192.168.5.234. 周晓辉 0303002, 密123.

武汉大学 2012-2013 学年第一学期期末考试《高等数学 A1》(A 卷) 解答

一、(5 分) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，且在$x_0$的某去心邻域内$g(x)\neq 0, \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$,

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$必等于0，为什么？

解　因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x) = A\cdot 0=0$

二、(8 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ae^{x}+be^{-x}-c}{\sin^2 x} & ,x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}),\text{且}x\neq 0,\\ 1 & ,x=0.\end{cases}$ 试确定常数 a,b,c 的一组值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

解:要使$f(x)$在$x=0$处连续,须$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$

即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{x}+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=1$,又$x\to 0$时,$\sin^2 x\to 0$

则$\lim\limits_{x\to 0}(ae^{x}+be^{-x}-c)=0$,即$a+b-c=0$　　(1)

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{x}+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{x}+be^{-x}-c}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{x}-be^{-x}}{2x}=1$

则$\lim\limits_{x\to 0}(ae^{x}-be^{-x})=0$,即$a-b=0$　　(2)

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{x}+be^{x}-c}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{x}+be^{-x}}{2}=\dfrac{a+b}{2}=1$，即$a+b=2$　　(3)

解(1)(2)(3)$a=b=1,c=2$即$a=b=1,c=2$时,$f(x)$在$x=0$处连续

√三、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，且 $f'(a)=f(a)=0, f''(a)=1$，求极限:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x-a)}{(e^{x}-e^{a})^3}$

解　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x-a)}{(e^{x}-e^{a})^3}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x-a)}{e^{3a}(e^{x-a}-1)^3}=\lim\limits_{x\to a}\cdot\dfrac{f(x)}{e^{3a}(x-a)^2}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{e^{3a}}\dfrac{f'(x)}{2(x-a)}=\dfrac{1}{2e^{3a}}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\dfrac{1}{2e^{3a}}f''(a)=\dfrac{1}{2e^{3a}}$

四、(6 分) 设　$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+\dfrac{1}{t})^{3xt}$，求$f''(x)$

解　$f(x)=x\lim\limits_{t\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{t})^{t}\right]^{3x}=xe^{3x}$　　$\therefore f'(x)=e^{3x}+3xe^{3x}$

$$f''(x)=3e^{3x}+3e^{3x}+9xe^{3x}=e^{3x}(6+9x)$$

五、（5 分）设 u,v 均是 x 的可微函数 $y(x)=\ln\sqrt{u^2+v^2}$，求 dy

解 $dy=y'(x)dx=\dfrac{u\cdot u'+v\cdot v'}{u^2+v^2}\mathrm{d}x$

六、（6 分）求函数 $I(x)=\int_e^x\dfrac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间 $[e,\ e^2]$ 上的最大值.

解 由 $I'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-2x+1}=\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}>0$，$x\in\left[e,\ e^2\right]$，知 $I'(x)$ 在 $\left[e,\ e^2\right]$ 上单调增加　　3分

故 $\underset{e\le x\le e^2}{amx}I(x)=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln t}{(t-1)^2}dt=-\int_e^{e^2}\ln t d(\dfrac{1}{t-1})$　　1分.

$$=-\frac{\ln t}{t-1}\bigg|_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\frac{1}{(t-1)t}dt=\frac{1}{e-1}-\frac{2}{e^2-1}+\ln\frac{t-1}{t}\bigg|_e^{e^2}=\frac{1}{e+1}+\ln\frac{e+1}{e}=\frac{1}{e+1}+\ln(e+1)-1$$

$$=\ln(1+e)-\frac{e}{1+e}$$

2分 $=\dfrac{-2}{e^2-1}+\dfrac{1}{e-1}+\ln(e^2-1)-\ln(e-1)-1$

$=\dfrac{1}{e-1}-\dfrac{2}{e^2-1}+\ln(e+1)-1$

七、（5 分）求 $\int_{-2}^{-1}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$

原式 $=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1}=-\dfrac{\pi}{3}$

八、（6 分）求微分方程 $y''+3y'=\cos 2x$ 的通解。

解　特征方程 $r^2+3r=0$ 的根为 $r_1=0,\ r_2=-3$

对应齐次方程的通解为 $y_C=C_1+C_2e^{-3x}$

设特解为 $y_p=A\cos 2x+B\sin 2x$,代入方程得 $y_p=-\dfrac{1}{13}\cos 2x+\dfrac{3}{26}\sin 2x$

故所求通解为 $y=C_1+C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{13}\cos 2x+\dfrac{3}{26}\sin 2x$

九、（7 分）若在 x_0 的某去心邻域内 $|f(x)|\le\alpha(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，试证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

证：因 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$　故 $\lim\limits_{x\to x_0}[-\alpha(x)]=0$　又因 $-\alpha(x)\le f(x)\le\alpha(x)$

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

十、（7 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $y=f[2x+\varphi(y)]$ 所确定,其中 f 与 φ 都是可导函数,求 y'.

解 $y'=f'[2x+\varphi(y)]\cdot[2+\varphi'(y)y']$ $\qquad y'=\dfrac{2f'[2x+\varphi(y)]}{1-f'[2x+\varphi(y)]\cdot\varphi'(y)}$

十一、（8 分）求函数$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的极值

解解 定义域$(-\infty,\ +\infty)$连续

$$y'=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} \qquad (x\neq 0)$$

驻点 $x_1=\dfrac{2}{5}$，导数不存在点$x_2=0$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
y'	+	x	—	0	+
y	↑		↓		↑

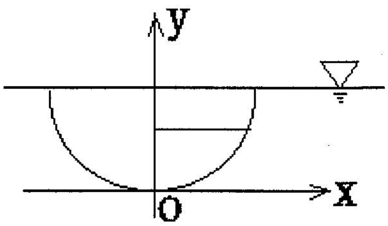
故函数有极大值$y(0)=0$,极小值$y\left(\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2/3}$

十二、（8分）求由不等式$\sin^3 x\le y\le\cos^3 x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$所确定的区域的面积.

$$解:S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3 x-\sin^3 x)dx=\int_0^{\pi/4}(1-\sin^2 x)d\sin x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 x)d\cos x$$

$$=(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-1+\frac{1}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}.$$

十三、（8 分）有一抛物线弓形板，其底边为L米，顶点到底边距离为H米，将此板竖直浸入水中，使底边与水面相重合，求板所受压力。



解 设坐标如图.设抛物线方程为$y=kx^2$， 因过$(\pm\dfrac{L}{2},H)$点，

故$k=\dfrac{4H}{L^2}$ 即$y=\dfrac{4H}{L^2}x$,或$x=\dfrac{L}{2}\sqrt{\frac{y}{H}}$

$$F=2\int_0^H(H-y)\cdot\frac{L}{2}\sqrt{\tfrac{y}{H}}dy=\frac{4}{15}LH^2(吨重)=1000g\cdot\frac{4}{15}LH^2(牛顿)$$

十四、（5 分）设$f(x)$定义在$[\dfrac{1}{2},+\infty)$上，且满足：（1） $f(1)=1$，

（2） $f(x)f(y)=2f(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta$，证明： $f(x+1)=xf(x)$

证明：令 $y=1$，$f(x)f(1)=2f(x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}\sin\theta d\theta$

即 $f(x)=2f(x+1)\left[-\frac{1}{2x}(\cos\theta)^{2x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{x}f(x+1)$ $\therefore$ $f(x+1)=xf(x)$

十五、（5 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，对任意 $x\in(0,1)$ 有

$f(x)\neq 0$，证明存在 $c\in(0,1)$ 使 $\frac{nf'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$（$n$ 为自然数）。

证明:令 $F(x)=f^n(x)f(1-x)$,(n为自然数)

则$F(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,因$f(0)=0$,则$F(0)=F(1)=0$
即$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件

则至少存在$c\in(0,1)$使$F'(c)=0$

而$F'(x)=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x)\cdot f(1-x)-f^n(x)f'(1-x)$
且因对任意$\xi x\in(0,1)$有$f(x)\neq 0$
则由$nf^{n-1}(c)\cdot f'(c)\cdot f(1-x)-f^n(c)f'(1-c)=0$

得到$\frac{nf'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$ $(c\in(0,1))$

十六、（5 分）设弹簧的上端固定，下端悬挂一质量为 m 的物体，开始时用手拿住重物，使弹簧既不伸长，也不缩短，然后突然放手，弹簧发生振动。设弹簧的弹性系数为 k，介质阻力与运动速度成正比，比例系数为 h。试证：当 $t\to\infty$ 时，物体趋向于平衡位置 $x(\infty)=\frac{mg}{k}$。

取初始时刻物体所在位置为坐标原点，x 轴垂直向下。设 t 时刻物体位于 $x(t)$ 处，由牛顿第二定律 $mx''(t)=mg-hx'(t)-kx(t)$ 即 $x''+\frac{h}{m}x'+\frac{k}{m}x=g$

令 $a=\frac{h}{2m},b=\sqrt{\left|\frac{k}{m}-\left(\frac{h}{2m}\right)^2\right|}$

若 $\frac{k}{m}>\left(\frac{h}{2m}\right)^2$，解为 $x=e^{-at}\left(C_1\cos bt+C_2\sin bt\right)+\frac{mg}{k}$

$$\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}e^{-at}\left(C_1\cos bt+C_2\sin bt\right)+\frac{mg}{k}=\frac{mg}{k}$$

若 $\frac{k}{m}=\left(\frac{h}{2m}\right)^2$，则解为 $x=e^{-at}\left(C_1+C_2t\right)+\frac{mg}{k}$，仍有

$$\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}e^{-at}\left(C_1+C_2t\right)+\frac{mg}{k}=\frac{mg}{k}$$

若$\dfrac{k}{m}<\left(\dfrac{h}{2m}\right)^2$，则解为$x=C_1e^{-(a+b)t}+C_2e^{-(a-b)t}+\dfrac{mg}{k}$，因为$b<a$

故有

$$\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}[C_1e^{-(a+b)t}+C_2e^{-(a-b)t}+\frac{mg}{k}]=\frac{mg}{k}$$