

2018 — 2019 第一学期高等数学 A1 期末模拟测试题

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \sqrt[7]{\frac{x^3 + x}{1 + x^3}} - \cos \frac{1}{x} \right)$ .
2. 设函数  $y = f(x)$  的动点坐标  $(x, y)$  在极坐标  $(r, \theta)$  中表示为  $r = a(1 + \cos \theta)$ ,  $\theta \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ , 试求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .
3. 已知可导函数  $f(x)$  满足  $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t dt = x + 1$ , 求  $f(x)$ .
4. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ .
5. 已知:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$ , 求常数  $a$  的值.
6. 描绘函数  $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$  的图形.
7. 确定常数  $a, b$ , 使得函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x}, & x < 0 \\ a + \sin bx, & x \geq 0 \end{cases}$  处处可导.
8. 求心形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $a > 0$  的弧长.
9. 在长为  $l$ 、质量为  $M$  的均匀细棒  $AB$  的延长线上有一质点  $C$ , 其质量为  $m$ , 已知  $|CA| = a$ . 求棒和质点之间的引力.
10. 解方程:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - xy}{x^2 - xy + y^2}$ .
11. 求由曲线  $8y = 12x - x^3$ ,  $y$  轴和曲线在点  $(2, 2)$  处的切线  $y = 2$  所围成的平面图形, 绕  $y$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积.
12. 设函数  $f(x)$  二次可微, 证明在  $(a, b)$  存在一点  $\xi$ , 使得

$$f''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3} \int_a^b \left( f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) dx.$$