Řešení domácího úkolu 4

Spočtěte následující limity

1.
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}+n),$$

(3 body)

Jak se říká v nápovědě, existují dva rozumně vypadající začátky. V prvním kroku je třeba se zbavit rozdílu odmocnin pomocí $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Je ale otázka, ak zvolit a a b. Nabízí se

$$\underbrace{\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}}_{a}+\underbrace{n}_{b} \qquad \text{nebo} \qquad \underbrace{\sqrt{n^2+2n}}_{a}-\underbrace{(2\sqrt{n^2+n}-n)}_{b}.$$

Ani jeden z nich není hezký, protože výsledek bude stále obsahovat odmocninu.

Zkusme nyní první z možností. Dak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}+n)=$$
$$\lim_{n\to\infty} n\frac{n^2+2n-4\sqrt{n^2+2n}\sqrt{n^2+n}+4(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}-n}=$$
$$\lim_{n\to\infty} n\frac{4n^2+6n-4\sqrt{n^2+2n}\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}-n}=$$
$$\lim_{n\to\infty} n^2\frac{4+\frac{6}{n}-4\sqrt{1+\frac{2}{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}.$$

Jmenovatel je v limitě konečný, ale v čitateli je v limitě nula a před zlomkem ∞, tedy máme nedefinovaný výraz. Budeme se tedy muset znovu zbavit odmocniny, což uděláme opět pomocí stejného triku

$$\lim_{n\to\infty} n^2\frac{4+\frac{6}{n}-4\sqrt{1+\frac{2}{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}=$$
$$\lim_{n\to\infty} n^2\frac{\left(4+\frac{6}{n}\right)^2-16\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(4+\frac{6}{n}+4\sqrt{1+\frac{2}{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=$$
$$\lim_{n\to\infty} n^2\frac{16+\frac{48}{n}+\frac{36}{n^2}-16\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(4+\frac{6}{n}+4\sqrt{1+\frac{2}{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=$$
$$\lim_{n\to\infty} n^2\frac{\frac{36}{n^2}-\frac{32}{n^2}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(4+\frac{6}{n}+4\sqrt{1+\frac{2}{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(4+\frac{6}{n}+4\sqrt{1+\frac{2}{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=$$
$$\frac{4}{-2\cdot 8}=-\frac{1}{4}.$$

Nyní se podívejme na druhý přístup

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n} - 2\sqrt{n^2+n} + n) &= \\
\lim_{n\to\infty} n\frac{n^2+2n-(4(n^2+n)-4n\sqrt{n^2+n}+n^2)}{\sqrt{n^2+2n}+2\sqrt{n^2+n}-n} &= \\
\lim_{n\to\infty} 2n\frac{-2n^2-n+2n\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+2n}+2\sqrt{n^2+n}-n} &= \\
\lim_{n\to\infty} -2n^2\frac{2+\frac{1}{n}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1} &\overset{*}{=} \\
\lim_{n\to\infty} -2n^2\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-4\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(2+\frac{1}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(2+\frac{1}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} &= \\
\frac{-2}{2\cdot 4} &= -\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

kde jsme v $\overset{*}{=}$ použili $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ jako v prvním postupu.

Oba postupy jsou problematické v tom, že nám zbyde odpocnina po první úpravě a jsme nuceni použít vzorec znovu. Tohu se na první pohled půjde vyhnout, pokud použijeme rozklad

$$
\underbrace{\sqrt{n^2+2n}}_{a} - \underbrace{\sqrt{n^2+n}}_{b} + \underbrace{n}_{a} - \underbrace{\sqrt{n^2+n}}_{b},
$$

který vede na výpočet

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n} - 2\sqrt{n^2+n} + n) &= \\
\lim_{n\to\infty} n\frac{n^2+2n-n^2-n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}} + n\frac{n^2-n^2-n}{n+\sqrt{n^2+n}-n} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}} - \frac{n^2}{n+\sqrt{n^2+n}} &= \\
\lim_{n\to\infty} n^2\frac{n+\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n^2+2n}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} &\overset{*}{=} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n^2-2n}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)(n+\sqrt{n^2+2n})} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)} &= \\
\frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2} &= -\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

Nejelegantnější řešení[1] spočívá v rozpisu

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}+n) &= \\
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)+n\left((2n+1)-2\sqrt{n^2+n}\right) &= \\
\lim_{n\to\infty} n\frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{\sqrt{n^2+2n}+n+1}+n\frac{(4n^2+4n+1)-2n^2-2n}{2n+1+2\sqrt{n^2+n}} &= \\
\lim_{n\to\infty} n\frac{-1}{\sqrt{n^2+2n}+n+1}+n\frac{1}{2n+1+2\sqrt{n^2+n}} &= \\
\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{1}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}} &= \\
-\frac{1}{2}+\frac{1}{2+2} &= -\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

Krása tohohle rozkladu spočívá přesně v tom co je vidět - hned po prvním použití vzorce zmizí všechny odmocniny. Je tedy třeba doplnit závorky tak, aby se mocnina toho co doplníme lišila od výraz pod odmocninou jen v absolutním členu. A jediná otázka je, jestli to jde udělat u obou výrazů zároveň, což je náš případ.

Na závěr ukažme rozklad, který sice funguje, ale je určitě nejhorší

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\underbrace{\sqrt{n^2+2n}}_{a}-\underbrace{2\sqrt{n^2+n}}_{b}+n) &= \\
\lim_{n\to\infty} n^2+n\frac{n^2+2n-4(n^2+n)}{\sqrt{n^2+2n}+2\sqrt{n^2+n}} &= \\
\lim_{n\to\infty} n^2-n^2\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+2n}+2\sqrt{n^2+n}} &= \\
\lim_{n\to\infty} n^2\frac{\sqrt{n^2+2n}+2\sqrt{n^2+n}-3n-2}{\sqrt{n^2+2n}+2\sqrt{n^2+n}} &=
\end{aligned}
$$

nyní použijeme analog prvního rozkladu

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2\frac{\sqrt{n^2+2n}-(3n+2-2\sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+2n}+2\sqrt{n^2+n}} &\overset{\text{Wolfram}}{=} \\
\lim_{n\to\infty} n^2\frac{2(3n+2)(-2n+2\sqrt{n^2+n}-1)}{(\sqrt{n^2+2n}+2\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+2n}+(3n+2-2\sqrt{n^2+n}))} &= \\
\lim_{n\to\infty} 2(3n+2)\frac{2\sqrt{n^2+n}-(2n+1)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+(3+\frac{2}{n}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}})\right)} &= \\
\lim_{n\to\infty} 2(3n+2)\frac{4n^2+4n-(4n^2+4n+1)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3+\frac{2}{n}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)(2\sqrt{n^2+n}+2n+1)} &= \\
\lim_{n\to\infty} 2\left(3+\frac{2}{n}\right)\frac{-1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3+\frac{2}{n}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(2\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2+\frac{1}{n}\right)} &= \\
2\cdot 3\frac{-1}{(1+2)\,(1+3-2)\,(2+2)} &= \\
\frac{-6}{3\cdot 2\cdot 4} &= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

[1] Kredit připadá jednomu ze studentů.

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n + (\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor)^3}{2n - \lfloor \sqrt{5n+5} \rfloor}.$$

(2 body)

Základním (a vlastně jediným) krokem je uvědomit si, jak bude fungovat spodní celá část. Spodní celá část je určitě menší, nebo rovna původní veličině. Zároveň ale jistě platí, že nemůže být nemší o víc jak 1, protože pouze zaokrouhlíme dolů. Platí tedy

$$x \geq \lfloor x \rfloor \geq x - 1.$$

Víme ale, že aditivní konstanty nemusí výsledek vůbec ovlivnit a to je náš případ zde. Použijeme tedy tyto odhady jako policajty, což je ale třeba udělat opatrně. V čitateli je situace snadná, protože pokud použijeme hodní odhad, může se celý výraz jen zvětšit, tedy

$$\frac{9n + (\sqrt[3]{n})^3}{2n - \lfloor \sqrt{5n+5} \rfloor} \geq \frac{9n + (\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor)^3}{2n - \lfloor \sqrt{5n+5} \rfloor} \geq \frac{9n + (\sqrt[3]{n} - 1)^3}{2n - \lfloor \sqrt{5n+5} \rfloor}.$$

Ve jmenovateli ale musíme dávat pozor, ale díky zápornému znaménku zvětšení druhého členu způsobí zmenšení jmenovatele a zvětšení celého výrazu[2], tedy platí i

$$\frac{9n + (\sqrt[3]{n})^3}{2n - (\sqrt{5n+5} - 1)} \geq \frac{9n + (\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor)^3}{2n - \lfloor \sqrt{5n+5} \rfloor} \geq \frac{9n + (\sqrt[3]{n} - 1)^3}{2n - \sqrt{5n+5}}.$$

Obě krajní limity jsou už snadné

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n + (\sqrt[3]{n})^3}{2n - \sqrt{5n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9 + 1}{2 - \sqrt{\frac{5n+5}{n^2}}} = 5,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n + (\sqrt[3]{n} - 1)^3}{2n - (\sqrt{5n+5} - 1)} = \frac{9n + (n - 3\sqrt[3]{n^2} + 3\sqrt[3]{n} - 1)}{2n - \sqrt{5n+5} + 1} = \frac{9 + (1 - 3n^{-\frac{1}{3}} + 3n^{-\frac{2}{3}} - n^{-1})}{2 - \sqrt{\frac{5n+5}{n^2}} + \frac{1}{n}} = 5.$$

Tedy z Věty o dvou policajtech platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n + (\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor)^3}{2n - \lfloor \sqrt{5n+5} \rfloor} = 5.$$

[2] Ano, pro malá n se může stát, že bude výraz záporný a tedy se v absolutní hodnotě nezvětší. Jak ale víme, limita posloupnost nezávisí na konečném počtu členů. Můžeme tedy s klidným srdcem zapomenou například na prvních 5! členů a potom už bude výraz kladný, protože $\sqrt{5n+5}$ je $o(n)$.