulse response)
- $h[n]$ je odezva (výstup) LTI systému na jednotkový impuls
- **Získání impulsní odezvy z diferenční rovnice:**
- Vyřešení DR pro $x[n] = \delta[n]$ a nulové počáteční podmínky
- Pro nerekurzivní systém tedy platí:

$$h[n] = \sum_{k=0}^q b[k]\delta[n-k] \quad (2)$$

Systém s konečnou impulsní odezvou

(Finite impulse response - FIR)

PŘÍKLAD: FIR systém

- Pro rekurzivní systém je impulsní odezva nekonečná

Systém s nekonečnou impulsní odezvou

(Infinite impulse response - IIR)

PŘÍKLAD: IIR systém

- **Význam impulsní odezvy:**

- Impulsní odezva jednoznačně charakterizuje LTI systém (stejně jako dif. rovnice)

- PŘÍKLAD: Proč impulsní odezva jednoznačně charakterizuje LTI systém?

Konvoluce I.

- Vyjadřuje vztah mezi vstupem a výstupem LTI systému daného impulsní odezvou

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- **Výpočet konvoluce:**

- **Přímé vyhodnocení sumy:**
 - Výhodné pokud jsou řady zadány matematickým vzorcem
 - **PŘÍKLAD:** Na cvičení
- **Posuvné pásky:**
 - Zapříšeme na proužky za sebe vzorky $x[n]$ a $h[-n]$ (otočená $h[n]$)
 - *Hodnota $y[0]$:* Zarovnáme pod sebe hodnoty $x[0]$ a $h[0]$, vynásobíme čísla pod sebou a sečteme součiny
 - *Hodnota $y[1]$:* Posuneme proužek $h[-n]$ o vzorek doprava a opakujeme předchozí postup ...
 - **PŘÍKLAD:** Vypočtěte konvoluci řad $x[n]$, $h[n]$:

$$h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

$$x[n] = u[n-1] - u[n-4]$$

Konvoluce II.

Výpočet konvoluce:

- Násobení polynomů:
- Koeficienty mocnin polynomu odpovídají vzorkům řad
- POZOR - Žádný ze signálů se neotáčí
- PŘÍKLAD: Vypočtěte konvoluci řad $x[n], h[n]$:

$$h[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n] + 3\delta[n+1]$$
$$x[n] = u[n-1] - u[n-4]$$

Kompozice posunutých impulsních odezv:

- Konvoluce odpovídá součtu posunutých odezv na jednotlivé vzorky vstupního signálu
- PŘÍKLAD: Vypočtěte konvoluci řad $x[n], h[n]$:

$$h[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n] + 3\delta[n+1]$$
$$x[n] = u[n-1] - u[n-4]$$

MATLAB: C = conv(A,B)

- LA = length(A)
- LB = length(B)
- LC = LA + LB - 1

Konvoluce III.

Vlastnosti konvoluce:

- **Komutativita:** (Commutative property)
 $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- **Asociativita:** (Associative property)
 $\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$
- Sériové zapojení systémů $h_1[n], h_2[n]$ lze nahradit systémem s impulsní odezvou $h_{eq} = h_1[n] * h_2[n]$
- **Distributivita:** (Distributive property)
 $x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
- Paralelní zapojení systémů $h_1[n], h_2[n]$ lze nahradit systémem s impulsní odezvou $h_{eq} = h_1[n] + h_2[n]$

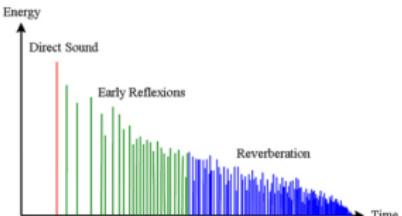
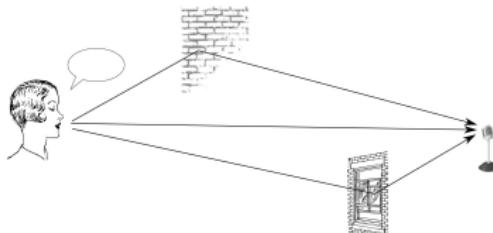
PŘÍKLAD: Model šíření akustického signálu v prostředí

Model šíření akustického signálu v prostředí

- Šíření signálu $s[n]$ v akustickém prostředí zhruba odpovídá filtraci LTI systémem.
- Signál $s_m[n]$ zachycený na mikrofonu je tedy dán jako

$$s_m[n] = \sum_{\tau=0}^{M-1} h[\tau] \cdot s[n - \tau], \quad (3)$$

- $h[n]$ - **Room impulse response (RIR)** - Impulsní odezva charakterizující šíření zvuku od zdroje k senzoru
- RIR vzniká (částečnými) odrazy zvuku na stěnách/překážkách v prostředí.
- Délka RIR se velmi liší podle místnosti (pokoj / koncertní hala).



ZDROJ: <http://www.acoustics.org>

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška II.

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

V minulé přednášce jste se dozvěděli...

Studijní materiály

Doporučená literatura:

- Podrobná učebnice:
BOAZ PORAT, A Course in Digital Signal Processing. Wiley, 1997. ISBN 10: 0471149616.
- Přehledová učebnice a sbírka řešených příkladů:
MONSON H. HAYES, Schaum's outlines of Theory and Problems of Digital Signal Processing, McGraw-Hill, 1999, ISBN 0-07-027389-8

Materiály z přednášek a aktuální informace:

- E-learning TUL: <https://elearning.fm.tul.cz/>
- Kurz: ITE/PZS (2012)
- Přístup k e-learning TUL pomocí hesla do LIANE
- Přihlášení do kurzu ITE/PZS (2012) automaticky, jakmile máte kurz zapsaný ve STAGu

Opakování I

Diskrétní signály a systémy:

- **Diskrétní signály:**

- Indexovaná nekonečná posloupnost čísel z \mathcal{R} nebo \mathcal{C}
- Značíme $x[n]$

- **Diskrétní systémy:**

- Matematický operátor transformující vstupní diskrétní signál $x[n]$ na výstupní diskrétní signál $y[n]$
- Značíme $y[n] = T(x[n])$

Elementární signály:

- Jednotkový impuls $\delta[n]$
- Jednotkový skok $u[n]$

Opakování II

Základní operace se signálem:

- **Transformace nezávisle proměnné**
 - Posunutí
 - Otočení
 - Převzorkování

- **Transformace závisle proměnné**
 - Sčítání signálů
 - Násobení signálů
 - Násobení konstantou

Opakování III

Systém a jeho vlastnosti

- Aditivita, homogenita, linearita
- Invariantnost vůči posunu
- Kauzalita, Stabilita

LTI systém

- Lineární a invariantní vůči posunu

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

$$y[n] = \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k]$$

- $a[k], b[k]$ - Konstanty definující systém

Konvoluce

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Význam: Odezva LTI systému (daného *impulsní odevzvou* $h[n]$) na vstupní signál $x[n]$

Část II

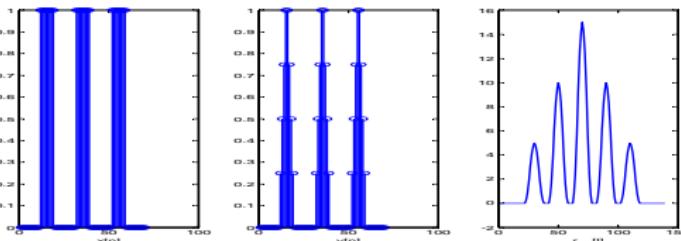
Korelace deterministických signálů,
energie

Vzájemná korelace deterministických signálů

Cross-correlation:

- Operátor určující vzájemnou podobnost dvou signálů $x[n]$ a $y[n]$ v závislosti na jejich vzájemnému posunu ℓ (lag)
- Pro $x[n], y[n] \in \mathcal{R}$ je vzájemná korelace $r_{xy}[\ell]$ definována jako:

$$r_{xy}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n + \ell]y[n] \quad (1)$$

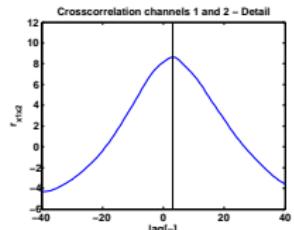
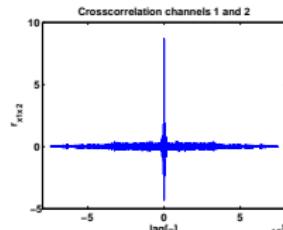
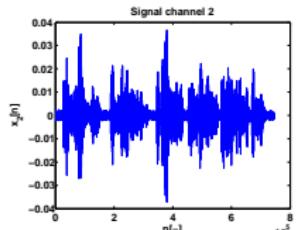
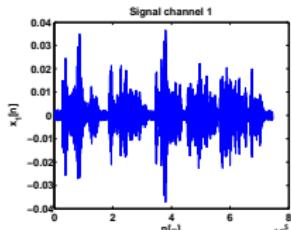


- Vzájemná korelační funkce reálných signálů je reálná funkce, může být kladná i záporná a není obecně symetrická
- **Time delay analysis:**
- **PŘÍKLAD:** Určení časového zpoždění a příchozího směru akustického signálu v rámci binaurálního mikrofonního pole

Určení příchozího směru akustického signálu

Time difference of Arrival: (TDOA)

Direction of Arrival: (DOA)



- 1 Určíme ℓ_{\max} pro které nabývá vzájemná korelační funkce maximum
- 2 Zpoždění signálu $TDOA = \ell_{\max} T_s$, (T_s - vzorkovací perioda)
- 3 Úhel DOA mezi normálou mikrofonného pole příchozím směrem zvuku je dán jako

$$\text{DOA} = \arcsin\left(\frac{\text{TDOA} \cdot c}{d}\right) \quad (2)$$

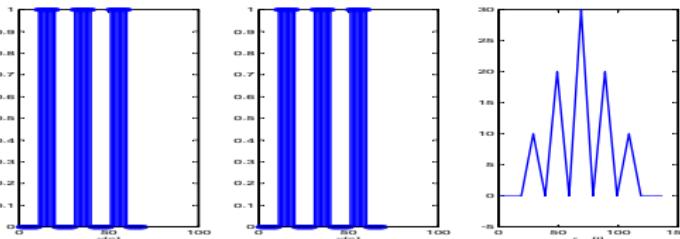
c - rychlosť zvuku (343m/s ve vzduchu), d - vzdálosť mikrofónov

Autokorelace deterministických signálů

Autocorrelation:

- Operátor zkoumající, zda je signál $x[n]$ podobný sám sobě, v závislosti na posunutí ℓ
- Pro $x[n] \in \mathcal{R}$ je autokorelace $r_{xx}[\ell]$ definována jako:

$$r_{xx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n + \ell]x[n] \quad (3)$$



- Autokorelační funkce je reálná, může být kladná i záporná a je vždy sudě symetrická okolo $\ell = 0$.
- **Periodicity detection:**
- Autokorelace se používá například pro detekci periodicity signálu za přítomnosti šumu

Vlastnosti korelace

- **Vzájemnou/autokorelací** je možné vypočítat pomocí konvoluce vztahem

$$r_{x,y}[n] = x[n] * y[-n] \quad (4)$$

- (Této vlastnosti se využívá při rychlém výpočtu korelací pomocí Rychlé Fourierovy Transformace (FFT))
- Vzájemná korelace **není komutativní**

$$r_{x,y}[n] = r_{y,x}[-n] \quad (5)$$

- Záměnou vstupních signálů tedy dochází k otočení vzájemné korelační funkce

Energie a výkon deterministických signálů

Signal energy:

- Energie je hodnota autokorelace $r_{xx}[0]$, tedy veličina daná jako

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^2 \quad (6)$$

- Stejný význam jako fyzikální energie (v Joulech, práce napětí $x[n]$ zmařená na odporu 1Ω)
- Signály s konečnou energií (finite-energy signal, $E_x < \infty$)
- Energie harmonického (obecně nenulového periodického) signálu je nekonečná

Signal power:

- Průměrná energie signálu v rámci intervalu délky N

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2 \quad (7)$$

- Výkon je u periodických signálů obvykle počítán v rámci jedné periody
- Výkon harmonických signálů je konečný

Část III

Fourierova transformace v diskrétním
čase

Fourierova transformace v diskrétním čase

Discrete Time Fourier Transform: (DTFT)

- Zobrazení z množiny posloupností (signál, impulsní odezva) do množiny spojitých komplexních funkcí reálné proměnné (*DTFT spektrum, frekvenční charakteristika*)
- Zobrazení z časové oblasti do oblasti *frekvenční*, kde lze jednodušeji zkoumat některé vlastnosti signálů a systémů
- Je dána:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \quad (8)$$

$\omega \in \mathcal{R}$ - číslicová frekvence, $-\infty < n < \infty$

- $X(e^{j\omega})$ je spojitá komplexní funkce reálného parametru ω
- Hodnota funkce $X(e^{j\omega})$ v bodě ω_0 je *vzájemná korelace* posloupnosti $x[n]$ a komplexní exponenciály $e^{jn\omega_0}$ (pro $\ell = 0$)
- Význam $X(e^{j\omega_0})$:
 - *magnituda obrazu* $|X(e^{j\omega_0})|$ - míra podobnosti $x[n]$ a $e^{jn\omega_0}$
 - *fáze obrazu* $\phi(\omega_0)$ - fázový posun mezi $x[n]$ a $e^{jn\omega_0}$

$$X(e^{j\omega_0}) = |X(e^{j\omega_0})| e^{j\phi(\omega_0)} \quad (9)$$

Fourierova transformace v diskrétním čase II

- PŘÍKLAD: Výpočet $X(e^{j\omega})$ pomocí definičního vztahu DTFT
- Inverse discrete time Fourier transform:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad (10)$$

- Seznam často užívaných DTFT páru:

Řada	DTFT
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-jn_0\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{jn\omega_0}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\alpha^n u[n], \alpha < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$
$-\alpha^n u[-n - 1], \alpha > 1$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$
$(n + 1)\alpha^n u[n], \alpha < 1$	$\frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^2}$
$\cos([n\omega_0])$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$

Vlastnosti DTFT I

■ Periodicita:

- DTFT je periodická s periodou 2π , tedy
- $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$
- OTÁZKA: Z čeho to vyplývá?

■ Symetrie:

$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
Reálná, sudá	Reálná, sudá
Reálná, lichá	Imaginární, lichá
Imaginární, sudá	Imaginární, sudá
Imaginární, lichá	Reálná, sudá

Vlastnosti DTFT II

■ Linearita:

- Je-li $X_1(e^{j\omega})$ DTFT řady $x_1[n]$ a $X_2(e^{j\omega})$ DTFT řady $x_2[n]$, pak platí:
 - $ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

■ Otočení v čase:

- Otočení řady $x[n]$ v čase vede k otočení $X(e^{j\omega})$ ve frekvenční oblasti, tedy:
 - $x[-n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{-j\omega})$

■ Posunutí:

- Posunutí řady v čase vede k vynásobení $X(e^{j\omega})$ komplexní exponenciálou, tedy:
 - $x[n - n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

Vlastnosti DTFT III

■ Modulace:

- Vynásobení řady komplexní exponenciálou vede k posunu ve frekvenci DTFT, tedy:
 - $e^{jn\omega_0}x[n] \xrightleftharpoons{\text{DTFT}} X(e^{j\omega-\omega_0})$
- Vynásobení řady signálem $\cos(\omega_0 n)$ vede k posunutí spektra nahoru a dolu o ω_0 , tedy:
 - $\cos(\omega_0 n)x[n] \xrightleftharpoons{\text{DTFT}} \frac{1}{2}X(e^{j\omega-\omega_0}) + \frac{1}{2}X(e^{j\omega+\omega_0})$

■ Konvoluční teorém:

- Důležitá vlastnost DTFT, konvoluce dvou signálů v časové oblasti se rovná součinu obrazů těchto signálů ve frekvenční oblasti
 - $h[n] * x[n] \xrightleftharpoons{\text{DTFT}} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

Vlastnosti DTFT IV

■ Teorém o násobení:

- Násobení v časové oblasti se mapuje na (periodickou) konvoluci ve frekvenční oblasti, tedy:

$$x[n]y[n] \xrightleftharpoons{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

■ Parsevalův teorém:

- DTFT zachovává při přechodu z časové oblasti do frekvenční energii, tedy:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Část IV

Aplikace DTFT na signál $x[n]$, DTFT spektrum

DTFT spektrum signálu

DTFT spectrum $X(e^{j\omega})$:

- Komplexní funkce reálné proměnné ω , vyjadřující míru korelace komplexních exponenciál na frekvencích ω a signálu $x[n]$
- Výpočet: aplikace DTFT na signál $x[n]$
- Význam pro *reálný* signál $x[n]$: jedná se o rozklad signálu na součet (nekonečně) harmonických signálů $\cos(\omega n + \phi(\omega))$
- Eulerův vzorec:

$$\cos(\omega) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \quad (11)$$

- PŘÍKLAD: Spektrum reálného signálu $x[n]$
- Značíme: $x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$
- Obvykle se uvádí ve formě dvou reálných funkcí:
 - magnitudové spektrum $|X(e^{j\omega})|$
 - fázové spektrum $\phi(\omega)$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)} \quad (12)$$

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška III.

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

V minulé přednášce jste se dozvěděli...

Cross-correlation:

- Operátor určující vzájemnou podobnost dvou signálů $x[n]$ a $y[n]$ v závislosti na jejich vzájemnému posunu ℓ (lag)
- Pro $x[n], y[n] \in \mathcal{R}$ je vzájemná korelace $r_{xy}[\ell]$ definována jako:

$$r_{xy}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n + \ell]y[n] \quad (1)$$

Autocorrelation:

- Operátor zkoumající, zda je signál $x[n]$ podobný sám sobě, v závislosti na posunutí ℓ (detekce periodicity)
- Pro $x[n] \in \mathcal{R}$ je autokorelace $r_{xx}[\ell]$ definována jako:

$$r_{xx}[\ell] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n + \ell]x[n] \quad (2)$$

Discrete time Fourier transform:

- DTFT je tedy definována jako:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \quad (3)$$

- DTFT si můžeme představit jako rozklad posloupnosti $x[n]$ do (nespočetné) množiny komplexních exponenciál
- Aplikací DTFT na diskrétní signál $x[n]$ získáme spojité DTFT spektrum $X(e^{j\omega})$

... co je to DTFT spektrum signálu ...

DTFT spectrum $X(e^{j\omega})$:

- Komplexní funkce reálné proměnné ω , vyjadřující míru korelace komplexních exponenciál na frekvencích ω a signálu $x[n]$
- Výpočet: aplikace DTFT na signál $x[n]$
- Význam pro *reálný* signál $x[n]$: jedná se o rozklad $x[n]$ na množinu (nekonečně mnoha) harmonických signálů $\cos(\omega n + \phi(\omega))$
- Značíme: $x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$

Část II

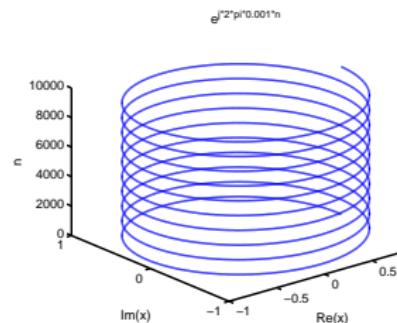
Aplikace DTFT na impulsní odezvu LTI
systému $h[n]$, frekvenční charakteristika

Frekvenční charakteristika I

Vlastní funkce LTI systému:

- Funkce (signály), jímž se průchodem LTI systémem změní pouze jejich *komplexní amplituda*
- Změní se tedy pouze jejich *zesílení* a *zpoždění*
- Je-li vstup do systému $x[n]$, pak je výstup $y[n] = \lambda x[n]$, kde *vlastní číslo* $\lambda \in \mathcal{C}$ příslušející vlastní funkci $x[n]$.
- Vlastní funkce LTI systémů mají formu:
$$x[n] = e^{jn\omega_0}$$

$$\omega_0 \in \mathcal{R}, -\infty < n < \infty$$
- OTÁZKA: Proč jsou komplexní exponenciály vlastními funkcemi LTI systémů?



Frekvenční charakteristika II

- Vlastní hodnotu příslušející komplexní exponenciále $e^{j\omega_0 n}$ značíme $H(e^{j\omega_0})$
- Funkci, která popisuje závislost vlastních hodnot na frekvenci ω značíme $H(e^{j\omega})$ a nazýváme **frekvenční charakteristika** (Frequency response - FR) LTI systému
- Frekvenční charakteristiku spočítáme pomocí DTFT aplikované na impulsní odezvu $h[n]$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\omega} \quad (4)$$

- Komplexní spojitá funkce reálného parametru ω
- Udává, jak komplexní exponenciela (harmonická funkce pro reálné $h[n]$) na frekvenci ω_0 změní svou amplitudu a jak se zpozdí při průchodu LTI systémem
- FR **jednoznačně popisuje** LTI systém, známe tedy již tři ekvivalentní způsoby (Dif. rov., imp. odez.)

Frekvenční charakteristika III

- Obvykle se uvádí ve formě dvou reálných funkcí:

- magnitudová charakteristika $|H(e^{j\omega})|$
- fázová charakteristika $\phi(\omega)$

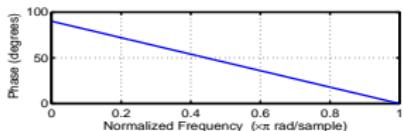
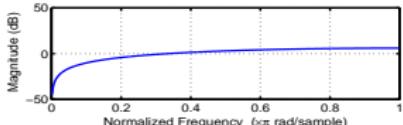
$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)} \quad (5)$$

- Místo fázové charakteristiky se často uvádí **skupinové zpoždění** (group delay - GD)

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (6)$$

- Udává zpoždění signálu $e^{j\omega n}$ po průchodu LTI systémem (ve vzorcích)

- PŘÍKLAD: Průchod signálu LTI systémem s danou $H(e^{j\omega})$



Frekvenční charakteristika IV

- Proč jsou komplexní exponenciály a frekvenční charakteristika LTI systému důležité?
- Každý diskrétní signál je možné pomocí Fourierovy transformace rozložit na spektrum komplexních exponenciál (harmonických funkcí pro reálný $x[n]$)
- Je-li tedy vstup do LTI systému

$$x[n] = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{jn\omega_k} \quad (7)$$

pak je jeho výstup roven

$$y[n] = \sum_{k=1}^N \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{jn\omega_k} \quad (8)$$

Vlastnosti frekvenční charakteristiky

■ Periodicita

- Frekvenční charakteristika diskrétního LTI systému je *periodická* s periodou 2π
- OTÁZKA: Proč je tomu tak?

■ Symetrie

- Je-li impulsní odezva LTI systému reálná, pak platí:
- FR je *konjugovaně symetrická* funkce číslicové frekvence ω
 $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$
- OTÁZKA: Co z tohoto vyplývá?

Část III

Další aplikace DTFT

Aplikace DTFT I

- **Frekvenční charakteristika** systému daného diferenční rovnící:
- Již víme, že frekvenční charakteristika je DTFT impulsní odezvy systému
- U systémů FIR je výpočet jednoduchý, jak FR vypočítat u systémů IIR?
- IIR systémy jsou obvykle dány pomocí diferenční rovnice:

$$y[n] = \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] \quad (9)$$

- OTÁZKA A PŘÍKLAD: Jak získáme z diferenční rovnice pomocí DTFT frekvenční charakteristiku?
- Díky linearitě DTFT a teorému o posunutí je frekvenční charakteristika dána jako:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]e^{-jk\omega}} \quad (10)$$

- **Výpočet konvolucí:** (výhodné zejména u nekonečných řad)
- Již víme, že DTFT mapuje operaci konvoluce v časové oblasti na násobení ve frekvenční oblasti
- DTFT lze proto použít pro výpočet konvoluce nekonečných řad
- **PŘÍKLAD:** Výpočet konvoluce pomocí DTFT

Aplikace DTFT III

- **Řešení diferenčních rovnic s nulovými počátečními podmínkami**
- Převedeme diferenční rovnici do frekvenční oblasti
- Vyjádříme výstup systému jako funkci vstupních členů a posunů
- Provedeme inverzní DTFT
- **PŘÍKLAD:** Řešení diferenční rovnice ve frekvenční oblasti

Aplikace DTFT IV

- Inverzní systém k systému s impulsní odezvou $h[n]$ je takový systém, jehož impulsní odezva $g[n]$ splňuje

$$h[n] * g[n] = \delta[n]. \quad (11)$$

- Pro frekvenční charakteristiku $G(e^{j\omega})$ tedy platí:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} \quad (12)$$

- Ne každý systém je invertovatelný (inverzní systém může být nestabilní)
- Inverzní systém ke kauzálnímu systému může být nekauzální
- Jinými slovy: existence kauzálního a stabilního inverzního systému není vždy zaručena
- PŘÍKLAD: Inverzní systém a jeho kauzalita

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška IV.

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

V minulé přednášce jste se dozvěděli...

... co je to Frekvenční Charakteristika ...

LTI systém je jednoznačně popsán: impulsní odezvou, diferenční rovnicí, **frekvenční charakteristikou**, ...

- **Frekvenční charakteristika** $H(e^{j\omega})$ udává, jak se "zesílí/zpozdí" komplexní exponenciála $e^{j\omega n}$ při průchodu LTI systémem
- Proč komplexní exponenciála? - Je to vlastní funkce LTI systému
- Libovolný diskrétní signál je možné dekomponovat na spektrum komplexních exponenciál (harmonických funkcí pro reálné signály)
- $H(e^{j\omega})$ - komplexní funkce reálné proměnné ω - číslicová frekvence
- Obvykle se uvádí ve formě dvou reálných funkcí:
 - *magnitudová charakteristika* $|H(e^{j\omega})|$
 - *fázová charakteristika* $\phi(\omega)$

... několik aplikací DTFT ...

Discrete time Fourier transform:

- DTFT je tedy definována jako:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \quad (1)$$

- DTFT si můžeme představit jako dekompozici $x[n]$ na množinu komplexních exponenciál
- Aplikací DTFT na diskrétní signál získáme *spojité komplexní spektrum*
- Toto spektrum $X(e^{j\omega})$ je periodické s periodou 2π

Aplikace DTFT:

- Zjištování **frekvenční charakteristiky** systému daného diferenční rovnicí
- **Výpočet konvolucí** nekonečných signálů
- **Řešení diferenčních rovnic** s nulovými počátečními podmínkami
- Určování **inverzních systémů**

Část II

Číslicové filtry

- **Číslicový filtr** je algoritmus (výpočetní postup), který transformuje *vstupní vzorkovaný signál* na jiný *výstupní vzorkovaný signál*.
- Výpočetní proces zahrnuje dolnopropustní filtrování (vyhlazování), pásmovou filtraci, interpolaci, generování derivací a další...
- Filtr je tedy číslicový systém s vlastnostmi, které jsme definovali již dříve: linearita, stabilita, kauzalita ...
- Další vlastnosti filtrů (číslicových systémů) vyplývají z frekvenční charakteristiky

Filtry II

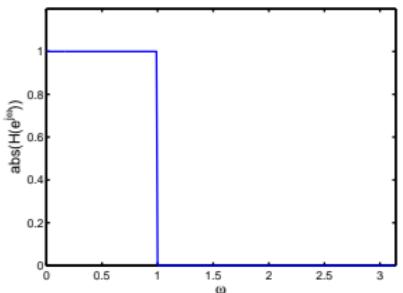
■ Allpass filtr:

- Systém je tzv. *Allpass filtr*, pokud je jeho magnitudová charakteristika konstantní nezávisle na frekvenci

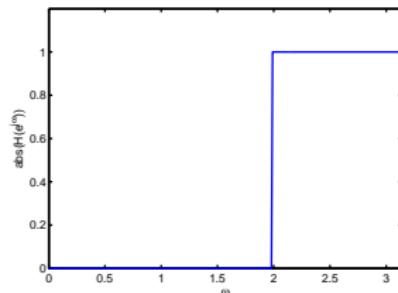
$$|H(e^{j\omega})| = c, c \in \mathcal{R} \quad (2)$$

■ Frekvenčně selektivní filtry:

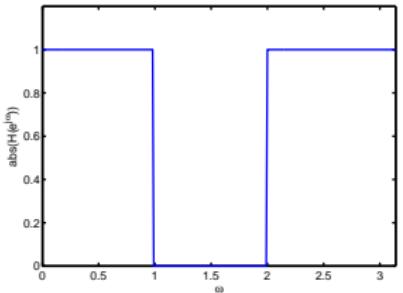
- Dolní propust, horní propust, pásmová zádrž, pásmová propust*
- Low pass, high pass, band stop, band pass*
- Uváděné charakteristiky jsou ideální, v praxi se jim chceme co nejvíce přiblížit
- Zádržné pásmo (Stop band)- $|H(e^{j\omega})| = 0$
- Propustné pásmo (Pass band)- $|H(e^{j\omega})| = 1$
- Zlomová frekvence (Cutoff frequency) - Frekvence oddělující propustné a závěrné pásmo



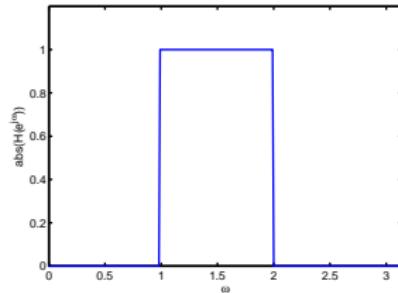
(a)



(b)



(c)



(d)

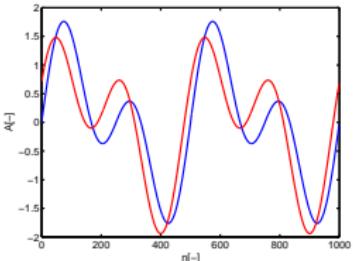
Obrázek: (a) Dolní propust (b) Horní propust (c) Pásmová zádrž (d) Pásmová propust

Část III

Filtry s lineární fází

Systémy s lineární fází I

- Pro mnoho aplikací filtrování je důležitá zejména **magnitudová charakteristika** filtru
- V některých případech je ovšem důležité zvážit i vliv filtru na fázové spektrum signálu
- **Fázová charakteristika** udává změnu fáze harmonické funkce o dané frekvenci při průchodu systémem
- Nejsou-li všechny harmonické složky signálu zpožděně stejně, dochází k **fázovému zkreslení**
- Toto zkreslení ovlivňuje tvar signálu v časové oblasti (klíčové pro některé aplikace: analýza EKG/EEG)
- Systémy/filtry, které nedeformují fázové spektrum signálu se označují jako **filtry se (zobecněnou) lineární fází**



Systémy s lineární fází II

- Digitální filtr má **lineární fázi**, pokud platí

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}, \quad \alpha \in \mathcal{R} \quad (3)$$

- Digitální filtr má **zobecněnou lineární fázi**, pokud platí

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{R} \quad (4)$$

$A(e^{j\omega}) \in \mathcal{R}$ - Amplituda (může být kladná a záporná)

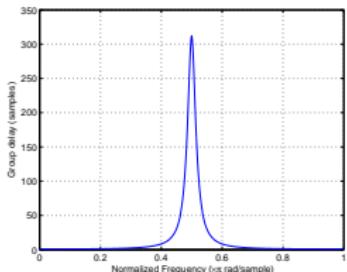
- Systémy s lineární fází mají konstantní skupinové zpoždění

$$\tau_g(\omega) = \alpha, \quad (5)$$

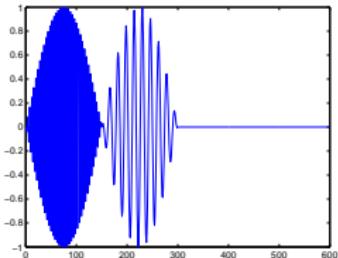
pouze zpožďují signál a (téměř) jej neformují v časové oblasti (pokud frekvenční pásmo signálu leží v propustném pásmu filtru).

Systém s nelineární fází: fázové zkreslení

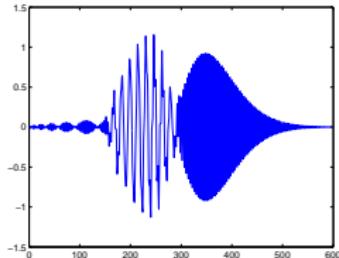
All pass filter: $H(e^{j\omega}) = \left(\frac{e^{-2j\omega} + 0.95^2}{1 + 0.95^2 e^{-2j\omega}} \right)^8$



(a)



(b)



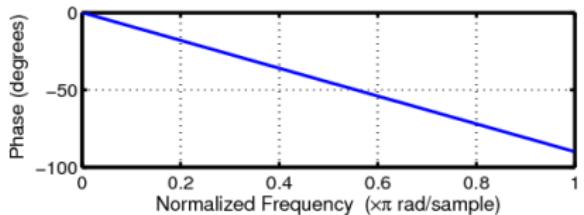
(c)

- (a) Skupinové zpoždění $\tau(\omega)$, (b) Vstupní signál $x[n]$ - Nosné frekvence $\pi/2$ a $\pi/8$.
 (c) Výstupní signál $y[n] = \text{IDTFT}(H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}))$

Příklad inspirován přednáškou profesora Barryho Van Veena (University of Wisconsin) "Characterizing Filter Phase Response", dostupné na Youtube.

Systémy s lineární fází III

■ Lineární fáze:

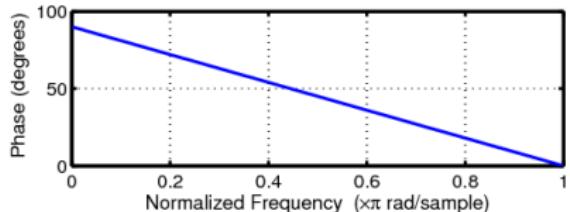


■ Zobecněná lineární fáze:

- Systém má *zobecněnou lineární fázi* pokud jeho frekvenční charakteristika má formu

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)} \quad (6)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $A(e^{j\omega})$ je reálná funkce ω



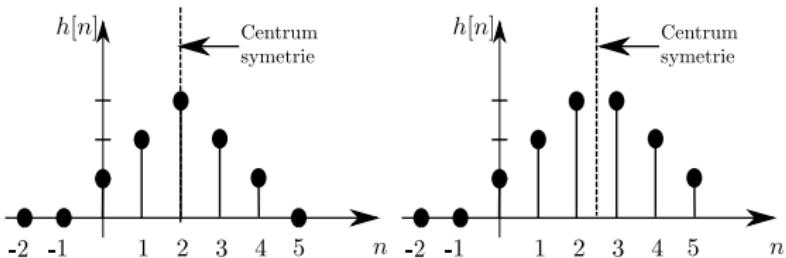
Systémy s lineární fází IV

- Chceme-li, aby měl systém (**zobecněnou**) **lineární fázi** a navíc měl *reálné koeficienty*, byl *kauzální* a *stabilní*, pak jeho impulsní odezva musí být **konečná** (FIR)
- Nechť délka impulsní odezvy $h[n]$ je $N + 1$ vzorků, pak systém má (**zobecněnou**) **lineární fázi**, pokud
 - 1 Impulsní odezva je symetrická ($h[n] = h[N - n]$)
 - 2 Impulsní odezva je antisymetrická ($h[n] = -h[N - n]$)
- Na základě těchto postačujících podmínek existují čtyři skupiny FIR filtrů se (**zobecněnou**) **lineární fází**
 - 1.typ - symetrická $h[n]$, N je sudé číslo, lineární fáze
 - 2.typ - symetrická $h[n]$, N je liché číslo, lineární fáze
 - 3.typ - antisymetrická $h[n]$, N je sudé číslo, zobecněná lin. fáze
 - 4.typ - antisymetrická $h[n]$, N je liché číslo, zobecněná lin. fáze
- Skupinové zpoždění těchto typů filtrů je

$$\tau_g(\omega) = \alpha = \frac{N}{2} \quad (7)$$

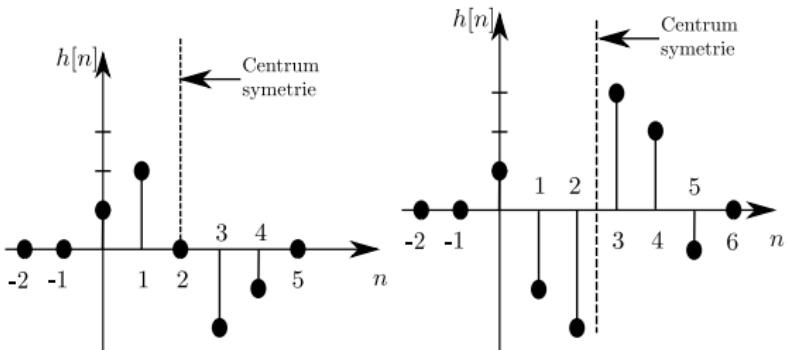
- DETAILY: Boaz Porat, *A course in digital signal processing*, 256 / kapitola 8.4.3

Systémy s lineární fází V



(d)

(e)



(f)

(g)

- (a) Impulsní charakteristika filtru s lineární fází - typ I,
- (b) Impulsní charakteristika filtru s lineární fází - typ II
- (c) Impulsní charakteristika filtru s lineární fází - typ III,
- (d) Impulsní charakteristika filtru s lineární fází - typ IV

Část IV

Zapojení více filtrů

■ Sériové zapojení:

- Impulsní odezva je konvolucí impulsních odezv
- $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$
- Frekvenční charakteristika je násobkem frekvenčních ch.
 $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$
- OTÁZKA: Co z tohoto vyplývá pro magnitudu a fázi?

■ Paralelní zapojení:

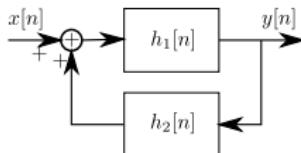
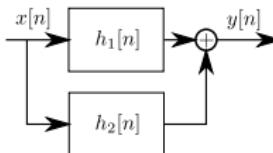
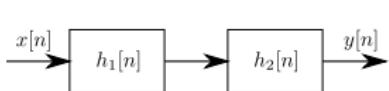
- Impulsní odezva je součtem impulsních odezv
- $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$
- Frekvenční charakteristika je součtem frekvenčních ch.
 $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$
- OTÁZKA: Co z tohoto vyplývá pro magnitudu a fázi?

Spojení systémů/filtrů II

- Zpětnovazební zapojení:
- Frekvenční charakteristika:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{H_1(e^{j\omega})}{1 - H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})} \quad (8)$$

- OTÁZKA: Jak jsme tento vztah odvodili?



Obrázek: (a) Sériové zapojení (b) Paralelní zapojení (c) Zpětnovazební zapojení

Část V

Decibel, odstup signálu od šumu

Decibel [dB]:

- Logaritmická jednotka vyjadřující poměr dvou hodnot nějaké fyzikální veličiny (často energie)
- Mnohdy se také používá jako míra zesílení/zeslabení signálu po průchodu LTI systémem
- Je definován jako desetinásobek poměru energií, tedy

$$L_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{E_{x_1[n]}}{E_{x_2[n]}} \right) \quad (9)$$

- **Amplituda** je maximální výchylka harmonického signálu (mechanické kmitání, střídavý elektrický proud)
- Při měření amplitud (zejména harmonických signálů) se uvádí jako dvacetinásobek poměru amplitud A

$$L_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{x_1[n]}}{A_{x_2[n]}} \right) \quad (10)$$

- **PŘÍKLAD:** Použití míry decibel

Odstup signálu od šumu

Signal-to-Noise Ratio:

- Veličina určující poměr energie "užitečného" signálu a šumu
- Obvykle uváděna v decibelech jako

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{E_{\text{signal}}}{E_{\text{noise}}} \right) \quad (11)$$

- V aplikacích pro potlačení šumu se také uvádí zlepšení SNR (rozdíl mezi úrovní šumu před (orig - original) a po (enh - enhanced) použití algoritmu - **SNR improvement**)

$$\text{SNR}_{\text{imp}} = \text{SNR}_{\text{enh}} - \text{SNR}_{\text{orig}} \quad (12)$$

- Pro výpočet je třeba rozložit signál s šumem na *signálovou* a *šumovou komponentu*
- PŘÍKLAD: SNR v kontextu odstranění interference z audio signálu

Denoising:

- Odstranění / potlačení nechtěného signálu (šum, interference) v rámci audio záznamu
- Výsledek vyhodnocen pomocí *objektivních / subjektivních* kritérií (SNR / poslechové testy)
- **Ukázka** potlačení konkurenční řeči v reálných podmínkách (beamforming, 4 mikrofony):

Směs - dva řečníci (SNR = 0.7 dB),

Interference (SNR = -10.3 dB, zesílení šumu o 11dB)

Požadovaný řečník (SNR = 8.3dB, SNR_{imp} = 7.6 dB),

Požadovaný řečník (zkreslení, SNR = 18.2 dB, SNR_{imp} = 17.5 dB)

Děkuji za pozornost!



Počítačové zpracování signálů - Přednáška IX.

Jiří Málek



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenční
schopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických
předmětů.**

Část I

Organizační poznámky

Návrh:

- Písemné zkoušky budou probíhat v druhém, čtvrtém a pátém týdnu zkouškového období
- Preferovaný den je úterý v daném týdnu, tedy 7.6., 21.6. a 28.6.
- Ústní dozkoušení den po písemné zkoušce (preferovaný den - středa)

Část II

Z-transformace

Z-transformace I

- **Z-transformace** - transformace zobecňující DTFT pro signály, které nejsou absolutně sčitatelné
- Využití:
 - 1 Řešení diferenčních rovnic (LCCDE) s počátečními podmínkami
 - 2 Vyšetřování vlastností LTI systémů
 - 3 Návrh číslicových filtrů
- DTFT je definována jako:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \quad (1)$$

pro řady $x[n]$, které jsou absolutně sčitatelné, tedy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = S < \infty \quad (2)$$

- Pro mnoho častých řad tedy DTFT neexistuje, např:

$$x[n] = u[n] \quad (3)$$

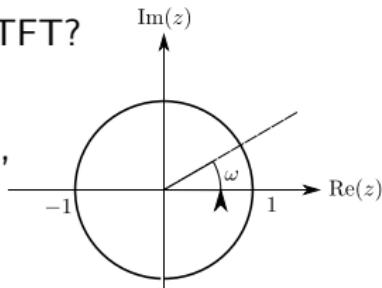
Z-transformace II

- Z-transformace diskrétní řady $x[n]$ je definována jako:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (4)$$

$$z = re^{j\omega}, z \in \mathcal{C}, r \in \mathcal{R}, r > 0$$

- Z-obraz je komplexní funkce komplexní proměnné.
Jeho vlastnosti se nejčastěji popisují v *z-rovině*
- Transformaci zapisujeme $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$
- $X(z)$ - Z-obraz řady $x[n]$
- OTÁZKA: Jaká je spojitost Z-transformace a DTFT?
- **Region konvergence**
(Region of Convergence - ROC) - hodnoty z ,
pro které je součet řady konečný



Z-transformace III

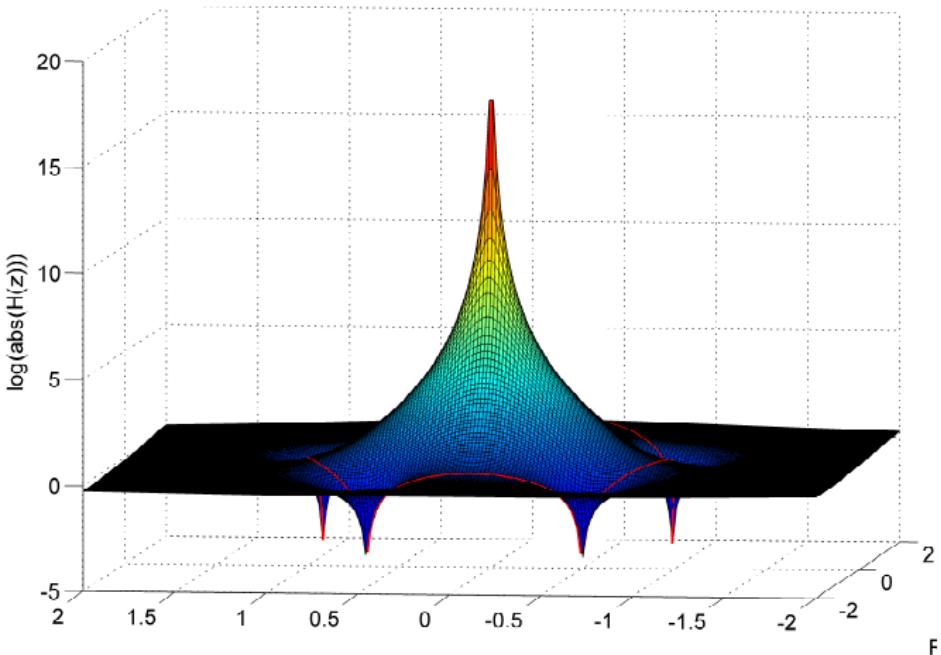
■ Jednotková kružnice:

- DTFT ze Z-obrazu získáme dosazením $z = e^{j\omega}$, tedy DTFT je tvořena body na *jednotkové kružnici* v Z rovině
- $z = 1$ odpovídá $\omega = 0$ a frekvence rostou proti směru hodinových ručiček (tedy $z = j$ odpovídá $\omega = \pi/2$)
- PŘÍKLAD: Výpočet Z-transformace a ROC
- POZOR - Z-obraz řady je jednoznačně určen pouze tehdy, pokud je znám také ROC
- **Region konvergence**

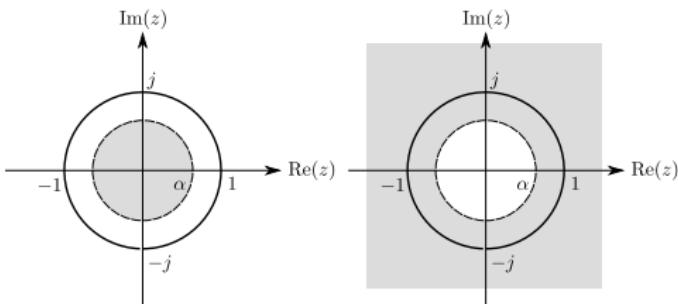
- Region konvergence je mezikruží ve formě $\alpha < |z| < \beta$
- Má-li transformovaná řada *konečnou délku*, pak ROC zahrnuje celou z-rovinu, kromě $z = 0$ a $z = \infty$
 - $z = \infty$ patří do ROC, je-li řada pravostranná
 - $z = 0$ patří do ROC, je-li řada levostranná
- *Pravostranná sekvence* má z-obraz s ROC ve tvaru: $|z| > \alpha$
- *Levostranná sekvence* má z-obraz s ROC ve tvaru: $|z| < \beta$

Z-transformace IV

- Z-obraz je komplexní funkce komplexní proměnné
- Zobrazuje se jako magnitudová a fázová část (obě 3D graf - reálná funkce komplexní proměnné)



Tabulka často používaných Z-obrazů



Řada	Z-transformace	ROC
$\delta[n]$	1	z-plane
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha$
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha$
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha$
$\cos[n\omega_0] u[n]$	$\frac{1-(\cos(\omega_0)z^{-1})}{1-2(\cos(\omega_0)z^{-1})+z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin[n\omega_0] u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos(\omega_0)z^{-1})+z^{-2}}$	$ z > 1$

Vlastnosti Z-transformace I

■ Linearita:

- Je-li $X_1(z)$ s ROC R_1 Z-obraz řady $x_1[n]$ a $X_2(z)$ s ROC R_2 z-obraz řady $x_2[n]$, pak platí:
 - $y[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{Z} Y(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$
 - R_z obsahuje průnik $R_1 \cap R_2$, ale může být i větší
 - PŘÍKLAD: ROC součtu řad

■ Posunutí:

- Posunutí řady v čase vede k vynásobení z-obrazu příslušnou mocninou z , tedy
 - $x[n - n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$
 - Posun neovlivňuje ROC
(výjimkou jsou případně body 0 nebo ∞)

■ Otočení v čase:

- Otočení řady $x[n]$ v čase vede k z-obrazu
- $x[-n] \xrightleftharpoons{Z} X(z^{-1})$
- Je-li ROC původní řady $R_x = (\alpha < |z| < \beta)$, pak ROC otočené řady $1/R_x$ je ve tvaru $(1/\beta < |z| < 1/\alpha)$

■ Násobení exponenciální funkcí:

- Násobení řady exponenciálou, vede ke škálování z-roviny
- $\gamma^n x[n] \xrightleftharpoons{Z} X(\gamma^{-1}z)$
- Násobení exponenciálou škáluje i region konvergence
- Je-li ROC původní řady $R_x = (\alpha < |z| < \beta)$, pak ROC řady násobené exp. R_y je ve tvaru $(|\gamma| \alpha < |z| < |\gamma| \beta)$

Vlastnosti Z-transformace III

■ Konvoluční teorém:

- Velmi důležitá vlastnost Z-transformace, konvoluce dvou signálů v časové oblasti se mapuje na součin obrazů těchto signálů ve frekvenční oblasti
- $y[n] = h[n] * x[n] \xrightleftharpoons{Z} Y(z) = H(z)X(z)$
- R_z obsahuje průnik $R_h \cap R_x$, ale může být i větší
- PŘÍKLAD: Konvoluce dvou řad pomocí Z-transformace

■ Teorém o počáteční hodnotě:

- Pokud je $x[n]$ pravostranná řada, pak lze najít $x[0]$ pomocí:
 - $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
- OTÁZKA: Z čeho tato vlastnost vychází?

Z-transformace V

■ Nuly a póly:

- Všechny systémy popsané LCCDE lze jednoznačně popsat pomocí Z-transformace jako racionální funkci:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}} \quad (5)$$

- Čitatel i jmenovatel je možné zapsat ve formě součinu kořenových činitelů

$$X(z) = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})} \quad (6)$$

- Kořeny čitatele - *nuly* (β_k), kořeny jmenovatele - *póly* (α_k)
- **Diagram nul a pólů** (Pole-zero plot) - diagram znázorňující polohu všech nul (o) a pólů (x) v Z rovině
- MATLAB: `zplane(B, A)`
- **Region konvergence** je také často součástí ZP diagramu
- Pro racionální $X(z)$ ROC neobsahuje žádné póly

- Nedílná součást většiny aplikací, kde je aplikována Z-transformace (řešení dif. rovnic, konvoluce..)
- Tři způsoby provedení:
 - 1 Rozklad na parciální zlomky
 - 2 Polynomiální dělení
 - 3 (Křivkový integrál (Cauchyho teorém))

Rozklad na parciální zlomky

- Používá se pro z-obrazy, jenž jsou dány ve formě racionální funkce

$$X(z) = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})} \quad (7)$$

- Je-li $p > q$ a póly jsou jednonásobné, pak lze $X(z)$ rozvinout do tvaru

$$X(z) = \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \quad (8)$$

- $A_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, které nalezneme

$$A_k = [(1 - \alpha_k z^{-1}) X(z)]_{z=\alpha_k} \quad (9)$$

- Není-li $p > q$, pak provedeme *dělení polynomů*
- PODROBNOSTI: Jak postupovat, jsou-li póly vícenásobné?
- PŘÍKLAD: Inverzní Z-transformace racionální $X(z)$
- MATLAB: `residue(B, A)`

Polynomiální dělení

- Z-transformace je definovaná mocninnou řadou

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \dots + x[-1]z^{-1} + x[0] + x[1]z^1 + \dots \quad (10)$$

- Je-li řada konečná, její vzorky jednoduše vybereme
- Není-li řada konečná, pak je obvykle dána racionální funkcí

$$X(z) = C \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})} \quad (11)$$

- Polynomiálním dělením čitatele jmenovatelem získáme vzorky řady $x[n]$
- Počítačově výhodný jednoduchý způsob
- PŘÍKLAD: Inverzní Z-transformace pomocí polynomiálního dělení

Řešení diferenčních rovnic s počátečními podmínkami

- Řešení diferenčních rovnic v časové oblasti vyžaduje zkušenosti
- DTFT neumožňuje řešit DR s počátečními podmínkami
- **Jednostranná z-transformace:** definovaná pro pravostranné sekvence

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots \quad (12)$$

- **Věta o posunu:** (jednostranná z-transformace)

$$x[n-1] \xleftrightarrow{Z} z^{-1}X_1(z) + x[-1] \quad (13)$$

- **PŘÍKLAD:** Řešení DR s počátečními podmínkami pomocí jednostranné z-transformace

Děkuji za pozornost!