

## بهینه‌ساز نهنگ تک‌شاخ: یک الگوریتم متاهوریستیک جدید الهام‌گرفته از طبیعت

### چکیده:

اخیراً، الگوریتم‌های متاهوریستیک به دلیل توانایی آنها در حل مسائل پیچیده و متنوع به یک حوزه تحقیقاتی بسیار جالب تبدیل شده‌اند. این مقاله یک روش متاهوریستیک جدید به نام بهینه‌ساز نهنگ تک‌شاخ<sup>۱</sup> را معرفی می‌کند که از رفتارهای نهنگ‌های تک‌شاخ الهام گرفته است. الگوریتم NO مکانیزم شکار نهنگ‌های تک‌شاخ را شبیه‌سازی می‌کند. نهنگ‌های تک‌شاخ پستانداران دریایی هستند که به خاطر ارتباط پیچیده خود بر اساس صداهای کلیک برای پیدا کردن طعمه‌هایشان شناخته می‌شوند. این الگوریتم بر اساس سه مرحله اصلی استوار است: انتشار سیگنال، انتقال سیگنال، و به‌روزرسانی موقعیت نهنگ‌ها. فرآیند شکار که بر اساس انتشار و انتقال سیگنال است، به عنوان یک الگوریتم بهینه‌سازی، فرموله شده است. استراتژی‌های مشاهده شده در گروه‌های نهنگ تک‌شاخ برای بهبود اکتشاف و بهره‌برداری در فضای جستجو تقلید می‌شوند. الگوریتم NO بر روی ۱۳ تابع معروف شامل توابع یکنواخت، چندقله‌ای و چندقله‌ای با ابعاد ثابت آزمایش شده است. نتایج تجربی نشان داد که NO راه‌حل‌های رضایت‌بخش و معقولی از نظر جلوگیری از ورود به مینیمم‌های محلی و دستیابی به بهینگی جهانی ارائه می‌دهد.

**کلیدواژه‌ها:** بهینه‌ساز نهنگ تک‌شاخ، متاهوریستیک، بهینه‌سازی، الگوریتم‌های الهام‌گرفته از طبیعت، هوش جمعی.

---

<sup>۱</sup> Narwhal Optimizer (NO)

## ۱. مقدمه

بهینه‌سازی می‌تواند به‌عنوان فرایند انتخاب مجموعه‌ای از متغیرها، که به‌عنوان متغیرهای تصمیم شناخته می‌شوند، تعریف شود که بهترین ترکیب ممکن برای حل یک مسئله خاص بهینه‌سازی را نمایان می‌سازد. هدف نهایی رسیدن به حداکثر یا حداقل یک تابع هدف یا تابع چندهدفه است. فرایند یافتن یک راه‌حل برای یک مسئله بهینه‌سازی در هر حوزه علمی یا مهندسی بسیار حیاتی است. به همین دلیل، تقاضا برای الگوریتم‌های بهینه‌سازی قوی و کارآمد در حال افزایش است [۱].

در دهه گذشته، بسیاری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی متاهیوریستیک توسعه یافته‌اند. رایج‌ترین آنها شامل الگوریتم ژنتیک (GA) [۴]، بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) [۱۵] و بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها (ACO) [۵] است. متاهیوریستیک‌ها مزایای زیادی دارند. اولین مزیت این است که همه این روش‌ها بسیار ساده هستند و مفهوم آنها از پدیده‌های فیزیکی، مفاهیم تکاملی یا رفتارهای حیوانات الهام گرفته شده است. مزیت دوم انعطاف‌پذیری آنهاست. متاهیوریستیک‌ها می‌توانند در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی به‌کار روند [۶، ۷، ۱۲].

الگوریتم‌های متاهیوریستیک را می‌توان بر اساس نوع رویکرد آنها که می‌تواند الهام‌گرفته از طبیعت یا غیرالهام‌گرفته از طبیعت باشد، دسته‌بندی کرد.

همچنین می‌توان آنها را بر اساس نوع تابع هدف، مانند تابع تک‌هدفه، چندهدفه، هدف دینامیک، چند هدفه، هدف دینامیک یا هدف ایستا [۹، ۲۴] دسته‌بندی کرد. به‌طور کلی، الگوریتم‌های الهام‌گرفته از طبیعت به چهار دسته تقسیم می‌شوند: الگوریتم‌های مبتنی بر هوش جمعی: این الگوریتم‌ها از رفتار جمعی ارگانیسم‌های اجتماعی در طبیعت الهام گرفته‌اند. به‌عنوان مثال، گروهی از عوامل با یکدیگر و محیط‌هایشان تعامل دارند تا به یک هدف برسند. می‌توان به PSO [۱۵]، بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها (ACO) [۵]، الگوریتم‌های زنبور (BA)، و بهینه‌ساز والروس [۳] اشاره کرد.

الگوریتم‌های مبتنی بر تکامل: این نوع الگوریتم‌ها بر اساس اصول تکامل طبیعی هستند. آنها از فرآیند انتخاب طبیعی، تولید مثل و تنوع ژنتیکی الهام می‌گیرند. نمونه‌ای از الگوریتم‌های مبتنی بر تکامل، GA [۴] و تکامل تفاضلی (DE) [۸] هستند.

الگوریتم‌های مبتنی بر رفتار انسانی: این نوع الگوریتم‌ها بر اساس رفتار انسانی هستند و به‌طور خاص بر هوش، شهود و تصمیم‌گیری انسانی تمرکز دارند. الگوریتم‌های ژنتیک تعاملی و جمع‌سپاری برای بهینه‌سازی، رایج‌ترین الگوریتم‌ها هستند.

الگوریتم‌های مبتنی بر فیزیک: این نوع الگوریتم‌ها کلاسهایی از روش‌های بهینه‌سازی هستند که از اصول و پدیده‌های فیزیکی الهام گرفته‌اند. این الگوریتم‌ها معمولاً فرآیندها یا مفاهیم فیزیکی را

## ۲. بهینه سازی نهنگ تک شاخ (NO)

این بخش به توصیف بهینه ساز نهنگ تک شاخ (NO)، الهام گیری آن و مدل ریاضی آن می پردازد.

### ۲/۱. اصول بیولوژیکی

نهنگ تک شاخ یک پستاندار دریایی جذاب است و نوعی نهنگ دندان دار متوسط اندازه محسوب می شود که به خاطر شاخ بلند و مارپیچ خود شناخته می شود. نهنگ های تک شاخ نسبت به سایر نهنگ ها اندازه متوسطی دارند (حدود ۴ تا ۶ متر به جز شاخ هایشان). آن ها با پوستی خاکستری لکه دار یا قهوه ای مشخص می شوند که به آن ها کمک می کند تا با یخ های قطبی ترکیب شوند، همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است. این نهنگ ها تمام طول سال در آب های قطب شمال اطراف گرینلند، کانادا، نروژ و روسیه زندگی می کنند. آن ها توانایی محدودی در ناپدید شدن از طریق یخ های دریایی دارند.



شکل ۱ نهنگ های تک شاخ در اقیانوس

### ۲/۱/۱. ساختار اجتماعی

نهنگ های تک شاخ از گروه هایی به نام «پاد» تشکیل شده اند. اندازه این پادها می تواند از دوازده نفر تا

برای حل مسائل پیچیده بهینه سازی مدل سازی می کنند. به عنوان مثال می توان به شبیه سازی آنیلینگ (SA) [۱۰]، الگوریتم جستجوی گرانشی (GSA) [۲۳] و جستجوی هارمونی (HS) [۱۳] اشاره کرد.

بهینه سازی در بسیاری از زمینه ها مانند بینایی کامپیوتری، یادگیری ماشین، هوش مصنوعی و غیره استفاده می شود [۲، ۱۷].

در این مقاله، یک الگوریتم متاهیوریستیک جدید به نام بهینه ساز نهنگ تک شاخ (NO) پیشنهاد می شود. این الگوریتم بر اساس رفتار نهنگ های تک شاخ در طبیعت هنگام شکار است. نهنگ های تک شاخ از سیگنال ها برای شناسایی طعمه های خود استفاده می کنند که به صورت صداهای کلیک است. این صدا به عنوان اکو مکان یابی شناخته می شود. انتشار سیگنال و انتقال سیگنال به صورت ریاضی مدل سازی می شوند. پس از این دو فرآیند، موقعیت نهنگ ها در طول تکرارها به روزرسانی می شود تا زمانی که به طعمه که همان راه حل بهینه است، برسند.

باقی مانده مقاله به صورت زیر سازمان دهی شده است: بخش ۲ مدل بهینه ساز NO را ارائه می دهد. بخش ۳ نتایج تجربی به دست آمده توسط NO را که با استفاده از ۱۳ تابع مرجع ارزیابی شده اند، ارائه می دهد. بخش ۴ نتیجه گیری را ترسیم می کند.

صد نفر متغیر باشد. گروه‌ها می‌توانند «پرورشگاه‌ها» باشند که تنها شامل ماده‌ها و جوانان هستند یا می‌توانند شامل جوانان و نرها باشند. همچنین، یک گروه مختلط که شامل نر، ماده و جوان است، می‌تواند در هر زمان از سال رخ دهد.

#### ۲/۱/۲. مهاجرت

در فصل تابستان، نهنگ‌های تک‌شاخ گروه‌هایی به نام «پاد» با تعداد ۱۰ تا ۱۰۰ فرد تشکیل می‌دهند و نزدیک‌تر به سواحل حرکت می‌کنند. در فصل زمستان، آن‌ها به آب‌های عمیق‌تر زیر یخ‌های ضخیم حرکت می‌کنند.

#### ۲/۱/۳. رژیم غذایی

نهنگ‌های تک‌شاخ از شاخ‌های بلند خود برای بی‌حس کردن ماهی‌ها قبل از شکار و خوردن آن‌ها استفاده می‌کنند. طعمه آن‌ها شامل ماهی قطب شمال، هالیبوت گرینلند و سایر ماهی‌های قطبی است.

#### ۲/۱/۴. ارتباط و هماهنگی

نهنگ‌های تک‌شاخ از صدا برای شکار غذا و ناوبری استفاده می‌کنند. آواز آن‌ها شامل کلیک‌ها، ضربه‌ها و سوت‌ها است که روش مهمی برای ارتباط درون پاد محسوب می‌شود. کلیک‌ها برای شناسایی طعمه و یافتن موانع در فواصل کوتاه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ارتباط با هر نهنگ نقش بسیار مهمی در هماهنگی فعالیت‌های گروهی که شامل شکار طعمه می‌شود، دارد. نهنگ‌های تک‌شاخ از انواع مختلفی از آوازه‌ها مانند کلیک‌ها و سوت‌ها استفاده می‌کنند که برای اکومکان‌یابی جهت ناوبری و یافتن طعمه به کار می‌روند. همچنین، کلیک‌ها که پالس‌های کوتاه صدا هستند، برای شناسایی اشیاء در آب از جمله طعمه‌ها استفاده می‌شوند.

نهنگ‌ها در پادها سفر و شکار می‌کنند و با استفاده از ارتباط، می‌توانند اطلاعاتی درباره موقعیت طعمه یا جزئیات مرتبط دیگر را به اشتراک بگذارند. این آوازه‌ها به نهنگ‌ها کمک می‌کند تا حرکات خود را هماهنگ کرده و موقعیت خود را به‌روزرسانی کنند تا اطمینان حاصل شود که در حین جستجو و شکار طعمه به‌عنوان یک گروه باقی می‌مانند. زمانی که نهنگ‌ها طعمه را شناسایی می‌کنند، ارتباط درون پاد ممکن است تشدید شود. آوازه‌ها می‌توانند برای علامت‌گذاری وجود طعمه، هماهنگی حمله یا به اشتراک‌گذاری اطلاعات درباره موقعیت تهدیدات بالقوه استفاده شوند.

با الهام از رفتارهای نهنگ‌های تک‌شاخ در ارتباط و شکار طعمه، ما یک الگوریتم متاهیوریستیک جدید به نام NO را پیشنهاد می‌کنیم.

$$X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,d} \end{bmatrix}$$

که در آن  $n$  نشان‌دهنده اندازه جمعیت نهنگ‌ها و  $d$  بعد متغیرهای تصمیم است.

## ۲/۲/۲. انتشار سیگنال

هنگامی که نهنگ‌های تک‌شاخ ناوبری می‌کنند، موقعیت‌های خود را به اشتراک می‌گذارند و تلاش می‌کنند طعمه را با ارسال سیگنال پیدا کنند. ابتدا فرض می‌کنیم که شدت سیگنال بسیار کم است که نمایانگر مرحله اکتشافی نهنگ‌ها در فضای جستجو است. سیگنال منتشر شده توسط نهنگ تک‌شاخ  $i$  به موقعیت خودش و درک آن از محیط بستگی دارد. تابع انتشار به شرح زیر توصیف می‌شود:

$$S_E(X_i) = \frac{0.1}{1 + \alpha \|X_i - X_{prey}\|}$$

که در آن  $X_i$  موقعیت نهنگ تک‌شاخ شماره  $i^{th}$  و  $X_{prey}$  موقعیت طعمه است که می‌تواند سیگنال را تشخیص دهد و ممکن است موقعیت آن را تغییر دهد (طعمه نهنگ تک‌شاخ، مانند ماهی‌ها، می‌توانند صداهای نهنگ‌ها را تشخیص دهند).

$\|X_i - X_{prey}\|$  فاصله اقلیدسی بین موقعیت نهنگ تک‌شاخ شماره  $i^{th}$  و طعمه احتمالی است.

در الگوریتم NO، یک راه‌حل، مکان یک نهنگ تک‌شاخ در فضای جستجوی طعمه است که می‌تواند یک راه‌حل بالقوه برای مسئله بهینه‌سازی باشد. زمانی که نهنگ‌های تک‌شاخ طعمه بالقوه‌ای را شناسایی می‌کنند، از طریق ارسال سیگنال با یکدیگر ارتباط برقرار می‌کنند و ارتباط درون پاد ممکن است تشدید شود. آوازاها برای علامت‌گذاری وجود طعمه استفاده می‌شوند و آن‌ها اطلاعاتی درباره مکان طعمه را به اشتراک می‌گذارند. همچنین، آن‌ها برای آماده‌سازی حمله با هم هماهنگی می‌کنند.

فرآیند شناسایی طعمه آن‌ها بر اساس اکو-مکان‌یابی است. اکو-مکان‌یابی تکنیکی است که در آن نهنگ‌های تک‌شاخ کلیک‌هایی را در آب منتشر می‌کنند و به آن‌ها گوش می‌دهند تا موقعیت طعمه را تعیین کنند.

## ۲/۲/۱. راه‌اندازی

در ابتدا، الگوریتم بهینه‌سازی با مجموعه‌ای از راه‌حل‌های تصادفی که نمایانگر مکان‌های نهنگ‌ها ( $X$ ) است، شروع می‌شود. در هر تکرار الگوریتم، این مکان‌ها به‌طور مداوم به‌روزرسانی می‌شوند و توسط ماتریس زیر تعریف می‌شوند:

$\alpha$  یک عامل کنترلی است که شدت سیگنال را تنظیم می‌کند.

تابع  $S_E(X_i)$  نمایانگر انتشار سیگنال در یک مکان خاص  $X_i$  است.  $X_i$  نمایانگر مکان‌ها در آب یا روی سطح است که سیگنال در آنها اندازه‌گیری می‌شود. علاوه بر این،  $X_{prey}$  مکان طعمه‌ی احتمالی است که نهنگ تک‌شاخ هدف قرار داده است.  $\alpha$  می‌تواند نحوه تغییر شدت انتشار با فاصله از طعمه را تنظیم کند، که ممکن است عوامل مانند رفتار آوازخوانی نهنگ تک‌شاخ یا ویژگی‌های انتقال صدا در آب را نشان دهد. ثابت  $0.1$  یک عامل مقیاس‌بندی است که نرخ انتشار پایه را تعیین می‌کند که می‌تواند مقدار مشخصه‌ای برای آوازخوانی نهنگ‌های تک‌شاخ باشد. مقدار  $0.1$  برای نرمال‌سازی تابع انتشار به دامنه یا بزرگی مشخصی که برای مدل مناسب است، انتخاب شده است. این اطمینان حاصل می‌کند که مقادیر انتشار نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچک هستند، و تفسیر یا کار با آنها آسان‌تر می‌شود. این تابع سیگنال قوی‌تری تولید می‌کند وقتی نهنگ تک‌شاخ به طعمه نزدیک‌تر است و سیگنال با افزایش فاصله کاهش می‌یابد.

### ۲.۲.۳. انتقال سیگنال

سیگنال منتشر شده از طریق آب پراکنده خواهد شد که می‌تواند به عنوان تابعی مبتنی بر فاصله بین نهنگ‌ها مدل‌سازی شود. تابع انتقال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_P(X_i) = S_E(X_i) \times P_R(X_i, X_{prey})$$

که در آن  $P_R(X_i, X_{prey})$  تابع انتقال است که برای پخش سیگنال استفاده می‌شود. این تابع به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$P_R(X_i, X_{prey}) = \exp\left(-\frac{\|X_i - X_{prey}\|^2}{2 \times (\sigma^t)^2}\right)$$

که در آن  $\sigma^t$  انحراف معیار گاوسی در تکرار  $t$  است که کاهش تاثیر با فاصله را کنترل می‌کند.

توجه داشته باشید که اگر  $\sigma^t$  مقدار کمی داشته باشد، ارتباط بیشتر محلی خواهد بود، درحالی که مقدار بزرگ  $\sigma^t$  ارتباط بیشتر جهانی و متناسب با فواصل بزرگ می‌شود.

مقدار  $\sigma^t$  به صورت خطی در طول تکرارها کاهش می‌یابد. این مقدار با  $\sigma_0$  شروع می‌شود.

$$\sigma^t = \sigma_0 - \left(\frac{t}{T}\right) \times \sigma_0$$

۲.۲.۴. به‌روزرسانی موقعیت

مکان نهنگ‌های تک‌شاخ به‌طور مداوم در هر تکرار به‌روز می‌شود. این به‌روزرسانی بر اساس سیگنال منتشر شده و انتقال آن انجام می‌شود. ما می‌توانیم این فرآیند را به صورت تکراری در طول زمان مدل‌سازی کنیم با به‌روز رسانی موقعیت‌ها در هر گام با استفاده از تابع زیر مدل‌سازی کنیم:

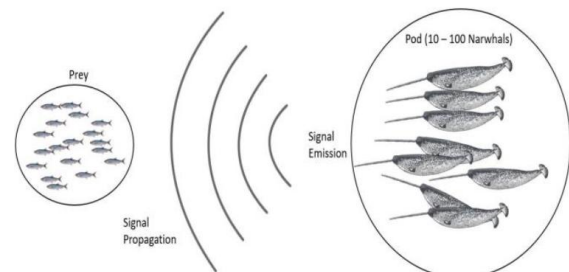
$$X_i^{t+1} = X_i^t + \Delta^t$$

که در آن  $\Delta^t$  گام در تکرار  $t$  است و توسط معادله زیر تعیین می شود:

$$\Delta^t = \beta \times |S_p(i) \times X_{prey} - X_i|$$

$$\beta = r_1 - \frac{1}{\sigma^t + 1}$$

$\beta$  یک پارامتر است که به  $\sigma^t$  مربوط می شود و کنترل کننده کاهش انتقال سیگنال است. همانطور که قبلاً ذکر شد، طعمه می تواند سیگنال منتشر شده توسط نهنگ های تک شاخ را تشخیص دهد. به عبارت دیگر، طعمه می تواند تحت تأثیر سیگنال منتشر شده قرار گیرد، به همین دلیل ما  $S_p(i) \times X_{prey}$  را پیشنهاد کردیم. این فرآیند در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. انتشار سیگنال و پراکندگی آن برای مکان یابی طعمه

۲/۳. الگوریتم بهینه ساز نهنگ های تک شاخ

در بهینه ساز نهنگ تک شاخ، پارامتر  $\sigma^t$  برای تعیین اینکه آیا الگوریتم در مرحله اکتشاف (Exploration) یا مرحله بهره برداری (Exploitation) قرار دارد، استفاده می شود. در ابتدا، الگوریتم با یک

مقدار اولیه از  $\sigma$  آغاز می شود که در طول تکرارها کاهش می یابد.

پارامتر  $\sigma^t$  در انتشار سیگنال می تواند با محدوده تأثیر سیگنال منتشر شده توسط نهنگ های تک شاخ مرتبط باشد. مقدار بزرگتر  $\sigma^t$  محدوده تأثیر را افزایش می دهد، که به احتمال زیاد امکان اکتشاف گسترده تری از محیط را فراهم می کند. از سوی دیگر، مقدار کوچکتر  $\sigma^t$  محدوده تأثیر سیگنال را محدود می کند و به نفع بهره برداری محلی تر از اطلاعات است.

یک پارامتر بسیار مهم دیگر در الگوریتم، پارامتر  $\beta$  است. مقدار کوچک  $\beta$  منجر به تنظیمات موقعیت آهسته تر می شود که موجب ارتقاء اکتشاف فضای جستجو می گردد. برعکس، مقدار بالای  $\beta$  می تواند منجر به تنظیمات موقعیت سریع تر و برجسته تر در پاسخ به سیگنال دریافتی شود. این می تواند به تشویق بیشتر بهره برداری از فضای جستجو بیانجامد.

شبه کد الگوریتم NO در الگوریتم (۱) شرح داده شده است.

## الگوریتم ۱: شبه‌کد بهینه‌ساز نهنگ تک‌شاخ

۱. موقعیت نهنگ‌های تک‌شاخ  $X_i$  را به صورت تصادفی مقداردهی اولیه کنید.
۲. مقدار تابع هدف  $f(X)$  را محاسبه کنید.
۳. پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\sigma_0$  را مقداردهی اولیه کنید.
۴. تا زمانی که  $t$  کمتر از حداکثر تعداد تکرارها باشد، ادامه دهید:
۵. مقدار  $\sigma$  را با استفاده از معادله ۵ به‌روزرسانی کنید
۶. برای هر جستجوگر نهنگ تک‌شاخ  $i$ ، انجام دهید:
۷. انتشار سیگنال  $SE(X_i)$  را با استفاده از معادله ۲ محاسبه کنید
۸. پراکندگی سیگنال  $Sp(X_i)$  را با استفاده از معادله ۳ محاسبه کنید
۹. مقدار  $\beta$  را با استفاده از معادله ۸ به‌روزرسانی کنید
۱۰. مقدار  $\Delta^t$  را با استفاده از معادله ۷ به‌روزرسانی کنید
۱۱. موقعیت نهنگ تک‌شاخ  $X_i^{t+1}$  را با استفاده از معادله ۶ به‌روزرسانی کنید
۱۲. پایان حلقه برای به‌روزرسانی مکان نهنگ‌ها
۱۳. مقدار جدید تابع هدف را محاسبه کنید
۱۴. یکی به تکرار اضافه کن  $t=t+1$
۱۵. پایان حلقه اصلی الگوریتم با رسیدن به شرط توقف

در الگوریتم (۱)، فرآیند شکار طعمه توسط نهنگ‌های تک‌شاخ به عنوان یک الگوریتم بهینه‌سازی مدل‌سازی می‌شود. الگوریتم با یک راه‌حل تصادفی اولیه شروع می‌شود. در هر تکرار، انتشار سیگنال و انتقال سیگنال محاسبه می‌شود. مقدار انتقال سیگنال برای محاسبه

مقدار گام  $\Delta$  استفاده می‌شود. فرض می‌کنیم که طعمه می‌تواند سیگنال را تشخیص داده و سعی می‌کند با تغییر موقعیت خود از آن اجتناب کند. در هر تکرار، الگوریتم موقعیت نهنگ‌های تک‌شاخ را نسبت به موقعیت طعمه به‌روزرسانی می‌کند.

محاسبه تابع هدف به زمینه مسئله‌ای که در حال حل آن هستیم بستگی دارد. این تابع نمایانگر مقداری است که الگوریتم سعی در بیشینه‌سازی یا کمینه‌سازی آن دارد. فرض می‌کنیم که  $f(X)$  تابع هدف است و  $X$  برداری است که ابعاد آن نشان‌دهنده ابعاد مسئله بهینه‌سازی هستند. توابع هدف استفاده‌شده برای آزمایش الگوریتم NO در جدول ۱ توصیف شده‌اند. پیچیدگی الگوریتم بسیار قدرتمند است تا عملکرد و زمان محاسباتی الگوریتم را ارزیابی کند. تعداد جستجوگران (نهنگ‌های تک‌شاخ) برابر با  $N$  و ابعاد مسئله بهینه‌سازی برابر با  $D$  است. پیچیدگی محاسباتی الگوریتم پیشنهادی برابر با  $O(N \times D)$  است.