KI/NUM Teorie a Otázky

Zdeněk Touška

December 2025

SHRNUTÍ TEORIE A POCHOPENÍ K ZÁPOČTU

Obsah

I OBECNÝ POSTUP 4

1 — Jaké je zadání úlohy ? 4

2 — První rozhodnutí po diagnostice 6

3 — Volba konkrétní metody 8

4 — Ověření podmínek a nastavení parametrů 10

5 — Vlastní výpočet a kontrola výsledku 11

II Prakticky řešené příklady dle postupu 13

6 Příklad číslo 1 13

7 Příklad číslo 2 14

8 Příklad číslo 3 14

III Lineární nerovnice 16

9 Metoda bisekce 16

10 Metoda regula falsi 19

11 Prostá iterace (Fixed point iteration) 21

12 Newtonova metoda (analytická derivace) 23

13 Newtonova metoda (numerická derivace) **25**

14 Metoda sečen **27**

15 Steffensenova metoda **29**

16 Halleyho metoda **31**

IV Polynomy a interpolace 33

17 Hornerovo schéma **33**

18 Newton–Hornerova metoda **35**

19 Interpolace polynomem **37**

20 Lagrangeova interpolace **37**

21 Čebyševovy polynomy **39**

V Soustavy lineárních rovnic 41

22 Gaussova eliminační metoda **41**

VI Aproximace 42

23 Metoda nejmenších čtverců (MNČ) **43**

24 Polynomiální aproximace **45**

25 Aproximace pomocí trigonometrické báze **47**

VII Iterační metody pro soustavy lineárních rovnic 49

26 Obecná myšlenka iterací **49**

27 Jacobiho metoda **49**

28 Gauss–Seidelova metoda **51**

VIII Numerická integrace 53

29 Základní pojmy **53**

30 Obdélníkové pravidlo **53**

31 Lichoběžníkové pravidlo **53**

32 Simpsonovo pravidlo **54**

33 Kontrolní otázky a odpovědi **55**

IX Obyčejné Diferrencionální rovnice 56

34 Eulerova metoda **56**

35 Heunova metoda **58**

36 Runge–Kuttova metoda **61**

37 Vícekrokové metody (Adamsovy metody) **63**

38 Prediktor–korektorové metody **65**

Část I
OBECNÝ POSTUP

1 — Jaké je zadání úlohy ?

Cíl kroku 0: URČIT typ úlohy

Postup

Projdi zadání a identifikuj **jednu hlavní věc**, která se má najít. Podle použitých symbolů a formulací zařaď úlohu do jedné z následujících kategorií.

Typy úloh podle znaků v zadání

- **Numerická integrace** Znaky: $\int \ldots \mathrm{d}x$, „spočtěte integrál“, plocha, Rombergova metoda, Simpsonovo nebo lichoběžníkové pravidlo, interval $\langle a, b\rangle$, počet dílků n.

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Nelineární rovnice** Znaky: $f(x) = 0$, „najděte kořen“, „průsečík“, „najděte parametr p tak, aby platilo $\ldots =$ konst.“. Úloha je ekvivalentní hledání kořene funkce $F(\cdot) = 0$.

$$f(x) = 0$$

- **Soustavy lineárních rovnic (SLR)** Znaky: $Ax = b$, pojem „soustava“, matice A a vektor b, rozměr $N = 10, 20$, úlohy typu „vnitřní uzly jsou aritmetickým průměrem sousedů“.

$$Ax = b$$

- **Interpolace** Znaky: body (x_i, y_i), „proložte polynomem“, „interpolační polynom“, vyhodnocení hodnoty $p(x_0)$.

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - f(x_i, \theta)\big)^2$$

- **Aproximace (metoda nejmenších čtverců)** Znaky: experimentální data, „aproximace“, „MNČ“, „regrese“, „fit“, hledání parametrů zvoleného modelu.

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - f(x_i, \theta)\big)^2$$

- **Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)** Znaky: $y' = f(x, y)$, počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$, krok h, interval řešení, soustava ODR .

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Výstup kroku 0

> „Úloha je typu *(integrace / nelineární rovnice / SLR / interpolace / aproximace / ODR)* a hledaným výstupem je *(číslo, parametr, vektor, matice, funkce)*.“

Pokud zadání obsahuje více typů znaků současně, za primární se považuje ten typ, který odpovídá **finálnímu hledanému výsledku**; ostatní části tvoří dílčí podúlohy.

2 — První rozhodnutí po diagnostice

Cíl kroku 1: Po určení typu úlohy v Kroku 0 rozhodnout o struktuře řešení. V tomto kroku se stále **neprovádí žádné výpočty**.

1. Jednokroková nebo řetězená úloha

Rozhodni, zda:

- **jednokroková úloha** — jedna metoda poskytne finální výsledek,
- **řetězená úloha** — výsledek jedné části slouží jako vstup další části.

Pokud se v zadání vyskytuje více typů problémů (např. integrace a nelineární rovnice), jedná se o řetězenou úlohu.

2. Hlavní cíl řešení

Urči hlavní hledaný výstup:

- číslo nebo parametr,
- vektor,
- matice,
- funkce nebo polynom,
- průběh řešení v čase.

Hlavní cíl určuje, která část řešení je finální.

3. Zadané vstupní podmínky

Zkontroluj, zda zadání explicitně obsahuje:

- interval $\langle a, b\rangle$,
- počáteční odhad,
- krok h nebo počet kroků,
- toleranci,
- tabulková data.

Přítomnost těchto údajů často přímo naznačuje volbu metody.

4. Omezující podmínky

Identifikuj případná omezení, například:

- sudý počet dílků,
- změnu znaménka,
- počáteční nebo okrajovou podmínku,
- integrální podmínku.

Tyto podmínky mohou některé metody vyloučit.

Výstup kroku 1

> Úloha je (jednokroková / řetězená), hlavním cílem je *(. . .)* a řešení bude rozděleno na *(. . .)* část(i).

3 — Volba konkrétní metody

Cíl kroku 2: Pro každou část úlohy (určenou v Kroku 1) zvolit *konkrétní numerickou metodu* z povoleného seznamu. V tomto kroku se **stále neprovádějí výpočty**.

1. Nelineární rovnice

Volba metody podle zadaných informací:

- dán interval $\langle a, b\rangle$ se změnou znaménka → **bisekce nebo regula falsi,**
- dán počáteční bod a analytická derivace → **Newtonova metoda (analytická),**
- **derivace není k dispozic**i → **Newtonova metoda (numerická) nebo metoda sečen,**
- rovnice ve tvaru $x = g(x)$ → **prostá iterace nebo Steffensenova metoda,**
- požadavek velmi rychlé konvergence a dostupné vyšší derivace → **Halleyho metoda.**

2. Soustavy lineárních rovnic (SLR)

- jednorázové řešení soustavy → **Gaussova eliminační metoda**,
- iterativní řešení → **Jacobiho metoda nebo Gauss–Seidelova metoda.**

3. Interpolace a polynomy

- sestavení interpolačního polynomu → **Lagrangeova interpolace,**
- vyhodnocení polynomu nebo jeho derivace → **Hornerovo schéma,**
- hledání kořene polynomu → **Newton–Hornerova metoda.**

4. Aproximace

- obecná aproximační úloha z dat → **metoda nejmenších čtverců,**
- aproximace polynomem → **polynomiální aproximace (MNČ),**
- periodická data → **aproximace trigonometrickou bází.**

5. Numerická integrace

- hrubý odhad integrálu → **obdélníkové pravidlo,**
- běžná přesnost → **lichoběžníkové pravidlo,**
- vyšší přesnost, hladká funkce, sudý počet dílků → **Simpsonovo pravidlo.**

6. Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

- základní orientační řešení → **Eulerova metoda,**
- zpřesnění Eulerovy metody → **Heunova metoda,**
- vyšší přesnost → **Runge–Kuttova metoda,**
- dlouhé intervaly nebo vyšší efektivita → **Adamsovy metody nebo prediktor–korektor**.

Výstup kroku 2

V části A je použita metoda *(...)*, v části B metoda *(...)*.

4 — Ověření podmínek a nastavení parametrů

Cíl kroku 3: Ověřit, že zvolenou metodu z Kroku 2 lze použít, a nastavit její parametry. V tomto kroku se stále **neprovádějí vlastní výpočty iterací**.

1. Nelineární rovnice

- bisekce / regula falsi: ověřit změnu znaménka $f(a) \cdot f(b) < 0$,
- Newtonova metoda: existence derivace a $f'(x_0) \neq 0$,
- prostá iterace: splnění podmínky kontrakce,
- nastavit počáteční bod, interval a toleranci.

2. Numerická integrace

- ověřit rovnoměrný krok,
- Simpsonovo pravidlo: sudý počet dílků,
- nastavit interval $\langle a, b \rangle$ a počet dílků n.

3. Soustavy lineárních rovnic (SLR)

- ověřit regulárnost matice,
- u iterativních metod posoudit vhodnost matice (např. diagonální dominance),
- zvolit počáteční aproximaci (u iterací).

4. Interpolace

- ověřit, že všechny uzly x_i jsou různé,
- stupeň interpolačního polynomu je roven počtu bodů minus jedna.

5. Aproximace (MNČ)

- počet dat je větší než počet parametrů modelu,
- zvolený model odpovídá charakteru dat.

6. Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

- dána počáteční podmínka,
- nastaven krok h nebo počet kroků,
- určen interval řešení.

Výstup kroku 3

Podmínky zvolené metody jsou splněny a výpočetní parametry jsou nastaveny.

5 — Vlastní výpočet a kontrola výsledku

Cíl kroku 4: Provést vlastní numerický výpočet zvolenou metodou a ověřit správnost získaného výsledku. V tomto kroku se již **provádí výpočet**.

1. Provedení výpočtu

Podle zvolené metody:

- provést iterace (nelineární rovnice, iterativní metody SLR, ODR),
- vypočítat numerický integrál,
- vyřešit soustavu lineárních rovnic,
- sestavit interpolační nebo aproximační funkci,
- vytvořit tabulku nebo graf hodnot řešení.

Výpočet se provádí do splnění zvoleného ukončovacího kritéria nebo do dosažení požadované přesnosti.

2. Ukončovací kritérium

Vždy musí být uvedeno, proč byl výpočet ukončen, například:

- dosažení tolerance,
- splnění podmínky na reziduum,
- dosažení předepsaného počtu kroků,
- dosažení konce integračního intervalu.

3. Kontrola výsledku

Výsledek je nutné ověřit alespoň jedním z následujících způsobů:

- dosazením výsledku zpět do původního zadání,
- výpočtem rezidua,
- porovnáním s analytickým řešením (pokud existuje),
- porovnáním výsledků pro různé kroky nebo parametry,
- kontrolou smysluplnosti výsledku (znaménko, velikost, trend).

Výstup kroku 4

Výpočet byl proveden do splnění ukončovacího kritéria a výsledek byl ověřen vhodnou kontrolou.

Část II

Prakticky řešené příklady dle postupu

6 Příklad číslo 1

Určete p, pro které platí:

$$\int_0^p \left(\int_0^{2\pi} e^{-\alpha x} \sin x \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\alpha = 1.31848$$

1. Typ: **Nelineární rovnice obsahující numerickou integraci**, s hledaným výstupem p.
2. Jedná se o **řetězovou úlohu**, kde je vnější nelineární rovnice závislá na hodnotě numericky aproximovaného integrálu.
3. Nejprve řešíme **vnitřní integrál** v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Jedná se o **numerickou integraci**, pro kterou volíme **Simpsonovo pravidlo**. Tento integrál je součástí nelineární rovnice, proto je vhodné jej zapouzdřit do samostatné funkce.
4. Definujeme **vnitřní funkci (INNER)** jako numerický integrál

   $$G(\alpha) = \int_0^{2\pi} e^{-\alpha x} \sin x \, \mathrm{d}x,$$

   který aproximujeme Simpsonovým pravidlem.

   ```
   # INNER: vnitřní integrál
   G(alpha)  Simpson(e^{-alpha x} sin x, 0, 2)
   ```

5. Následně sestavíme **vnější funkci (OUTER)** a odpovídající nelineární rovnici

   $$F(p) = \int_0^p G(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha - 1.31848, \qquad F(p) = 0.$$

   Vnější integrál je opět řešen **Simpsonovým pravidlem**. Proměnná p vystupuje jako horní mez integrace, a proto je hledána jako **kořen nelineární rovnice**.

   ```
   # OUTER: nelineární rovnice pro p
   F(p) = Simpson(G(alpha), 0, p) - 1.31848
   ```

6. Pro nalezení kořene rovnice $F(p) = 0$ volíme **metodu bisekce**, jelikož:
   - funkce $F(p)$ je spojitá,
   - lze snadno nalézt interval se změnou znaménka,
   - metoda je stabilní a vhodná pro kombinaci s numerickou integrací.
7. Po numerickém řešení získáme aproximaci hledané hodnoty

$$p \approx 10.$$

7 Příklad číslo 2

Nalezněte takové řešení rovnice

$$y'(x) - y(x) + x = 0,$$

pro které platí

$$\int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x = 2.$$

řetězená ... ODR + integrace
cíl je parametr (řešení rovnice)
Integrál == simpson
rovnice == Euler
jak je spojit tot otazka ?
Vypočítam Eulerem diff rovnici zjistim x a dosadim do integralu

8 Příklad číslo 3

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

kde

$$A_{ij} = 1 - \frac{1}{i + j - 1}, \quad \text{pro } i = 1, \ldots, N \text{ a } j = 1, \ldots, N,$$

a

$$\vec{b} = \vec{1}$$

je vektor o N složkách, z nichž každá je rovna 1.

Znázorněte graficky složky výsledného vektoru $\vec{x}$, kde na vodorovné ose bude index $i = 1, \ldots, N$ a na svislé ose odpovídající hodnota x_i. Body interpolujte polynomem $p(i)$ tak, aby platilo

$$p(i) = x_i \quad \text{pro } i = 1, \ldots, N.$$

Uvažujte pak $p(i)$ jako funkci reálné proměnné $i \in R$. Určete střední hodnotu funkčních hodnot $p(i)$ v bodech ležících uprostřed mezi původními body, tj. z hodnot $p(1{,}5), p(2{,}5), \ldots$.

Úlohu řešte pro $N = 10$ a $N = 20$.

1. SLR (soustava lin rovnic)
2. řetězová .. -> SLR .. poté grafické znazorněnní ... potém interpolace polynomem .. stredni hodnotu how ?? bisekce ? mezi 1.5 a 2.5
3. Matice a potom polynom ?

Část III
Lineární nerovnice

9 Metoda bisekce

9.1 Cíl metody

Metoda bisekce slouží k hledání kořene rovnice

$$f(x) = 0.$$

9.2 Vstupní podmínky

Metodu lze použít, pokud:

- funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$,
- platí podmínka změny znaménka

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Za těchto podmínek je zaručena existence alespoň jednoho kořene v intervalu.

9.3 Princip metody

Metoda pracuje na principu opakovaného půlení intervalu. V každém kroku je vybrána ta polovina intervalu, ve které dochází ke změně znaménka funkce. Kořen zůstává po celou dobu uvnitř aktuálního intervalu.

9.4 Iterační krok

Střed intervalu je dán vztahem

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

Podle znaménka $f(c)$ je zvolen nový interval:

- pokud $f(a) \cdot f(c) < 0$, nový interval je $[a, c]$,
- jinak je nový interval $[c, b]$.

9.5 Ukončovací kritéria

Výpočet se ukončí, pokud platí alespoň jedna z podmínek:

- $|f(c)| < \text{tol}$,
- $\frac{b-a}{2} < \text{tol}$.

tolerance je parametr, který se zadává před spuštěním funkce

9.6 Konvergence

Metoda bisekce:

- vždy konverguje,
- interval se monotónně zmenšuje,
- posloupnost středů c_k konverguje ke kořeni x^*.

dodat info o monotonnosti do vysvětlivek

9.7 Vlastnosti metody

- zaručená konvergence,
- jednoduchá implementace,
- pomalá konvergence,
- nutnost zadání intervalu,
- nerozlišuje více kořenů v intervalu.

9.8 Typické selhání

Metodu nelze použít, pokud není splněna podmínka změny znaménka

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

9.9 Kontrolní otázky

1. Kdy lze metodu bisekce použít?
   Odpověď: Pokud je funkce spojitá a na intervalu dochází ke změně znaménka.
2. Proč metoda bisekce nemůže divergovat?
   Odpověď: Interval se v každé iteraci zmenšuje a kořen v něm zůstává.
3. K čemu metoda bisekce konverguje?
   Odpověď: Ke kořeni rovnice.
4. Jaký vliv má větší tolerance?
   Odpověď: Menší počet iterací, ale nižší přesnost.
5. Umí bisekce rozlišit více kořenů v intervalu?
   Odpověď: Ne, najde jeden kořen daný změnou znaménka.

9.10 Vysvětlivky:

1. **Konvergence** znamená, že posloupnost aproximací x_k se s rostoucím počtem iterací blíží k určité hodnotě x^* (např. ke kořeni rovnice), tj.

$$x_k \to x^*.$$

2. **Divergence** znamená, že posloupnost aproximací se k žádné konečné hodnotě neblíží. Hodnoty mohou růst do nekonečna nebo kmitat bez ustálení.

10 Metoda regula falsi

10.1 Cíl metody

Metoda regula falsi slouží k hledání kořene rovnice

$$f(x) = 0$$

na zadaném intervalu.

10.2 Vstupní podmínky

Metodu lze použít, pokud:

- funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$,
- platí podmínka změny znaménka
$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Za těchto podmínek je v intervalu zaručen alespoň jeden kořen.

10.3 Princip metody

Na rozdíl od bisekce se interval nepůlí. Nový odhad kořene se získá jako průsečík sečny, která prochází body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, s osou x.

10.4 Iterační krok

Nový bod c je dán vztahem

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Tento bod představuje průsečík sečny s osou x.

10.5 Aktualizace intervalu

Po výpočtu hodnoty $f(c)$ se zvolí nový interval:

- pokud $f(a) \cdot f(c) < 0$, nový interval je $[a, c]$,
- jinak je nový interval $[c, b]$.

Tím je zachována změna znaménka a kořen zůstává uvnitř intervalu.

10.6 Ukončovací kritéria

Výpočet se ukončí, pokud:

- $|f(c)| < \text{tol}$,
- nebo je dosažen maximální počet iterací.

10.7 Konvergence

Metoda regula falsi:

- obvykle konverguje rychleji než bisekce,
- zachovává interval se změnou znaménka,
- může stagnovat, pokud se jeden kraj intervalu dlouho nemění.

10.8 Vlastnosti metody

- jednodušší než Newtonova metoda,
- nevyžaduje derivaci,
- často rychlejší než bisekce,
- může mít pomalou konvergenci při stagnaci,
- nerozlišuje více kořenů v intervalu.

10.9 Typický problém

Metoda může stagnovat, pokud se jeden z krajů intervalu opakovaně nemění, zatímco nový bod c se posouvá jen velmi málo.

10.10 Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi bisekcí a regula falsi?
   Odpověď: Bisekce půlí interval, regula falsi používá průsečík sečny.

2. Proč musí platit $f(a) \cdot f(b) < 0$?
   Odpověď: Aby byla zaručena existence kořene v intervalu.

3. Co geometricky představuje bod c?
   Odpověď: Průsečík sečny s osou x.

4. Proč se testuje $f(a) \cdot f(c) < 0$?
   Odpověď: Aby kořen zůstal v novém intervalu.

5. Je regula falsi vždy rychlejší než bisekce?
   Odpověď: Ne, může stagnovat.

11 Prostá iterace (Fixed point iteration)

11.1 Cíl metody

Metoda prosté iterace slouží k nalezení řešení rovnice

$$f(x) = 0$$

přepsáním do tvaru

$$x = g(x).$$

Řešení rovnice odpovídá **pevnému bodu** funkce g.

11.2 Pevný bod

Číslo x^* nazýváme pevným bodem funkce g, pokud platí:

$$x^* = g(x^*).$$

11.3 Iterační předpis

Metoda je definována iterací:

$$x_{k+1} = g(x_k),$$

kde x_0 je počáteční odhad řešení.

11.4 Princip metody

Z počáteční hodnoty x_0 se opakovaným dosazováním do funkce g vytváří posloupnost $\{x_k\}$, která může konvergovat k pevnému bodu x^*.

11.5 Podmínka konvergence

Aby metoda konvergovala, musí být funkce g v okolí řešení **kontraktivní**, tj.

$$|g'(x)| < 1.$$

Tato podmínka zajišťuje, že se chyby v jednotlivých iteracích zmenšují.

11.6 Divergence

Pokud platí:

- $|g'(x)| > 1$, iterace diverguje,
- $|g'(x)| = 1$, může docházet k oscilacím.

Metoda může divergovat i tehdy, když má rovnice řešení.

11.7 Ukončovací kritéria

Iterace se obvykle ukončí, pokud:

- $|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$,
- nebo je dosažen maximální počet iterací.

11.8 Vlastnosti metody

- nevyžaduje interval,
- nevyžaduje derivaci **V ALGORITMU**,
- jednoduchá implementace,
- silně závisí na volbě funkce $g(x)$,
- nemá zaručenou konvergenci.

11.9 Vztah k ostatním metodám

Newtonova metoda je speciálním případem prosté iterace s vhodně zvolenou funkcí $g(x)$.

11.10 Kontrolní otázky

1. Co je pevný bod funkce?
   Odpověď: Bod x^*, pro který platí $x^* = g(x^*)$.
2. Jaká je podmínka konvergence prosté iterace?
   Odpověď: Funkce g musí být kontraktivní, tedy $|g'(x)| < 1$.
3. Může metoda divergovat i při existenci řešení?
   Odpověď: Ano, pokud zvolená funkce $g(x)$ není kontraktivní.

12 Newtonova metoda (analytická derivace)

12.1 Cíl metody

Newtonova metoda slouží k hledání kořene rovnice

$$f(x) = 0.$$

12.2 Základní myšlenka

Metoda je založena na lineární aproximaci funkce pomocí tečny. V bodě x_k se sestrojí tečna ke grafu funkce f a její průsečík s osou x určuje nový odhad kořene.

12.3 Iterační vzorec

Iterace Newtonovy metody je dána vztahem

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

12.4 Vztah k prosté iteraci

Newtonova metoda je speciálním případem prosté iterace s volbou

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

12.5 Podmínky konvergence

Metoda obvykle konverguje, pokud:

- počáteční odhad x_0 je dostatečně blízko kořene,
- platí $f'(x^*) \neq 0$ v okolí řešení,
- funkce je dostatečně hladká.

Za těchto podmínek má metoda kvadratickou konvergenci.

12.6 Selhání metody

Newtonova metoda může selhat v následujících případech:

- špatně zvolený počáteční bod,
- nulová nebo velmi malá hodnota derivace $f'(x_k)$,
- přeskok k jinému kořeni.

Metoda nemá zaručenou konvergenci.

12.7 Ukončovací kritéria

Iterace se ukončí, pokud je splněna alespoň jedna z podmínek:

- $|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$,
- $|f(x_k)| < \text{tol}$,
- je dosažen maximální počet iterací.

12.8 Vlastnosti metody

- velmi rychlá konvergence,
- vyžaduje analytickou derivaci funkce,
- citlivá na volbu počátečního bodu,
- nemá zaručenou konvergenci.

12.9 Kontrolní otázky

1. Proč Newtonova metoda vyžaduje derivaci?
   Odpověď: Derivace určuje směr tečny, pomocí které se hledá nový odhad kořene.

2. Proč může metoda divergovat při špatném počátečním odhadu?
   Odpověď: Tečna může mířit mimo oblast řešení.

3. Co se stane, když $f'(x_k) = 0$?
   Odpověď: Iterační krok nelze spočítat, metoda selže.

13 Newtonova metoda (numerická derivace)

13.1 Cíl metody

Newtonova metoda s numerickou derivací slouží k hledání kořene rovnice

$$f(x) = 0,$$

v případech, kdy není k dispozici analytický tvar derivace funkce.

13.2 Základní myšlenka

Metoda vychází z klasické Newtonovy metody, avšak derivace $f'(x)$ je nahrazena numerickou aproximací pomocí rozdílového podílu. Zachovává se tak princip metody tečen bez nutnosti analytického derivování.

13.3 Numerická aproximace derivace

Derivace funkce je nejčastěji aproximována dopředným rozdílovým podílem:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h},$$

kde $h > 0$ je malé číslo.

Alternativně lze použít centrální rozdíl:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h}.$$

13.4 Iterační vzorec

Iterace Newtonovy metody s numerickou derivací má tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}}.$$

13.5 Podmínky konvergence

Metoda obvykle konverguje, pokud:

- počáteční odhad x_0 je dostatečně blízko kořene,
- funkce f je dostatečně hladká,
- krok h je vhodně zvolen.

Konvergence je zpravidla pomalejší než u Newtonovy metody s analytickou derivací.

13.6 Selhání metody

Metoda může selhat v následujících případech:

- špatně zvolený počáteční bod,
- nevhodná volba kroku h,
- velmi malá nebo nestabilní hodnota numerické derivace.

Stejně jako klasická Newtonova metoda nemá zaručenou konvergenci.

13.7 Ukončovací kritéria

Iterace se obvykle ukončí, pokud:

- $|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$,
- $|f(x_k)| < \text{tol}$,
- je dosažen maximální počet iterací.

13.8 Vlastnosti metody

- nevyžaduje analytickou derivaci,
- zachovává princip Newtonovy metody,
- je pomalejší a méně stabilní než analytický Newton,
- citlivá na volbu kroku h.

13.9 Kontrolní otázky

1. Proč se v této metodě nahrazuje derivace numericky?
   Odpověď: Analytická derivace není k dispozici nebo je obtížná.

2. Jaký vliv má volba kroku h?
   Odpověď: Ovlivňuje přesnost a stabilitu metody.

3. Má metoda zaručenou konvergenci?
   Odpověď: Ne, stejně jako klasická Newtonova metoda.

14 Metoda sečen

14.1 Cíl metody

Metoda sečen slouží k hledání kořene rovnice

$$f(x) = 0$$

bez nutnosti použití derivace.

14.2 Základní myšlenka

Metoda je založena na konstrukci sečny, tedy přímky procházející dvěma body grafu funkce. Sklon sečny nahrazuje derivaci v Newtonově metodě.

14.3 Počáteční hodnoty

Metoda vyžaduje dva počáteční odhady řešení:

$$x_0,\ x_1.$$

14.4 Iterační vzorec

Iterační krok metody sečen je dán vztahem

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

14.5 Princip metody

V každém kroku se sestrojí sečna procházející body $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a $(x_k, f(x_k))$. Průsečík této sečny s osou x určuje nový odhad kořene x_{k+1}.

14.6 Konvergence

Metoda sečen:

- má superlineární konvergenci (řád přibližně 1,6),
- je rychlejší než bisekce,
- je pomalejší než Newtonova metoda.

Konvergence však není zaručena.

14.7 Selhání metody

Metoda může selhat v případech:

- nevhodně zvolené počáteční body,
- téměř shodné funkční hodnoty v po sobě jdoucích bodech,
- oscilace nebo divergence iterací.

14.8 Ukončovací kritéria

Iterace se obvykle ukončí, pokud:

- $|x_{k+1} - x_k| < \mathrm{tol}$,
- $|f(x_k)| < \mathrm{tol}$,
- je dosažen maximální počet iterací.

14.9 Vlastnosti metody

- nevyžaduje derivaci,
- potřebuje dva počáteční body,
- je rychlejší než intervalové metody,
- nemá zaručenou konvergenci.

14.10 Kontrolní otázky

1. Proč metoda sečen nepotřebuje derivaci?
   Odpověď: Derivace je nahrazena sklonem sečny mezi dvěma body.
2. Kolik počátečních bodů metoda vyžaduje?
   Odpověď: Dva počáteční body.
3. Má metoda sečen zaručenou konvergenci?
   Odpověď: Ne.

15 Steffensenova metoda

15.1 Cíl metody

Steffensenova metoda slouží k hledání kořene rovnice

$$f(x) = 0$$

bez použití analytické derivace.

15.2 Základní myšlenka

Metoda je založena na zrychlení prosté iterace (fixed point iteration). Využívá opakované vyhodnocení funkce $g(x)$ k aproximaci informace o sklonu funkce, čímž dosahuje rychlé konvergence bez derivace.

15.3 Iterační předpis

Nechť je rovnice přepsána do tvaru

$$x = g(x).$$

Steffensenova iterace má tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\big(g(x_k) - x_k\big)^2}{g\big(g(x_k)\big) - 2g(x_k) + x_k}.$$

15.4 Princip metody

V každém kroku jsou vypočteny dvě hodnoty prosté iterace:

$$x_1 = g(x_k), \qquad x_2 = g(x_1).$$

Z těchto hodnot je odvozen korekční člen, který urychluje konvergenci k pevnému bodu.

15.5 Konvergence

Steffensenova metoda:

- má kvadratickou konvergenci,
- je rychlejší než prostá iterace,
- dosahuje rychlosti blízké Newtonově metodě.

Konvergence však není zaručena a závisí na volbě funkce $g(x)$ a počátečním odhadu.

15.6 Selhání metody

Metoda může selhat v případech:

- nevhodná volba funkce $g(x)$,
- špatně zvolený počáteční bod,
- nulový nebo velmi malý jmenovatel v iteračním vzorci.

15.7 Ukončovací kritéria

Iterace se obvykle ukončí, pokud:

- $|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$,
- je dosažen maximální počet iterací.

15.8 Vlastnosti metody

- nevyžaduje analytickou derivaci,
- vyžaduje pouze jeden počáteční bod,
- zrychluje prostou iteraci,
- nemá zaručenou konvergenci.

15.9 Kontrolní otázky

1. Na jaké metodě je Steffensenova metoda založena?
   Odpověď: Na prosté iteraci (fixed point).
2. Vyžaduje Steffensenova metoda derivaci?
   Odpověď: Ne.
3. Jaká je rychlost konvergence Steffensenovy metody?
   Odpověď: Kvadratická.

16 Halleyho metoda

16.1 Cíl metody

Halleyho metoda slouží k hledání kořene rovnice

$$f(x) = 0$$

s velmi rychlou konvergencí.

16.2 Základní myšlenka

Metoda rozšiřuje Newtonovu metodu tím, že využívá nejen první, ale i druhou derivaci funkce. Místo lineární aproximace (tečna) používá kvadratickou aproximaci funkce v okolí aktuálního bodu.

16.3 Iterační vzorec

Iterační krok Halleyho metody je dán vztahem

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2\, f(x_k)\, f'(x_k)}{2\, [f'(x_k)]^2 - f(x_k)\, f''(x_k)}.$$

16.4 Podmínky konvergence

Metoda obvykle konverguje, pokud:

- počáteční odhad x_0 je dostatečně blízko kořene,
- platí $f'(x^*) \neq 0$,
- funkce je dostatečně hladká.

Za splnění těchto podmínek má metoda kubickou konvergenci.

16.5 Konvergence

Halleyho metoda:

- má kubickou konvergenci (řád 3),
- konverguje rychleji než Newtonova metoda,
- vyžaduje méně iterací než metody nižšího řádu.

Konvergence však není zaručena.

16.6 Selhání metody

Metoda může selhat v případech:

- špatně zvolený počáteční bod,
- nulová nebo velmi malá hodnota $f'(x_k)$,
- nestabilita způsobená druhou derivací $f''(x_k)$.

16.7 Ukončovací kritéria

Iterace se obvykle ukončí, pokud:

- $|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$,
- $|f(x_k)| < \text{tol}$,
- je dosažen maximální počet iterací.

16.8 Vlastnosti metody

- velmi rychlá konvergence,
- vyžaduje první i druhou derivaci funkce,
- citlivá na počáteční odhad,
- nemá zaručenou konvergenci.

16.9 Kontrolní otázky

1. Jaký je hlavní rozdíl mezi Newtonovou a Halleyho metodou?
   Odpověď: Halleyho metoda využívá i druhou derivaci funkce.
2. Jaký je řád konvergence Halleyho metody?
   Odpověď: Kubický (řád 3).
3. Má Halleyho metoda zaručenou konvergenci?
   Odpověď: Ne.

Část IV

Polynomy a interpolace

17 Hornerovo schéma

17.1 Cíl metody

Hornerovo schéma slouží k efektivnímu a numericky stabilnímu vyhodnocení polynomu a jeho derivací v daném bodě. Samotné Hornerovo schéma není metodou hledání kořenů.

17.2 Základní myšlenka

Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

je přepsán do vnořeného tvaru, který umožňuje výpočet pouze pomocí násobení a sčítání.

17.3 Výpočet

Výpočet probíhá postupnou akumulací hodnoty polynomu. Rozšířené Hornerovo schéma umožňuje současně získat hodnotu derivace.

17.4 Podmínky použití

- polynom je zadán svými koeficienty,
- metoda je použitelná pro libovolný stupeň polynomu.

17.5 Konvergence

Hornerovo schéma není iterační metodou, pojem konvergence se na něj nevztahuje.

17.6 Selhání metody

Metoda sama o sobě neselhává, může však trpět numerickými chybami při velmi velkých hodnotách x.

17.7 Ukončovací kritéria

Výpočet končí po jednom průchodu koeficienty polynomu.

17.8 Vlastnosti metody

- velmi rychlá a stabilní metoda,
- umožňuje výpočet hodnoty polynomu i derivací,
- používá se jako stavební kámen jiných metod.

17.9 Kontrolní otázky

1. **Otázka:** K čemu slouží Hornerovo schéma?
   Odpověď: K rychlému a numericky stabilnímu vyhodnocení polynomu a jeho derivací.
2. **Otázka:** Je Hornerovo schéma metodou hledání kořenů?
   Odpověď: Ne, samo o sobě kořeny nehledá.
3. **Otázka:** Jaké operace Hornerovo schéma používá?
   Odpověď: Pouze násobení a sčítání.

18 Newton–Hornerova metoda

18.1 Cíl metody

Newton–Hornerova metoda slouží k hledání kořene polynomu

$$p(x) = 0.$$

18.2 Základní myšlenka

Metoda kombinuje Newtonovu metodu s Hornerovým schématem. Hornerovo schéma se používá k rychlému výpočtu $p(x)$ a $p'(x)$.

18.3 Iterační vzorec

Iterace je dána vztahem

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}.$$

18.4 Podmínky konvergence

Metoda obvykle konverguje, pokud:

- počáteční odhad x_0 je blízko kořene,
- platí $p'(x^*) \neq 0$,
- polynom je dostatečně hladký.

18.5 Konvergence

Newton–Hornerova metoda má kvadratickou konvergenci, konvergence však není zaručena.

18.6 Selhání metody

Metoda může selhat v případech:

- špatně zvolený počáteční odhad,
- nulová nebo velmi malá hodnota derivace.

18.7 Ukončovací kritéria

Iterace se ukončí, pokud:

- $|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$,
- $|p(x_k)| < \text{tol}$,
- je dosažen maximální počet iterací.

18.8 Vlastnosti metody

- rychlá metoda pro polynomy,
- využívá Hornerovo schéma,
- nemá zaručenou konvergenci.

18.9 Kontrolní otázky

1. **Otázka:** Proč se v Newton–Hornerově metodě používá Hornerovo schéma?
   Odpověď: Pro rychlý výpočet hodnoty polynomu a jeho derivace.
2. **Otázka:** Jaký je řád konvergence Newton–Hornerovy metody?
   Odpověď: Kvadratický (řád 2).
3. **Otázka:** Má Newton–Hornerova metoda zaručenou konvergenci?
   Odpověď: Ne.

19 Interpolace polynomem

20 Lagrangeova interpolace

20.1 Cíl metody

Lagrangeova interpolace slouží k nalezení polynomu, který přesně prochází zadanými interpolačními body.

20.2 Základní myšlenka

Z daných bodů (x_i, y_i) se sestaví interpolující polynom jako lineární kombinace základních polynomů.

20.3 Interpolující polynom

Interpolující polynom má tvar

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x),$$

kde $L_i(x)$ jsou Lagrangeovy základní polynomy.

20.4 Podmínky použití

- interpolační uzly x_i musí být navzájem různé,
- počet bodů určuje stupeň polynomu.

20.5 Konvergence

Interpolující polynom existuje a je jednoznačný, konvergence však není garantována pro větší počet uzlů.

20.6 Selhání metody

Metoda trpí Rungeho jevem při použití rovnoměrně rozložených uzlů.

20.7 Ukončovací kritéria

Metoda není iterační, výpočet končí sestavením polynomu.

20.8 Vlastnosti metody

- jednoduchý teoretický zápis,
- přesná interpolace,
- numerická nestabilita pro vyšší stupně.

20.9 Kontrolní otázky

1. **Otázka:** Co řeší Lagrangeova interpolace?
   Odpověď: Hledá polynom, který přesně prochází zadanými body.

2. **Otázka:** Je interpolující polynom jednoznačný?
   Odpověď: Ano.

3. **Otázka:** Co je Rungeho jev?
   Odpověď: Oscilace interpolujícího polynomu na krajích intervalu při větším počtu rovnoměrných uzlů.

21 Čebyševovy polynomy

21.1 Cíl metody

Čebyševovy polynomy slouží k volbě optimálních interpolačních uzlů, které minimalizují maximální chybu interpolace.

21.2 Základní myšlenka

Metoda reaguje na problémy Lagrangeovy interpolace, zejména na Rungeho jev.

21.3 Čebyševovy uzly

Optimální interpolační uzly jsou dány vztahem

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right).$$

21.4 Podmínky použití

- interpolace na konečném intervalu,
- použití vyšších stupňů polynomů.

21.5 Konvergence

Použití Čebyševových uzlů zlepšuje chování interpolujícího polynomu, ale samo o sobě nezaručuje konvergenci.

21.6 Selhání metody

Nevhodné použití mimo interpolační úlohy.

21.7 Ukončovací kritéria

Metoda není iterační.

21.8 Vlastnosti metody

- potlačuje Rungeho jev,
- minimalizuje maximální chybu,
- neurčuje hodnoty interpolujícího polynomu.

21.9 Kontrolní otázky

1. **Otázka:** Jaký problém Čebyševovy polynomy řeší?
   Odpověď: Minimalizují maximální chybu interpolace a potlačují Rungeho jev.

2. **Otázka:** Jsou Čebyševovy polynomy metodou interpolace?
   Odpověď: Ne.

3. **Otázka:** Proč jsou Čebyševovy uzly výhodné?
   Odpověď: Zlepšují numerickou stabilitu a chování interpolujícího polynomu.

Část V

Soustavy lineárních rovnic

22 Gaussova eliminační metoda

22.1 Cíl metody

Gaussova eliminační metoda slouží k řešení soustavy lineárních rovnic

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

převodem soustavy na ekvivalentní soustavu s horní trojúhelníkovou maticí.

22.2 Základní myšlenka

Metoda je založena na postupném vynulování prvků pod hlavní diagonálou matice koeficientů pomocí elementárních řádkových úprav. Po eliminaci lze řešení získat zpětným dosazením.

22.3 Eliminační krok

V k-tém kroku se pracuje s diagonálním prvkem

$$a_{kk},$$

který se nazývá **pivot**. Pomocí pivotu se vynulují prvky a_{ik} pro $i > k$.

22.4 Pivot

Pivot je aktuální diagonální prvek matice, kterým se v daném kroku dělí při eliminaci. Pokud je pivot nulový nebo velmi malý, metoda bez úprav selhává nebo je numericky nestabilní.

22.5 Zpětné dosazení

Po dokončení eliminace má matice horní trojúhelníkový tvar. Neznámé se poté určují postupně od poslední rovnice směrem nahoru.

22.6 Podmínky použitelnosti

Metoda je použitelná, pokud:

- soustava má jednoznačné řešení,
- v průběhu eliminace nedojde k nulovému pivotu.

22.7 Selhání metody

Metoda může selhat v případech:

- nulový pivot ($a_{kk} = 0$),
- velmi malý pivot vedoucí k numerické nestabilitě.

22.8 Ukončovací kritéria

Metoda končí po provedení eliminace a zpětného dosazení, jelikož se jedná o přímou (neiterační) metodu.

22.9 Vlastnosti metody

- přímá metoda,
- odpovídá klasické Gaussově eliminaci na papíře,
- výpočetní složitost řádu $\mathcal{O}(n^3)$,
- bez pivotování může být numericky nestabilní.

22.10 Kontrolní otázky

Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Jaký je cíl Gaussovy eliminační metody?
   Odpověď: Cílem Gaussovy eliminační metody je převést soustavu lineárních rovnic na ekvivalentní soustavu s horní trojúhelníkovou maticí, aby bylo možné řešení získat zpětným dosazením.

2. **Otázka:** Co je pivot a k čemu slouží?
   Odpověď: Pivot je aktuální diagonální prvek matice, kterým se v daném kroku Gaussovy eliminace dělí při nulování prvků pod hlavní diagonálou.

3. **Otázka:** Proč může metoda selhat při nulovém pivotu?
   Odpověď: Metoda může selhat, protože při nulovém pivotu nelze provést dělení, které je nutné pro eliminaci prvků pod diagonálou.

4. **Otázka:** Jaký je význam zpětného dosazení?
   Odpověď: Zpětné dosazení slouží k výpočtu jednotlivých neznámých ze soustavy s horní trojúhelníkovou maticí, počínaje poslední rovnicí.

Část VI

Aproximace

23 Metoda nejmenších čtverců (MNČ)

23.1 Cíl metody

Cílem metody nejmenších čtverců je nalézt parametry aproximační funkce tak, aby součet čtverců odchylek mezi hodnotami danými daty a hodnotami aproximační funkce byl minimální.

23.2 Základní myšlenka

Naměřená data jsou obvykle zatížena chybou a neleží přesně na jedné křivce. Místo funkce, která by body přesně procházela, hledáme funkci, která data vystihuje co nejlépe v celkovém smyslu. Metoda minimalizuje součet čtverců rozdílů mezi skutečnými hodnotami a hodnotami vypočtenými z aproximační funkce.

23.3 Aproximační funkce

Tvar aproximační funkce je zvolen předem (např. přímka, polynom, trigonometrická funkce). Metoda nejmenších čtverců neurčuje tvar funkce, ale vypočítá nejvhodnější hodnoty jejích parametrů.

23.4 Normální rovnice

Minimalizace součtu čtverců odchylek vede na soustavu lineárních rovnic, tzv. normální rovnice. Řešení aproximační úlohy se tak převádí na řešení soustavy lineárních rovnic, která se typicky řeší Gaussovou eliminační metodou.

23.5 Podmínky použitelnosti

Metoda je použitelná, pokud:

- počet datových bodů je větší než počet neznámých parametrů,
- zvolený tvar aproximační funkce odpovídá charakteru dat.

23.6 Konvergence

Metoda nejmenších čtverců není iterační metodou. Řešení se získá jednorázově vyřešením soustavy normálních rovnic.

23.7 Selhání metody

Metoda může poskytovat nevhodné výsledky, pokud:

- je zvolen nevhodný tvar aproximační funkce,
- data obsahují výrazné odlehlé hodnoty,
- soustava normálních rovnic je špatně podmíněná.

23.8 Ukončovací kritéria

Metoda končí po vyřešení soustavy normálních rovnic.

23.9 Vlastnosti metody

- aproximační metoda,
- neprochází přesně zadanými body,
- potlačuje vliv náhodného šumu,
- převádí se na řešení soustavy lineárních rovnic.

23.10 Vysvětlivka: interpolace vs. aproximace

- **Interpolace** hledá funkci, která přesně prochází všemi zadanými body.
- **Aproximace** hledá funkci, která data pouze co nejlépe vystihuje a nemusí přesně procházet žádným z bodů.

23.11 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Jaký je cíl metody nejmenších čtverců?
   Odpověď: Cílem metody nejmenších čtverců je nalézt parametry aproximační funkce tak, aby součet čtverců odchylek mezi daty a aproximační funkcí byl minimální.

2. **Otázka:** Jaký je rozdíl mezi interpolací a aproximací?
   Odpověď: Interpolace hledá funkci, která přesně prochází zadanými body, zatímco aproximace hledá funkci, která data pouze co nejlépe vystihuje.

3. **Otázka:** Proč se v metodě nejmenších čtverců minimalizují čtverce odchylek?
   Odpověď: Aby se kladné a záporné odchylky nerušily a aby větší chyby měly větší váhu než menší.

4. **Otázka:** Na jaký typ úlohy se metoda nejmenších čtverců převádí?
   Odpověď: Metoda nejmenších čtverců se převádí na řešení soustavy lineárních rovnic.

24 Polynomiální aproximace

24.0.1 Cíl metody

Cílem polynomiální aproximace je nalézt polynom zvoleného stupně, který co nejlépe aproximuje zadaná data ve smyslu metody nejmenších čtverců.

24.0.2 Základní myšlenka

Polynomiální aproximace je speciálním případem metody nejmenších čtverců, kde aproximační funkcí je polynom. Na rozdíl od interpolace polynom nemusí procházet všemi body, ale minimalizuje celkovou chybu aproximace.

24.0.3 Aproximační polynom

Aproximační funkce má tvar polynomu pevně zvoleného stupně. Stupeň polynomu určuje složitost modelu a ovlivňuje kvalitu aproximace. Metoda neurčuje stupeň polynomu, ale pouze vypočítá jeho koeficienty.

24.0.4 Vztah k metodě nejmenších čtverců

Koeficienty aproximačního polynomu jsou určeny metodou nejmenších čtverců. Úloha se převádí na řešení soustavy lineárních rovnic, tzv. normálních rovnic.

24.0.5 Podmínky použitelnosti

Metoda je použitelná, pokud:

- počet datových bodů je větší než počet koeficientů polynomu,
- zvolený stupeň polynomu odpovídá charakteru dat.

24.0.6 Konvergence

Polynomiální aproximace není iterační metoda. Řešení se získá jednorázově vyřešením soustavy normálních rovnic.

24.0.7 Selhání metody

Metoda může poskytovat nevhodné výsledky, pokud:

- je zvolen příliš vysoký stupeň polynomu (přeučení),
- je zvolen příliš nízký stupeň polynomu,
- data obsahují výrazné odlehlé hodnoty.

24.0.8 Vlastnosti metody

- aproximační metoda,
- neprochází přesně zadanými body,
- využívá metodu nejmenších čtverců,
- převádí se na řešení soustavy lineárních rovnic.

24.0.9 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Co je cílem polynomiální aproximace?
   Odpověď: Nalézt polynom zvoleného stupně, který data co nejlépe vystihuje ve smyslu metody nejmenších čtverců.

2. **Otázka:** Jaký je rozdíl mezi interpolací a polynomiální aproximací?
   Odpověď: Interpolace prochází přesně body, polynomiální aproximace data pouze co nejlépe aproximuje.

3. **Otázka:** Na jaký typ úlohy se polynomiální aproximace převádí?
   Odpověď: Na řešení soustavy lineárních rovnic.

25 Aproximace pomocí trigonometrické báze

25.0.1 Cíl metody

Cílem trigonometrické aproximace je nalézt lineární kombinaci sinových a kosinových funkcí, která co nejlépe aproximuje zadaná data ve smyslu metody nejmenších čtverců.

25.0.2 Základní myšlenka

Namísto polynomů se jako báze používají trigonometrické funkce (sinus a kosinus). Metoda je vhodná zejména pro data s periodickým charakterem.

25.0.3 Aproximační funkce

Aproximační funkce je tvořena konečnou kombinací sinových a kosinových členů. Koeficienty těchto členů se určují metodou nejmenších čtverců.

25.0.4 Vztah k metodě nejmenších čtverců

Stejně jako u polynomiální aproximace se úloha převádí na řešení soustavy lineárních rovnic. Rozdíl spočívá pouze ve volbě bázových funkcí.

25.0.5 Podmínky použitelnosti

Metoda je vhodná, pokud:

- data vykazují periodické chování,
- zvolený počet trigonometrických členů odpovídá datům.

25.0.6 Konvergence

Trigonometrická aproximace není iterační metoda. Řešení se získá jednorázovým výpočtem koeficientů.

25.0.7 Selhání metody

Metoda může selhat nebo dávat špatné výsledky, pokud:

- data nejsou periodická,
- je zvolen nevhodný počet členů,
- data obsahují výrazný šum nebo odlehlé hodnoty.

25.0.8 Vlastnosti metody

- aproximační metoda,
- vhodná pro periodická data,
- využívá metodu nejmenších čtverců,
- převádí se na řešení soustavy lineárních rovnic.

25.0.9 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Kdy je vhodné použít trigonometrickou aproximaci?
   Odpověď: Pokud data vykazují periodické chování.
2. **Otázka:** V čem se liší od polynomiální aproximace?
   Odpověď: Liší se volbou bázových funkcí, princip MNČ zůstává stejný.
3. **Otázka:** Na jaký typ úlohy se trigonometrická aproximace převádí?
   Odpověď: Na řešení soustavy lineárních rovnic.

Část VII

Iterační metody pro soustavy lineárních rovnic

26 Obecná myšlenka iterací

Iterační metody slouží k řešení soustavy lineárních rovnic

$$Ax = b$$

postupným zpřesňováním odhadu řešení. Nevypočítávají řešení jednorázově, ale vytvářejí posloupnost aproximací, která při splnění určitých podmínek konverguje k přesnému řešení.

27 Jacobiho metoda

27.1 Cíl metody

Cílem Jacobiho metody je nalézt řešení soustavy lineárních rovnic pomocí iteračního postupu založeného na postupném zpřesňování počátečního odhadu řešení.

27.2 Základní myšlenka

Každá rovnice soustavy je přepsána tak, aby na levé straně byla právě jedna neznámá. V každém iteračním kroku se nové hodnoty všech neznámých počítají výhradně z hodnot předchozí iterace.

27.3 Iterační krok

V k-tém kroku se z vektoru $x^{(k)}$ vypočítá nový vektor $x^{(k+1)}$. Nově vypočtené hodnoty se nepoužívají okamžitě, ale až v následujícím iteračním kroku.

27.4 Počáteční odhad

Metoda vyžaduje volbu počátečního odhadu $x^{(0)}$. Nevhodná volba může vést k pomalé konvergenci nebo k divergenci.

27.5 Podmínky konvergence

Jacobiho metoda obvykle konverguje, pokud:

- matice je diagonálně dominantní,
- případně je symetrická pozitivně definitní.

27.6 Konvergence

Jacobiho metoda má lineární konvergenci a obvykle konverguje pomaleji než Gauss–Seidelova metoda.

27.7 Selhání metody

Metoda může selhat, pokud:

- nejsou splněny podmínky konvergence,
- matice má nevhodnou strukturu,
- počáteční odhad je zvolen nevhodně.

27.8 Vlastnosti metody

- iterační metoda,
- jednoduchá implementace,
- pomalá konvergence,
- snadná paralelizace,
- konvergence není zaručena.

27.9 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Jaký je princip Jacobiho metody?
   Odpověď: V každém kroku se nové hodnoty neznámých počítají pouze z hodnot předchozí iterace.
2. **Otázka:** Kdy Jacobiho metoda obvykle konverguje?
   Odpověď: Pokud je matice diagonálně dominantní.
3. **Otázka:** Jaký typ konvergence má Jacobiho metoda?
   Odpověď: Lineární.

28 Gauss–Seidelova metoda

28.1 Cíl metody

Cílem Gauss–Seidelovy metody je nalézt řešení soustavy lineárních rovnic iteračním postupem s rychlejší konvergencí než u Jacobiho metody.

28.2 Základní myšlenka

Gauss–Seidelova metoda vychází z Jacobiho metody, ale nově vypočtené hodnoty neznámých se okamžitě používají v dalším výpočtu v rámci téhož iteračního kroku.

28.3 Iterační krok

Při výpočtu $x^{(k+1)}$ se již vypočtené složky tohoto vektoru používají okamžitě, zatímco zbývající složky se stále počítají z hodnot předchozí iterace.

28.4 Počáteční odhad

Stejně jako Jacobiho metoda vyžaduje i Gauss–Seidelova metoda počáteční odhad řešení.

28.5 Podmínky konvergence

Gauss–Seidelova metoda obvykle konverguje, pokud:

- matice je diagonálně dominantní,
- nebo je symetrická pozitivně definitní.

28.6 Konvergence

Gauss–Seidelova metoda má lineární konvergenci, ale obvykle konverguje rychleji než Jacobiho metoda.

28.7 Selhání metody

Metoda může selhat, pokud:

- nejsou splněny podmínky konvergence,
- matice je špatně podmíněná.

28.8 Vlastnosti metody

- iterační metoda,
- rychlejší konvergence než Jacobiho metoda,
- horší paralelizace,
- konvergence není zaručena.

28.9 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** V čem se Gauss–Seidelova metoda liší od Jacobiho?
   Odpověď: Nově vypočtené hodnoty neznámých se okamžitě používají v dalším výpočtu.
2. **Otázka:** Která z metod obvykle konverguje rychleji?
   Odpověď: Gauss–Seidelova metoda.
3. **Otázka:** Mají iterační metody zaručenou konvergenci?
   Odpověď: Ne.

Část VIII

Numerická integrace

29 Základní pojmy

29.1 Cíl numerické integrace

Cílem numerické integrace je přibližně vypočítat hodnotu určitého integrálu

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

tedy obsah plochy pod křivkou funkce, pokud integrál nelze nebo není vhodné určit analyticky.

29.2 Základní myšlenka

Interval $\langle a, b\rangle$ se rozdělí na menší dílčí intervaly. Na každém z nich je funkce nahrazena jednodušším aproximačním tvarem a celkový integrál je aproximován součtem obsahů těchto jednoduchých útvarů. Čím lépe aproximační tvar vystihuje průběh funkce, tím je výsledek přesnější.

30 Obdélníkové pravidlo

30.1 Myšlenka metody

Obdélníkové pravidlo aproximuje plochu pod křivkou pomocí obdélníků. Na každém dílčím intervalu je funkce nahrazena konstantní hodnotou.

30.2 Vlastnosti metody

- velmi jednoduchá metoda,
- nízká přesnost,
- slouží především jako úvodní metoda.

31 Lichoběžníkové pravidlo

31.1 Myšlenka metody

Lichoběžníkové pravidlo nahrazuje průběh funkce mezi dvěma body přímkou. Plocha pod křivkou je aproximována součtem obsahů lichoběžníků.

31.2 Vlastnosti metody

- vyšší přesnost než obdélníkové pravidlo,
- lineární aproximace funkce,
- jednoduchá a často používaná metoda.

32 Simpsonovo pravidlo

32.1 Cíl metody

Cílem Simpsonova pravidla je získat přesnější aproximaci určitého integrálu pomocí kvadratické aproximace funkce.

32.2 Základní myšlenka

Simpsonovo pravidlo nahrazuje funkci na dvojici sousedních intervalů parabolou, která prochází třemi body. Parabola lépe vystihuje zakřivení funkce než přímka, a proto poskytuje přesnější výsledek.

32.3 Rozdělení intervalu

Interval $\langle a, b \rangle$ musí být rozdělen na sudý počet dílků. Tento požadavek vyplývá z konstrukce metody, protože parabola je určena třemi body.

32.4 Vlastnosti metody

- velmi přesná metoda pro hladké funkce,
- využívá kvadratickou aproximaci,
- přesnější než lichoběžníkové pravidlo,
- vyžaduje sudý počet dílků.

32.5 Omezení metody

Simpsonovo pravidlo může poskytovat nepřesné výsledky, pokud:

- funkce není dostatečně hladká,
- funkce obsahuje ostré zlomy nebo silné oscilace.

32.6 Shrnutí metod

Obdélníkové pravidlo poskytuje velmi hrubou aproximaci integrálu, lichoběžníkové pravidlo je přesnější díky lineární aproximaci a Simpsonovo pravidlo nabízí nejvyšší přesnost díky použití paraboly.

33 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Co je cílem numerické integrace?
   Odpověď: Přibližně vypočítat hodnotu určitého integrálu, tedy obsah plochy pod křivkou.

2. **Otázka:** Jaký je rozdíl mezi lichoběžníkovým a Simpsonovým pravidlem?
   Odpověď: Lichoběžníkové pravidlo používá lineární aproximaci, zatímco Simpsonovo pravidlo kvadratickou aproximaci pomocí paraboly.

3. **Otázka:** Proč musí mít Simpsonovo pravidlo sudý počet dílků?
   Odpověď: Protože parabola používaná v Simpsonově pravidle je určena třemi body a metoda pracuje po dvojicích intervalů.

4. **Otázka:** Kdy není Simpsonovo pravidlo vhodné?
   Odpověď: Pokud funkce není dostatečně hladká nebo obsahuje ostré zlomy.

Část IX

Obyčejné Diferrencionální rovnice

34 Eulerova metoda

34.1 Cíl metody

Cílem Eulerovy metody je přibližně vypočítat řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$y'(x) = f(x, y)$$

se zadanou počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0.$$

Metoda poskytuje aproximaci hodnot řešení v diskrétních bodech.

34.2 Základní myšlenka

Eulerova metoda vychází z geometrického významu derivace jako směrnice tečny ke grafu funkce. V každém bodě je řešení aproximováno tečnou a pomocí malého kroku je vypočten další bod řešení.

34.3 Iterační vzorec

Eulerova metoda používá iterační vztah

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k),$$

kde

$$x_{k+1} = x_k + h$$

a $h > 0$ je krok metody.

34.4 Počáteční podmínka

Metoda vyžaduje zadání počáteční hodnoty řešení $y(x_0) = y_0$, od které se postupně konstruuje přibližné řešení.

34.5 Krok metody

Velikost kroku h výrazně ovlivňuje přesnost výsledku. Menší krok vede k přesnějšímu řešení, ale zvyšuje výpočetní náročnost, zatímco větší krok může způsobit značnou chybu.

34.6 Geometrická interpretace

Řešení je aproximováno pomocí úseček, které odpovídají tečnám ke skutečnému řešení v jednotlivých bodech. Skutečná křivka řešení je tak nahrazena lomenou čarou.

34.7 Vlastnosti metody

- explicitní numerická metoda,
- jednoduchá implementace,
- metoda prvního řádu,
- nízká přesnost,
- chyba silně závisí na velikosti kroku.

34.8 Selhání metody

Eulerova metoda může selhat nebo poskytovat velmi nepřesné výsledky, pokud:

- je zvolen příliš velký krok,
- řešení se rychle mění,
- metoda je použita na dlouhém intervalu.

34.9 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Jaký typ úloh řeší Eulerova metoda?
   Odpověď: Eulerova metoda řeší obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s počáteční podmínkou.

2. **Otázka:** Jaký je základní princip Eulerovy metody?
   Odpověď: Metoda postupuje po tečně ke grafu řešení a pomocí malého kroku vypočítává další bod.

3. **Otázka:** Jaký vliv má velikost kroku h?
   Odpověď: Menší krok zvyšuje přesnost, větší krok zvyšuje chybu metody.

4. **Otázka:** Jakého řádu je Eulerova metoda?
   Odpověď: Eulerova metoda je numerická metoda prvního řádu.

35 Heunova metoda

35.1 Cíl metody

Cílem Heunovy metody je přibližně vypočítat řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$y'(x) = f(x, y)$$

se zadanou počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0.$$

Metoda zvyšuje přesnost Eulerovy metody použitím korekce sklonu.

35.2 Základní myšlenka

Heunova metoda vychází z Eulerovy metody, ale místo použití jediného sklonu používá průměr sklonu na začátku a na konci kroku. Tím lépe aproximuje skutečný průběh řešení.

35.3 Predikce

V prvním kroku se provede predikce pomocí Eulerovy metody

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k),$$

která poskytne hrubý odhad hodnoty řešení na konci kroku.

35.4 Korekce

Následně se vypočítá sklon na konci kroku

$$f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$$

a použije se průměr sklonu na začátku a na konci intervalu.

35.5 Iterační vzorec

Finální hodnota řešení v dalším bodě je dána vztahem

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}) \right],$$

kde

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

35.6 Počáteční podmínka

Heunova metoda vyžaduje zadání počáteční hodnoty $y(x_0) = y_0$, od které se postupně konstruuje přibližné řešení.

35.7 Krok metody

Velikost kroku h ovlivňuje přesnost metody. Menší krok vede k vyšší přesnosti, zatímco větší krok může způsobit významnou chybu.

35.8 Geometrická interpretace

Heunova metoda aproximuje řešení pomocí úseček, které vycházejí z průměrné směrnice tečen na začátku a na konci každého kroku. Výsledná lomená čára lépe kopíruje skutečné řešení než u Eulerovy metody.

35.9 Vlastnosti metody

- explicitní numerická metoda,
- metoda druhého řádu,
- vyšší přesnost než Eulerova metoda,
- jednoduchá implementace,
- stále závislá na volbě kroku.

35.10 Selhání metody

Heunova metoda může poskytovat nepřesné výsledky, pokud:

- je zvolen příliš velký krok,
- řešení se velmi rychle mění,
- metoda je použita na dlouhém intervalu.

35.11 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Jaký typ úloh řeší Heunova metoda?
   Odpověď: Heunova metoda řeší obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu se zadanou počáteční podmínkou.

2. **Otázka:** V čem se Heunova metoda liší od Eulerovy metody?
   Odpověď: Heunova metoda používá průměr sklonu na začátku a na konci kroku, zatímco Eulerova metoda používá pouze sklon na začátku kroku.

3. **Otázka:** Co znamená predikce v Heunově metodě?
   Odpověď: Predikce je hrubý odhad další hodnoty řešení získaný pomocí Eulerovy metody.

4. **Otázka:** Jakého řádu je Heunova metoda?
   Odpověď: Heunova metoda je numerická metoda druhého řádu.

5. **Otázka:** Jaký vliv má velikost kroku h?
   Odpověď: Menší krok zvyšuje přesnost řešení, větší krok zvyšuje chybu metody.

36 Runge–Kuttova metoda

36.1 Cíl metody

Cílem Runge–Kuttovy metody je přibližně vypočítat řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$y'(x) = f(x, y)$$

se zadanou počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0.$$

Metoda poskytuje velmi přesnou aproximaci řešení bez nutnosti znalosti vyšších derivací.

36.2 Základní myšlenka

Runge–Kuttova metoda zlepšuje Eulerovu a Heunovu metodu tím, že v každém kroku využívá více směrnic (sklonů tečny), které jsou vhodně kombinovány. Nejpoužívanější je klasická Runge–Kuttova metoda čtvrtého řádu.

36.3 Výpočet sklonů

V každém kroku se vypočítají čtyři pomocné sklony:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k), \\
k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 &= f(x_k + h, y_k + hk_3).
\end{aligned}$$

36.4 Iterační vzorec

Hodnota řešení v dalším bodě je dána vztahem

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

kde

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

36.5 Počáteční podmínka

Metoda vyžaduje zadání počáteční hodnoty $y(x_0) = y_0$, od které se postupně konstruuje řešení.

36.6 Geometrická interpretace

Runge–Kuttova metoda využívá informace o směrnici řešení na začátku, ve středních bodech a na konci kroku. Výsledná aproximace velmi dobře kopíruje skutečný průběh řešení.

36.7 Vlastnosti metody

- explicitní numerická metoda,
- metoda čtvrtého řádu,
- velmi vysoká přesnost,
- široké praktické použití,
- vyšší výpočetní náročnost než Eulerova a Heunova metoda.

36.8 Selhání metody

Metoda může poskytovat nepřesné výsledky, pokud:

- je zvolen příliš velký krok,
- řešení se velmi rychle mění,
- metoda je použita na dlouhém intervalu bez adaptace kroku.

36.9 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Jaký typ úloh řeší Runge–Kuttova metoda?
   Odpověď: Runge–Kuttova metoda řeší obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu se zadanou počáteční podmínkou.

2. **Otázka:** Kolik sklonů využívá klasická Runge–Kuttova metoda?
   Odpověď: Čtyři sklony.

3. **Otázka:** Jakého řádu je klasická Runge–Kuttova metoda?
   Odpověď: Čtvrtého řádu.

4. **Otázka:** V čem je Runge–Kuttova metoda lepší než Eulerova metoda?
   Odpověď: Poskytuje výrazně vyšší přesnost díky použití více směrnic v každém kroku.

5. **Otázka:** Jaký vliv má velikost kroku h?
   Odpověď: Menší krok zvyšuje přesnost, větší krok zvyšuje chybu metody.

37 Vícekrokové metody (Adamsovy metody)

37.1 Cíl metody

Cílem Adamsových metod je přibližně vypočítat řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$y'(x) = f(x, y)$$

se zadanou počáteční podmínkou. Metody využívají informace z více předchozích kroků a patří mezi vícekrokové numerické metody.

37.2 Základní myšlenka

Adamsovy metody vycházejí z myšlenky, že při výpočtu další hodnoty řešení lze využít nejen poslední známý bod, ale i několik předchozích hodnot řešení a odpovídajících hodnot derivace. Tím se zvyšuje efektivita a přesnost výpočtu.

37.3 Počáteční hodnoty

Protože Adamsovy metody používají více předchozích kroků, vyžadují znalost několika počátečních hodnot řešení. Tyto hodnoty se obvykle získají pomocí jednokrokových metod, například Eulerovou, Heunovou nebo Runge–Kuttovou metodou.

37.4 Typy Adamsových metod

Adamsovy metody se dělí na:

- Adams–Bashforthovy metody (explicitní),
- Adams–Moultonovy metody (implicitní).

37.5 Adams–Bashforthovy metody

Adams–Bashforthovy metody jsou explicitní vícekrokové metody. K výpočtu další hodnoty řešení využívají pouze hodnoty derivace z předchozích kroků.

37.6 Adams–Moultonovy metody

Adams–Moultonovy metody jsou implicitní vícekrokové metody. Při výpočtu další hodnoty řešení využívají i hodnotu derivace v novém bodě, což vede k vyšší stabilitě a přesnosti.

37.7 Vlastnosti Adamsových metod

- vícekrokové metody,
- vyšší efektivita než jednokrokové metody,

- nutnost počátečních hodnot,
- vyšší přesnost při vhodné volbě kroku.

37.8 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Co jsou Adamsovy metody?
   Odpověď: Adamsovy metody jsou vícekrokové numerické metody pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

2. **Otázka:** V čem se Adamsovy metody liší od jednokrokových metod?
   Odpověď: Adamsovy metody využívají více předchozích hodnot řešení, zatímco jednokrokové metody používají pouze poslední bod.

3. **Otázka:** Jaký je rozdíl mezi Adams–Bashforthovou a Adams–Moultonovou metodou?
   Odpověď: Adams–Bashforthova metoda je explicitní, zatímco Adams–Moultonova metoda je implicitní.

4. **Otázka:** Proč Adamsovy metody potřebují počáteční hodnoty?
   Odpověď: Protože při výpočtu používají více předchozích kroků, které musí být nejprve získány jinou metodou.

5. **Otázka:** Jaká je hlavní výhoda Adamsových metod?
   Odpověď: Vyšší efektivita a přesnost při využití již spočítaných hodnot řešení.

38 Prediktor–korektorové metody

38.1 Cíl metody

Cílem prediktor–korektorových metod je přibližně vypočítat řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$y'(x) = f(x, y)$$

se zadanou počáteční podmínkou. Metody kombinují rychlý odhad řešení s následným zpřesněním výsledku.

38.2 Základní myšlenka

Prediktor–korektorový postup se skládá ze dvou kroků. Nejprve se pomocí prediktoru vypočítá předběžný odhad další hodnoty řešení. Následně se tento odhad zpřesní pomocí korektoru. Tím se zvyšuje přesnost výsledku oproti použití jediné metody.

38.3 Prediktor

Prediktor je obvykle explicitní metoda, která využívá známé hodnoty řešení a jejich derivací k rychlému odhadu další hodnoty. Prediktor neposkytuje finální výsledek, slouží pouze jako předběžná aproximace.

38.4 Korektor

Korektor je obvykle implicitní metoda, která využívá i hodnotu derivace v novém bodě řešení. Pomocí korektoru se opraví odhad získaný prediktorem a získá se přesnější výsledek.

38.5 Iterační charakter

Prediktor–korektorový postup může být proveden jednorázově nebo opakován vícekrát, dokud není dosaženo požadované přesnosti řešení.

38.6 Vztah k ostatním metodám

Princip predikce a korekce je přítomen již v Heunově metodě, kde je predikce provedena Eulerovou metodou a korekce pomocí průměrného sklonu. Vícekrokové prediktor–korektorové metody tento princip rozšiřují na více předchozích kroků.

38.7 Vlastnosti prediktor–korektorových metod

- kombinace explicitní a implicitní metody,
- vyšší přesnost než samotný prediktor,

- dobrá stabilita,
- možnost opakované korekce.

38.8 Kontrolní otázky a odpovědi

1. **Otázka:** Co je podstatou prediktor–korektorového postupu?
   Odpověď: Nejprve se vypočítá předběžný odhad řešení pomocí prediktoru a následně se tento odhad zpřesní pomocí korektoru.

2. **Otázka:** Jaký typ metody bývá prediktor?
   Odpověď: Prediktor bývá explicitní metoda.

3. **Otázka:** Jaký typ metody bývá korektor?
   Odpověď: Korektor bývá implicitní metoda.

4. **Otázka:** Jaký je vztah prediktor–korektorových metod k Heunově metodě?
   Odpověď: Heunova metoda využívá predikci a korekci v rámci jednoho kroku a představuje jednokrokový prediktor–korektorový postup.

5. **Otázka:** Jaká je hlavní výhoda prediktor–korektorových metod?
   Odpověď: Vyšší přesnost řešení při zachování rozumné výpočetní náročnosti.