武汉大学 2014-2015 第一学期期中考试试题

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c，x\le 0 \\ \ln(1+x) \quad ，x>0 \end{cases}$ 求a,b,c的值,使$f(x)$在$x=0$处二阶可导

3. 设 $f(x)=\begin{cases} \sin x，x\le 0 \\ x-\frac{x^3}{6}，x>0 \end{cases}$ 求$f'(x)$.

4. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\ln(1-\cos x)}$.

5. 设 $y=\ln f(\sqrt{1+\sin^2 x})\cdot e^{3x}$，其中$f(u)>0$，且可导．求$y'(x)$.

7. 设$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$,($n$为正整数) 求证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

8. 已知函数$f(x)$在$[0,1]$连续,在$(0,1)$内有二阶导数,$f(0)=f(1)=0$且曲线$y=f(x)$与直线$y=x$,当$x\in(0,1)$时有交点,试证明在$(0,1)$内至少存在ξ,使$f''(\xi)<0$.

9. 证明函数$y=e^x(\sin 2x+\frac{1}{4})$满足关系式$y''-2y'+5y=e^x$

10. 验证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$存在,但不能用罗必塔法则得出.

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$ $(a>0，a\ne 1)$.

12. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且恒有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$， $f(x)=1+xg(x)$，其中：$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$，证明： $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处可导。

13. 设 $\begin{cases} x=t+\frac{1}{t} \\ y=t^2+\frac{1}{t^2}(t\ne 0) \\ e=t^3+\frac{1}{t^3} \end{cases}$ 确定 $y=y(x),z=z(x)$ 试证明 $3x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dx^2}$

14. 设 $y=2x-\sin x$，验证$y(x)$有连续的反函数 并求反函数的导数$x'(y)$.

武汉大学 2014-2015 第一学期期中考试试题解答

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})$

解　设 $x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$　　则 $x_n<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{1}{2}$

$x_n>\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\frac{n+1}{2(n+2)}$　　又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$　　故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

2. 设　$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x\le 0\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$ 求 a,b,c 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导

解　首先在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ 得 $c=0$

在 $x=0$ 处一阶可导

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+bx}{x}=b\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

故有　$b=1$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}2ax+1 & x\le 1\\ \frac{1}{1+x} & x>0\end{cases}$ 在 x=0 处二阶可导

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax}{x}=2a$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1$$

得 $2a=-1$　　即 $a=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 当 $a=\frac{-1}{2}$，$b=1$，$c=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导

3. 设　$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ x-\frac{x^3}{6}, & x>0\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解　$f(0)=0$　$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x-0}{x}=1$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x-\frac{x^3}{6}-0}{x}=1$　　$f'(0)=1$　　$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}x^2, & x>0\end{cases}$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\ln(1-\cos x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|x|}{\ln(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin x+x\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{1}{2}$$

5. 设 $y=\ln f(\sqrt{1+\sin^2 x})\cdot e^{3x}$，其中$f(u)>0$，且可导．求$y'(x)$．

解 $u=\sqrt{1+\sin^2 x}$，$y'(x)=\dfrac{f'(u)}{f(u)}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot e^{3x}+3e^{3x}\cdot\ln f(u)$

7. 设$x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$,($n$为正整数) 求证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

解 显然：$x_{n+1}=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}=x_n+\dfrac{1}{(n+1)^2}>x_n$

即数列$\{x_n\}$单调增

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$$

即数列$\{x_n\}$有上界为2

根据准则：单调有界数列还有极限

因此：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

8. 已知函数$f(x)$在$[0,1]$连续,在$(0,1)$内有二阶导数, $f(0)=f(1)=0$且曲线$y=f(x)$与直线$y=x$,当$x\in(0,1)$时有交点,试证明在$(0,1)$内至少存在ξ,使$f''(\xi)<0$.

证明:由题设知,存在$x_0\in(0,1)$,使$f(x_0)=x_0$

因$f(x)$在$[0,1]$连续,$(0,1)$内有二阶导数

则$f(x)$在$[0,x_0][x_0,1]$上满足拉格朗日中值定理条件,则至少存在

$c\in(0,x_0)$使

$$f'(c_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=1>0$$

同理存在$c_2 \in (x_0 .1)$使

$$f'(c^2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{-x_0}{1-x_0}<0$$

又$f'(x)$在$[c_1,c_2]\subset(0,1)$内满足拉格朗日中值定理条件

则至少存在$\xi\in(c_1,c_2)\subset(0,1)$使

$$f''(\xi)=\frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1}<0$$

9. 证明函数$y=e^x(\sin 2x+\frac{1}{4})$满足关系式$y''-2y'+5y=e^x$

证 $y'=\frac{1}{2}e^{-x}(-1-\sin x+2\cos x+\sin x)=\frac{1}{2}e^{-x}(2\cos -1)$

$$y''=\frac{1}{2}e^{-x}(1-2\cos x-2\sin x)$$

$$y''+3y'+2y=\frac{1}{2}e^{-x}(1-2\cos x-2\sin x+6\cos x-3+2+$$

$$2\sin x-2\cos x)=e^{-x}\cos x$$

10. 验证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$存在,但不能用罗必塔法则得出.

解 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}\sin x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$ 不存在

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$存在等于1,但不能用罗必塔法则得出.

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})\quad(a>0,\ a\neq 1)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{a^{x(x+1)}}-1}{\frac{1}{x(x+1)}}\cdot\frac{x^2}{x(x+1)}$

$$=a^0\cdot\ln a\cdot 1=\ln a$$

12. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且恒有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，$f(x)=1+xg(x)$ 其中

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$，证明： $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处可导。

证明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1+\Delta x g(\Delta x)-1}{\Delta x}=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$， $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\left[f(\Delta x)-1\right]}{\Delta x}=f(x)f'(0)=f(x)$$

$\therefore f(x)$在x处可导,且$f'(x)=f(x)$.

13. 设 $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t^2+\dfrac{1}{t^2} \\ e=t^3+\dfrac{1}{t^3} \end{cases}$ $(t\neq 0)$ 确定 $y=y(x), z=z(x)$ 试证明 $3x\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2z}{dx^2}$

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(t-\dfrac{1}{t^3})}{1-\dfrac{1}{t^2}}=2(t+\dfrac{1}{t})=2x$ ， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3(t^2-\dfrac{1}{t^4})}{1-\dfrac{1}{t^2}}=3(t^2+\frac{1}{t^2}+1)=3\left[(1+\frac{1}{t})^2-1\right]=3(x^2-1)$$

$\dfrac{d^2z}{dx^2}=6x$ $\qquad 3x\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2z}{dx^2}$

14. 设 $y=2x-\sin x$，验证$y(x)$有连续的反函数 并求反函数的导数$x'(y)$.

解 $y'=2-\cos x>0$ 故y在$(-\infty,+\infty)$上单调增有连续的反函数$x=x(y)$

且 $x'(y)=\dfrac{1}{y'(x)}=\dfrac{1}{2-\cos x}$