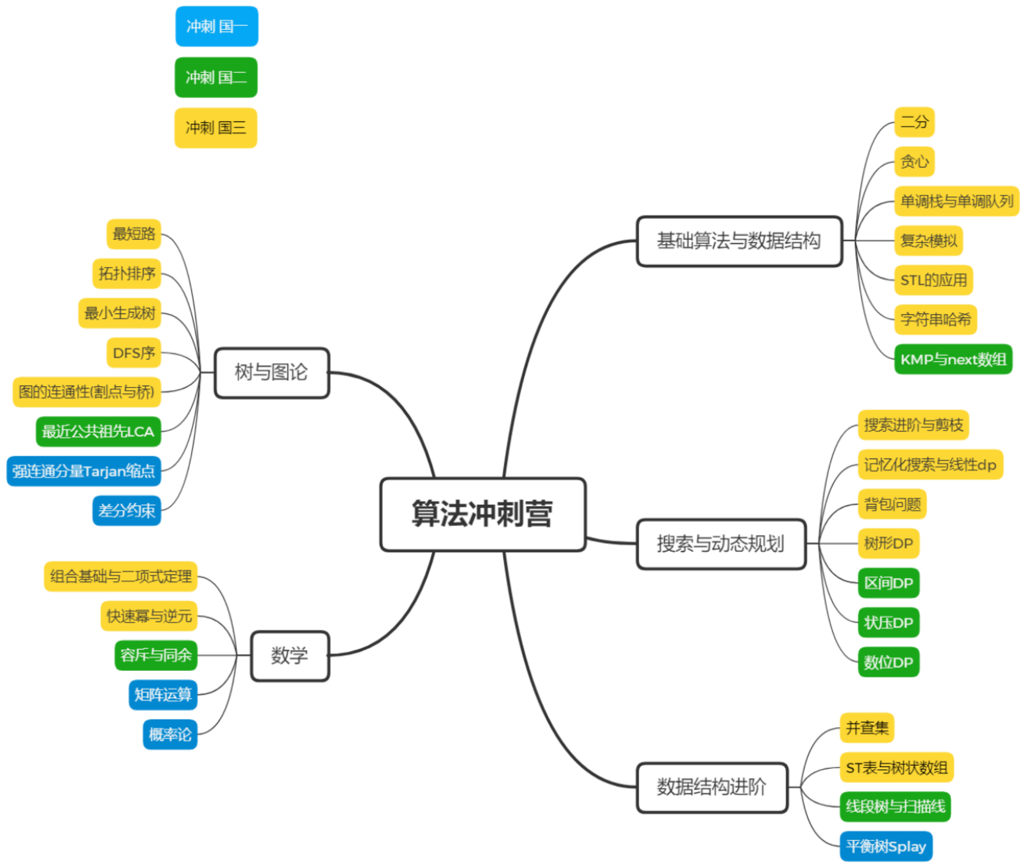
蓝桥杯30天算法冲刺集训



Day-1 二分

二分

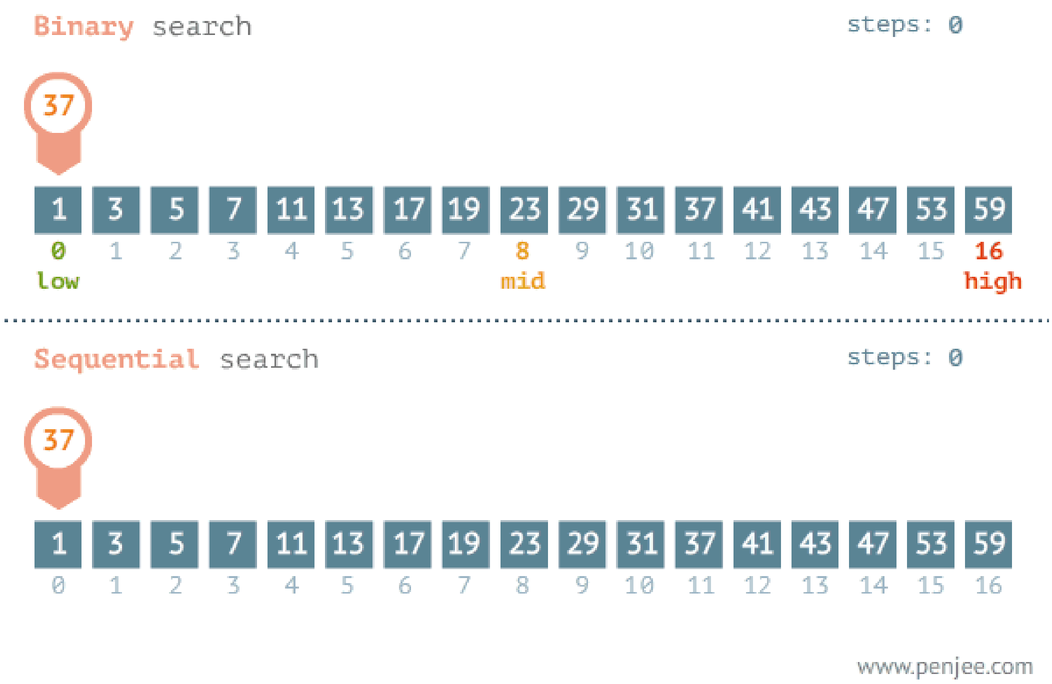
二分查找

二分查找算法思想：对于 n 个有序且没有重复的元素（假设为升序），从中查找特定的某个元素 x，我们可以将有序序列分为规模大致相等的两部分，然后取中间元素与要查找的元素 x 进行比较，如果 x 等于中间元素，则查找成功，算法终止；如果 x 小于中间元素，则在序列的前半部分继续查找，否则在序列的后半部分继续查找。这样就可以将查找的范围缩小一半，然后在剩余的一半中继续重复上面的方法进行查找。

这种每次都从中间元素开始比较，并且一次比较后就能把查找范围缩小一半的方法叫做二分查找。二分查找的时间复杂度是 $O(logn)$，是一种效率较高的查找算法。

一个比较形象的比喻就是大家翻书要翻到想看那一页，大家肯定都是先大概翻到中间

- 如果页码大了就直接往前翻，往后的页码都没必要翻了
- 如果页码小了就直接往后翻，往前的页码都没必要翻了



二分答案

二分思想不仅可以在有序序列中快速查找元素，还能高效地解决一些具有单调性判定的问题。

二分答案算法思想：某些问题不容易直接求解，但却很容易判断某个解是否可行，如果问题的答案具有单调性（即如果答案 x 不可行，那么大于 x 的解都不可行，而小于 x 的解都能可行），就像我们一开始玩的猜数字游戏一样，我们可以根据已知条件设定答案的上下界，然后用二分的方法枚举答案，再判断答案是否可行，根据判断的结果逐步缩小答案范围，直到符合题目条件的答案为止。

假设验证答案的时间复杂度为 $O(k)$，那么解决整个问题的时间复杂度为 $O(klogn)$。

bisect()和用bisect实现upper_bound()

lower_bound():二分查找左边界

```
index = bisect.bisect_left(data, x)
```

函数含义：在数组data中，找到第一个大于等于x的值

注意点:
(1)基本注意点同binary_search;
(2)此处返回是下标的值;

例子:

```
import bisect


# 示例数据
data = [1, 2, 3, 5, 7, 9]


# 查找大于等于某个值的第一个位置
index = bisect.bisect_left(data, 4)
print("Index to insert 4:", index)  # Output: 3


# 如果需要获取值而不是索引，则可以直接使用索引访问
if index < len(data):
    print("Value at index {}: {}".format(index, data[index]))
 # Output: 5
```

upper_bound()：二分查找右边界

`upper_bound(a,x,key=custom_key);` 利用bisect_right函数，找到第一个大于当前值的位置

函数含义：# 查找大于某个值的第一个位置，按照元素的绝对值大小进行比较

例子:

```
import bisect


def upper_bound(arr, target):
    return bisect.bisect_right(arr, target)


# 自定义比较函数，按照元素的绝对值大小进行比较
def custom_key(x):
    return abs(x)
# 示例用法
c = [1, 3, 5, 7, 9]
```

```
target = 6
# 查找大于某个值的第一个位置，按照元素的绝对值大小进行比较
upper_bound_index = upper_bound(c, target,key=custom_key)
print("Upper bound index:", upper_bound_index) # 结果是3
```

二分注意事项

1. 一定要注意能否二分的问题，二分都必须伴随着单调性的考虑，所谓单调性可以理解为能不能用二分，也就是对于二分最开始的$[l,r]$的区间内，是不是所有的每个单个元素都是满足所谓的转移的性质的
2. 一定要注意复杂度问题，如果有的二分需要排序，那么需要排序的二分是$O(NlogN)$的复杂度
3. 二分答案需要很强大的应用技巧，每个问题需要单独考虑怎么去做

蓝桥杯真题详解

质数变革（蓝桥杯C/C++2024B组第二场省赛）

这个题目是C/C++ B组2024第二场省赛的最后一题，虽然是最后一题但是难度并不算大，本题的要点在于二分的最基本的应用，也就是**找数**。所谓**找数**就是指我现在有一个已经排好序的序列，我从中**静态**的去找一个数的前驱和后继。静态指的是序列有序并且不会再进行改变。前驱指的是比这个数小的数，后继指的是比这个数大的数。因为都是数组上面去寻找所以复杂度都是$O(logN)$，其中N可以看成是符合范围内的素数的个数，每次找到下标后的偏移也都是$O(1)$。

本题的其他要点在于需要处理素数的筛选，用之前冲刺省一讲义里面的素数筛法即可实现，这里不再赘述。因为只需要找到10^6范围里面的素数，所以直接使用埃式筛法即可。

本题的第三个要点在于需要掌握一个叫做**调和级数**的东西，所谓调和级数也就是下面的:

```
for i in range(1,n+1):
    for j in range(i,n+1,i)
        // do something
```

需要注意的是这种代码的复杂度是$O(NlogN)$的。简要证明如下:

$$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+...+\frac{n}{n}=n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})$$

而下面这个这个式子的增长速度与lnN同阶，

$$n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})$$

所以复杂度是$O(NlnN)=O(NlogN)$

这个东西就可以非常轻松的处理相关的**因数**与**倍数**之间的关系。

具体示例代码如下（筛选素数用的是欧拉筛，之前讲义里面也有提到过）：

```
import bisect

N = 1000010  # 定义数组的最大大小

a = [0] * N  # 存储数字的数组
isPrime = [True] * N  # 存储数字是否为素数的数组
Prime = []  # 存储素数的数组
G = [[] for _ in range(N)]  # 存储因子关系的向量数组
dif = [0] * N  # 存储差异的数组

# 计算不大于n的素数
def get_prime(n):
    global Prime
    isPrime[1] = False  # 1 不是素数

    for i in range(2, n + 1):
        if isPrime[i]:
            Prime.append(i)

        for j in range(len(Prime)):
            if i * Prime[j] > n:
                break
            isPrime[i * Prime[j]] = False
            if i % Prime[j] == 0:
                break
```

```python
# 对数字进行转换
def transform(x, y):
    id = bisect.bisect_left(Prime, x)
    if y > 0:
        y -= 1
        if id + y >= len(Prime):
            return 1
        else:
            return Prime[id + y]
    if y < 0:
        if id > 0 and Prime[id - 1] == x:
            y -= 1
        if id + y < 0:
            return 0
        else:
            return Prime[id + y]

get_prime(N - 1)
cnt = len(Prime) - 1

for i in range(1, N):
    for j in range(i, N, i):
        G[i].append(j)

n, m = map(int, input().split())
a[1:n + 1] = map(int, input().split())
for _ in range(m):
    op, k, x = map(int, input().split())
    if op == 1:
        dif[k] -= x
    else:
        dif[k] += x

for i in range(1, N):
    if dif[i] != 0:
        for it in G[i]:
            if 1 <= it <= n:
                a[it] = transform(a[it], dif[i])
```

```
            else:
                break

print(*a[1:n + 1])
```

卡牌(蓝桥杯C/C++2022B组国赛)

这道题目是蓝桥杯B组国赛真题，可以当做一个练习二分 `check` 函数的一个好题。

首先我们要了解二分的上界与下界，在这个题目里面就是能够组成的套牌的数量，也就是最终的答案，并且可以发现这个答案是单调性的。

为何说是有**单调性**的呢？因为我们可以用当前的套牌以及手写的套牌两方面结合如果能组成N副套牌，则必然也能组成$N-1$副，$N-2$副...1副甚至0副套牌。

所以换句话说，**我们的跳转并不会出现问题**，那么直接二分就好了，但是还有个问题就是，我们如何去写相应的 `check` 函数呢？

实际上我们可以发现我们如果规定了当前的套牌的数量，那么我们是不是去选取套牌的方式就是一定的，也就是说我们需要从a_i里面选取，如果a_i不够还需要再手写当前i的套牌，那么整个 `check` 函数就算搞定了，只需要判断一下当前需要手写的套牌的数量是不是$\leq b_i$的即可。

最终我们算法的复杂度是二分的$(logN)$乘以 `check` 的$O(N)$，也就是$NlogN$级别的复杂度。

参考代码如下：

```
import sys

inf = 0x3f3f3f3f  # 定义无穷大
N = 2 * 10**5 + 5  # 定义数组大小

# 检查是否满足条件
def check(x):
    need = 0  # 存放所需的空白牌数量
    for i in range(n):
        if x - p[i] > m[i]:
```

```python
            return False  # 所需的空白牌数量大于允许绘制的牌
        need += max(x - p[i], 0)  # 累计所需的空白牌数量
    if need <= k:
        return True  # 空白牌数量足够
    else:
        return False  # 空白牌数量不够

n, k = map(int, input().split())  # 输入牌的数量和所需的空白牌数量
p = [0] * N * 2  # 存放绘制每张牌所需的时间
m = [0] * N * 2 # 存放每张牌已有的空白牌数量

# 输入每张牌绘制所需的时间
p = list(map(int, input().split()))
# 输入每张牌已有的空白牌数量
m = p[n:2*n]
p = p[:n]
l = 0  # 初始化左边界为0
r = inf  # 初始化右边界为无穷大
while l <= r:
    mid = (l + r) // 2  # 取中间值
    if check(mid):
        ans = mid  # 更新答案为当前中间值
        l = mid + 1  # 如果当前中间值满足条件，则尝试更大的值
    else:
        r = mid - 1  # 如果当前中间值不满足条件，则尝试更小的值

print(ans)  # 输出最终答案
```

递增三元组(蓝桥杯C/C++2018B组省赛)

直接暴力枚举大家肯定都会，但是$O(N^3)$只有30%的分数，会直接超时。

我们考虑如何优化我们发现这个三元组要满足的条件是

$$A_i < B_j < C_k$$

可以看到我们如果先枚举两层for，然后再对B_j进行二分C_k，这样子也可以做，但是这样的复杂度是$O(N^2logN)$的，只能过60%的分数。

这种做法的具体如下伪代码所示：

```
def upper_bound(arr, target):
    left = 0
    right = len(arr)
    while left < right:
        mid = (left + right) // 2
        if arr[mid] <= target:
            left = mid + 1
        else:
            right = mid
    return left


ans = 0
for i in range(1, n + 1):
    for j in range(1, n + 1):
        if a[i] < b[j]:
            ans += upper_bound(c, b[j])
```

那么还是需要优化的，我们已经有了需要二分的思路了，就是怎么再把前面的两个for循环优化一下

我们再观察这个式子，发现其中的B_j是不是正好在中间那么是不是我们可以把上面的式子变换一下，如下所示：

$$\begin{cases} B_j > A_i \\ B_j < C_k \end{cases}$$

那么我们是不是直接枚举B_j去寻找两个不等式的个数然后乘起来就好了。

示例代码如下：

```
import bisect
```

```python
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
b = list(map(int, input().split()))
c = list(map(int, input().split()))

a.sort()
c.sort()

ans = 0
for j in range(n):
    cnta = bisect.bisect_left(a, b[j])
    cntc = n - bisect.bisect_right(c, b[j])
    ans += cnta * cntc

print(ans)
```

练习题

小蓝与数轴

小蓝与换装大赛

小蓝与捉迷藏