Řešení domácího úkolu 1

1. Určete, pro která $a, b \in \mathbb{R}$ prochází graf f body $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$, kde

$$f(x) = a\ 2^x + b.$$

(1 bod)

Podmínka, že graf prochází bodem A říká, že $f(0) = 0$, neboli

$$0 = f(0) = a + b.$$

Podobně z druhé podmínky dostáváme

$$1 = f(1) = 2a + b.$$

Pokud bychom chtěli být fancy, tak tohle je soustava dvou lineárních rovnic a jde jí tedy zapsat maticově pomocí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inverzováním matice soustavy (nebo uhodnutím) dostáváme $a = 1$, $b = -1$.

2. Dokažte a zdůvodněte

$$\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists k \in \mathbb{N}_0 : n^3 - n = 6k.$$

(2 body)

Příklad budeme řešit indukcí. Pro $n = 0$ dostáváme na levé straně 0, tedy jde volit $k = 0$.

Přejděme k indukčnímu kroku. Pro $n \to n + 1$ máme na levé straně

$$(n + 1)^3 - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = \underbrace{n^3 - n}_{1} + \underbrace{3n^2 + 3n}_{2},$$

kde část 1 je dělitelná 6ti z indukčního předpokladu. Část 2 je vlastně $3n^2 + 3n = 3(n + 1)n$, tedy je taky dělitelná 6ti, protože je dělitelná 3mi a zároveň $n + 1$, nebo n je sudé, protože jde o dvě následující přirozená čísla.