Řešení domácího úkolu 7

1. Zderivujte následující funkci podle x (a zkuste použít počítač maximálně pro kontrolu)

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{x+5} + \frac{5}{\sin(x)}\right) e^{5\ln(x^5+1)+x^5}.$$

(2 body)

Funkci přepíšeme na

$$f(x) = \underbrace{\arctan\left(\sqrt{x+5} + \frac{5}{\sin(x)}\right)}_{g} \underbrace{(x^5+1)^5}_{h} \underbrace{e^{x^5}}_{l},$$

kde použijeme vzorec na derivaci součinu[1] ve tvaru $(ghl)' = g'hl + gh'l + ghl'$. To dá

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x+5} + \frac{5}{\sin(x)}\right)^2} \left(\sqrt{x+5} + \frac{5}{\sin(x)}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}} - \frac{5\cos(x)}{\sin^2(x)}}{1 + \left(\sqrt{x+5} + \frac{5}{\sin(x)}\right)^2},\\
h'(x) &= 5(x^5+1)^4(x^5+1)' = 25x^4(x^5+1)^4,\\
l'(x) &= e^{x^5}(x^5)' = 5x^4e^{x^5}.
\end{aligned}$$

Odtud tedy už snadno

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}} - \frac{5\cos(x)}{\sin^2(x)}}{1 + \left(\sqrt{x+5} + \frac{5}{\sin(x)}\right)^2}(x^5+1)^5e^{x^5} + \arctan\left(\sqrt{x+5} + \frac{5}{\sin(x)}\right) 25x^4(x^5+1)^4e^{x^5} +\\
\arctan\left(\sqrt{x+5} + \frac{5}{\sin(x)}\right)(x^5+1)^5 5x^4e^{x^5}.
\end{aligned}$$

[1] Tuto rovnost dostaneme opakovaným použitím derivace součinu podle $(fgh)' = f'(gh) + f(gh)' = f'gh + f(g'h + gh')$.

2. Spočtěte následující limity pro $a > 0$

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2},$$

(1 bod)

(b)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2} \right).$$

(2 body)

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \ln(a) \frac{a^x - a^{-x}}{2x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \ln^2(a) \frac{a^x + a^{-x}}{2} = \ln^2(a).$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\sin(x))^2} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sin(x))^2 - x^2}{x^2(\sin(x))^2} \right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\sin(x)\cos(x) - 2x}{2x(\sin(x))^2 + x^2 2\sin(x)\cos(x)} \right) =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)\cos(x) - x}{x(\sin(x))^2 + x^2\sin(x)\cos(x)} \right) \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x) - 1}{(\sin(x))^2 + 2x\sin(x)\cos(x) + 2x\sin(x)\cos(x) + x^2\cos^2(x) - x^2\sin^2(x)} \right) =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(2x) - 1}{(\sin(x))^2 + 4x\sin(x)\cos(x) + x^2\cos(2x)} \right) \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{-2\sin(2x)}{2\sin(x)\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x) + 4x\cos^2(x) - 4x\sin^2(x) + 2x\cos(2x) - 2x^2\sin(2x)} \right) =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{-2\sin(2x)}{6\sin(x)\cos(x) + 4x\cos(2x) + 2x\cos(2x) - 2x^2\sin(2x)} \right) =$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{-\sin(2x)}{3\sin(x)\cos(x) + 3x\cos(2x) - x^2\sin(2x)} \right) \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{-2\cos(2x)}{3\cos^2(x) - 3\sin^2(x) + 3\cos(2x) - 6x\sin(2x) - 2x\sin(2x) - 2x^2\cos(2x)} \right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$