武汉大学 2016-2017 第一学期高等数学 A1 期末试题 A

1、（9 分）计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}$

2、（9 分）计算极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

3、（9 分）求位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ $(e\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域 G 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

4、（9 分）设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求函数 $f(x)$ 的间断点并判断其类型。

5、（9 分）设函数 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|\,dt\ (0<x<1)$,求函数 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间。

6、（9 分）已知 $y=\dfrac{8\sqrt{2}}{3\pi}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin u}(v^2+1)\sin(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}v)\mathrm{d}v$，其中 $u=u(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ u=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin t\end{cases}$ $(0<t<\dfrac{\pi}{2})$ 所确定，求曲线 $y=y(x)$ 在参数 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处切线的直角坐标方程。

7、（9 分）设函数 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2+2t}dt$，求定积分 $\int_0^1(x-1)^2f(x)dx$.

8、（9 分）求圆 $r=2a\cos\theta$ 所围平面图形的面积。

9、（9 分）设有半径为 R 的半球形容器中注满水,求将满池水全部抽出所做的功。

10、（9 分）求解微分方程 $\begin{cases}y''+y=2xe^x+4\sin x\\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$.

11、（5 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，证明：函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上存在原函数。

12、（5 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上三阶可导，且 $f(x)$，$f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。试证明：$f'(x)$，$f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

武汉大学 2016-2017 第一学期
高等数学 A1 期末试题 A 解答

1、（9 分）计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$.

解：$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+2)}=\frac{1}{2}$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}$　　9 分

2、（9 分）计算极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

解　$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot(\frac{1}{2}x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2(1-\cos x)}{x^2\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$　9 分

3、（9 分）求位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ $(e\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域 G 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解　由旋转体体积公式得 $V=\int_e^{+\infty}\pi y^2dx=\pi\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx=\pi\int_e^{+\infty}\frac{1}{1+\ln^2 x}d(\ln x)$

$$=\pi\arctan(\ln x)\big|_e^{+\infty}=\pi(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{4}\qquad 9\text{ 分}$$

4、（9 分）设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}(\frac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型。

解：因 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}(\frac{\sin t-\sin x+\sin x}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无意义，而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=e$，所以 $x=0$ 时可去间断点。

而 $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$，所以 $x=k\pi$　$(k=0,\pm1,\pm2,\text{L})$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点。　9 分

5、（9 分）设函数 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|dt$ $(0<x<1)$,求函数 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间。

解　$f(x)=\int\limits_0^1|t(t-x)|dt=\int\limits_0^x t(x-t)dt+\int\limits_x^1 t(t-x)dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$

令 $f'(x)=x^2-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 由 $(0<x<1)$，故 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $f''(x)=2x>0\,(0<x<1)$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为：

$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$，且曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内是凹的。

由 $f'(x)=x^2-\frac{1}{2}$ 知，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内单调递减，在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 内单调递增。　9 分

6、(9 分)已知 $y=\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin u}(v^2+1)\sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}}v)\mathrm{d}v$，其中 $u=u(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ u=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin t\end{cases}$ $(0<t<\frac{\pi}{2})$ 所确定，求曲线 $y=y(x)$ 在参数 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处切线的直角坐标方程.

解 由 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}(\sin^2 u+1)\sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin u)\cdot\cos u\cdot\frac{du}{dx}$，而 $\frac{du}{dx}=\frac{\frac{\pi^2}{16}\sqrt{2}\cos t}{-\sqrt{2\pi}\sin t}=-\frac{\frac{\pi^2}{16}x}{u}$

故 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}(\sin^2 u+1)\sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin u)\cdot\cos u\cdot\frac{\frac{\pi^2}{16}x}{u}$

由 $t=\frac{\pi}{4}$ 得 $\begin{cases}x=1\\ u=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ $y=\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v^2+1)\sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}}v)\mathrm{d}v=0$ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}=-1$

故曲线 $y=y(x)$ 在参数 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处切线的直角坐标方程为：$y=1-x$ 9 分

7、(9 分）设函数 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求定积分 $\int_0^1(x-1)^2 f(x)dx$

解：由 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$ 知，$f(0)=0$，$f'(x)=e^{-x^2+2x}$

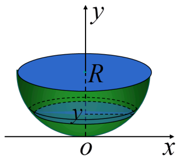
$$\int_0^1(x-1)^2 f(x)dx=\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3 f'(x)dx=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3 e^{-x^2+2x}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}d(x-1)^2=\frac{e}{6}\int_0^1 te^{-t}dt=\frac{1}{6}(e-2)$$ 9 分

8、(9 分）求圆 $r=2a\cos\theta$ 所围平面图形的面积。

解：$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\pi a^2$ 9 分

9、(9 分)设有半径为 R 的半球形容器中注满水，求将满池水全部抽出所做的功。



解: 法一 过球心的纵截面建立坐标系如图.

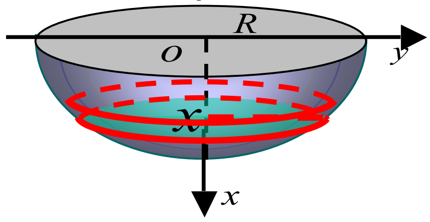
则半圆方程为 $x^2+(y-R)^2=R^2$。取 y 为积分变量，对应于 $[y,y+dy]$ 薄层所需的功元素 $dw=rgpx^2(R-y)dy=rgp(2Ry-y^2)(R-y)dy$

故所求功为：$w=rgp\int_0^R(2R^2y-3Ry^2+y^3)dy=\frac{p}{4}rgR^4$ 9 分

法二 解: 过球心的纵截面建立坐标系如图. 则半圆方程为 $x^2+y^2=\mathrm{R}^2$。
取 x 为积分变量，

对应于 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 薄层所需的功元素 $\mathrm{d}W=\rho\mathrm{g}\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x\cdot x=\rho\mathrm{g}\pi(R^2x-x^3)\mathrm{d}x$

故所求功为 $W=\rho\mathrm{g}\pi\int_0^R(R^2x-x^3)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\rho\mathrm{g}R^4$。



10、（9 分）求解微分方程 $\begin{cases} y''+y=2xe^{x}+4\sin x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

解. 特征方程 $\lambda^2+1=0$， $\lambda=\pm i$ 齐次方程通解 $\overline{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$

非齐次方程特解：

1）由 $r=1$ 不是特征根，故 $y_1^*=(Ax+B)e^x$，

代入方程得：$A=1, B=-1,\quad y_2{}^*=(x-1)e^x$

2）由 $r=i$ 是特征根，故 $y_2^*=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$，

代入方程得：$A=0, B=0, C=-2, D=0,\quad y_3{}^*=-2x\cos x$

所以 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+e^x(x-1)-2x\cos x$ 由 $y(0)=y'(0)=0$ 可得

$c_1=1, c_2=2$ 得解 $y=\cos x+2\sin x+e^x(x-1)-2x\cos x$ 9 分

11、（5 分）设 $f(x)$ 函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，证明：$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上存在原函数。

证 由于 $f(x)$ 函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，可设 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx, x\in[a,b]$

由于 $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(x)dx-\int_a^x f(x)dx=\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx, x+\Delta x\in[a,b]$

从而 $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(x)dx=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\cdot f(\xi)\Delta x, \xi$

位于 $x+\Delta x$ 与 x 之间，再由连续性，从而 $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$，由原函数的定义知 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，因此 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上存在原函数 5 分

12、（5 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上三阶可导，且 $f(x)$，$f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。试证明：$f'(x)$，$f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

证明：由已知可得存在 $M>0$ 有 $|f(x)|\le M$，$|f'''(x)|\le M$，$x\in(-\infty,+\infty)$

对任取的 x_0 由泰勒公式有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

因此有 $$f(1+x_0)=f(x_0)+f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!} \qquad (1)$$

$$f(-1+x_0)=f(x_0)-f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!} \qquad (2)$$

$(1)+(2)$ 得 $f''(x_0)=f(1+x_0)+f(-1+x_0)-2f(x_0)+\dfrac{f'''(\xi_2)}{3!}-\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}$

$$|f''(x_0)|\le 4\frac{1}{3}M \qquad 5\text{ 分}$$

$(1)-(2)$ 得 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}\left(f(1+x_0)-f(-1+x_0)-\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{3!}\right)$

$$\left|f'\left(x_0\right)\right| \leq 1\frac{1}{6}M$$ 5 分