

Domácí úlohy — sada č. 1

Jméno a příjmení: Zdeněk Tomis přezdívkou: ZdeněkPotřebný čas: ~20 minut1b. 1. Určete hodnotu následujícího determinantu nad tělesem \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & \\ \hline 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & \\ \hline 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & \end{array} \right] = \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & \\ \hline 0 & 3 & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \\ \hline 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \xrightarrow{2 \times} \\ \\ \xrightarrow{3 \times} \end{array} = \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \end{array} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = -4 = 1
 \end{aligned}$$

02 ? Kunn. chyba

2. Mějme čtvercovou reálnou matici A řádu 6 takovou, že má všechny prvky kladné kromě $a_{1,1} = a_{6,6} = 0$.
 Představte se, že vyjádříme determinant této matice A podle definice.

Určete, kolik sčítanců v tomto výrazu bude nulových, kolik nenulových sčítanců bude mít kladné znaménko a kolik záporné.

Kolik sčítanců bude nulových?

To odpovídá počtu permutací s prvním bodem v 1, 6, nebo v obou.

Jednoduchým užitím PIE

$$\underbrace{|\{p \in S_6 : p(1)=1 \vee p(6)=6\}|}_{\text{Naše množina } P_{1 \vee 6}} = |\{p \in S_6 : p(1)=1\}| + |\{p \in S_6 : p(6)=6\}| - |\{p \in S_6 : p(1)=1 \wedge p(6)=6\}|$$

$$|P_{1 \vee 6}| = 5! + 5! - 4! = 120 + 120 - 24 = 216$$

Jak jsem k těmto hodnotám došel?

Při reflexování 1/2 bodů nalezneme

některé permutace jako

$\{ \text{perme body} \} \cup S'_n$
 $\underbrace{S'_n}_{\text{přesmenování}} = \text{prvky z } S_n \text{ na jiné}$

A co zbytek sčítance?

Permutace nalezneme jako doplněk $S_6 \setminus P_{1 \vee 6}$

Zamysleme se, že v $P_{1 \vee 6}$ bude stejně jako v S_6 stejný počet permutací s kladnými a zápornými znaménky.

Proč? Vychází to z symetrie uvedení konstrukce $P_{1 \vee 6}$ pomocí PIE.

Přičteme do přehledu přehledu S_5 , to se přehleduje, ale právě o (jednom) přehledu S_4 . Platí $|A_5| = \frac{|S_5|}{2}$ a $|A_4| = \frac{|S_4|}{2}$.

$$\text{Tedy \# nenulových sč.} = 6! - 5! - 5! + 4! = 4! (6 \cdot 5 - 2 \cdot 5 + 1) = 4! \cdot 21$$

Polovina z nich bude kladná, polovina záporná:

$$\left[\begin{array}{l} \# \text{kladných} = \# \text{záporných} = \frac{4! \cdot 21}{2} = 12 \cdot 21 = 252 \\ \# \text{nulových} = 216 \end{array} \right]$$