6b.

Domácí úlohy — sada č. 2

Jméno a příjmení: Zdeněk Tomis .... přezdívka: Zdeněk ....

Potřebný čas: 30 minut

1. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte v $\mathbb{Z}_5$ soustavu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a proveďte zkoušku.

Nazvěme matici soustavy A a vek. pr. stran b

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A_{1\to b}| = |A| + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3\cdot 3 =$$

$$|A_{2\to b}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot(-2) =$$

$$|A_{3\to b}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot 3 = \underline{\underline{1}}$$

$$|A_{4\to b}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 1\begin{vmatrix} b & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 = 2$$

$$\frac{1}{2} = 3 \qquad x = 3\cdot(1,1,1,2)^T = \underline{\underline{(3,3,3,1)^T}} = x$$

ok

Zkouška:

$$\begin{array}{|cccc|} 3 & 3 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} = \begin{pmatrix} 4+1+2+1 \\ 1+4+1+1 \\ 2+4+4+4 \\ 3+2+1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ok

Zkouška sedí

pokračování na 2. straně

2. Zjistěte, pro jaké hodnoty parametrů $n, a_1, \ldots, a_n$ je následující determinant roven nule

2

4.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ a_1 & a_2 & 1 & \ldots & n-2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a_2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-a_3 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a_4 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \text{rozvoj podle 1. sloupce}$$

odečtení posl. řádku od všech ostatních

$$= a_1 \cdot (-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} 1-a_2 & & 1 \\ & 1-a_3 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-a_n \end{vmatrix} = -a_1 \cdot (-1)^n \cdot \prod_{i=2}^{n} (1-a_i)$$

Speciální případ pro $n=1$ $\quad |a_1| = a_1$ ... odpovídá vzorci, pokud je prázdný součin $=1$

$$0 = -a_1 \cdot (-1)^n \cdot \prod_{i=2}^{n} (1-a_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 0 \text{ nebo } (\exists i \in \mathbb{Z} : 2 \le i \le n : a_i = 1)}}$$ oz

Řešení odpovídá matici po první úpravě. Když přesuneme poslední sloupec na 1. pozici, máme trojúhelníkovou matici.
To je snad i jednodušší řešení. (Znaménko permutace je nepodstatné)