第一章 极限与连续

Part I 理论

一、极限

（一）def

ε-N、 ε-δ、 ε-X

（二）性质

1、一般性质

唯一性、保号性（重要）、有界性

（不要管局部）

2、运算性质

①四则（前提，$\lim f(x)$与$\lim g(x)$存在）②复合

3、存在性质

准则一 单调有界数列必有极限（单调增找上界，单调减找下界）

准则二 夹逼定理

4、无穷小

①$\lim f = A \Leftrightarrow f = A + \alpha(\alpha \to 0)$

$\alpha \sim \alpha_1$，$\beta \sim \beta_1$，且$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A$，则$\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$

②等价无穷小

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(x+1)$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$(1+x)^{a} - 1 \sim ax$

③重要极限

1、$\lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{\sin\Delta}{\Delta} = 1$

2、$\lim\limits_{\Delta \to 0} (1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = 1$

变式：$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0)$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

二、连续与间断

（一）defs

1、连续

2、间断

第一类间断点（可去、跳跃）、第二类间断点（无穷、振荡）

Part II 题型

1、不定型极限

$\frac{0}{0}$、1^{∞}

$\frac{\infty}{\infty}$、$0 \times \infty$、$\infty - \infty$、∞^0、0^0

2、极限和、积

①直接算

②夹逼定理

分母不齐次，夹逼定理

③定积分定义

分母齐次，定积分定义

3、极限存在

4、左右极限

5、判断间断点及其类型

第二章 导数与微分

Part Ⅰ 理论

（一）defs

1、导数

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2、微分

$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$，若$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，则$y=f(x)$在$x=a$处可微，

记作$A\Delta x\triangleq dy|_{x=a}$，其中$f'(x)=A$

（可导⇒连续，可导⇔可微）

（二）基本公式

（三）求导法则

四则、复合

（四）反函数求导

设$g(y)$为$f(x)$反函数

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

$$g''(y)=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$$

Part Ⅱ 题型

Case1、显函数求导

Case2、隐函数求导

Case3、参数方程求导

Case4、变积分限函数导数

若碰到$\Phi(x)=\int_a^x f\left(x，t\right)dt$类型，则需要先处理$x$，使积分变量中只有$t$再求导。

Case5、高阶导数

1、找规律

2、套公式

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$y=\dfrac{1}{ax+b}$，$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n\cdot n!\ \ \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

$y=f(x)g(x)$，$y^{(n)}=C_n^0 f(x)g^{(n)}(x)+C_n^1 f'(x)g^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n^n f^{(n)}(x)g(x)$

Case6、分段函数求导

注意分段点是否可导

第三章 微分中值定理

Part I 理论

一、中值定理

1、Rolle

2、Lagrange

$f(x)\in c\left[a,\ b\right]$，$(a,b)$内可导

$\exists\xi\in(a,b)$，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

3、Cauchy

$f(x),g(x)\in c\left[a,\ b\right]$，$(a,b)$内可导

$\exists\xi\in(a,b)$，$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

4、Taylor

$f(x)$在$U(x_0)$邻域内$n+1$阶可导，$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$(拉格朗日余项)（$\xi$介于$x$和$x_0$之间）

或

$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$(皮亚诺余项)

记：

①$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

②$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$

③$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$

④$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

⑤$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

⑥$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+o(x^{2n+1})$

⑦$(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

二、单调性与极值

$y=f(x)$

1° $x\in D$

2° $f'(x)=0$ 或不存在

3° 判别法

法一：

$$\begin{cases} x<x_0，f'<0 \\ x>x_0，f'>0 \end{cases} \Rightarrow x=x_0 \text{为极小值}$$

$$\begin{cases} x<x_0，f'>0 \\ x>x_0，f'<0 \end{cases} \Rightarrow x=x_0 \text{为极大值}$$

法二：

$$f'(x_0)=0, f''(x_0)\begin{cases} <0，\text{极大值} \\ >0，\text{极小值} \end{cases}$$

三、几个小问题

（一）凹凸性

1、def-$\forall x_1,x_2\in I$，且$x_1\neq x_2$，

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}，\text{为凹函数}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}，\text{为凸函数}$$

2、判别法

$f''>0$ 凹函数，$f''<0$ 凸函数

（二）弧微分与曲率

1、$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

Case1、$L: y=f(x)$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

Case2、$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\Psi(t) \end{cases}$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\Psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

Case3、$L: r=r(\theta)$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

2、曲率

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \rho=\frac{1}{k}$$

（三）作图

1° $x \in D$

2° $f'(x) = 0$ 或不存在

3° $f''(x) = 0$ 或不存在

4° 列表

x	(,)	?	(,)	?	(,)	……
$f'(x)$						
$f''(x)$						
$f(x)$						

5° 渐近线

①水平 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A\,, y = A$

②铅直 $\begin{cases} f(a-0) = \infty \\ f(a+0) = \infty \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \end{cases}$

③斜 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b \end{cases} \Rightarrow y = ax + b$

Part II 题型

中值定理部分

1、仅有ξ

2、有ξ，有a, b

3、有ξ，η

①仅有$f'(\xi), f'(\eta)$ $\begin{cases} \text{找三点} \\ \text{两次}Lagrange \end{cases}$

②ξ，η的复杂情况不同

将ξ，η分开，无法求出原函数-凑成 Cauchy 型，可凑出原函数-Lagrange 型

单调性与极值

1、极值点判断

2、不等式证明

3、方程根

4、最值

第四章 不定积分

一、积分法

1、换元法 $\begin{cases} \text{第一类} \\ \text{第二类} \begin{cases} \text{三角} \\ \text{无理} \end{cases} \end{cases}$

2、分部法 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

二、积分表（较难记的几个）

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot\ x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

（后三个均可用第二类换元积分法做出，但做题速度太慢，何妨不记？）

三、两类重要不定积分

有理函数、三角函数

第五、六章 定积分

Part I 理论

一、基本定理

Th1、$f(x) \in c[a,b], \Phi(x) \triangleq \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \Phi'(x) = f(x)$

Th2、$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

二、性质

（一）一般性质

1、$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx(a < \mathrm{b})$

2、①$f(x) \in c[a,b]$, 则$\exists\xi \in [a,b], \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

②$f(x) \in c(a,b)$, 则$\exists\xi \in [a,b], \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

3、①$\begin{cases} f(x) \in c[a,b] \\ f(x) \ge 0 \\ \int_a^b f(x)dx = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \equiv 0(a \le x \le b)$

②$\begin{cases} f(x) \in c[a,b] \\ f(x) \ge 0 \\ f(x)! \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

（二）特殊性质

1、$f(x) \in c[-a,a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]dx$$

2、① $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx$

$$I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^n x dx$$

$$\begin{cases} I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} \\ I_1 = 1 \\ I_0 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

② $\int_{0}^{\pi} f(sinx)dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx$

③ $\int_{0}^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(sinx)dx$

（对于②③式而言，若f中包含了$cosx$，只要次数为偶次，也可直接使用）

3、$f(x) = f(x+T)$

① $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

② $\int_{0}^{nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx$

三、广义积分（反常积分）

（一）区间无限

（二）区间有限，函数有无穷间断点

四、应用

几何、物理

方法：元素法

Part II 题型

1、计算

Case1、变积分限函数积分（分部法）

Case2、常规计算

2、证明

Case1、$f(x)$连续

Case2、$f(x)$可导

3、广义积分计算

4、应用

第七章 微分方程 Differential Equation

Part I 理论

一、一阶 D.E.

1、可分离变量的 D.E.

形式：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$

解法：$\int\frac{dy}{\varphi_2(y)}=\int\varphi_1(x)dx+C$

2、齐次 D.E.

形式：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi(\frac{x}{y})$

解法：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\xRightarrow{\frac{y}{x}=u}u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$

$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C_0$

3、一阶齐次线性 D.E.

形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$

解法：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

4、一阶非齐线性 D.E.

形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

解法：$y=\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}$

5、伯努利 D.E.

形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}(\alpha\neq 0,1)$

解法：$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)\xRightarrow{z=y^{1-\alpha}}\frac{dz}{dx}+(1+\alpha)P(x)z=(1+\alpha)Q(x)$

$z=\left[\int(1+\alpha)Q(x)\,e^{\int(1+\alpha)P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int(1+\alpha)P(x)dx}$

$y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

二、可降阶的高阶 D.E.

1、n阶导数型

形式：$y^{(n)}=f(x)$

解法：$y^{(n)}\Rightarrow y^{(n-1)}\Rightarrow\ldots\Rightarrow y$

2、缺y型

形式：$f(x,y',y'')=0$

解法：$f(x,y',y'')=0\xRightarrow{y'=p,y''=\frac{dp}{dx}}f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0$

3、缺x型

形式：$f(y,y',y'')=0$

解法：$f(y,y',y'')=0 \xRightarrow{y'=p,y''=p\frac{dp}{dy}} f\left(y,p,p\dfrac{dp}{dy}\right)=0$

三、高阶线性 D.E.

1、defs

n阶齐次线性微分方程：$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \quad (*)$

n阶非齐线性微分方程：$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)\ (**)$

If $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,then

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_1(x)\ (**)'$$
$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_2(x)\ (**)''$$

2、解的结构

Case1、$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_s(x)$皆为$(*)$的解，则$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_s\varphi_s(x)$也为$(*)$的解（线性组合）

Case2、$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$分别为$(*)(**)$的解，则$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$为$(**)$的解

Case3、$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$为$(**)$的解，则$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$为$(*)$的解

Case4、$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$分别为$(**)'(**)''$的解，则$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$为$(**)$的解

3、二阶线性 D.E.的解

设$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$为$(*)$的两个无关解，$\varphi_0(x)$为$(**)$的一个特解

$y''+a_1(x)y'+a_1(x)y=0$ 通解为$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$

$y''+a_1(x)y'+a_1(x)y=f(x)$通解为$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\varphi_0(x)$

4、常系数齐次线性 D.E.

形式：$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$

解法：特征方程：$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}\dots+a_0=0$

二阶：$y''+py'+q=0$

Case1、$\Delta>0,\lambda_1\neq\lambda_2$

通解：$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

Case2、$\Delta=0,\lambda_1=\lambda_2$

通解：$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$

Case3、$\Delta<0,\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$

通解：$y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)$

三阶：

Case1、$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R,$且两两不等

通解：$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+C_3e^{\lambda_3x}$

Case2、$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R,\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$

通解：$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}+C_3e^{\lambda_3x}$

Case3、$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R,\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$

通解：$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{\lambda_1x}$

Case4、$\lambda_1\in R,\lambda_{2,3}=\alpha\pm\beta i$

通解：$y=C_1e^{\lambda_1x}+e^{\alpha x}(C_2cos\beta x+C_3sin\beta x)$

（n阶同理）

5、常系数非齐线性 D.E.

形式：$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f(x)$

二阶$y''+py'+q=f(x)$

解法：1° 特征方程：$\lambda^2+p\lambda+q=0$

$y''+py'+q=0$的通解为$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$

2° 找出$y''+py'+q=f(x)$的特解$y_0(x)$

3° $y''+py'+q=f(x)$的通解为$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+y_0(x)$

特解的构造：

Case1、$f(x)=P_n(x)e^{kx}$

$y_0(x)=Q(x)e^{kx}$

$Q''+(2k+p)Q'+(k^2+pk+q)Q=P_n(x)$

①k与λ_1,λ_2均不等

$Q''+(2k+p)Q'+(k^2+pk+q)Q=P_n(x)$

$Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$

②$k=\lambda_1\neq\lambda_2$

$Q''+(2k+p)Q'=P_n(x)$

$Q(x)=x(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$

③$k=\lambda_1=\lambda_2$

$Q''=P_n(x)$

$Q(x)=x^2(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$

Case2、$f(x)$含一次三角函数

1° 有$e^{\alpha x}$放括号外面

2° $sin\beta x$和$cos\beta x$括号里面都要有

3° 检验λ是否等于$\alpha+\beta i$，若有，括号外乘x