

Jméno a příjmení: Zdeněk TomisPotřebný čas: 60 minut

1. Pomocí Lagrangeovy interpolace proložte kubický polynom nad tělesem \mathbb{Z}_5 body $(4, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ a $(3, 2)$.

$$p_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{1} = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^3 + 4x^2 + x + 4)$$

$$p_2(x) = \frac{(x-4)(x-2)(x-3)}{(1-4)(1-2)(1-3)} = \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{-6} = -x^3 + 4x^2 - x + 4 = 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$$

$$p_3(x) = \frac{(x-4)(x-1)(x-3)}{(2-4)(2-1)(2-3)} = \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{2} = 3x^3 + x^2 + 2x + 4$$

$$p_4(x) = \frac{(x-4)(x-1)(x-2)}{(3-4)(3-1)(3-2)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 15x - 8}{3} = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 4$$

$$\begin{aligned} \underline{P(x)} &= 0p_1(x) + 4p_2(x) + 4p_3(x) + 2p_4(x) \\ &= 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4 \\ &= \underline{2x^3 + 2x^2 + 4x + 4} \end{aligned}$$

Zkouška

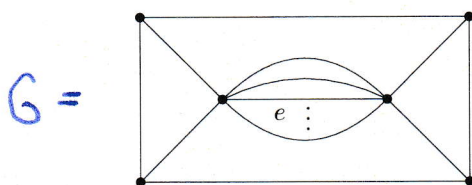
$$128 + 32 = 0 \checkmark$$

$$4 + 2 = 4 \checkmark$$

$$16 + 8 = 4 \checkmark$$

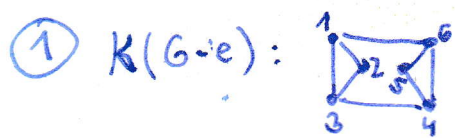
$$40 + 14 + 18 = 2 \checkmark$$

2. V závislosti na parametru k určete počet koster následujícího multigrafu, kde vyznačená hrana e má násobnost $k \geq 0$:



Využijeme rekurentní vztah. Pokud násobná hrana bude součástí kostky, bude součástí pouze jedno plátko.

$$K(G) = K(G-e) + k \cdot K(G \circ e)$$



$$L_{G-e} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_{G-e}^{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zde snad nebude vadit usnadnění výpočtu pomocí Wolfram Mathematica

$$K(G-e) = |L_{G-e}^{1,1}| \stackrel{WM}{=} 30$$



$$L_{G \circ e} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_{G \circ e}^{1,1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|L_{G \circ e}^{1,1}| \stackrel{WM}{=} 45$$

$$K(G) = 45k + 30 \quad OK$$