

Serii de comparație: seria geometrică, seria armonică generalizată

Ex: Natușoarei seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \in (0, +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ care este convergentă}$$

I (criteriul lui Kummer)

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două siruri cu termeni strict pozitivi având următoarele proprietăți:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ este divergentă

2. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} \right) = K \in \bar{\mathbb{R}}$

Au loc afirmațiile:

i) Dacă $K > 0 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $K < 0 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Dem:

Din $2^{\circ} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall n \geq n_0$:

$$K - \varepsilon \stackrel{(i)}{<} u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} \stackrel{(ii)}{<} K + \varepsilon$$

i) Alegem $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0 \Rightarrow u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} > \frac{K}{2}, \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \frac{K}{2} \cdot x_{n+1} < u_n \cdot x_n - u_{n+1} \cdot x_{n+1}, \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \frac{K}{2} (x_{n_0+1} + \dots + x_n) < (u_{n_0} \cdot x_{n_0} - u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1}) + (u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1} - u_{n_0+2} \cdot x_{n_0+2}) + \dots + (u_n \cdot x_n - u_{n+1} \cdot x_{n+1})$$

$$\Rightarrow \frac{K}{2} (x_{n_0+1} + \dots + x_n) < u_{n_0} \cdot x_{n_0} - u_{n+1} \cdot x_{n+1} < u_{n_0} \cdot x_{n_0}$$

$\Rightarrow S_n = x_{n_0+1} + \dots + x_n$ este mărginit superior $\Rightarrow \sum_{m=n_0+1}^{\infty} x_m$ convergentă

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} x_m$ convergentă

ii) Alegem $\varepsilon = -K > 0 \Rightarrow u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} < 0, \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow u_n \cdot x_n < u_{n+1} \cdot x_{n+1}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} < u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1} <$$

$$< \dots < u_n \cdot x_n \Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} \leq u_n \cdot x_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n \geq (u_{n_0} \cdot x_{n_0}) \cdot \frac{1}{u_n}, \forall n \geq n_0.$$

Din $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{u_m}$ divergentă $\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (u_{n_0} \cdot x_{n_0}) \cdot \frac{1}{u_m} \neq 0$ divergentă

c.c. $\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} x_m$ divergentă.

Prop (consecințe ale criteriului lui Kummer)

Fie (x_n) un sir cu termeni strict pozitivi. Au loc:

1º (criteriul raportului al lui d'Alembert)

Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \in \bar{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $D > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $D < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

2º (criteriul lui Raabe - Duhamel)

Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = R \in \bar{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $R > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $R < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

3º (criteriul lui Bertrand)

Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = B \in \bar{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $B > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $B < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem: În criteriul lui Kummer facem următoarele particularizări:

1º $u_m = 1, \forall m \in \mathbb{N}; \sum_{m=0}^{\infty} 1$ divergentă și $K = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{x_m}{x_{m+1}} - 1 \right) = D - 1$

$D - 1 > 0 \Rightarrow \sum x_n$ convergentă

$D - 1 < 0 \Rightarrow \sum x_n$ divergentă

2º $u_m = m, \forall m \geq 1; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ divergentă și

$$K = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(m \cdot \frac{x_m}{x_{m+1}} - (m+1) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} m \cdot \left(\frac{x_m}{x_{m+1}} - 1 \right) - 1 = R - 1$$

3°. $u_n = n \cdot \ln n$, $\forall n \geq 2$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ divergentă (se urmărește!) și

$$\begin{aligned} K &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \ln n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1) \cdot \ln(n+1) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] + \underbrace{(n+1) \cdot (\ln n - \ln(n+1))}_{\text{are limita } -1} \right\} = B - 1 \end{aligned}$$

Prop (criteriul radical al lui Cauchy)

Fie (x_n) un sir cu termeni strict pozitivi și cu proprietatea că $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = c \in \bar{\mathbb{R}}$.

i) Dacă $c < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $c > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.i. } \forall n \geq n_0 : \underset{(ii)}{c - \varepsilon} < \sqrt[n]{x_n} < \underset{(i)}{c + \varepsilon}$$

i) Fie $\varepsilon = \frac{1-c}{2} > 0$, matăm $\alpha = c + \varepsilon = c + \frac{1-c}{2} = \frac{c+1}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < \alpha < 1$ și $\sqrt[n]{x_n} < \alpha, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n < \alpha^n, \forall n \geq n_0$.

Din $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ este convergentă.

ii) Fie $\varepsilon = \frac{c-1}{2} > 0$, matăm $\beta = c - \varepsilon = c - \frac{c-1}{2} = \frac{c+1}{2} > 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{x_n} > \beta > 1, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Obs:

1) Criteriile sunt, atunci decid natura seriei în
casul $D=1, R=1, B=1$, respectiv $C=1$.

2) Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{D}$ (la semimai!)

Ex: Stabilității natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)}$, $a > 0$.

$$x_n = \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)} ; \quad \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)} \cdot \frac{a(a+1)\dots(a+n+1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{a+n+1}{n+1} ; \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+n+1}{n+1} = 1 \quad (\text{nu decide})$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot a}{n+1} = a$$

Dacă $a > 1 \Rightarrow$ serie convergentă,

Dacă $a < 1 \Rightarrow$ serie divergentă.

Dacă $a = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{\substack{n=1 \\ m=n+1}}^{\infty} \frac{1}{m}$ divergentă.

5. Serii alternate

Fie (x_n) un sir de numere reale.

Def: Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă dacă
seria $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Prop: Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Reciproca afirmației nu este adeverată.

Dem: Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ convergează \Rightarrow

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

convergează.

Un contrrexemplu pentru reciprocă se va da ulterior.

Def: O serie care este convergentă dar nu este absolut convergentă se numește semi-convergentă.

Def: Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește alternată dacă $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0$,

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă numărul $a_n = |x_n| \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ atunci vom avea

$$x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ sau } x_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Numărătore: } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n, \quad a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

T (criteriul lui Leibnitz)

Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un sir descrescător de numere pozitive cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ atunci seria alternată $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă.

Dem: (a_n) este crescător.

$\exists \varepsilon > 0$ și $n, p \in \mathbb{N}$.

$$\left| (-1)^{n+1} \cdot a_{n+1} + (-1)^{n+2} \cdot a_{n+2} + \dots + (-1)^{n+p} \cdot a_{n+p} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{n+3} - a_{n+4}}_{\geq 0} + \dots + (-1)^{p-2} \cdot \underbrace{a_{n+p-1}}_{\geq 0} + (-1)^{p-1} \cdot a_{n+p} \right| = \\
 &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots + (-1)^{p-2} \cdot a_{n+p-1} + (-1)^{p-1} \cdot a_{n+p} \leq \\
 &\leq a_{n+1} < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \text{ caci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot a_m$ este convergentă

Ex: Nativa seriei armonice alternate $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$

$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \stackrel{L}{\Rightarrow}$ seria este convergentă

$\sum_{m=1}^{\infty} \left| (-1)^{m+1} \cdot \frac{1}{m} \right| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = +\infty \Rightarrow$ seria este semi-convergentă.

□ (Dependenta sumei de ordinea de însumare)

1° (Riemann) Într-o serie semi-convergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât seria nu a ajuns să aibă ca sumă orice număr $S \in \bar{\mathbb{R}}$.

2° (Cauchy) La o serie absolut convergentă suma nu depinde de ordinea de însumare a termenilor.