Столкновение частиц с поршнем

Имеется сосуд с поршнем на одной стороне. Т. к. масса частицы пренебрежимо мала, по сравнению с массой поршня, то систему можно рассмотреть как сосуд с подвижной стенкой.

Возможны 2 варианта взаимодействия частицы с подвижной стенкой:

1. частица движется навстречу стенке

2. частица догоняет стенку

Перейдем в систему координат связанную со стенкой, выполним перерасчет скорости частицы после столкновения и перейдем обратно в неподвижную систему координат.

Очевидно, что параллельная стенке компонента скорости v_y при этом никак не изменится, поэтому рассмотрим частицу движущеюся перпендикулярно стенке.

Пусть скорость частицы v_1, скорость стенки v_2, O_1 – начальная система отсчета, O_2 – система отсчета связанная со стенкой.

$$\begin{aligned}
O_1: &\quad -v_1 \\
O_2: &\quad -v_1 - v_2 \\
\text{Удар} & \\
O_2: &\quad v_1 + v_2 \\
O_1: &\quad v_1 + 2 * v_2
\end{aligned}$$

В первом случае скорость частицы поменяет направление на противоположное и увеличится по модулю на удвоенную скорость стенки

$$\begin{aligned}
O_1: &\quad -v_1 \\
O_2: &\quad -v_1 + v_2 \\
\text{Удар} & \\
O_2: &\quad v_1 - v_2 \\
O_1: &\quad v_1 - 2 * v_2
\end{aligned}$$

Во втором случае скорость частицы уменьшится по модулю на удвоенную скорость стенки, а направление будет зависеть от скорости частицы до удара. Если скорость частицы больше удвоенной скорости стенки, то она поменяет направление на противоположное. Если скорость частицы меньше удвоенной скорости стенки и больше скорости стенки, то она сохранит свое направление. И если скорость частицы меньше скорости стенки, то она ее не догонит пока та не изменит направление.

Т. о. частица может столкнутся с подвижной стенкой 1 или 2 раза до столкновения с другими объектами. 2 раза она может столкнуться, либо если $|v_2| < |v_1| < 2{*}|v_2|$ и после 1-го столкновения частица столкнется со стенкой движущейся ей на встречу, либо если $2{*}|v_2| < |v_1| < 3{*}|v_2|$ и после 1-го столкновения стенка успеет поменять направление движения и догнать частицу. При двойном столкновении скорость частицы станет равной $4 * v_2 - v_1$. Т. е. замедляться будут частицы у которых $2{*}|v_2| < |v_1|$.

Тангенс угла наклона графика зависимости средней скорости частиц от времени

В [1] приводится вывод формулы тангенса наклона скорости (стр. 7). Важно заметить, что эта формула работает в приближении точечной бильярдной частицы, когда скорость поршня много меньше средней скорости частиц:

$$\dot{v} \approx \frac{3}{2}\langle u^2\rangle/\lambda$$

где

λ – средняя длина свободного пробега между столкновениями с движущимися стенками

$\langle u^2\rangle$ – среднеквадратичная скорость поршня, вычисляемая по формуле:

$$\langle u^2\rangle = \int\limits_0^T u^2(\tau)\frac{1}{T}d\tau$$

в случае ассиметричного движения $\langle u^2\rangle$ равен:

$$\int\limits_0^{T\alpha}\left(\frac{A}{T\alpha}\right)^2\frac{1}{T}d\tau + \int\limits_{T\alpha}^{T}\left(\frac{A}{T(1-\alpha)}\right)^2\frac{1}{T}d\tau = \frac{A^2}{T^2\alpha^2}\frac{1}{T}(T\alpha - 0) + \frac{A^2}{T^2(1-\alpha)^2}\frac{1}{T}(T - T\alpha) =$$

$$\frac{A^2}{T^2\alpha}+\frac{A^2}{T^2(1-\alpha)}=\frac{A^2}{T^2\alpha(1-\alpha)}$$

а в случае гармнического:

$$\int\limits_0^T\left(A\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)\frac{\pi}{T}\right)^2\frac{1}{T}d\tau=\frac{A^2\pi^2}{T^3}\int\limits_0^T\sin^2\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)d\tau=$$

$$\frac{A^2\pi^2}{T^3}\int\limits_0^T\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi\tau}{T}\right)}{2}d\tau=\frac{A^2\pi^2}{T^3}\left[\frac{\tau}{2}-\sin\left(\frac{4\pi\tau}{T}\right)\frac{T}{8\pi}\right]_0^T=\frac{A^2\pi^2}{2T^2}$$

где

T – период движения поршня

A – удвоенная амплитуда движения поршня

α – параметр ассиметрии:

$T\alpha$ секунд происходит сжатие

$T(1-\alpha)$ секунд происходит расширение

$$\lambda=\left(L-\frac{A}{2}\right)\pi$$

где

L – Длина сосуда

A – удвоенная амплитуда движения поршня

Список литературы

[1] Alexander, D. Influence of harmonic perturbation on speed of billiard particle as combination of deterministic acceleration and white noise / Dubkov Alexander, Krasnova Alexandra, Chichigina Olga // Fluctuation and Noise Letters. — 2019. — Vol. 18, no. 2. — P. 1940012–1–1940012–13.