**NELINEARNO PROGRAMIRANJE:** Skup postupaka optimizacije (određivanja ekstremne vrijednosti funkcije, odnosno minimuma ili maksimuma) s nelinearnim funkcijama cilja i/ili ograničenja. Često nastaju u prirodnim znanostima i inženjerstvu (npr. veličina populacije je nelinearna funkcija stope mortaliteta i nataliteta, gubitak energije u električnom je nelinearna funkcija otpora i sl.). Priroda funkcije cilja i ograničenja često onemogućava optimizaciju korištenjem analitičkih metoda. U takvim se slučajevima koriste metode traženja koje uvjetuju samo mogućnost izračunavanja vrijednosti funckije cilja na osnovu aktualnih vrijednosti varijabli

**OSNOVNA IDEJA GRADIJENTNIH METODA:** Naći stacionarne točke funkcije (f'(x)=0) (ako je funkcija diferencijabilna do reda koji nam je potreban)

**U GRADIJENTNE METODE SPADAJU**: Newton-Raphsonova metoda (Metoda tangente) i Metoda sekante

**METODE DIREKTNOG PRETRAŽIVANJA:** Fibonaccijeva metoda i Metoda zlatnog reza

**NUMERIČKO RJEŠAVANJE**: Gradijentne metode, Metode direktnog pretraživanja I Metode aproksimacije polinomom

**JEDNODIMENZIONALNA OPTIMIZACIJA:** Numeričko rješavanje I Analitičko rješavanje

**NELINEARNA JEDNODIMENZIONALNA OPTIMIZACIJA:** Jednodimenzionalna optimizacija->Numeričko rješavanje I Analitičko rješavanje ->Gradijentne metode, Metode direktnog pretraživanja I Metode aproksimacije polinomom (GORE NAVEDENE KOJA SPADA U DIREKTNO PRET, NUMER. RJ….)

**NEWTONOVA METODA TANGENTI:** •Ideja Newtonove metode je graf funkcije f aproksimirati tangentom •Metoda počinje procjenom •Primjenom uzastopnih ponavljanja, tj. iteracija procjena vodi sve boljoj i boljoj procjeni •Proces iteracije približava se odgovoru kao dinamički sustav koji traži svoje stabilno stanje •Pretpostavimo da je funkcija f barem • neprekidno derivabilna na nekoj domeni • Idealno – na cijelom R •Nadalje, neka je zadana, ili nekako izabrana početna točka x0 •Ideja metode tangente je povući tangentu na graf funkcije f u točci (x0, f(x0)) i definirati novu aproksimaciju f(x1) u točci gdje ta tangenta siječe os x. •Drugim riječima, funkciju f aproksimiramo pravcem – tangentom u točci (x0, f(x0)) •A nepoznatu nultočku funkcije f aproksimiramo nultočkom tog pravca – tangente na graf funkcije f u zadanoj točci •Isti postupak se ponavlja u točci x1 i dobiva se točka x2 •Ponavljanjem (iterizacijom) ovog postupka u svakoj sljedećoj točci, dobiva se Newtonova metoda

**NEWTONOVA METODA TANGENTI:** Geometrijski izvod Newtonove metode je jednostavan •U točci xn napišemo jednadžbu tangente i pogledamo gdje tangenta sječe os x •Jednadžba tangente je: y-f(xn)=f'(xn)(x-xn) •Iz zahtjeva y=0 za x=xn+1 izlazi da je nova aproksimacija dana izrazom: xn+1=xn - $f(xn)/f'(xn)$ , n≥0 •Za računanje je dovoljno pretpostaviti da f'(xn) postoji (neprekidnost nije bitna) i da je f(xn)≠0 u svim točkama xn. • f(x) se razvija u Taylorov red oko $x0$ f(x)≈g(x)=f($x0$) + f'($x0$)($x - x0$) +1/2* f''($x0$) $x - x0$ 2 •g(x) je parabola čiji je ekstrem u x0, a uzima se kao polazna točka za sljedeću iteraciju g'($x1$)=0, f'($x0$) + f''($x0$)($x1 - x0$)=0

**METODA SEKANTE:**•U Newtonovoj metodi koristimo tangentu u točci $x0$ kao aproksimaciju funkcije f. •Ako ne znamo derivaciju f' funkcije f, ili se ona teško računa, možemo tangentu aproksimirati sekantom kroz dvije startne točke $x0$ i $x1$. $f'(x0)$≈ $f$ $x1 - f$ $(x0)$ $x1 - x0$ = f[$x0$, $x1$] •Tako dobivamo metodu sekante. •Ideja metode sekante je povući sekantu grafa funkcije f kroz točke ($x0$, f($x0$)) i ($x1$, f($x1$)) i definirati novu aproksimaciju $x2$. •Postupak ponavljamo povlačenjem sekante kroz dvije posljednje točke ($x1$, f($x1$)) i ($x2$, f($x2$)) i tako redom. •Ako se drugi izvod zamijeni konačnom razlikom $xk$+1=$xk$ - $f'(xk)/f''(xk)$ $f''(xk)$≈ $f\ '\ xk - f\ '\ (xk-1)$ / $xk - xk-1$ •Newtonova metoda postaje: $xk$+1=$xk$ - $f'(xk)$ *($xk - xk-1$)/ $f\ '\ xk - f\ '\ (xk-1)$ , k=1,2,… •Točke su $x0$ i $x1$ proizvoljne.

**METODE DIREKTNOG PRETRAŽIVANJA:** • Metode direktnog pretraživanja su u osnovi metode jednodimenzionalne optimizacije. • Smatraju ih „kralježnicom" nelinearnih optimizacijskih algoritama. • Svode se na pretraživanje zatvorenog intervala. Često pretpostavljamo da je funkcija unimodalna. Detaljno pretraživanje zahtjeva N=(($b-a$) /$\varepsilon$) + 1 proračuna u intervalu slike, pri čemu je $\varepsilon$ rezolucija.

**FIBONACCIJEVA METODA:** •Metoda Finonacci dobila je naziv po tome što se u redukciji intervala pojavljuje Fibonaccijev niz brojeva •Za primjenu te metode treba unaprijed znati broj koraka. Fibonaccijevi brojevi: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 23, 21, 34, … odnosno – suma dva prethodna. Nije potrebno deriviranje funkcije, ali ona mora biti unimodalna.

**FIBONACCIJEVA METODA – ALGORITAM:** 1. Odrediti interval [$a0$, $b0$] ($a0$ < $b0$), koji sadrži točku x* i specificirati rezoluciju – točnost aproksimacije ε>0. 2. Odrediti najmanji prirodan broj *n* koji zadovoljava uvjet: $Fn$+1≤ (1/$\varepsilon$) *($b0 - a0$) ≤ $Fn$+2 3. Izračunati prvi interval: $x1$ = $a0$ + ($Fn/Fn$+2 )*($b0 - a0$) ,, $x2$ = $a0 + b0 - x1$. 4. Odrediti f($x1$) i f($x2$) pa napraviti novi set točaka $a1$ i $b1$ po principu: Ako je f($x1$) ≤ f($x2$) tada eliminiramo $x > x2$ $i$ $b = x2$ Ako je f($x1$) > f($x2$) tada eliminiramo $x < x1$ $i$ $a = x1$ Ako je f($x1$) = f($x2$) tada biramo novi par točaka 5. Izračunati k-ti interval i ponavljati postupak (korak 3) sve do k=n

**METODA ZLATNOG REZA:** Jedan od nedostataka Fibonaccijeve metode sastoji se u tome da se odredi broj iteracija n koji garantira da točka optimuma leži unutar željenog intervala. Da bi to izbjegli, stavljamo da je odnos: $Fn\ /Fn$+2 ≈ $c$ = (3− korijen iz 5)/2 = 0.38197

**METODA ZLATNOG REZA – ALGORITAM:** 1. Odrediti interval [$a0$, $b0$] ($a0$ < $b0$), koji sadrži točku x* i specificirati rezoluciju – točnost aproksimacije ε>0. 2. Izračunati: c = (3− korijen iz 5)/2 = 0.38197 3. Izračunati prvi interval: $x1$ = $a0$ + $c$* ($b0$ − $a0$), $x2$ = $a0$ + $b0$ − $x1$. 4. Odrediti f($x1$) i f($x2$) pa napraviti novi set točaka $a1$ i $b1$ po principu: Ako je f($x1$) ≤ f($x2$) tada eliminiramo $x$ > $x2\ i\ b$ = $x2$ Ako je f($x1$) > f($x2$) tada eliminiramo $x$ < $x1\ i\ a$ = $x1$ Ako je f($x1$) = f($x2$) tada biramo novi par točaka 5. Izračunati k-ti interval i ponavljati postupak (korak 3) sve do k=n

**METODE APROKSIMACIJE POLINOMOM -METODA PARABOLE:** Osnovna ideja metoda sproksimacije polinomom je: Funkcija se aproksimira polinomom y(x) na intervalu I koji sadrži optimum, odredi se minimum min y(x)=xopt, u okolini xopt se formira novi interval (manji od prethodnog) i vrši se nova aproksimacija.

**METODA PARABOLE – ALGORITAM:** 1. Traže se tri točke $x1$, $x2$, $x3$ tako da je $x1$ < $x2$ < $x3$ i tada je $x1$ < $x*$ < $x3$ 2. Riješi se sustav jednadžbi po a, b, c $a$ + $bx1$ + $cx1$ na 2 = $f(x1)$ $a$ + $bx2$ + $cx2$na 2 = $f(x2)$ $a$ + $bx3$ + $cx3$na 2 = $f(x3)$. 3. Uvjet minimuma parabole: y’(x)=0 da je: $xopt = −b\ /2c$. 4. Sada $xopt$ i dvije susjedne točke od $x1$, $x2$, $x3$ formiraju novu trojku i postupak se nastavlja. Potrebno je usporediiti $xopt$ i $x2$ - manja od njih dvije je nova $x2$, a točke lijevo i desno čine $x1$ i $x3$. 5. Postupak se prekida kada je: $f($ $xopt) −y(xopt)$ ≤ ξ

**KUBNA METODA- ALGORITAM:** 1. Aproksimira f(x) polinomom trećeg reda: y $(x)$ = $a$ + $bx$ + $cx$ na 2 + $dx$ na 3, $f\ '\ (x1) < 0$, $f\ '\ (x2) > 0$ ,$x1 < x2$. 2. Koeficijenti se mogu odrediti na dva načina: 1. Poznavanjem f(x) u 4 točke. 2. Poznavanjem f(x) i f’(x) u 2 točke $a$ + $bxi$ + $cxi$ na 2 + $dxi$ na 3 = $f\ (xi)$, $i$ = 1,2, … $b$ + 2$cxi$ + 3$dxi$ na 2 = $f\ '\ xi\ i$ = 1,2, … 3. Kod rješavanja $y\ '\ (x\ )$= 0 dobivaju se dva rješenja, a uzima se ono koje leži u intervalu $x1$, $x2$ i ima manju vrijednost (za minimum) 1. Ako je $f\ '(\ xopt) < 0$, $x1 = xopt$ 2. Inače $x2 = (xopt)$. 4. Postupak se prekida kada je: $f(\ xopt) − y(xopt)$ ≤ ξ

**KUBNA METODA – OSOBINE:** • Optimum uvijek leži u $x1$, $x2$ • Brža je od metode parabole, ali zahtjeva više računarskih operacija (stupanj konvergencije je superlinearan) •Minimum y(x) na intervalu [ $x1$, $x2$] može se računati direktno $x*$ = $x2$ – (($f2\ '$ + $w − z$ )/($f2\ '$ − $f1\ '$ + 2$w$ ))*($x2 − x1$), z = 3 *($f1$−$f2$)/( $x2$−$x1$ ) + $f1\ '$ + $f2\ '$ , $w$ =korijen iz ( $z$ na 2 − $f1\ ' * f2\ '$)