武汉大学 2017-2018 第一学期高等数学 A1 期末试题 A

1、（9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$.

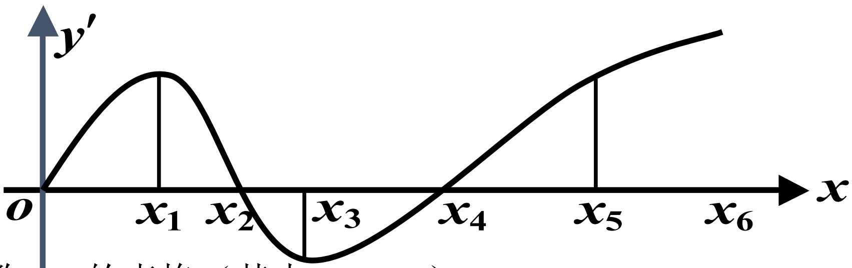
2、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3、（9 分）已知 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{\sin x}\cos^2 tdt=0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

4、（8 分）求数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{\pi}{4})\sqrt{n^2+1}$.

5、（9 分）设 $a>0$，求 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin xdx$.

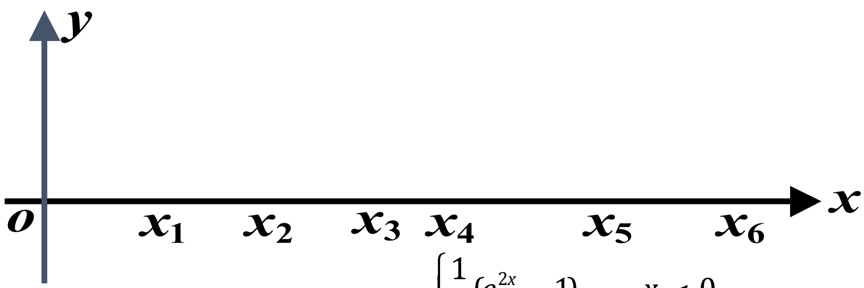
6、（9 分）根据以下导函数 $y'=f'(x)$ 的图像：



填写关于函数 $f(x)$ 的表格（其中 $f(0)=0$）：

单增区间		上凸区间	
单减区间		下凸区间	
极大值点		极小值点	

画出函数 $y=f(x)$ 的图像：



7、（8 分）确定常数 a,b，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(e^{2x}-1) & ,\ x<0\\ a+\sin bx & ,\ x\ge 0\end{cases}$ 处处可导。

8、（9 分）求由 $\arctan x\le y\le x, 0\le x\le 1$ 所确定的区域的面积。

9、（8 分）涵洞的断面为抛物线拱形。拱高 1 米，拱底宽 2 米，在水面高出涵洞顶点 0.5 米时，求涵洞闸门上所受的水压力。

10、（8 分）用变量代换 $t=\sin x$ 化简微分方程 $y''+y'\tan x-y\cos^2 x=0$，并求其满足 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$ 的特解。

11、（8 分）求由曲线 $y=\sqrt{x}, x=1, x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕直线

$x=-1$轴旋转而成的旋转体的体积。

12、（6 分）设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = a\int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$（其中$a>1$为定常数）。

证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得 $f(\xi)=2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解答

1、（9 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$.

解　方法一：原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x(\tan^2 x-3)}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}=\sqrt{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^2 x-3}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$

$$=\sqrt{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\tan x\sec^2 x}{-\sin(x+\frac{\pi}{6})}=-24$$

方法二：原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x(\tan x+\sqrt{3})\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x-\sqrt{3}}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$$

$$=6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 x}{-\sin(x+\frac{\pi}{6})}=6\cdot\frac{(-1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\quad=-24$$

方法三：原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})}{\sin(\frac{\pi}{3}-x)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x(\tan x+\sqrt{3})\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x-\sqrt{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}-x)}$$

$$=6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-x)}=6\cdot\frac{(-1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\quad=-24$$ 9 分

2、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(\cot\frac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)}=\dfrac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}}{a(1-\cos t)}=\dfrac{-\csc^2\frac{t}{2}}{2a(1-\cos t)}$　　9 分

3、（9 分）已知 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{\sin x}\cos^2 t\,dt=0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：方程两边关于 x 求导得　$e^{y^2}y'+\cos^2\sin x\cdot\cos x=0\Rightarrow y'=-\dfrac{\cos^2\sin x\cdot\cos x}{e^{y^2}}$　　9 分

4、（8 分）求数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{\pi}{4})\sqrt{n^2+1}$.

解：方法一：由 $\lim\limits_{x\to0^+}(\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+(1+x)^2}=\frac{1}{2}$$

故由归结原理 $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\frac{n+1}{n}-\frac{\pi}{4})\sqrt{n^2+1}=\frac{1}{2}$

方法二：$\lim\limits_{x\to0^+}[(\arctan(x+1)-\arctan 1)\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}]=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{1+\xi}\quad(1<\xi<1+x)$

$$=\lim_{\xi\to1}\frac{1}{1+\xi}=\frac{1}{2}$$

故由归结原理 $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\frac{n+1}{n}-\frac{\pi}{4})\sqrt{n^2+1}=\frac{1}{2}$

方法三：$\alpha=\arctan\frac{n+1}{n}$，则 $\tan\alpha=\frac{n+1}{n}$

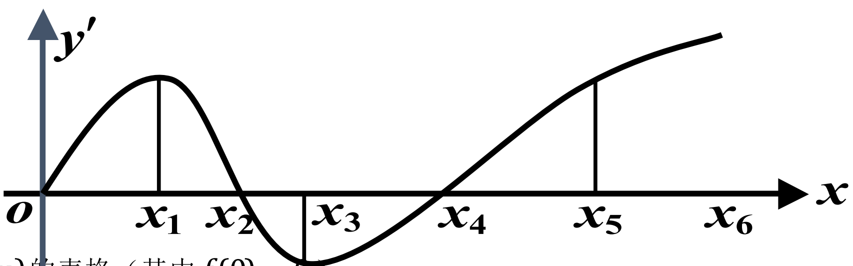
于是 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{\frac{n+1}{n}-1}{1+\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{2n+1}$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2n+1}$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\frac{1}{2n+1})\cdot\sqrt{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}$ 8 分

5、（9 分）设 $a>0$，求 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x dx$.

解：原式 $=\left[e^{-ax}\left(-\frac{1}{1+a^2}\cos x-\frac{a}{1+a^2}\sin x\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{1+a^2}$ 9 分

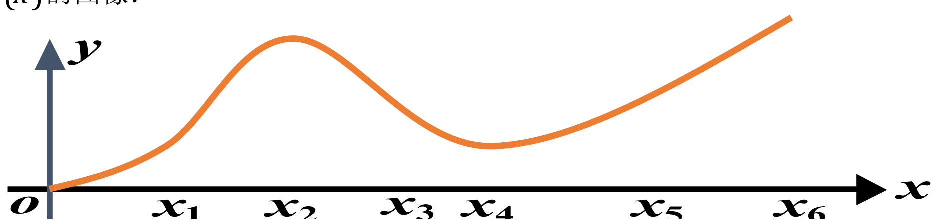
6、（9 分）根据以下导函数 $y=f'(x)$ 的图像：



填写关于函数 $f(x)$ 的表格（其中 $f(0)=0$）：

单增区间	$(0,x_2),(x_4,x_6)$	凸区间	(x_1,x_3)
单减区间	(x_2,x_4)	凹区间	$(0,x_1),(x_3,x_6)$
极大值点	x_2	极小值点	x_4

画出函数 $y=f(x)$ 的图像：



9 分

7、（8 分）确定常数a,b，使函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(e^{2x}-1) & ，x<0\\ a+\sin bx & ，x\geq 0\end{cases}$处处可导。

解：要使$f(x)$在$x=0$可导，首先须在$x=0$连续即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=a$

即$a=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2e^{2x}}{1}=2$，要使$f(x)$在$x=0$可导，须$f'_-(0)=f'_+(0)$

$$即f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{x}(e^{x}-1)-2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1-2x}{x^2}=2$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+\sin bx-2}{x}=b$$

则$a=b=2$时，$f(x)$在$x=0$可导，从而处处可导。 8 分

8、（9 分）求由$\arctan x\leq y\leq x, 0\leq x\leq 1$所确定的区域的面积。

解：$s=\int_0^1(x-\arctan x)dx=(\dfrac{x^2}{2}-x\arctan x)\Big|_0^1+\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}dx$

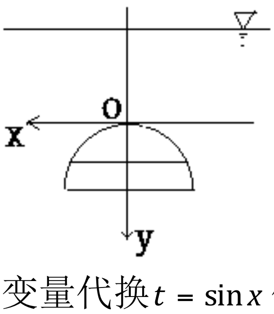
$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$ 9 分

9、（8 分）涵洞的断面为抛物线拱形。拱高 1 米，拱底宽 2 米，在水面高出涵洞顶点 0.5 米时，求涵洞闸门上所受的水压力。

解：设坐标系如图.抛物线方程为$y=kx^2$由于过$(1,1)$点，故$k=1$ 即$y=x^2$

$dF=(0.5+y)\cdot 2\sqrt{y}dy$

$F=2\int_0^1(0.5+y)\sqrt{y}dy=\dfrac{22}{15}$(吨) （或$=\dfrac{22000g}{15}$牛顿$\approx 14373.3$牛顿） 8 分



10、（8 分）用变量代换$t=\sin x$化简微分方程$y''+y'\tan x-y\cos^2 x=0$，并求其满足$y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=2$的特解。

解 先将y',y''转化为$\dfrac{dy}{dt},\dfrac{d^2y}{dt^2}$，再用二阶常系数线性微分方程的方法求解即可。

因为 $y'=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\cos x\dfrac{dy}{dt}$，$y''=\dfrac{dy'}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\cos^2 x\dfrac{d^2y}{dt^2}-\sin x\dfrac{dy}{dt}$，

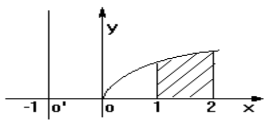
代入原方程，得$\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$，解此微分方程，得$y=C_1e^t+C_2e^{-t}=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}$

将初始条件$y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=2$代入，有$C_1=\frac{3}{2}, C_2=-\frac{1}{2}$. 故满足条件的特解为

$y=\frac{3e^{\sin x}-e^{-\sin x}}{2}$　　8 分

11、（8 分）求由曲线$y=\sqrt{x}, x=1, x=2$及x轴所围成的平面图形绕直线$x=-1$轴旋转而成的旋转体的体积。

解 建立新的坐标系，原点o'在原坐标的坐标点$o'(-1,0)$，则由$y=\sqrt{x'-1}, x'=2, x'=3$及$x$轴所围成的区域绕$x'=0$旋转而成体积。



$$V_{x=-1}=2\pi\int_2^3 xy\,dx=2\pi\int_2^3 x\sqrt{x-1}\,dx \qquad \text{设} t=\sqrt{x-1}$$

$$=2\pi\int_1^{\sqrt{2}} 2t^2(t^2+1)dt=4\pi\int_1^{\sqrt{2}}(t^4+t^2)dt$$

$$=4\pi\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{8}{15}\pi(11\sqrt{2}-4).$$　　8 分

12、（6 分）设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=a\int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$（其中$a>1$为定常数）。证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得 $f(\xi)=2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明： 令$F(x)=e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$，则$F'(x)=e^{1-x^2}\left[-2x\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)+f(x)\right]$

且由积分中值定理有$F(1)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$

$$=e^{1-y^2}\left(\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\right)=f(y) \quad y\in[0,\frac{1}{3}]$$

由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(y,1)\subset(0,1)$使得$F'(\xi)=0$

即$f(\xi)=2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$　　6 分