Řešení domácího úkolu 11

Spočtěte následující integrály

1.
$$\int x\arctan(x)\ \mathrm{d}x$$
(2 body)

2.
$$\int x^3e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$
(2 body)

3.
$$\int \frac{6x^3+6}{x^3-5x^2+6x}\ \mathrm{d}x$$
(2 body)

a výsledky ověřte zpětnou derivací.

1.
$$\int x\arctan(x)\ \mathrm{d}x \overset{\text{pp}}{=} \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x =$$
$$\frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) = \arctan(x)\frac{x^2+1}{2} - \frac{x}{2} + c.$$

Zk:
$$\left[\arctan(x)\frac{x^2+1}{2} - \frac{x}{2}\right]' = \frac{x^2+1}{2(1+x^2)} + \arctan(x)x - \frac{1}{2} = \arctan(x)x.$$

2.
$$\int x^3e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} x^2 = y \\ 2x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int ye^{-y}\ \mathrm{d}y \overset{\text{pp}}{=}$$
$$\frac{1}{2}\left(-ye^{-y} + \int e^{-y}\ \mathrm{d}y\right) = -\frac{y+1}{2}e^{-y} = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + c.$$

Zk:
$$\left[-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}\right]' = -e^{-x^2} + 2x\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} = x^3e^{-x^2}.$$

3.
$$\int \frac{6x^3+6}{x^3-5x^2+6x}\ \mathrm{d}x$$

Zde použijeme rozklad na parciální zlomky. Před jeho použitím je ale třeba integrad upravit. V čitateli totiž musí být nižší mocnina x, jinak bude rozklad složitější

$$\frac{6x^3+6}{x^3-5x^2+6x} = 6 + 6\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}.$$

Budeme se zabývat rozkladem pouze posledního zlomku, tedy

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{x-3}.$$

Nyní bychom mohli pravou stranu formálně opět převést na jeden zlomek a tak zjistit hodnoty neznámých konstant. Nicméně elegantnější řešení je celou rovnici vynásobit jedním ze jmenovatelů, zkusme například x, tedy

$$\frac{5x^2-6x+1}{(x-2)(x-3)} = \alpha + \frac{\beta x}{x-2} + \frac{\gamma x}{x-3}.$$

Všimneme si, že do této rovnice jde už bez problémů dosadit $x = 0$, což je kořen bývalého jmenovatele. Ten navíc zajistí, že všechny ostatní členy na pravé straně jsou nulové. Tento trik jde použít vždy, když nemá jmenovatel výcenásobné kořeny. Zde tedy dostáváme

$$\alpha = \left[\frac{5x^2-6x+1}{(x-2)(x-3)}\right]_{x=0} = \frac{1}{6}.$$

Podobně jde ukázat $\beta = \frac{5\cdot 4-6\cdot 2+1}{2\cdot(-1)} = -\frac{9}{2}$ a $\gamma = \frac{5\cdot 9-6\cdot 3+1}{3\cdot 1} = \frac{28}{3}$. Tedy

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{1}{6x} - \frac{9}{2}\frac{1}{x-2} + \frac{28}{3}\frac{1}{x-3}.$$

To už můžeme snadno zintegrovat po dosazení do původního příkladu

$$\frac{6x^3+6}{x^3-5x^2+6x} = 6 + 6\left(\frac{1}{6x} - \frac{9}{2}\frac{1}{x-2} + \frac{28}{3}\frac{1}{x-3}\right) = 6 + \frac{1}{x} - \frac{27}{x-2} + \frac{56}{x-3},$$

tedy

$$\int \frac{6x^3+6}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x = 6x + \ln(x) - 27\ln(x-2) + 56\ln(x-3) + c.$$

Zkouška je zde primitivní.