

Jméno a příjmení:

Potřebný čas:

1. V \mathbb{R}^3 určete ortogonální doplněk množiny $\{(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T, (7, 8, 9)^T\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu danému předpisem $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. Doplňte hodnoty parametrů a, b a c kde $a, b \geq 0$ tak, aby následující zobrazení f bylo izometrií mezi podprostory dimenze 2 v \mathbb{R}^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na \mathbb{R}^3 :

$$f((4, 1, 3)^T) = (1, 0, a)^T, f((1, 2, 4)^T) = (3, b, c)^T$$

Vypracování domácí úlohy č. 9 z předmětu Lineární algebra 2

Jméno: Zdeněk Tomis

Potřebný čas: ~ 1 hod

1

Skalární součin musí být roven nule, tedy se podíváme na soustavu tří rovnic a nalezneme jejich řešení.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$(1, 2, 3)A = (4, 2, 1) \quad (1)$$

$$(4, 5, 6)A = (13, 8, 1) \quad (2)$$

$$(7, 8, 9)A = (22, 12, 1) \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 13 & 8 & 1 \\ 22 & 14 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 13 & 8 & 1 \\ 22 & 14 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 18 & 12 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{3}{2}x_1 \\ x_3 &= -x_1 \end{aligned}$$

$$x = p \cdot \left(1, -\frac{3}{2}, -1\right)^T = t \cdot (-2, 3, 2)^T$$

Pro parametry p, t

Ortogonální doplněk množiny

$$(\text{Zadaná množina})^\perp = \text{span}((-2, 3, 2)^T)$$

2

Máme čtyři skalární součiny, se kterými můžeme pracovat. Protože se pohybujeme v reálném skalárním součinu, dva z nich jsou shodné, máme tedy tři rovnice.

$$\langle (4, 1, 3)^T | (4, 1, 3)^T \rangle = \langle f((4, 1, 3)^T) | f((4, 1, 3)^T) \rangle \quad (1)$$

$$\implies 26 = a^2 + 1 \stackrel{a \geq 0}{\implies} a = 5$$

$$\langle (4, 1, 3)^T | (1, 2, 4)^T \rangle = \langle f((4, 1, 3)^T) | f((1, 2, 4)^T) \rangle \quad (2)$$

$$\implies 18 = \langle (1, 0, a)^T | (3, b, c)^T \rangle = 3 + ac$$

$$15 = ac$$

Můžeme dosadit

$$c = 3$$

$$\langle (1, 2, 4)^T | (1, 2, 4)^T \rangle = \langle f((1, 2, 4)^T) | f((1, 2, 4)^T) \rangle \quad (3)$$

$$\implies 21 = 9 + b^2 + c^2$$

Dosadíme

$$b = \sqrt{3}$$

$$(a, b, c) = (5, \sqrt{3}, 3)$$