兰州大学学报（自然科学版）
23（3）；6—9，1987

具有同构线图的有向图

欧阳克毅　　欧阳克智

摘　要

本文引入了特殊的"拆点"和"并点"运算，给出了与某有向图有同构的线图的一切有向图的构造及个数，并得到了有向图可由其线图唯一确定的充要条件。

众所周知：对于无向图而言，若G和G′是有同构的线图的连通图，除了K_3和$K_{1,3}$外，G和G′同构．（参见[1]P85）那么，相应于有向图，有什么样的结论呢？本文将给出一个明确的完整的答案．

设D是有向图，其线图L(D)以给定的有向图D的弧为它的顶点，当弧x，y依次在D中导出一条长为2的有向路时，则在L(D)中有从x指向y的弧．这时我们也说，弧x与弧y相邻．

在本文中，我们假定D及L(D)是无环且无孤立顶点的有向图．我们称D中那些入度为0，出度大于0的点为"源"，又称那些出度为0，入度大于0的点为"汇"．我们在"源"与"汇"的集合上，定义两种运算——"拆点"和"併点"．所谓"拆点"，就是将一个度为$r(r\geqslant 2)$的"源"或"汇"点v，拆成两个"源"或"汇"点v_1及v_2，并将与v相连的一束弧，拆成分别连于v_1及v_2的两束弧，但不改变各弧与其他顶点的关联性，使得v_1及v_2的度分别为r_1及r_2，且$r=r_1+r_2$．易见，对于$r\geqslant 3$的"源"或"汇""拆点"有多种方法．所谓"併点"就是将两个"源"（或者两个"汇"）点u_1及u_2，合併成一个"源"（或者"汇"）点u，并将分别与u_1及u_2相连的两束弧，合併为连于u的一束弧，但保持各弧与其他顶点的关联性．注意："併点"运算不能在"源"与"汇"之间进行，"拆点"运算不能在度为1的"源"或"汇"之间进行．对于任一有向图D，我们总可施行上述"拆点"运算，使得所有"源"点和"汇"点统统变成度为1的"源"点和"汇"点．我们记如此"拆点"所得之图为B(D)．

定理　设D与D′为有向图，则$L(D)\cong L(D')$的充要条件是$B(D)\cong B(D')$．

证明　若$B(D)\cong B(D')$，显然，B(D)的线图L(B(D))与B(D′)的线图L(B(D′))同构．根据线图的定义容易看出：$L(D)=L(B(D))$，$L(D')=L(B(D'))$．故$L(D)\cong L(D')$．

本文1986年4月16日收到．

反之，若已知$L(D)\cong L(D')$，φ是$L(D)\to L(D')$的一个同构映射．实际上，φ是一个建立在D的弧集$A(D)$到D'的弧集$A(D')$上的，保持各弧的邻接关系的映射．下面我们将由φ诱导出一个由$B(D)\to B(D')$的映射．首先，对于D中任一出、入度均大于零的点v，必存在该点的入弧x及出弧y．由φ可在D'中找到弧x'及y'，使得：$x\xrightarrow{\varphi}x'$，$y\xrightarrow{\varphi}y'$．因φ是同构映射，x'与y'必相邻，设其衔接于点v'．令映射φ^*为$v\xrightarrow{\varphi^*}v'$．其次，对于$B(D)$中的“源”或“汇”点，我们可在它们与D中和“源”或“汇”点相连的诸弧之间建立一一对应．注意，φ把D中和“源”（“汇”）相连的弧映射成D'中和“源”（“汇”）相连的弧．D'中的这些弧又与$B(D')$中的“源”或“汇”点一一对应，从而我们延拓上述φ^*映射到$B(D)$与$B(D')$的“源”与“汇”点上．容易证得：φ^*的定义是无歧义的，且φ^*是由$B(D)$的顶点集到$B(D')$的顶点集的一个1—1的到上映射．下面仅证：φ^*是由$B(D)$到$B(D')$的同构映射，即φ^*保持其顶点间的邻接关系。

由“拆点”运算的定义可见：φ^*不改变与“源”和“汇”相连的各弧与其他顶点的关联性．因此，φ^*保持“源”和“汇”点的邻接关系．对于出、入度均大于零的点u，$v\in V(B(D))$，$u\xrightarrow{\varphi^*}u'$，$v\xrightarrow{\varphi^*}v'$．当从u到v有弧y时，我们取u点的入弧x，v点的出弧z．设$x\xrightarrow{\varphi}x'$，$y\xrightarrow{\varphi}y'$，$z\xrightarrow{\varphi}z'$．u'必是弧x'的头，弧y'的尾．v'必是弧y'的头，弧z'的尾．可见从u'到v'有弧y'．反之，当u与v不邻接时，则u'与v'也必不邻接．这可用反证法，并考虑由φ^{-1}所诱导的映射$(\varphi^{-1})^*$即可．故$B(D)\cong B(D')$．

推论1：$L(D)\cong L(D')$的充要条件是D'可由D经有限次“拆点”和“併点”运算得到．进而，若$|V(D')|-|V(D)|=K$，当且仅当：“拆点”次数－“併点”次数$=K$．

证明　易知“拆点”和“併点”运算保持有向图的线图的同构性，充分性显然．

若$L(D)\cong L(D')$，由定理知$B(D)\cong B(D')$．由于“併点”运算与相应的“拆点”运算是互逆的，故我们可由D出发，先经过“拆点”运算得到图$B(D)\cong B(D')$，再由$B(D')$经过与将D'拆成$B(D')$时的相应的逆运算——“併点”，再把$B(D')$还原为D'．

由于每做一次“拆点”或“併点”运算，图的顶点数分别增加或减少一个，从而$|V(D')|-|V(D)|=K$，当且仅当“拆点”次数减去“併点”次数等于K．

推论2　设有向图D有n个与“源”相连的弧，m个与“汇”相连的弧，则与D有同构线图的有向图的总数是$\sum_{i=0}^{n}S(n,i)\cdot\sum_{j=0}^{m}S(m,j)$．（其中$S(n,i)$，$S(m,j)$为第二类Stirling数，且规定$S(0,0)=1$，当$n\geqslant 1$时$S(n,0)=0$）

证明　首先我们把D的所有“源”与“汇”全都拆成1度点，共得到n个“源”及m个“汇”，然后进行“併点”．把这n个“源”重新合併为i个（$0\leqslant i\leqslant n$）的方法数，就等于把n个不同元素，分成i类的方法数（参见[2]§11），这就是所谓的第二类Stirling数$S(n,i)$．可见把n个“源”任意合併，共有$\sum_{i=0}^{n}S(n,i)$种不同的方法．同理，把

m个“汇”任意合併共有$\sum_{j=0}^{m} S(m,\ j)$种不同的方法．故与给定的有向图D有同构的线图的有向图总数为：

$$\sum_{i=0}^{n} S(n,\ i)\cdot\sum_{j=0}^{m} S(m,\ j)$$

推论3 当且仅当一个有向图D是下述四种情况之一时，D可由其线图唯一确定：

（1）D中所有点的出入度均大于0；

（2）D中除一个“源”点外其余各点的出入度均大于0；

（3）D中除一“汇”点外其余各点的的出、入度均大于0；

（4）D中仅有一个“源”及一个“汇”，其余各点的出、入度均大于0．

证明 若一个有向图D是上述的四种情况之一时，这时无论“拆点”或“併点”运运算均无法进行．由推论1可知：此时无法得到其线图与L(D)同构，但本身不与D同构的另一个图，即D可由其线图唯一确定．

反之，若D不属于上述四种情况时，总可通过“拆点”或“併点”运算得到与D的顶点数不同的另一个图D′．显然D′与D不同构，但其线图与L(D)同构，即D不能由其线图唯一确定．

推论4 若D′是由有向图D经有限次“拆点”和“併点”运算得得到的图．则D与D′的特征多项式P(D, λ)及P(D′, λ)之间有如下关系：

$$P(D',\ \lambda)=\lambda^{k}\ P(D,\ \lambda)$$

（其中：k＝“拆点”次数——“併点”次数）

证明：由［3］的定理1知：

$$P(L(D),\ \lambda)=\lambda^{|A(D)|-|V(D)|}P(D,\ \lambda)$$

$$P(L(D'),\ \lambda)=\lambda^{|A(D')|-|V(D')|}P(D',\ \lambda)$$

注意 “拆点”和“併点”运算保持有向图的线图的同构性．从而$L(D)\cong L(D')$，$|A(D)|=|A(D')|$．

再由推论1知：$|V(D')|-|V(D)|=k$

立即可得：$P(D',\ \lambda)=\lambda^{k}\ P(D,\ \lambda)$．

推论4告诉我们：每进行一次“拆点”运算，，有向图的零特征根增加1重．每进行一次“併点”运算，零特征根减少1重．这两种运算对非零特征根毫无影响．另外由推论4可知：只要“拆点”次数等于“併点”次数，我们可以多种多样的方法“拆点”，“併点”，所得之一切有向图的线图都是同谱的．这就又提供了一种寻求给定有向图的同谱图的方法．这也是代数图论中的一个重要课题．

本文承蒙林国宁及李慰萱老师热情指导，谨表谢意．

参考资料

［1］ F．Harary著（李慰萱译），图论，上海科学技术出版社，1980．

[2] 卢开澄，组合数学，清华大学出版社，1983.

[3] 林国宁、张福基，有向线图的特征多项式和一类同谱有向图，科学通报，1983年第22期.

Digraphs Whose Line Digraphs are Isomorphism

Ouyang Keyi　　*Ouyang Kezhi*

Abstract

In this paper, the authors introduce two kinds of special operation —condensing and splitting of vertexes, and obtain the construction and number of the digraphs whose line digraphs are isomorphism and give a necessary and sufficient condition for a digraph to be determined uniquely by its line digraph.