Řešení domácího úkolu 5

1. Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řad pro $x \in \mathbb{R}$

   (a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

   (b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+\cos(n)}{3+\cos(n)} \right)^{2n-\ln(n)}.$$

   (3 body)

(a) V prvním kroku si uvědomíme, že pro $|x| > 1$ nesplňuje řada nutnou podmínku konvergence. Dále vyšetřujme absolutní konvergenci. Pro $|x| < 1$ máme odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1},$$

což je geometrická řada (resp. jen její liché členy), která pro tato x konverguje. Protože absolutní konvergence implikuje neabsolutní, konverguje řada i neabsolutně.

Konečně nám tedy zbývá vyřešit případ $x = \pm 1$. Je vidět, že $(\pm x)^{2n+1} = \pm x^{2n+1}$, tedy co se konvergence týče se řady budou chovat stejně. Zvolme tedy $x = 1$ pro které

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

na což jde použít Dirichletovo kritérium. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ má omezené částečné součty, členy řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ jsou klesající a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}$. Odtud tedy dostáváme, že řada konverguje. Nicméně nekonverguje absolutně, což jde snadno zjistit pomocí srovnávacího kritéria s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje.

Později se dozvíme, že toto je Taylorova řada pro $\arctan(x)$ kolem $x = 0$. A je z toho pozorování rovnou vidět, že Taylorova řada nemusí konvergovat všude, kde je daná funkce definovaná!

(b) Je výhodné si uvědomit, že členy řady jsou nezáporné, takže absolutní konvergence je zde to samé jako neabsolutní. Dále jde využít odhad

$$\frac{2+\cos(n)}{3+\cos(n)} = 1 - \frac{1}{3+\cos(n)} \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Odtud přímo plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+\cos(n)}{3+\cos(n)} \right)^{2n-\ln(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{2n-\ln(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{2n},$$

což je vlastně geometrická řada. Její konvergence by šla snadno vyšetřit např. odmocninovým kritériem.

2. Rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{n}.$$
(2 body)

Řada jde s výhodou rozdělit na dvě
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((n+1)x)}{n}.$$
Na každou jde použít Dirichlet s tím, že $\cos(nx)$ má omezené částečné součty $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. V těchto bodech si musíme dát pozor. Zde má ale původní řada tvar
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$
Řada tedy konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$.

Aternativní postup spočívá v tom, že si napíšeme
$$\sum_{n=1}^{k} \cos(nx) - \cos((n+1)x) = \cos(x) - \cos(2x) + \cos(2x) - \cos(3x) \ldots - \cos((k+1)x) = \cos(x) - \cos((k+1)x),$$
podobně jako se to podaři u dalších teleskopických řad. Proto je rovnou vidět, že $\forall k$ bude tato suma omezená a tedy $\cos(nx) - \cos((n+1)x)$ má omezené částečné součty. Pak jde použít Dirichleta na celou řadu.

Co se absolutní konvergence týče, jde s výhodou použít vzorec (který se dal použít i dříve)
$$\cos(nx) - \cos((n+1)x) \overset{\text{Wolfram}}{=} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right),$$
tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{n} \right| = \left|2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)\right|}{n}.$$
Situace se zjednoduší pro některé hodnoty x. Pro $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ dostáváme součet nul, tedy řada konverguje. Pro $x = 2k\pi \pm \pi, k \in \mathbb{Z}$ dostáváme
$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\pm 1)^n|}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
což diverguje. Pro zbylé hodnoty použijeme podílové kritérium, které dává
$$\left| \frac{\frac{\sin\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right)}{n+1}}{\frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{n}} \right| = \left| \frac{\sin\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)} \right| \left| \frac{n}{n+1} \right|.$$
Druhý člen se v limitě chová jako 1, takže se zaměříme pouze na první. Je jasné, že $\forall x$ které jsme nevyšetřovali výš nebude existovat n takové, že $\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) = 0$. To platí díky tomu, že $k\pi$ je iracionální číslo a tedy "nikdy neobejdeme celý kruh". Ale $\forall x$ najdeme n tak, že $\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) < \epsilon$, protože jde udělat libovolně přesnou aproximaci iracionálního čísla. Taková n budou libovolně velká, příslušející libovolně přesné aproximaci. Čitatel zlomku bude v tomto případě něco daleko od nuly[1], protože
$$\sin\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right) = \underbrace{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}_{<\epsilon}\cos(x) + \underbrace{\cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}_{\text{blízko } \pm 1, \text{ protože } nx + \frac{x}{2} \approx k\pi}\sin(x) \approx \sin(x).$$
Můžeme tedy najít n takové, že člen se bude chovat jako $\frac{1}{\epsilon}$, což může být libovolně velké. Proto *si myslím*, že pro jiná x řada absolutně konvergovat taky nebude.

[1]Pokud fixujeme x, je $\sin(x)$ prostě konstanta. Tedy pokud dokážeme podlézt libovolné ϵ, může být podíl libovolně velký.