

武汉大学 2015-2016 第一学期高等数学 A1 期末试题 A 解答

一、计算题 (每小题 7 分, 共 63 分)

1、若 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导, 且 $f'(1)=1$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^{2014}+x^{2013}+\dots+x+1)} = \frac{1}{2015}$ 7 分

或 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x^{2015}-1} = f'(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2015x^{2014}} = \frac{1}{2015}$

2、计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + e^{\frac{1}{n}})^n$.

解: 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{n}})^n (1 + \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e (1 + \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}})^{\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}} = e^2$ 7 分

或 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+e^x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^x}{1+e^x}} = e^2$ 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + e^{\frac{1}{n}})^n = e^2$

3、已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 满足 $F(x)f(x) = xe^x$, $F(x) > 0, F(0) = 1$, 求 $f(x)$.

解: 对 $F(x)f(x) = xe^x$ 两边积分得 $\int F(x)f(x)dx = \int xe^x dx$, 即

$$\int F(x)dF(x) = xe^x - e^x + c, \quad \frac{1}{2}(F(x))^2 = xe^x - e^x + c, \quad \text{又 } F(0) = 1 \text{ 代入上式得 } c = \frac{3}{2}$$

注意到 $F(x) > 0$, 解得 $F(x) = \sqrt{2e^x(x-1)+3}$, 所以 $f(x) = \frac{xe^x}{F(x)} = \frac{xe^x}{\sqrt{2e^x(x-1)+3}}$

或 $f(x) = F'(x) = \frac{xe^x}{\sqrt{2e^x(x-1)+3}}$ 7 分

4、设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - ye^{xy} = 2$ 所确定的隐函数, 求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线方程.

解 $2x + 2yy' - y'e^{xy} - ye^{xy}(y + xy') = 0$ 将点 $(0, 2)$ 代入得 $y'(0) = \frac{4}{3}$ $y = \frac{4}{3}x + 2$

(或 $4x - 3y + 6 = 0$) 7 分

5、计算定积分 $\int_{-1}^1 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x^{2015} + 1008}{\sqrt{x^2+1}} dx$

解: 原式 $= 2 \int_0^1 \frac{1008}{\sqrt{x^2+1}} dx = 2016 \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 = 2016 \ln(1 + \sqrt{2})$ 7 分

6、设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$, 求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式.

$$\text{解 } \Phi(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{6}, & x \geq 2 \end{cases} \quad 7 \text{ 分}$$

7、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = Ce^y$ 确定, 其中 C 是非零常数, f 具有二阶导数, 且 $f'(y) \neq 1$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

$$\text{解 } y - f(y) = \ln \frac{x}{C}, \quad y' - f'(y)y' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{x[1 - f'(y)]},$$

$$y'' - f''(y)y'^2 - f'(y)y'' = -\frac{1}{x^2},$$

$$y'' = \frac{1}{1 - f'(y)} \left[f''(y)y'^2 - \frac{1}{x^2} \right] = \frac{f''(y) - [1 - f'(y)]^2}{x^2[1 - f'(y)]^3} \quad 7 \text{ 分}$$

8、求初值问题 $\begin{cases} y'' + y = x + \sin x \\ y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$ 的解。

解 对应的齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

非齐次方程 $y'' + y = x$ 的一个特解为 $y_1 = x$, 非齐次方程 $y'' + y = \sin x$ 的一个特解为

$y_2 = -\frac{x}{2} \cos x$, 原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x - \frac{x}{2} \cos x$, 利用初值条件可

求得 $C_1 = 1, C_2 = -1$, 原问题的解为 $y = \cos x - \sin x + x - \frac{x}{2} \cos x \quad 7 \text{ 分}$

9、设 $f(x)$ 连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0, f'(0)=4$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t \int_t^0 f(u) du) dt}{x^3 \sin x}$ 。

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t \int_t^0 f(u) du) dt}{x^3 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t \int_t^0 f(u) du) dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_x^0 f(u) du}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{8}\right) \frac{f(x)}{x}$$

$$= -\frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{8} f'(0) = -\frac{1}{2} \quad 7 \text{ 分}$$

二、应用题 (每小题 8 分, 共 24 分)

1、求在抛物线 $y^2 = 4x$ 与 $y^2 = 8x - 4$ 之间的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积。

$$\text{解: 图略 } V = \pi \int_0^1 4x dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (8x - 4) dx = \pi \left[2x^2 \right]_0^1 - \pi \left[4x^2 - 4x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \pi \quad 8 \text{ 分}$$

2、求二曲线 $r = \sin \theta$ 与 $r = \sqrt{3} \cos \theta$ 所围公共部分的面积。

解: 当 θ 等于 0 和 $\frac{\pi}{3}$ 时, 两曲线相交, 所围公共部分的

$$\text{面积为 } A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^2 \theta d\theta = \frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad 8 \text{ 分}$$

3、设降落伞从跳伞塔下落后,所受空气阻力与速度成正比,并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$)速度为零,求降落伞下落速度与时间的函数关系。

解:降落伞所受外力为 $F = mg - kv$,由牛顿运动第二定律得 $F = ma = m \frac{dv}{dt}$

因此 $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$, 初始条件为 $v|_{t=0} = 0$, 分离变量得 $\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m}$,

两边积分得 $\int \frac{dv}{mg - kv} = \int \frac{dt}{m}$, 即 $-\frac{1}{k} \ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + c_1$, $mg - kv = e^{-\frac{k}{m}t - kc_1}$,

$v = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t}$ ($c = -\frac{e^{-kc_1}}{k}$), 把 $v|_{t=0} = 0$ 代入得 $c = -\frac{mg}{k}$, 所以

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad 8 \text{ 分}$$

三、证明题(第1题7分,第2题6分,共13分)

1、设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上二阶可导, $|f''(x)| \leq M(x \in [0, a])$ 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取得最大值,试证明 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$.

证明 证明:因 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上二阶可导,且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取得最大值

设在 $x_0 \in (0, a)$ 取得最大值,则 $f'(x_0) = 0$

从而在 $[0, a], [x_0, a]$ 上分别对 $f'(x)$ 用拉格朗日中值定理有

至少 $\exists \xi_1 \in (0, x_0)$ 使 $f'(0) - f'(x_0) = f''(\xi_1)(0 - x_0)$

而 $f'(x_0) = 0, |f''(x)| \leq M$, 则 $|f'(0)| \leq Mx_0$ (1)

同理有: $|f'(a)| \leq M(a - x_0)$ (2)

由(1)+(2)得: $|f'(a)| + |f'(0)| \leq Ma$ 7分

2、(6分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续,且 $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)\tan x dx = 0$, 证明 在区间

$(-1, 1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

证: 记 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$, 则 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可导, 且 $F(-1) = F(1) = 0$, 若 $F(x)$ 在 $(-1, 1)$

内无零点,不妨设 $F(x) > 0, x \in (-1, 1)$ $0 = \int_{-1}^1 f(x)\tan x dx = \int_{-1}^1 \tan x dF(x)$

$$= F(x)\tan x|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 F(x)\sec^2 x dx = -\int_{-1}^1 F(x)\sec^2 x dx < 0$$

此矛盾说明 $F(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内至少存在一个零点 x_0 , 对 $F(x)$ 在 $[-1, x_0], [x_0, 1]$ 上分别使用 Rolle 定理知存在

$\xi_1 \in (-1, x_0), \xi_2 \in (x_0, 1)$, 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 6分