35

Domácí úlohy — sada č. 5

Jméno a příjmení: Zdeněk Tomis

Potřebný čas:

4

15 1. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory následující matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2-t & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -t & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3-t \end{vmatrix}$$

Rozhodněte, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$$= (2-t)\begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 3 & -t & 1 \\ 1 & 4 & 3-t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & -t & 1 \\ 0 & 4 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= (2-t)^2 \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 4 & 3-t \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 4 & 3-t \end{vmatrix} = (-4t+t^2)(t^2-3t-4)$$

$$= t(t-4)(t-4)(t-1)$$

$$= t(t-4)^2(t-1) = \underline{\underline{t(t+1)^3}}$$

0Σ

Ověříme, jestli je $\lambda = 4$, geom. trojnásobné.

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2+1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0+1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní číslo je ve skutečnosti pouze 1-násobné, tudíž matice není diagonalizovatelná.

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 0$

pokračování na 2. straně

25.

p_A

2. V tělese $\mathbb{Z}_{11}$ spočítejte $\mathbf{A}^{1000}$ (neboli tisící mocninu matice $\mathbf{A}$) pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 0$

$x_3 = x_3$

$x_2 = -2x_3 = 9x_3$

$x_1 = -10x_3 = x_3$

$v_3 = (1, 9, 1)$ ok

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 3 & 4-t & 4 \\ 5 & 6 & 7-t \end{vmatrix} = (1-t)(4-t)(7-t) + 40 + 36 + 24(t-1) + 15(t-4) + 6(t-7)$$

$$= 28 - 28t - 7t - 4t + 12t^2 - t^3 + 10 + 24t - 24 + 15t - 16 + 6t - 42$$

$$= -t^3 + 2t + t^2 = 10t^3 + t^2 + 2t = t(10t^2 + t + 2)$$

$D = 1 - 4 \cdot 20 = -39 = -6 = 5 \qquad \sqrt{5} = 4$

$\dfrac{-1 \pm 4}{20}$, $\dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} = 4$ ok, $\dfrac{-5}{20} = -\dfrac{1}{4} = -3 = 8$

$\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = x_3$

$x_2 = -4x_3 = 7x_3$

$x_1 = -x_3 = 10x_3$

$v_2 = (10, 7, 1)^T$

$\lambda_1 = 8$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = x_3$

$x_2 = -x_3 = 10x_3$

$x_1 = -3x_3 = 8x_3$

$v_1 = (8, 10, 1)^T$ ok

$AR = RD \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 10 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$R^{-1} \ldots \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 10 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 7 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 10 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = RDR^{-1}$

$A^{1000} = (RDR^{-1})^{1000} = RD^{1000}R^{-1}$

$3^5 = 27 \cdot 9 = 5 \cdot 9 = 45 =$

$4^{1000} = 5^{500} = 3^{250} = 1^{50} = 1$

$8^{1000} = 9^{500} = 4^{250} = 5^{125} = 1^{25}$

$5^5 = 25 \cdot 25 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 1$

			1	0	0	2	9	5
			0	1	0	1	4	7
				0		8	9	0
8	10	1	8	10	0	4	2	0
10	7	9	10	7	0	5	8	0
1	1	1	1	1	0	3	2	1

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$