

Jméno a příjmení: Zdeněk Tomis

Rozhodněte, zdali lze zvolit $a \in \mathbb{C}$ tak, aby následující matice byla unitární. Pokud ano, určete jak.

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2+2i & 4-i \\ a & -2+2i \end{pmatrix}$$

ma' platit $A^H = A^{-1}$ neboli $A^H A = I_2$

$$A^H A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 2-2i & \bar{a} \\ 4+i & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2i & 4-i \\ a & -2+2i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 8+|a|^2 & 8-8i-2i-2-2\bar{a}+2\bar{a}i \\ 8+2i+8i-2-2a-2ai & 16+1+(4+4) \end{pmatrix} =$$

$$\textcircled{1} \quad 2\bar{a}(i-1) = -6+10i \Rightarrow \bar{a} = \frac{-3+5i}{-1+i} = + \frac{3-5i}{1-i} = + \frac{3(1-i)-2i}{(1-i)} =$$

$$\textcircled{2} \quad -2a(1+i) = -6-10i \Rightarrow a = \frac{3+5i}{1+i} = \frac{3 \cdot (1+i) + 2i}{1+i} =$$

$$\textcircled{3} \quad |a|^2 = 17$$

$$= 3 + \frac{2i}{1+i} = 3 + \frac{2i(1-i)}{2} =$$

$$\textcircled{4} \quad 16+1+(4+4) = 25 \quad \checkmark$$

$$= 4+i$$

$$|a| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \quad \checkmark$$

1. pok

$$a = 3 - \frac{2i}{1-i} = 3 - i(i+1) = 4-i \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow a = 4+i$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \text{OK}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \text{OK}$$

Jediné možné $a \in \mathbb{C}$ je $4+i$. OK