75.

Domácí úlohy — sada č. 8

Jméno a příjmení: Zdeněk Tomis

Potřebný čas: ~ 1 hod

1. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte ortonormální bázi řádkového prostoru následující matice

45.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 2 \\ -6 & 4 & -8 & 3 \\ 8 & 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poté získanou bázi doplňte na ortonormální bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$.

Použijme jako bázi $\mathcal{R}(A)$ vektory $X = \{(2;0;0;1)^T; (0;1;-2;0)^T\}$

Tuto bázi ortonormalizujme pomocí Gram-Schmidtovy ortonormalizace:

① $\|x_1\| = \sqrt{5}$ $\quad x_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;0;0;1)^T$

② $w_2 = x_2 - \langle x_2 | x_1' \rangle x_1'$ .. Ve stand. sk. součinu jsou vektory již kolmé od pohledu.

$\|x_2\| = \sqrt{5}$ $\quad x_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(0;1;-2;0)^T$

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad \frac{\sqrt{5}}{6}$

Tedy nalezená ortonormální báze $\mathcal{R}(A)$ $\boxed{X' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2;0;0;1)^T; \frac{1}{\sqrt{5}}(0;1;-2;0)^T\right)}$

OK

Pro nalezení báze $\mathbb{R}^4$ Y naši bázi doplníme a dokončíme ortonormalizaci

Víme, že $|Y| = 4$, tedy doplníme dva vektory. Vidíme, že např. vektory $(0;0;1;0)^T$ a $(0;0;0;1)^T$ jsou s vektory X, resp. X'. lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi.

③ $w_3 = x_3 - \underbrace{\langle x_3 | x_1' \rangle x_1'}_{0} - \langle x_3 | x_2' \rangle x_2' = (0;0;1;0)^T - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(0;1;-2;0)^T$

$= (0; \frac{2}{5}; \frac{1}{5}; 0)^T$ $\quad$ Zkouška: $w_3 \perp x_1'$ triv. $\quad w_3 \perp x_2'$ ✓ $\qquad \|w_3\| = \sqrt{\frac{4+1}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$x_3' = \sqrt{5}(0; \frac{2}{5}; \frac{1}{5}; 0)^T = \frac{1}{\sqrt{5}}(0;2;1;0)^T$

④ bez výpočtu: omezujeme se na 2 kanonické dimenze ... stačí „prohodit" souřadnice a u jedné použít opačnou hodnotu:

$x_4' \perp \frac{1}{\sqrt{5}}(1;0;0;-2)^T$. Tato jakoby poučka vychází z výpočtu a její správnost lze snadno ověřit. Normu vektoru jsme nezměnili.

pokračování na 2. straně

Nalezená báze $\mathbb{R}^4$: $\boxed{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}(2;0;0;1)^T; \frac{\sqrt{5}}{5}(0;1;-2;0)^T; \frac{\sqrt{5}}{5}(0;2;1;0)^T; \frac{\sqrt{5}}{5}(1;0;0;-2)\right)}$ OK

Pěkné.

2. Najděte $\mathbf{x}'$ takové, že minimalizuje $||\mathbf{A}\mathbf{x}' - \mathbf{b}||$, kde

34.

$$\begin{array}{c} \quad\;\; 4 \quad\; 2 \quad\;\; 0 \quad -3 \quad\; 1 \\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \end{array} \qquad \mathbf{b} = (26, 5, 34, -18, -30, -13)^T$$

Určete také hodnotu $||\mathbf{A}\mathbf{x}' - \mathbf{b}||$. (Jde o normu vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu).

Nalezneme ortogonální projekci b' vektoru b ~~do~~ na $\mathcal{L}(A)$, pak již $Ax' = b'$ bude mít řešení, s minimální chybou. Nejdříve musíme nalézt ortonorm. bázi $\mathcal{L}(A)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -13 & -5 & -11 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & 13 & 5 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -32 & -25 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 13 & 5 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & -48 \end{pmatrix}$$

Vektory jsou LN.

kontrola nebyla potřeba G-S algoritmus by vytvořil nulový vektor.

G-S: $||x_1|| = \sqrt{9+4+1+1+9} = \sqrt{25} = 5$

① $x_1' = \frac{1}{5} x_1$

② $x_2'' = x_2 - \langle x_2 | x_1' \rangle x_1' = x_2$

$||x_2''|| = 2\sqrt{6}$ $\quad x_2' = \frac{1}{5} x_2$

③ $x_3'' = x_3 - \underbrace{\langle x_3 | x_1' \rangle}_{0} x_1' - \underbrace{\langle x_3 | x_2' \rangle}_{0} x_2'$

$||x_3''|| = 2\sqrt{6}$ $\quad x_3' = \frac{1}{5} x_3$

④ $x_4' = \frac{1}{5} x_4$ $\qquad$ ⑤ $x_5' = \frac{1}{5} x_5$

U ④ a ⑤ jsem kolmost ověřil bez zapsání ok

Nyní spočítáme ortogonální projekci b do $\mathcal{L}(A)$:

$\langle b | x_i' \rangle =$ 1) 100 $\quad$ 5) 25 $\quad$ vždy $\cdot \frac{1}{5}$

2) 50 $\quad$ 3) 0 $\quad$ 4) −75

$P_X(b) = (16, 15, 4, 12, -10, -3)$

Pro nalezení x' řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 & 16 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 & 15 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 & 12 \\ 1 & -3 & 1 & 3 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x' = (4, 2, 0, -3, 1)^T$ ok

$||b' - b|| = 50$ ok