Řešení domácího úkolu 9

1. Určete hodnotu

$$(26)^{\frac{1}{3}}$$

na tři desetinná místa.

(1 bod)

Uvědomíme si, že $\sqrt[3]{26} = \sqrt[3]{27-1} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{1-\frac{1}{27}} = 3\sqrt[3]{1-\frac{1}{27}}$. Nyní tedy stačí použít Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ kolem $x = 0$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(0) &= \left(-\frac{1}{3}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\right)_{x=0} = -\frac{1}{3}, \\ f''(0) &= \left(-\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right)_{x=0} = -\frac{2}{9}, \\ f^{(3)}(0) &= \left(-\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{5}{3}(1-x)^{-\frac{8}{3}}\right)_{x=0} = -\frac{10}{27}, \\ &\dots \end{aligned}$$

tedy

$$T_2^{f,0} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}\frac{x^2}{2!} + o(x^2).$$

Odtud rovnou dostaneme i tvar chyby

$$R_2^{f,0} = \frac{10}{27}(1-c)^{-\frac{8}{3}}\frac{x^3}{3!},$$

pro $c \in \left[0, \frac{1}{27}\right]$. Buďto bychom mohli udělat průběh fce pro zjištění charakteru této chyby v závislosti na c, ale není to třeba. Pokud totiž prostě uděláme derivaci v c, dostaneme kladné číslo, tedy je rostoucí a největší hodnotu dostaneme pro $c = \frac{1}{27}$. Potom

$$T_2^{f,0}\left(\frac{1}{27}\right) \pm R_2^{f,0}\left(\frac{1}{27}\right) = 0.987502 \pm 0.000009.$$

Tento rozvoj musíme přenásobit trojkou, abychom dostali hledanou odmocninu

$$3\sqrt[3]{1-\frac{1}{27}} = 2.96251 \pm 0.00003$$

Správná hodnota[1] je

$$(26)^{\frac{1}{3}} = 2.962496\dots$$

Při určení chyby jsme ale udělali argument kruhem - pro její spočtení jsme totiž museli vyčíslit $\sqrt[3]{26}$ a to chceme zjistit. Proto bychom rádi chybu odhadli chybu něčím větším, co umíme spočítat přesně. Označme $c = \frac{a}{b}$, kde chceme $c > \frac{1}{27}$ a $1 - c = \frac{b-a}{b}$, tedy b a $b-a$ napsat ve tvaru perfektních "krychlí". Zkusme $\frac{19}{27}$, pro které

$$R_2^{f,0} = \frac{10}{27}\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{8}{3}}\frac{x^3}{3!} = \frac{10}{27}\left(\frac{3}{2}\right)^8\frac{x^3}{3!},$$

tedy $R_2^{f,0}\left(\frac{1}{27}\right) = 0.00008$, což je dost malé.

[1] Neboli co vyhodí Wolfram potom co v pozadí sečte mnhoo členů Taylorova rozvoje.

2. Spočtěte následující limity

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - \sin(x) - \cos(x) + \ln(1-2x)}{\cos(5x) - 1},$$

(1 bod)

Použijeme známé řady z užitečných vztahů

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\
\cos(ax) &= 1 - \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^4x^4}{4!} - \dots \\
e^{3x} &= 1 + 3x + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \dots \\
\ln(1-2x) &= -2x - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} - \dots
\end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - \sin(x) - \cos(x) + \ln(1-2x)}{\cos(5x) - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + 3x + \frac{9x^2}{2} - x - 1 + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{25x^2}{2} - 1 + o(x^3)} = \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{25x^2}{2} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{6 + o(1)}{-25 + o(x)} = -\frac{6}{25}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} \right),$$

(2 body)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2} \right) &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 - x^2}{x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - x^2}{x^2 \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2 \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1 - \frac{x^2}{3} + o(1)} \right) = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3. Cena cenného papíru závisí na čase t podle

$$p = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{t+1}\right) - \arctan(t),$$

kde $t = 0$ je "přítomnost". Pomocí Taylorovi aproximace do prvního řádu odhadněte cenu zítra (tj. $t = 1$) a podle toho řekněte, jestli se vyplatí dnes papír koupit a zítra prodat.

V téhle úloze si představujeme, že z nějakého důvodu neumíme/nechceme přímo vyčíslit $p(1)$. Vaše řešení by tak nemělo $p(1)$ používat jinak než pro případnou kontrolu.

(2 body)

Cílem této úlohy bylo použít Taylorův rozvoj na odhad ceny papíru zítra bez toho, aby člověk musel dosazovat $t = 1$. V praxi by nás takováhle situace mohla potkat např. v situaci, kdy cenu p opravdu neumíme/nechceme vyčíslit v $t = 1$. Např. protože je to moc náročné, nebo protože víme, že nás vzorec stejně platí jen v okolí $t = 0$. Proto uděláme rozvoj a to jen do prvního řádu

$$T_1^{p,0}(t) = p(t=0) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t=0)t,$$

kde

$$\begin{aligned} p(t=0) &= \frac{5\sqrt{3}}{2} + 0 \approx 4.33, \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t=0) &= \frac{5\pi}{12} - 1 \approx 0.31. \end{aligned}$$

Tedy

$$T_1^{p,0}(t) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5\pi}{12} - 1\right)t,$$

což (protože derivace p je kladná) říká, že cena bude stoupat a tedy papír by se mělo vyplatit koupit.

Nicméně když se člověk podívá na chybu Taylorova rozvoje, tak (Wolfram napoví, že maximální hodnota[2] druhé derivace je v $t = 0$)

$$R_1^{p,0}(t) = -\frac{1}{2!}\frac{5(\pi\sqrt{3} + \pi^2)}{24\sqrt{3}}t \approx -0.92t,$$

což je výrazně větší než náš výdělek předpovězený Taylorem. A skutečně pokud do daného vzorce dosadíme, tak vyjde $p(1) < p(0)$.

[2]Přesněji řečeno jde o minimum, ale u chyby nás přirozeně zajímá především absolutní hodnota. Záporná hodnota už ale naznačuje, že Taylor nadhodnocuje.