武汉大学遥感信息工程学院
2018-2019 学年第二学期《线性代数》期中考试试卷答案

1. （本题 8 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为2阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，求 $|B|$.

【详解】由已知条件 $BA=B+2E$ 变形得，$BA-2E=B\Rightarrow B(A-E)=2E$，两边取行列式，得

$$|B(A-E)|=|2E|=4|E|=4$$

其中 $|A-E|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，$|2\mathrm{E}|=2^2|\mathrm{E}|=4$，因此，$|B|=\dfrac{|2E|}{|A-E|}=\dfrac{4}{2}=2$.

2. （本题 8 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，已知 $|A|=1$，求 $|B|$.

【详解】

方法 1：因 $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，$(\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}$，

故 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$，

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，两边取行列式，于是有 $|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times2=2.$

方法 2：利用行列式性质(在行列式中，把某行的各元素分别乘以非零常数加到另一行的对应元素上，行列式的值不变；从某一行或列中提取某一公因子行列式值不变)

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$\overset{[2]-[1]}{\underset{[3]-[1]}{=\!=\!=\!=}}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|\overset{[3]-2[2]}{=\!=\!=\!=}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3|\overset{[1]-[3]}{\underset{[2]-3[3]}{=\!=\!=\!=}}2|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3|\quad\overset{[1]-[2]}{=\!=\!=\!=}2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$$

又因为 $|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1$，故 $|B|=2|A|=2$.

3. （本题8分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}$

【详解】按第一行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\&&\cdots&&\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$$

$$=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2=2^n+2^{n-1}+\cdots+2=2^{n+1}-2$$

4. （本题 8 分）设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，求 A。

【详解】由于将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，故 $A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B$，即 $AP_1=B$，$A=BP_1^{-1}$.

由于交换 B 的第 2 行和第 3 行得单位矩阵，故 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E$，即 $P_2B=E,$ 故 $B=P_2^{-1}=P_2$.

因此，$A=P_2P_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

5. （本题 8 分）设 A,B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，用 A^*,B^* 表示分块矩阵 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵。

【详解】根据 $CC^*=|C|E$，若 $C^*=|C|C^{-1},C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=2\times3=6$，即分块矩阵可逆，有

$$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}O&A\\B&0\end{vmatrix}\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}O&\dfrac{1}{|B|}B^*\\\dfrac{1}{|A|}A^*&O\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}O&\dfrac{1}{3}B^*\\\dfrac{1}{2}A^*&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}。$$

6. （本题 8 分）设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB=E$, 求 A,B 的秩并说明理由。

【详解】由于 $AB=E$, 故 $r(AB)=r(E)=m$. 又由于 $r(AB)\le r(A),r(AB)\le r(B)$, 故

$$m\le r(A),m\le r(B) \qquad ①$$

由于 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, 故

$$r(A)\le m,r(B)\le m \qquad ②$$

由①、②可得 $r(A)=m,r(B)=m$.

7. （本题 13 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

【详解】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则由 $AC-CA=B$ 可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a\end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有 $1+a=0$，$b-1-a=0$，即 $a=-1,b=0,$ 从而有

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，故有 $\begin{cases}x_1=k_1+k_2+1\\ x_2=-k_1\\ x_3=k_1\\ x_4=k_2\end{cases}$，其中 k_1,k_2 为任意实数。

从而有 $C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$。

8. （本题 13 分）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

(I) 求 λ，a；

(II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

【详解】因为方程组有两个不同的解，所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3，进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数，有以下两种方法.

方法 1：（Ⅰ）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\overline{A})<3$，对增广矩阵进行初等行变换，得

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时，$\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，此时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，故 $Ax=b$ 无解（舍去）.

当 $\lambda=-1$ 时，$\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$，由于 $r(A)=r(\overline{A})<3$，所以 $a=-2$，故 $\lambda=-1$，$a=-2$.

方法 2：已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\bar{A})<3$, 因此 $\left|A\right|=0$, 即

$$\left|A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或-1.

当 $\lambda=1$ 时, $r(A)=1\neq r(\bar{A})=2$, 此时, $Ax=b$ 无解, 因此 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(\bar{A})$, 得 $a=-2$.

（ II ）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为 $\begin{cases}x_1-x_3=\dfrac{3}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, 写成向量的形式, 即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

9. （本题 13 分）设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

【详解】(I) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，对 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换:

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0\end{array}\right).$$

当 $a=5$ 时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\neq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示.

(II) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 进行初等行变换:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$， $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$， $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

10. （本题 13 分）已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$；

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

【详解】(I)系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{bmatrix}$ 未知量的个数为 $n = 4$，且又 $AX = b$ 有三个线性无关解，设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解，则 $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$ 是 $AX = 0$ 的两个线性无关的解. 因为 $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性无关又是齐次方程的解，于是 $AX = 0$ 的基础解系中解的个数不少于 2，得 $4 - r(A) \geq 2$，从而 $r(A) \leq 2$.

又因为 A 的行向量是两两线性无关的，所以 $r(A) \geq 2$. 所以 $r(A) = 2$.

(II)对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & |-1 \\ a & 1 & 3 & b & |\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[2]+[1]\times(-4) \\ [3]+[1]\times(-a)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |\ -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & |\ 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & |1+a \end{bmatrix} \xrightarrow{[3]+[2]\times(1-a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |\ -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & |\ 3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & |4-2a \end{bmatrix},$$

由 $r(A) = 2$，得 $\begin{cases} 4 - 2a = 0 \\ 4a + b - 5 = 0 \end{cases}$， 即 $a = 2, \quad b = -3$.

所以 $[A|b]$ 作初等行变换后化为； $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & |\ 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & |-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |\ 0 \end{bmatrix}$,

它的同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 4x_4 \\ x_2 = -3 + x_3 - 5x_4 \end{cases}$ ①

①中令 $x_3 = 0, x_4 = 0$ 求出 $AX = b$ 的一个特解 $(2, -3, 0, 0)^T$；

$AX = 0$ 的同解方程组是 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 4x_4 \\ x_2 = x_3 - 5x_4 \end{cases}$ ②

取 $x_3 = 1, x_4 = 0$, 代入②得 $(-2, 1, 1, 0)^T$；取 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 代入②得 $(4, -5, 0, 1)^T$. 所以 $AX = 0$ 的基础解系为 $(-2, 1, 1, 0)^T$， $(4, -5, 0, 1)^T$

所以方程组 $AX = b$ 的通解为：

$(2, -3, 0, 0)^T + c_1(-2, 1, 1, 0)^T + c_2(4, -5, 0, 1)^T$， c_1, c_2 为任意常数。