Řešení domácího úkolu 2

1. Najděte supremum množiny

$$M = \left\{ \sum_{j=1}^{i} \frac{5}{10^j} \right\}_{i=1}^{\infty} = \{0.5, 0.55, 0.555, \dots\}$$

v $\mathbb{Q}$, pokud existuje.

(1 bod)

Začněme vyjádřením i-tého členu příslušné množiny

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{5}{10^j} = 5 \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{10^j} = \frac{5}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^{i+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{5}{10} \frac{1}{10^{i+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9} - \frac{5}{9 \cdot 10^{i+1}}.$$

Druhý člen je rostoucí funkcí i a první člen je konstantní a je to hledané supremum. Abychom to ukázali, predpokládejme, že $\sup\{M\} = \frac{5}{9} - \epsilon < \frac{5}{9} = 0.\overline{5}$. V takovém případě dostaneme spor, protože takové nové supremum musí mít na nějaké pozici číslici menší než 5. Nazvěme nejmenší takovou číslici k. Potom ale k-tý člen M je nutně větší, protože má na k-té pozici číslici 5.

Zároveň ale M neobsahuje členy větší než $\frac{5}{9}$, protože $\forall i \in \mathbb{N} : -\frac{5}{9 \cdot 10^{i+1}} < 0$. Skutečně tedy dostáváme $\sup\{M\} = \frac{5}{9}$.

2. Najděte supremum, infimum, maximum a minimum množiny

$$N = \left\{ \frac{p}{p+q} \mid p \in \mathbb{N},\ \ q \in \{1, \dots 5\} \right\}$$

v $\mathbb{R}$, pokud existuje. Výsledky zdůvodněte.

(2 body)

Začněme analýzou hodnot, kterých může zlomek nabývat. Protože $q \geq 1$, platí

$$\frac{p}{p+q} \leq \frac{p}{p+1} < \frac{p}{p} = 1,$$

tedy všechny členy množiny jsou menší než jedna. Zároveň protože $p, q > 0$, všechny členy jsou kladné, tedy

$$\forall a \in N :\ \ 0 < a < 1.$$

Začněme diskuzí spodních odhadů, tedy minima a infima. Členy jde upravit na

$$\frac{p}{p+q} = \frac{p+q-q}{p+q} = 1 - \frac{q}{p+q}. \tag{1}$$

Druhý člen je klesající fcí funkcí p, jak jde ukázat pomocí

$$\begin{aligned} \frac{p}{p+q} &< \frac{p+1}{p+1+q}, \\ p(p+1+q) &< (p+1)(p+q), \\ p^2 + p + qp &< p^2 + 1 + q + pq, \\ 0 &< 1. \end{aligned}$$

Tedy minimum dostaneme (pokud existuje) pro $p = 1$. Pokud se podíváme na původní výraz zjistíme, že je klesající fcí[1] q, tedy maximum nastane pro největší hodnotu q, kterou je[2] $q = 5$, protože $q \in \{1, \dots 5\}$. Tedy

$$\min(N) = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}.$$

Protože minimum existuje, je to zároveň infimum, tedy $\inf(N) = \min(N)$.

Horní hranice se bude dělat podobně. Už víme, že všechny členy jdou odhadnout shora jednotkou. Platí tedy $\sup(N) \leq 1$. Uvažujme pro spor $\sup(N) = 1 - \epsilon$ pro nějaké $\epsilon > 0$, tedy tvrdíme

$$\forall p \in \mathbb{N},\ q \in \{1, \dots 5\} : 1 - \epsilon \geq \frac{p}{p+q} = 1 - \frac{q}{p+q}.$$

To je ale spor, protože odtud plyne

$$\epsilon \leq \frac{q}{p+q}.$$

Pokud ale uvažujeme fixní q, může pravá strana být libovolně malá a tedy porušit nerovnost pro libovolné $\epsilon > 0$. Skutečně, např. pro $q = 1$ dostaneme rovnost pro[3]

$$\epsilon = \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow p = \frac{1}{\epsilon} - 1$$

a pro větší p už nerovnost neplatí. Skutečně např. pro $p = \frac{1}{\epsilon}$ dostaneme

$$\frac{1}{p+1} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} + 1} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \epsilon.$$

Odtud plyne, že horní odhad množiny nejde snížit o libovolné $\epsilon > 0$, tedy nejmenší horní závorou je jednotka a tedy $\sup(N) = 1$. To je hodnota, kterou ale nemá žádný z členů N a to napovídá, že maximum nebude existovat. To je vskutku pravda, jak je vidět z přepisu

$$\frac{p}{p+q} = 1 - \frac{q}{p+q}.$$

Se zvětšujícím p členy rostou a tedy neexistuje p, pro které by měl člen maximální velikost. Člen příslušející $p + 1$ bude vždy větší (pro dané q).

[1] To je vidět z (1), protože na pravé straně po záměně $p \leftrightarrow q$ dostaneme přesně výraz, jehož monotonii jsme právě zkoumali.

[2] Pokud by q bylo přirozené, minimum nebude existovat.

[3] Tohle nemusí opět být přirozené číslo, ale to není pro diskuzi podstatné. Prostě najdeme přirozené číslo větší než je tahle hranice.