Řešení domácího úkolu 3

1. Formulujte pravidla, jak volit $\tilde{n}$ z definice limity (viz cvičení, užitečné vztahy) pro

   (a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n},$$
   (b)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \qquad a > 0.$$

(2 body)

V obou případech je třeba nejdřív určit, co bude hledaná limita.

(a) V tomto případě, pokud bychom vynechali spodní celou část, dostaneme prostě $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Spodní celá část v čitateli ale může celý výraz jen zmenšit, takže $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$ a odtud jde přímo zkonstruovat $\tilde{n}$.
Pro každé zadané $\epsilon > 0$ najdeme n takové, aby $\epsilon > \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right|$, tedy $n > \frac{1}{\epsilon^2}$. Nyní máme dva problémy. Zaprvé toto n není nutně celé číslo, takže z něj musíme celé číslo udělat zaokrouhlením. A zadruhé, pro nějaká ϵ by mohla nastat rovnost[1] čemuž se chceme vyhnout. Naštěstí si ale můžeme dovolit plýtvat, protože nám jde pouze o to najít $\tilde{n}$ dostatečně velké. Proto můžeme volit například
$$\tilde{n} = \left\lceil \frac{1}{\epsilon^2} \right\rceil + 5.$$
Nyní už jen stačí podotknout, že takto zvolené $\tilde{n}$ funguje pro funkci $\frac{1}{\sqrt{n}}$, ale protože $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$, bude fungovat i pro zkoumanou fci.

(b) Členy posloupnosti jde taky napsat jako $a^{\frac{1}{n}}$, tedy pro veliká n budeme dostávat členy $\approx a^0 = 1$. Budeme tedy předpokládat, že limita je 1. Musíme tedy najít $\tilde{n}(\epsilon)$ takové, že
$$\forall \epsilon > 0 : \epsilon > |\sqrt[\tilde{n}(\epsilon)]{a} - 1|.$$
Uvažujme případ $a > 1$ a $a \in (0,1)$ vyřešíme obdobně později[2]. Potom jde odstranit absolutní hodnotu
$$\epsilon > \sqrt[\tilde{n}(\epsilon)]{a} - 1 \Rightarrow \ln(\epsilon+1) > \frac{1}{\tilde{n}(\epsilon)}\ln(a) \Rightarrow \tilde{n}(\epsilon) > \frac{\ln(a)}{\ln(1+\epsilon)}.$$
Odtud vidíme, že můžeme volit např.
$$\tilde{n}(\epsilon) = \left\lceil \frac{\ln(a)}{\ln(1+\epsilon)} \right\rceil + 5.$$
Pro $a \in (0,1)$ je $\sqrt[\tilde{n}(\epsilon)]{a} < 1$, tedy absolutní hodnota nám změní znaménko a máme
$$\epsilon > 1 - \sqrt[\tilde{n}(\epsilon)]{a} \Rightarrow \ln(1-\epsilon) < \frac{1}{\tilde{n}(\epsilon)}\ln(a) \Rightarrow \tilde{n}(\epsilon) > \frac{\ln(a)}{\ln(1-\epsilon)},$$
kde v posledním kroku došlo ke změně nerovnosti, protože $\epsilon > 0 \Rightarrow \ln(1-\epsilon) < 0$. Pravá strana však není záporná, protože $\ln(a) < 0$ pro zkoumaná a. Nyní už stačí opět jen zaokrouhlit a pro jistotu zvětšit odhad a dostaneme
$$\tilde{n}(\epsilon) = \begin{cases} \left\lceil \frac{\ln(a)}{\ln(1+\epsilon)} \right\rceil + 5 & a > 1, \\ 5 & a = 1, \\ \left\lceil \frac{\ln(a)}{\ln(1-\epsilon)} \right\rceil + 5 & a \in (0,1). \end{cases}$$

[1] Zde mám na mysli to, že pokud bychom volili prostě $\tilde{n} = \left\lceil \frac{1}{\epsilon^2} \right\rceil$, pak pro např. $\epsilon = \frac{1}{2}$ dostaneme $\tilde{n} = 2$ a podmínka z definice limity nebude platit, protože musí splňovat ostrou nerovnost.

[2] Případ $a = 1$ je triviální, protože pak jsou členy posloupnosti identicky 1 a $\tilde{n}$ jde volit libovolně.

2. Spočtěte

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\cdots+\frac{2^n+3^n}{6^n}\right),$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{n}-1}{n}.$$

(2 body)

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{15}{36}+\cdots+\frac{2^n+3^n}{6^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k+3^k}{6^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)$$

Nyní bychom rádi řadu sečetli a vzorec si buď pamatujeme ze střední, nebo si prostě napíšeme

$$\begin{aligned} s &= q+\cdots+q^n \\ qs &= q^2+\cdots+q^{n+1} \\ \Rightarrow s-qs &= q-q^{n+1}\Rightarrow s=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}, \end{aligned}$$

tedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-3^{1-n}-2^{2-n}}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{n}-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1-n}{n(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-n(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{n^2(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{n^2(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}-\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^2(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^2(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}=-0-0=0.$$

Bonus: (deadline 7. 3. 2022)
Spočtěte[3]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-30)^{20}(3n+2)^{30}}{(5n+1)^{50}}.$$

(2 bonusové bod)

Pro ilustraci řešení uvažujme podobný příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Odtud je vidět, že důležité jsou pouze ty členy nejvyššího řádu. Rádi bychom tuto zkutečnost nějak formalizovali, protože vidíme, že kdyby v čitateli místo $-2n$ vystupovalo $5n$, nezmění se na výsledku nic. Proto můžeme zavést o notaci, která se definuje pomocí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f = o(g).$$

Snadno vidíme, že např. n je $o(n^2)$, neboli n roste pomaleji než n^2 a stejně tak $n+5$ je $o(n^2)$.

S využitím této notace už můžeme příklad snadno dořešit. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-30)^{20}(3n+2)^{30}}{(5n+1)^{50}} = \lim_{n\to\infty} \frac{((2n)^{20} - o(n^{20}))((3n)^{30} + o(n^{30}))}{(5n)^{30} + o(n^{50})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^{20} - o(1))(3^{30} + o(1))}{5^{30} + o(1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{20}3^{30} + 2^{20}o(1) + 3^{30}o(1) + o(1)}{5^{30} + o(1)} = \frac{2^{20}3^{30}}{5^{30}}.$$

[3]Elegantní řešení samozřejmě nespočívá v mocnění.