

Așătăui că (x_n) nu este fundamental

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ a.s. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m, l \geq n$ a.s. $|x_m - x_l| \geq \varepsilon$

Alegem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2n$, $l = n$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat.

$$\begin{aligned} |x_{2n} - x_n| &= \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right| = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\text{mări}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x_n)$ nu este convergent, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

3. Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de numere reale.

Def: a) Suma infinită $x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ se numește serie de numere reale asociată sirului (x_n) și se notează cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $\sum_{n \geq 0} x_n$.

b) Sirul $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se numește sirul sumelor parțiale ale seriei.

c) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește convergentă dacă sirul (S_n) este convergent. Limita $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ se numește

suma seriei și scriem $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S$

d) O serie care nu este convergentă se numește divergentă.

serie di divergență $\xrightarrow{\text{cu sumă infinită}}$ fără sumă (serie oscilantă)

Ex: Natura seriei geometrice $\sum_{m=0}^{\infty} a^m = 1+a+a^2+\dots$, $a \in \mathbb{R}$

$$\text{Avem } S_n = 1+a+a^2+\dots+a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a \neq 1 \\ n+1, & a=1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & a \in (-1, 1) \\ +\infty, & a \geq 1 \\ \emptyset, & a \leq -1 \end{cases}$$

$\sum_{m=0}^{\infty} a^m$ este convergentă $\Leftrightarrow a \in (-1, 1)$

Prop: Dacă seria $\sum_{m=0}^{\infty} x_m$ este convergentă $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Reciproco nu este adevărată.

Dem: Fie $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$$S_n - S_{n-1} = x_n \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow s - s = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Negativă: Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} x_m$ este divergentă.

Ex: Natura seriei armonică: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow$ seria este divergentă.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

□ (criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Seria $\sum_{m=0}^{\infty} x_m$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M_0 \in \mathbb{N}$ a.i.

$\forall m \geq M_0, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_{m+p}| < \varepsilon$. !!

Dem:

$\sum_{m=0}^{\infty} x_m$ convergentă $\Leftrightarrow (S_m)$ năs convență, $S_m = x_0 + x_1 + \dots + x_m$

$\Leftrightarrow (S_m)$ fundamental $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall m \geq M_0,$

$\forall p \in \mathbb{N} : |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon,$

$$|S_{m+p} - S_m| = |x_0 + x_1 + \dots + x_{m+p} - x_0 - x_1 - \dots - x_m| = |x_{m+1} + \dots + x_{m+p}|.$$

Def: Spunem despre două serii că au aceeași natură (\sim) dacă ambele sunt fie convergente, fie divergente.

Ex: 1) $\sum_{m=0}^{\infty} x_m \sim \sum_{m=M_0}^{\infty} x_m, \quad \forall M_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m = (x_0 + x_1 + \dots + x_{M_0-1}) + \sum_{m=M_0}^{\infty} x_m$$

2) $\sum_{m=0}^{\infty} x_m \sim \sum_{m=0}^{\infty} t \cdot x_m, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$S_m = x_0 + x_1 + \dots + x_m, \quad S'_m = t \cdot x_0 + t \cdot x_1 + \dots + t \cdot x_m = t \cdot S_m$$

4. Serii cu termeni pozitivi (s.t.p.)

Def: Seria $\sum_{m=0}^{\infty} x_m$ se numește cu termeni pozitivi

dacă $x_m \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}$

Prop: O serie cu termeni pozitivi este convergentă \Leftrightarrow signul sumelor parțiale este marginit.

Dem: Fie $S_m = x_0 + x_1 + \dots + x_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$S_{m+1} - S_m = x_{m+1} \geq 0$, $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow (S_m)$ sir crescător

I) Dacă (S_m) mărginit superior $\Rightarrow (S_m)$ convergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge.

II) Dacă (S_m) nemărginit superior $\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergent.

Obs: Orice serie cu termeni pozitivi are sumă (finită sau $+\infty$)

T (criteriul condensării al lui Cauchy)

Fie (x_m) un sir crescător de numere positive. Serile $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ și $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot x_{2^m} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots$ au același natură.

Ilem: Fie $S_m = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, $T_m = x_1 + 2x_2 + \dots + 2^m \cdot x_{2^m}$, $\forall m \in \mathbb{N}$

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$ fixat $\exists! k \in \mathbb{N}$ a.i. $2^k \leq m \leq 2^{k+1} - 1$.

$$\begin{aligned} S_m &= x_1 + \dots + x_m \leq x_1 + \dots + x_{2^{k+1}-1} = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \\ &\dots + (x_{2^k} + \dots + x_{2^{k+1}-1}) \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots + 2^k \cdot x_{2^k} = T_k, \text{ apoi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_m &= x_1 + \dots + x_m \geq x_1 + \dots + x_{2^k} = x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \\ &\dots + (x_{2^{k-1}} + \dots + x_{2^k}) \geq x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \dots + 2^{k-1} \cdot x_{2^k} = \\ &= \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots + 2^k \cdot x_{2^k}) = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot T_k \geq \frac{1}{2} \cdot T_k \end{aligned}$$

Iată $0 \leq \frac{1}{2} T_k \leq S_m \leq T_k$, $\forall m \in \mathbb{N}$ și $2^k \leq m \leq 2^{k+1} - 1$

(S_m) mărginit $\Leftrightarrow (T_k)$ mărginit,

de unde rezultă concluzia.

Ex: Natura seriei armonice generalizata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$

Caz particular, $p=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\text{I) Dacă } p \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 1, & p=0 \\ +\infty, & p < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{serie divergentă}$$

$$\text{II) Dacă } p > 0, \text{ fie } x_n = \frac{1}{n^p}$$

(x_n) crescător cu termeni pozitivi $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_2^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_2^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n \text{ convergentă} \Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 \Leftrightarrow p > 1.$$

\hookrightarrow seria geometrică

$$\text{Concluzie: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ convergentă} \Leftrightarrow p > 1.$$

I (criteriul comparației)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ dănuți s.t.p. Au loc afirmațiile:

1º Dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.s. $x_n \leq y_n, \forall n \geq n_0$ atunci

i) Dacă $\sum y_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $\sum x_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum y_n$ este divergentă

2º (criteriul comparației sub formă de limită)

Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$ atunci

i) Dacă $l < +\infty$ și $\sum y_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ converge

ii) Dacă $l > 0$ și $\sum y_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum x_n$ divergentă

Dem:

1. Fie $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $T_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Din } x_n \leq y_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=n_0}^n x_k \leq \sum_{k=n_0}^n y_k \Rightarrow S_n - S_{n_0-1} \leq T_n - T_{n_0-1}$$

I) Dacă (T_n) mărginit superior $\Rightarrow (S_n)$ mărginit superior (i)

II) Dacă (S_n) nemărginit superior $\Rightarrow (T_n)$ nemărginit superior (ii)

2. i) $l < +\infty \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.t. $\forall n \geq n_0 : \left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - l < \varepsilon \Rightarrow x_n < (l + \varepsilon) \cdot y_n, \forall n \geq n_0.$$

Din $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (l + \varepsilon) \cdot y_n$ convergentă $\stackrel{(i)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă.

$$ii) l > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{l} < +\infty.$$

Presupunem prin absurd că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă $\stackrel{(ii)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, contradicție cu ipoteza \Rightarrow

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

Obs: Cu notatiile din teorema anterioră, dacă

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0, +\infty)$ atunci serile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$

au același natură.

Serii de comparație: seria geometrică, seria armonică generalizată

Ex: Natușo seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 =$$

$$= \frac{2\pi^2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{4} \in (0, +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ care este convergentă}$$

I (criteriul lui Kummer)

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două siruri cu termeni strict pozitivi având următoarele proprietăți:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ este divergentă

2. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1}\right) = K \in \bar{\mathbb{R}}$

Au loc afirmațiile:

i) Dacă $K > 0 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $K < 0 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Dem: