7

Domácí úlohy — sada č. 6

Jméno a příjmení: Zdeněk Tomis

Potřebný čas:

4

1. Rozložte následující matici $\mathbf{A}$ do Jordanova normálního tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^{-1}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -7 \\ -3 & -7 & 8 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a proveďte zkoušku.

$$\det\begin{pmatrix} 2-t & 6 & -7 \\ -3 & -7-t & 8 \\ -1 & -2 & 2-t \end{pmatrix} = -7(4-4t+t^2) - t(4-4t+t^2) + 42 - 48 + 36 - 18t + 49 + 7t$$

$$+32 - 16t = -28 + 28t - 7t^2 - 4t + 4t^2 - t^3 + 27 - 27t =$$

$$= -t^3 - 3t^2 - 3t - 1 = -(t+1)^3 \qquad \boxed{\lambda = -1} \qquad \boxed{u_1 = (2,-1,0)^T}$$

jedno jednonásobné číslo dá 1 J. blok o velikosti 3

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -7 \\ -3 & -6 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$(A+I)u_2 = u_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -7 & 2 \\ -3 & -6 & 8 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 0 & 9 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad v_3 = 1 \qquad v_1 + 2v_2 = 3 \qquad u_2 = (3-2v_2; v_2; 1)^T$$

$$= (3,0,1)^T + t_2(-2;1;0)^T$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -7 & 1 \\ -3 & -6 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 0 & 15 \\ -1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & & 0 \end{array}\right) \qquad v_1 = 5 - 2v_2 \qquad u_3 = (5,0,2)^T + t_3(-2;1;0)^T$$

např.: $t_2 = 1$ $\boxed{u_2 = (1;1;1)^T}$

např. $\boxed{u_3 = (1,2,2)^T}$

$$\boxed{R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Zkouška:

			-1	1	0	0	-1	1
			0	-1	1	2	4	-5
			0	0	-1	-1	-2	3
2	1	1	-2	1	0	2	6	-7
-1	1	2	1	-2	-1	-3	-7	8
0	1	2	0	-1	-1	-1	-2	2

$= A$, sedí.

pokračování na 2. straně

3

2. Zjistěte pro jaká komplexní čísla z je následující matice unitární:

$$A^H = A^{-1} \Rightarrow A^H A = I_2 \qquad A = \begin{pmatrix} z & \bar{z} \\ iz & -i\bar{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{z} & -i\bar{z} \\ z & iz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & \bar{z} \\ iz & -i\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cdot\bar{z} + z\bar{z} & \bar{z}^2 - \bar{z}^2 \\ z^2 - z^2 & z\bar{z} + z\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z\bar{z} & 0 \\ 0 & 2z\bar{z} \end{pmatrix}$$

$2z\bar{z} = 1$

$z\bar{z} = 1/2$

$z = a + bi \quad a,b \in \mathbb{R}$

$z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = 0 + 1/2 = 1/2$ kde $a^2 \geq 0$ a $b^2 \geq 0$

$\Rightarrow (\cancel{a=0 \ \& \ b=0})$

$(\cancel{z=0})$

Pouze pro ( ) je matice unitární.

$z = a + bi$, takové že $a^2 + b^2 = 1/2$ ok