Domácí úkol č. 3
NTIN090

Zdeněk Tomis

19. 11. 2024

1 Variace na existenční kvantifikaci

1.1 $\implies$

$$\exists B_1 \text{ rozhodnutelný} \cap A = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists \in \Sigma^*[\langle x, y\rangle \in B_1]\} \implies A \text{ je rozhodnutelný} \tag{1}$$

Plyne z existenční kvantifikace (5. přednáška). Stačí využít existence jednoho z jazyků B_1 a B_2.

1.2 $\impliedby$

Existuje Turingův stroj M pro jazyk A přijimajici $L(A = L(M))$.

Platí

$$L = \{x \mid (\exists n \in N)[M(x) \text{ přijme do n kroků}]\} \tag{2}$$

"přijme do n kroků"je rozhodnutelná podmínka, stačí spustit M po n kroků na x.

Definujeme

$$B_1 = \{\langle x, \langle n\rangle\rangle \mid M(x) \text{ přijme do n kroků}\} B_2 = \{\langle x, \langle n\rangle\rangle \mid M(x) \text{ přijme do n+1 kroků}\} \tag{3}$$

Jsou to různé jazyky, oba jsou rozhodnutelné a splňují

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)[\langle x, y\rangle \in B_i]\} \tag{4}$$

kde $y = \langle n\rangle$ pro B_1 a $y = \langle n+1\rangle$ pro B_2.

2 Rozhodnutelnost PTS(D)

PTS není rozhodnutelný. Kdyby byl rozhodnutelný, byl by nutně rozhodnutelný jeho doplněk, který odpovídá problému: Existuje alespoň jeden řetězec x, pro který se výpočet $M(x)$ zastaví, ale na pásce zůstane slovo y, které není delší než x?

Kdyby byl tento jazyk rozhodnutelný, existoval by k němu Turingův stroj $M_{\overline{PTS}}$, který by ho rozhodoval.

Ukažme, že $\overline{PTS} \leq_T L_U$

Kdyby existoval $M_{\overline{PTS}}$, mohli bychom sestrojit M_{L_U}, který by ho využíval jako podprogram, a to takto:

Pro daný M, x, upravíme M na M' těmito třemi úpravami:

1. Uložíme vstup x' bokem a místo něho použijeme x - například stroj simulujeme na části pásky.

2. Při přijetí před skončením smažeme pásku (nahradíme λ)
3. Při zamítnutí před skončením na pásku napíšeme $x'.0$ a uměle tak necháme na pásce prodloužený vstup.

Takto upravený stroj při přijetí skončí s páskou kratší nebo stejně dlouhou jako vstup (stejně při vstupu nulové délky). Při zamítnutí bude mít pásku delší než vstup.

Spustíme $M_{\overline{PTS}}$ na M'. Pokud zamítne, znamená to, že M nepřijme, nebo se nezastaví nad x.

Pokud přijme, znamená to, že M přijme a zastaví se nad x.

Tímto chytákem odignorování původního vstupu docílíme chování M_{L_U}.

To ale není možné, protože L_U není rozhodnutelný, tudíž $\overline{PTS}$ není rozhodnutelný a z uzavřenosti PTS není rozhodnutelný.

2.1 Částečná rozhodnutelnost

Ukázali jsme, že $\overline{PTS} \leq_T L_U$. Ve skutečnosti jsme ale ukázali více, a sice m-převoditelnost, protože konstrukce M' je vyčíslitelná funkce.

Tedy $\overline{PTS} \leq_m L_U$.

L_U je částečně rozhodnutelný, tedy i $\overline{PTS}$ je částečně rozhodnutelný.

Zároveň víme, že PTS není ani částečně rozhodnutelný, protože kdyby byl rozhodnutelný PTS i jeho doplněk, byl by PTS rozhodnutelný.