

动态规划专题

第六讲

侯卫东



扫描二维码关注微信/微博
获取最新面试题及权威解答

微信: [ninechapter](#)

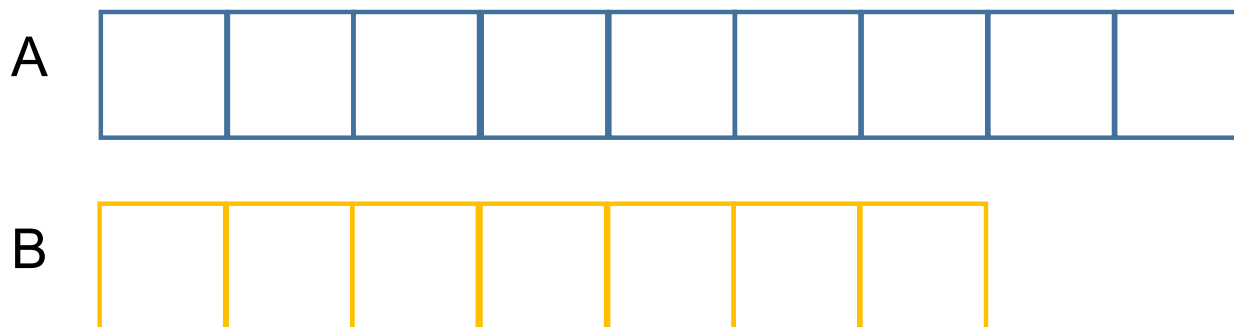
知乎专栏: <http://zhuanlan.zhihu.com/jiuzhang>

微博: <http://www.weibo.com/ninechapter>

官网: www.jiuzhang.com

双序列型动态规划

- 顾名思义，有两个序列/字符串，需要进行一些操作
- 每个序列本身是一维的
- 可以转化为二维动态规划



Longest Common Subsequence

<http://www.lintcode.com/problem/longest-common-subsequence/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/longest-common-subsequence/>

LintCode 77 Longest Common Subsequence



- 题意：
- 给定两个字符串A, B
- 一个字符串的子串是这个字符串去掉某些字符（可能0个）之后剩下的字符串
- 找到两个字符串的最长公共子串的长度
- 例子：
- 输入：A="jiuzhang", B="lijiang"
- 输出：5（最长公共子串是jiang）

题目分析

- 公共子串一定是对应的字符按顺序都相等

A

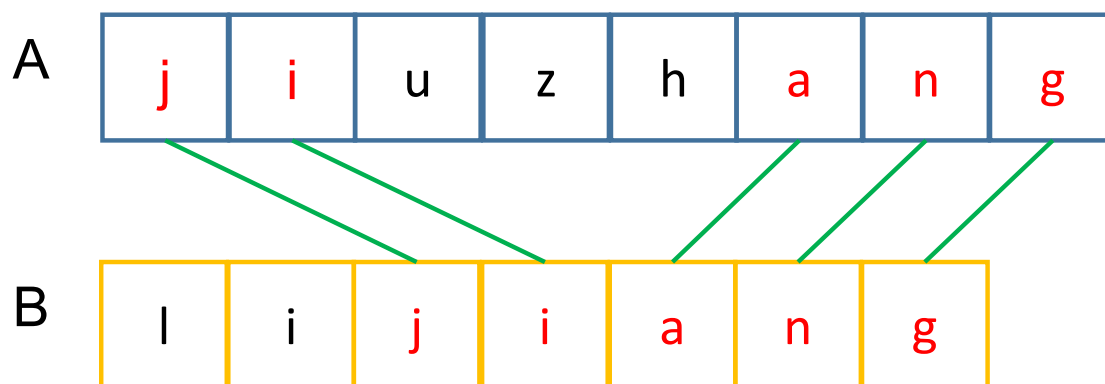
j	i	u	z	h	a	n	g
---	---	---	---	---	---	---	---

B

l	i	j	i	a	n	g
---	---	---	---	---	---	---

题目分析

- 公共子串一定是对应的字符按顺序都相等
- 找到最长的对应对子，且对子连线不能相交



动态规划组成部分一：确定状态

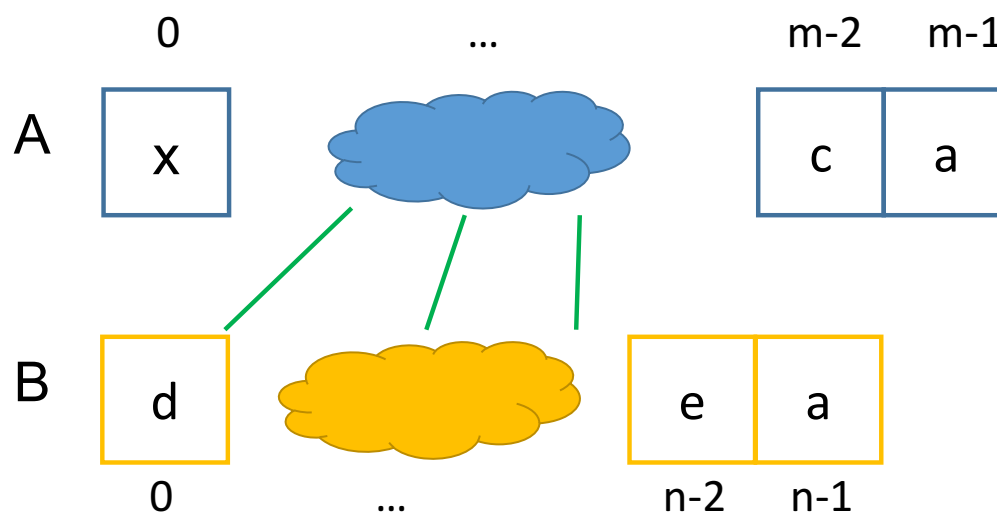


- 设A长度是 m , B长度是 n
- 现在我们考虑最优策略产生出的最长公共子串（虽然还不知道是什么）
- 最后一步：观察 $A[m-1]$ 和 $B[n-1]$ 这两个字符是否作为一个对子在最优策略中

动态规划组成部分一：确定状态

- 最长公共子串也是公共子串：长度是 $L \rightarrow$ 选定了 L 个对应的对子

最长公共子串



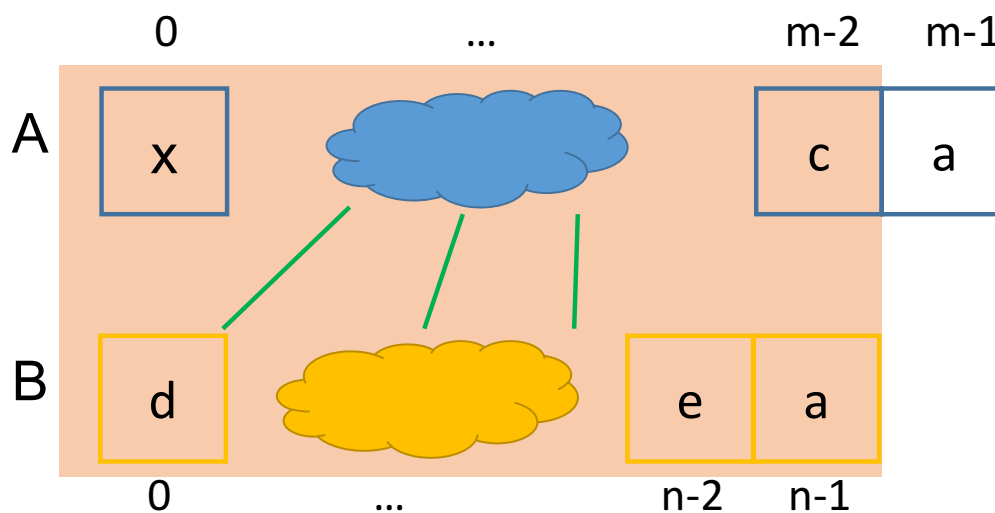
动态规划组成部分一：确定状态

- 最长公共子串也是公共子串：长度是 $L \rightarrow$ 选定了 L 个对应的对子

最长公共子串

情况一：对子中没有 $A[m-1]$

推论：A和B的最长公共子串就是A前 $m-1$ 个字符和B前 n 个字符的最长公共子串



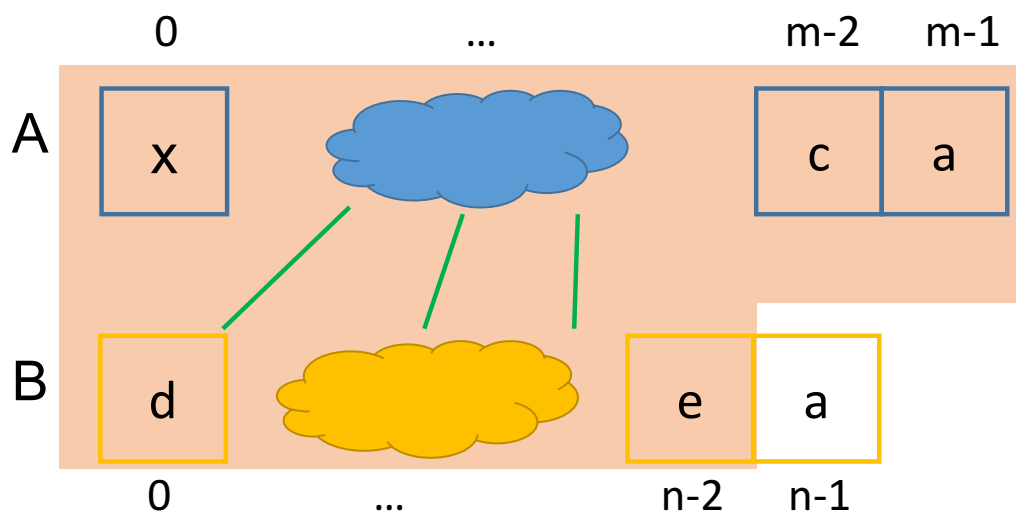
动态规划组成部分一：确定状态

- 最长公共子串也是公共子串：长度是 $L \rightarrow$ 选定了 L 个对应的对子

最长公共子串

情况二：对子中没有 $B[n-1]$

推论：A和B的最长公共子串就是A前 m 个字符和B前 $n-1$ 个字符的最长公共子串



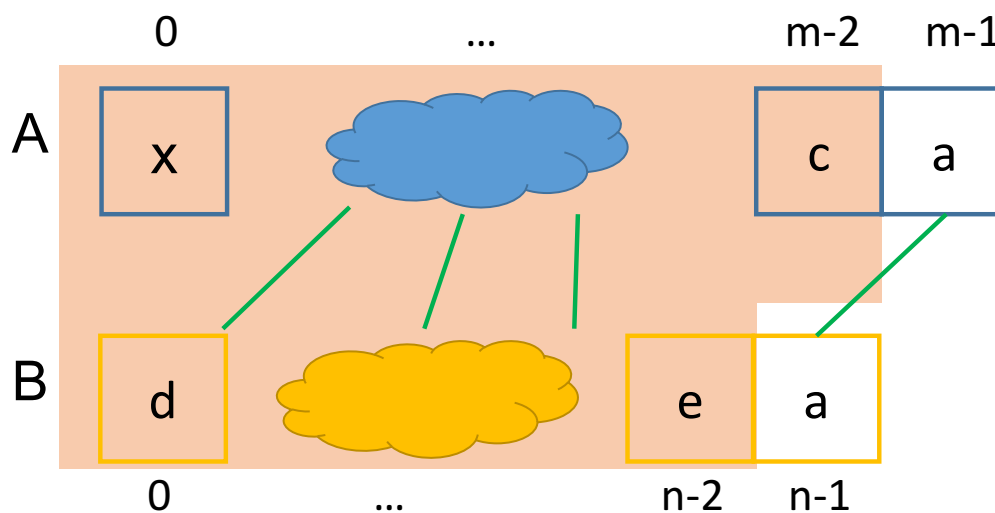
动态规划组成部分一：确定状态

- 最长公共子串也是公共子串：长度是 $L \rightarrow$ 选定了 L 个对应的对子

最长公共子串

情况三：对子中有 $A[m-1]-B[n-1]$

推论：A和B的最长公共子串就是A前 $m-1$ 个字符和B前 $n-1$ 个字符的最长公共子串+A[m-1]



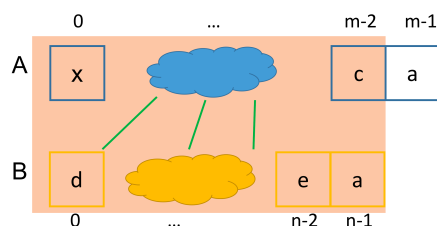
- 要求 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-2]$ 的最长公共子串, $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-1]$ 的最长公共子串和 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-2]$ 的最长公共子串
- 原来是求 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-1]$ 的最长公共子串
- 子问题
- 状态：设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 的最长公共子串的长度

动态规划组成部分二：转移方程

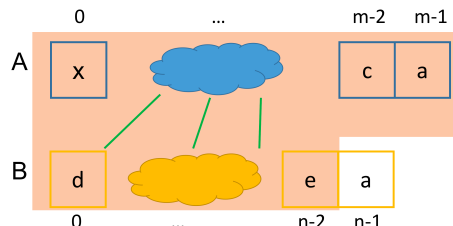
- 设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 的最长公共子串的长度
- 要求 $f[m][n]$

$$f[i][j] = \max\{f[i-1][j], f[i][j-1], f[i-1][j-1]+1 | A[i-1]=B[j-1]\}$$

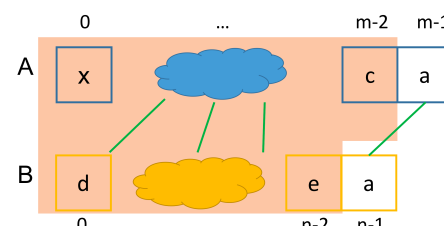
情况一：A[0..i-2]和B[0..j-1]的最长公共子串



情况二：A[0..i-1]和B[0..j-2]的最长公共子串



情况三：A[0..i-2]和B[0..j-2]的最长公共子串+A[i-1]



动态规划组成部分三：初始条件和边界情况



- $f[i][j]$ 为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符[0..j-1]的最长公共子串的长度
- 转移方程： $f[i][j] = \max\{f[i-1][j], f[i][j-1], f[i-1][j-1]+1 | A[i-1]=B[j-1]\}$
- 初始条件：空串和任何串的最长公共子串长度是0
 - $f[0][j] = 0, j=0..n$
 - $f[i][0] = 0, i=0..m$

动态规划组成部分四：计算顺序



- $f[0][0], f[0][1], \dots, f[0][n]$
- $f[1][0], f[1][1], \dots, f[1][n]$
- ...
- $f[m][0], f[m][1], \dots, f[m][n]$
- 答案是 $f[m][n]$
- 时间复杂度（计算步数） $O(MN)$ ，空间复杂度（数组大小） $O(MN)$
- 可以用滚动数组优化空间至 $O(N)$

编程



Interleaving String

<http://www.lintcode.com/en/problem/interleaving-string/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/interleaving-string/>

LintCode 29 Interleaving String



- 题意：
- 给定三个字符串A, B, X
- 判断X是否是由A, B交错在一起形成
 - 即A是X的子序列，去掉A后，剩下的字符组成B
- 例子：
- 输入：A=“aabcc” B=“dbbac”, X=“aadbcbcbcac”
- 输出：True (X=“**a****a****d****b****b****c****b****c****a****c**”)

动态规划组成部分一：确定状态

- 首先，如果 X 的长度不等于 A 的长度+ B 的长度，直接输出False
- 设 A 长度是 m , B 长度是 n , X 的长度是 $m+n$
- 最后一步：假设 X 是由 A 和 B 交错形成的，那么 X 的最后一个字符 $X[m+n-1]$
 - 要么是 $A[m-1]$
 - 那么 $X[0..m+n-2]$ 是由 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-1]$ 交错形成的
 - 要么是 $B[n-1]$
 - 那么 $X[0..m+n-2]$ 是由 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-2]$ 交错形成的

- 要求 $X[0..m+n-1]$ 是否由 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-1]$ 交错形成
- 需要知道 $X[0..m+n-2]$ 是否由 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-1]$ 交错形成, 以及 $X[0..m+n-2]$ 是否由 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-2]$ 交错形成
- 子问题
- 状态: 设 $f[s][i][j]$ 为 X 前 s 个字符是否由 A 前 i 个字符 $A[0..i-1]$ 和 B 前 j 个字符 $B[0..j-1]$ 交错形成
- 但是 $s=i+j$, 所以可以简化为: 设 $f[i][j]$ 为 X 前 $i+j$ 个字符是否由 A 前 i 个字符 $A[0..i-1]$ 和 B 前 j 个字符 $B[0..j-1]$ 交错形成

动态规划组成部分二：转移方程

- 设 $f[i][j]$ 为X前 $i+j$ 个字符是否由A前 i 个字符 $A[0..i-1]$ 和B前 j 个字符 $B[0..j-1]$ 交错形成

$$f[i][j] = (f[i-1][j] \text{ AND } X[i+j-1] == A[i-1]) \text{ OR } (f[i][j-1] \text{ AND } X[i+j-1] == B[j-1])$$

X前 $i+j$ 个字符是否由A前 i 个字符和B前 j 个字符交错形成

情况一：X前 $i+j-1$ 个字符由A前 $i-1$ 个字符和B前 j 个字符交错形成, X第 $i+j$ 个字符等于A第 i 个字符

情况二：X前 $i+j-1$ 个字符由A前 i 个字符和B前 $j-1$ 个字符交错形成, X第 $i+j$ 个字符等于B第 j 个字符

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况



- 设 $f[i][j]$ 为X前 $i+j$ 个字符是否由A前 i 个字符 $A[0..i-1]$ 和B前 j 个字符 $B[0..j-1]$ 交错形成
- 转移方程
 - $f[i][j] = (f[i-1][j] \text{ AND } X[i+j-1] == A[i-1]) \text{ OR } (f[i][j-1] \text{ AND } X[i+j-1] == B[j-1])$
- 初始条件：空串由A的空串和B的空串交错形成 $\rightarrow f[0][0] = \text{True}$
- 边界情况：如果 $i=0$ ，不考虑情况一；如果 $j=0$ ，不考虑情况二

动态规划组成部分四：计算顺序



- $f[0][0], f[0][1], \dots, f[0][n]$
- $f[1][0], f[1][1], \dots, f[1][n]$
- ...
- $f[m][0], f[m][1], \dots, f[m][n]$
- 答案是 $f[m][n]$
- 时间复杂度（计算步数） $O(MN)$ ，空间复杂度（数组大小） $O(MN)$ ，可以用滚动数组优化空间至 $O(N)$

编程



Edit Distance

<http://www.lintcode.com/problem/edit-distance/>
<https://www.jiuzhang.com/solutions/edit-distance/>

LintCode 119 Edit Distance



- 题意：
 - 给定两个字符串A, B
 - 要求把A变成B，每次可以进行下面一种操作：
 - 增加一个字符
 - 去掉一个字符
 - 替换一个字符
 - 最少需要多少次操作，即最小编辑距离
-
- 例子：
 - 输入：A=“mart”，B=“karma”
 - 输出：3 (m换成k，t换成m，加上a)

题目分析

- 可以进行的操作很多，直接下手比较困难

A

m	a	r	t
---	---	---	---

B

k	a	r	m	a
---	---	---	---	---

动态规划组成部分一：确定状态

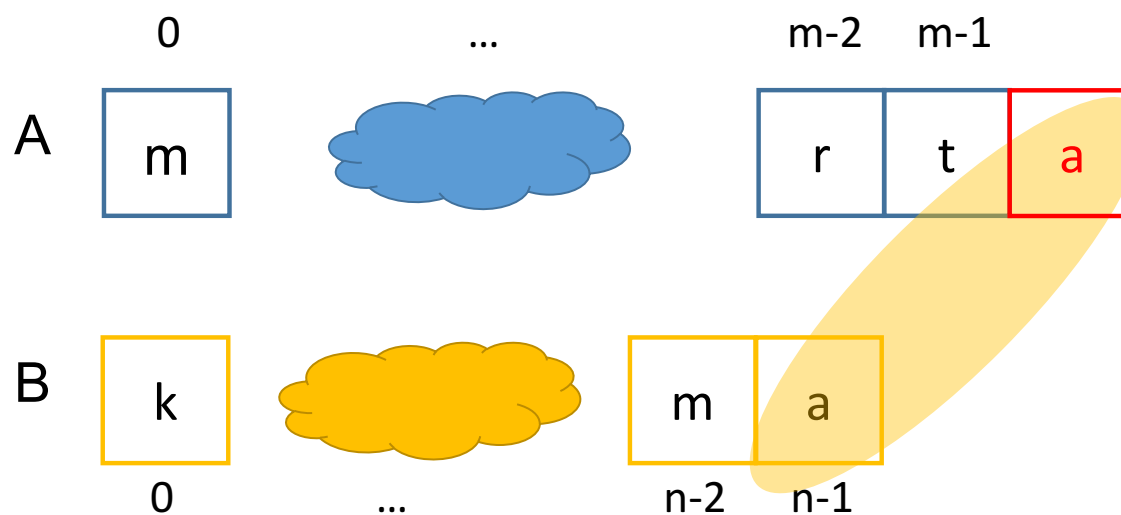


- 设A长度是m, B长度是n
- 全部操作完成后**A**的长度也是n, 并且 **$A[n-1]=B[n-1]$**
- 于是最优策略（以及所有合法策略）最终都是让**A**的最后一个字符变成**B**的最后一个字符

动态规划组成部分一：确定状态

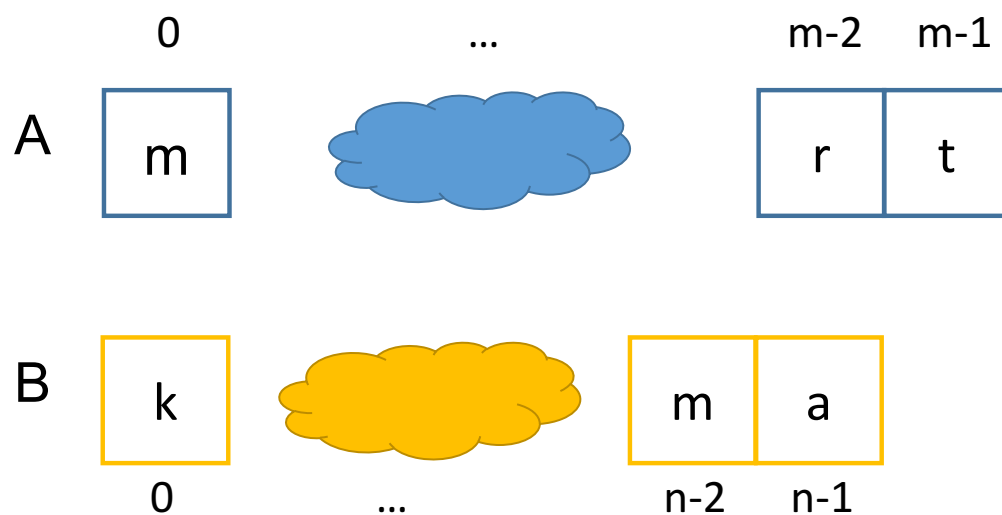
情况一：A在最后插入B[n-1]

- 要将A[0..m-1]变成B[0..n-2]



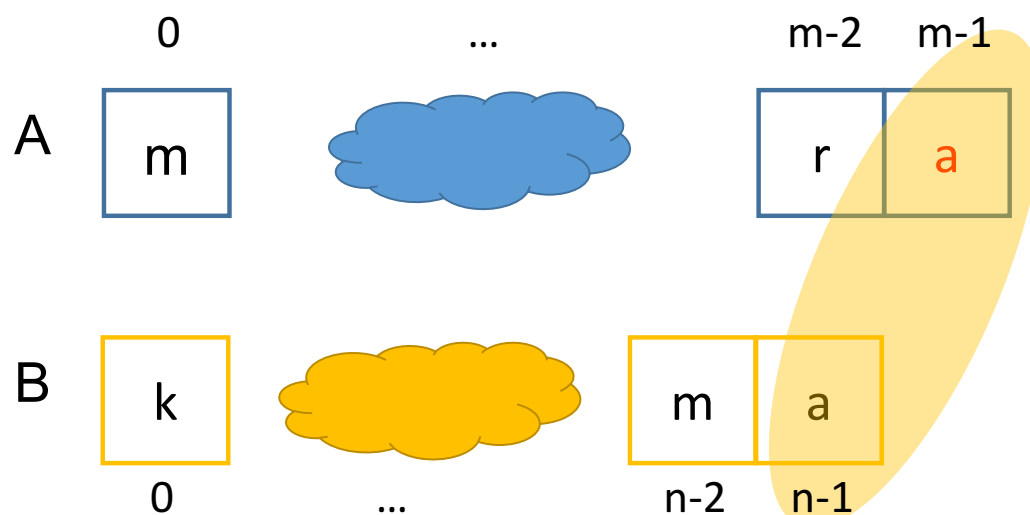
动态规划组成部分一：确定状态

情况二：A最后一个字符替换成B[n-1]



动态规划组成部分一：确定状态

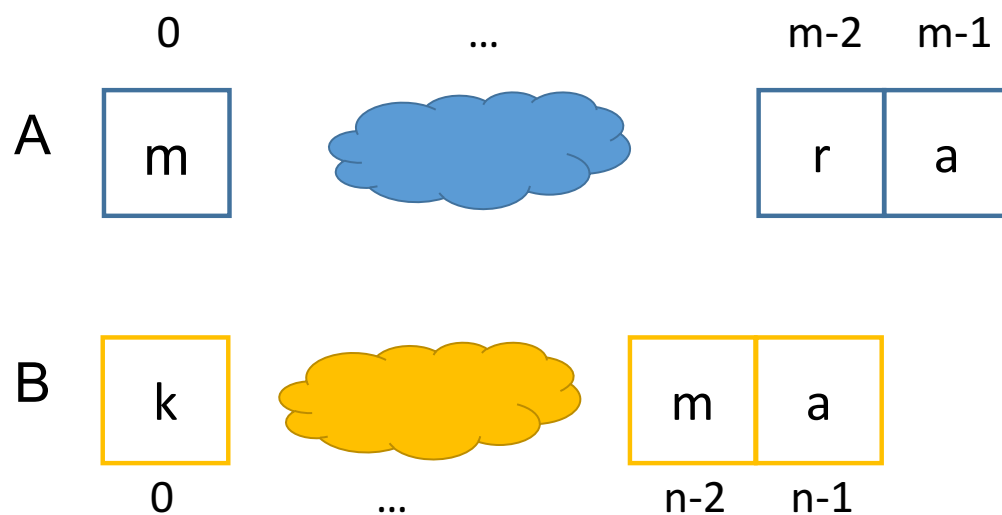
情况二：A最后一个字符替换成B[n-1] • 要将A[0..m-2]变成B[0..n-2]



动态规划组成部分一：确定状态

情况三：A删掉最后一个字符

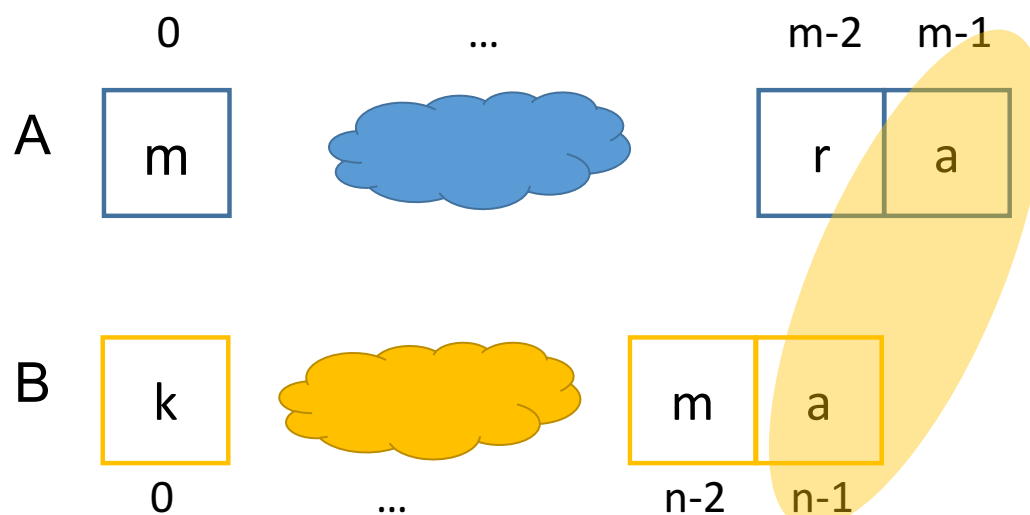
- 要将A[0..m-2]变成B[0..n-1]



动态规划组成部分一：确定状态

情况四：A和B最后一个字符相等

- 要将A[0..m-2]变成B[0..n-2]



- 要求 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-2]$ 的最小编辑距离, $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-1]$ 的最小编辑距离和 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-2]$ 的最小编辑距离
- 原来是求 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-1]$ 的最小编辑距离
- 子问题
- 状态：设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 的最小编辑距离

动态规划组成部分二：转移方程

- 设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 的最小编辑距离
- 要求 $f[m][n]$

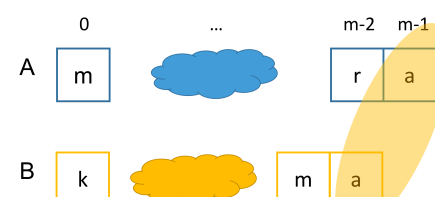
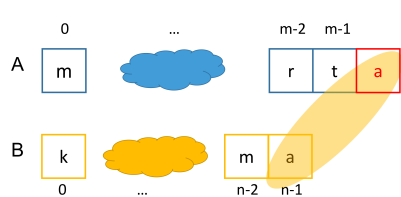
$$f[i][j] = \min\{f[i][j-1]+1, f[i-1][j-1]+1, f[i-1][j]+1, f[i-1][j-1]|A[i-1]=B[j-1]\}$$

情况一：A在最后插入
 $B[j-1]$

情况二：A最后一个字符
替换成 $B[j-1]$

情况三：A删掉最后一个
字符

情况四：A和B最后一个
字符相等



动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 的最小编辑距离
- 转移方程： $f[i][j] = \min\{f[i][j-1]+1, f[i-1][j-1]+1, f[i-1][j]+1, f[i-1][j-1] \mid A[i-1]=B[j-1]\}$
- 初始条件：一个空串和一个长度为L的串的最小编辑距离是L
 - $f[0][j] = j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$)
 - $f[i][0] = i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$)

动态规划组成部分四：计算顺序



- $f[0][0], f[0][1], \dots, f[0][n]$
- $f[1][0], f[1][1], \dots, f[1][n]$
- ...
- $f[m][0], f[m][1], \dots, f[m][n]$
- 答案是 $f[m][n]$
- 时间复杂度（计算步数） $O(MN)$ ，空间复杂度（数组大小） $O(MN)$
- 可以用滚动数组优化空间至 $O(N)$

编程



- 课间休息5分钟

Distinct Subsequences

<http://www.lintcode.com/problem/distinct-subsequences/>
<http://www.jiuzhang.com/solutions/distinct-subsequences/>

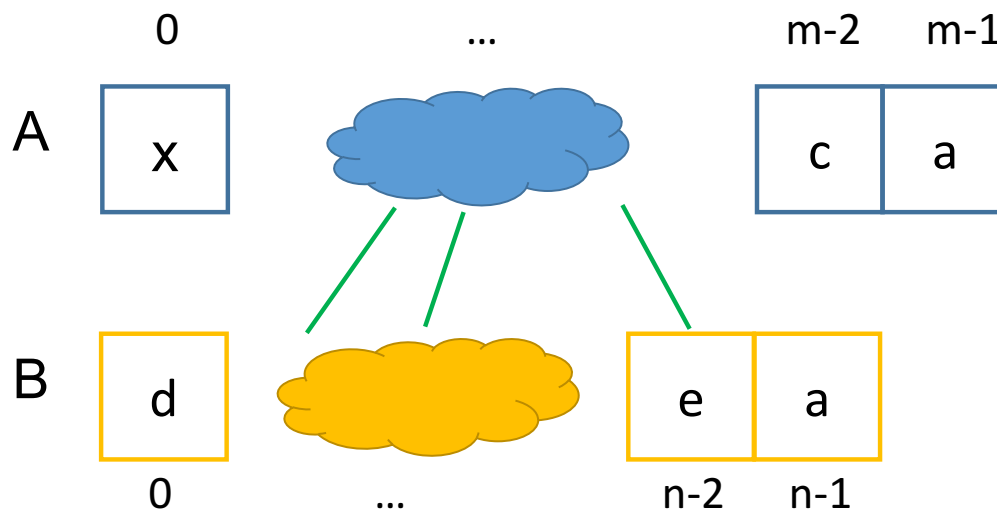
LintCode 118 Distinct Subsequences



- 题意：
- 给定两个字符串A[0..m-1], B[0..n-1]
- 问B在A中出现多少次（可以不连续）
- 例子
- 输入：A="rabbbit", B="rabbit"
- 输出：3
 - rabbbit
 - rabbbit
 - rabbbit

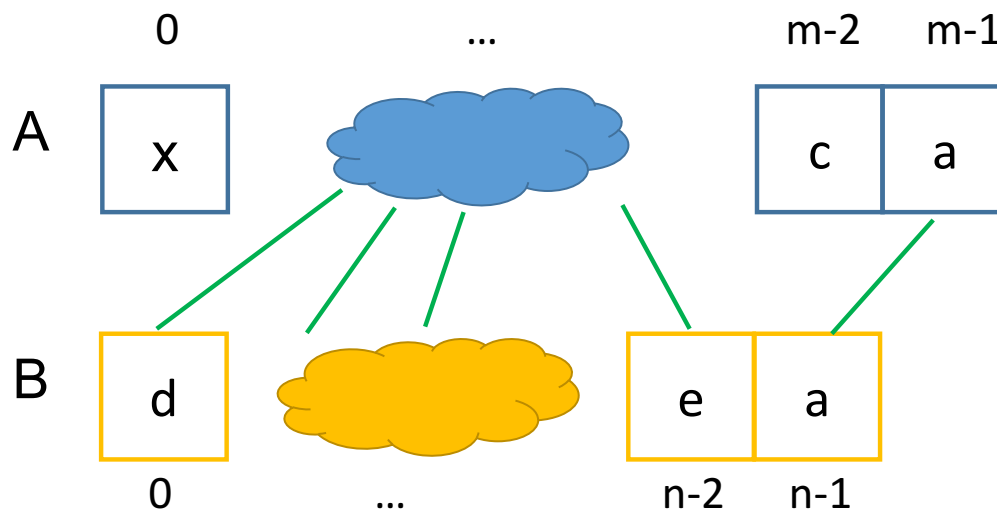
题目分析

- 双序列型动态规划
- **B**在**A**中出现多少次（可以不连续）
- 如果至少出现一次，那么**A**和**B**的最长公共子串就是**B**，而且也不能更长
- 用最长公共子串的思路：对应对子



题目分析

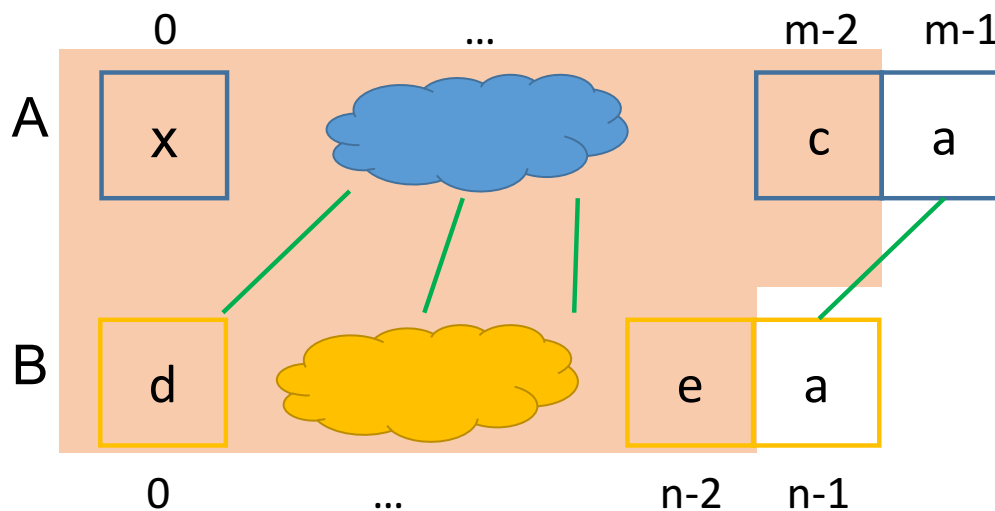
- 但不同的是，**B**的每一个字符都必须出现在一个对子里
- 所以这题的“最后一步”以**B**为出发点



动态规划组成部分一：确定状态

情况1： $B[n-1] = A[m-1]$ ，结成对子

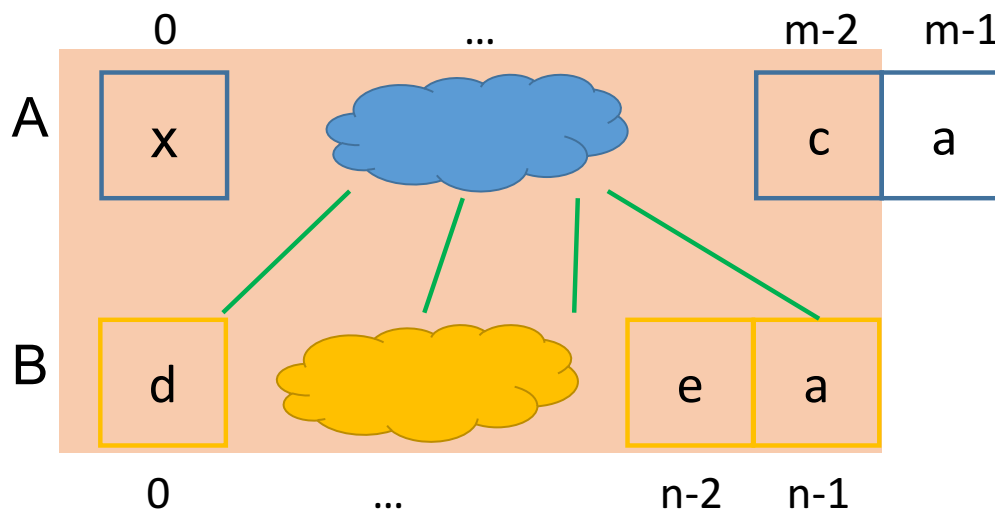
求 $B[0..n-2]$ 在 $A[0..m-2]$ 中出现多少次



动态规划组成部分一：确定状态

情况2：B[n-1]不和 A[m-1]结成对子

求B[0..n-1]在A[0..m-2]中出现多少次



子问题

- 要求 $B[0..n-1]$ 在 $A[0..m-1]$ 中出现多少次
- 需要知道 $B[0..n-1]$ 在 $A[0..m-2]$ 中出现多少次, 以及 $B[0..n-2]$ 在 $A[0..m-2]$ 中出现多少次
- 子问题
- 状态: 设 $f[i][j]$ 为 B 前 j 个字符 $B[0..j-1]$ 在 A 前 i 个字符 $A[0..i-1]$ 中出现多少次

动态规划组成部分二：转移方程

- 设 $f[i][j]$ 为B前j个字符 $B[0..j-1]$ 在A前i个字符 $A[0..i-1]$ 中出现多少次
- 要求 $f[m][n]$

$$f[i][j] = f[i-1][j-1] | A[i-1]=B[j-1] + f[i-1][j]$$

情况1： $B[j-1] = A[i-1]$ ，结成对子

情况2： $B[j-1]$ 不和 $A[i-1]$ 结成对子

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设 $f[i][j]$ 为B前j个字符 $B[0..j-1]$ 在A前i个字符 $A[0..i-1]$ 中出现多少次
- 转移方程： $f[i][j] = f[i-1][j-1] \text{ if } A[i-1]=B[j-1] + f[i-1][j]$
- 初始条件：
 - 如果B是空串，B在A中出现次数是1
 - $f[i][0] = 1$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$)
 - 如果A是空串而B不是空串，B在A中出现次数是0
 - $f[0][j] = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$)

动态规划组成部分四：计算顺序



- 初始化 $f[0][0], f[0][1], \dots, f[0][n]$
- $f[1][0], f[1][1], \dots, f[1][n]$
- ...
- $f[m][0], f[m][1], \dots, f[m][n]$
- 答案是 $f[m][n]$
- 时间复杂度（计算步数） $O(MN)$ ，空间复杂度（数组大小） $O(MN)$
- 可以用滚动数组优化空间至 $O(N)$

编程



Regular Expression Matching

<http://www.lintcode.com/problem/regular-expression-matching/>
<http://www.jiuzhang.com/solutions/regular-expression-matching/>

LintCode 154 Regular Expression Matching



- 题意：
- 给定两个字符串A, B
- B是一个正则表达式，里面可能含有'.'和'*'
 - '.' 可以匹配任何单个字符
 - '*' 可以匹配0个或多个前一个字符
- 问A和B是否匹配

- 例子：
 - isMatch("aa","a") → false
 - isMatch("aa","aa") → true
 - isMatch("aaa","aa") → false
 - isMatch("aa", "a*") → true
 - isMatch("aa", ".") → true
 - isMatch("ab", ".") → true
 - isMatch("aab", "c*a*b") → true

动态规划组成部分一：确定状态



- 双序列型动态规划
- 设A长度是m, B长度是n
- 现在我们考虑A和B如何匹配
- 最后一步：关注最后的字符
- 主要取决于正则表达式B中最后的字符B[n-1]是什么

动态规划组成部分一：确定状态

- 如果 $B[n-1]$ 是一个正常字符（非.非*），则如果 $A[m-1]=B[n-1]$ ，能否匹配取决于 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-2]$ 是否匹配；否则不能匹配
- 如果 $B[n-1]$ 是'.'，则 $A[m-1]$ 一定是和'.'匹配，之后能否匹配取决于 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-2]$ 是否匹配
- 如果 $B[n-1]$ 是'*'，它代表 $B[n-2]=c$ 可以重复0次或多次，它们是一个整体 c^* ，需要考虑 $A[m-1]$ 是0个 c ，还是多个 c 中的最后一个
 - $A[m-1]$ 是0个 c ，能否匹配取决于 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-3]$ 是否匹配
 - $A[m-1]$ 是多个 c 中的最后一个，能否匹配取决于 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-1]$ 是否匹配
 - 这种情况必须 $A[m-1]=c$ 或者 $c='.'$

子问题

- 要求A前m个字符和B前n个字符能否匹配，需要知道A前m个字符和B前n-1个字符，A前m-1个字符和B前n个字符以及A前m个字符和B前n-2个字符能否匹配
- 子问题
- 状态：设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 能否匹配

动态规划组成部分二：转移方程

- 设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 能否匹配

$$f[i][j] = \begin{cases} f[i-1][j-1], & \text{如果 } B[j-1]='.' \text{ 或者 } A[i-1]=B[j-1] \\ f[i][j-2] \text{ OR } (f[i-1][j] \text{ AND } (B[j-2]='.' \text{ OR } B[j-2]=A[i-1])), & \text{如果 } B[j-1]='*' \end{cases}$$

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况



- 设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 能否匹配
- 空串和空正则表达式匹配： $f[0][0] = \text{TRUE}$
- 空的正则表达式不能匹配长度 >0 的串
– $f[1][0] = \dots = f[m][0] = \text{FALSE}$
- 注意： $f[0][1..n]$ 也用动态规划计算，但是因为缺少 $A[-1]$ ，所以只能用第二种情况中的 $f[i][j-2]$

动态规划组成部分四：计算顺序



- $f[0][0], f[0][1], \dots, f[0][n]$
- $f[1][0], f[1][1], \dots, f[1][n]$
- ...
- $f[m][0], f[m][1], \dots, f[m][n]$
- 答案是 $f[m][n]$
- 时间复杂度（计算步数） $O(MN)$ ，空间复杂度（数组大小） $O(MN)$
- 可以用滚动数组优化空间至 $O(N)$

编程



Wildcard Matching

<http://www.lintcode.com/problem/wildcard-matching/>
<http://www.jiuzhang.com/solutions/wildcard-matching/>

LintCode 192 Wildcard Matching



- 题意：
- 给定两个字符串A, B
- B是一个正则表达式，里面可能含有'?'和'*'
 - '?' 可以匹配任何单个字符
 - '*' 可以匹配0个或多个任意字符
- 问A和B是否匹配

- 例子：
 - isMatch("aa","a") → false
 - isMatch("aa","aa") → true
 - isMatch("aaa","aa") → false
 - isMatch("aa", "") → true
 - isMatch("aa", "a*") → true
 - isMatch("ab", "?*") → true
 - isMatch("aab", "c*a*b") → false

动态规划组成部分一：确定状态



- 双序列型动态规划
- 和Regular Expression Matching很类似，因为'.'和'?'作用相同，但是这题中'*'可以匹配0个或多个任意字符
- 设A长度是m, B长度是n
- 现在我们考虑A和B如何匹配
- 关注最后的字符
- 主要取决于Wildcard中B[n-1]是什么

动态规划组成部分一：确定状态



- 如果 $B[n-1]$ 是一个正常字符（非?非*），则如果 $A[m-1]=B[n-1]$ ，能否匹配取决于 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-2]$ 是否匹配；否则不能匹配
- 如果 $B[n-1]$ 是'?'，则 $A[m-1]$ 一定是和'?'匹配，之后能否匹配取决于 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-2]$ 是否匹配
- 如果 $B[n-1]$ 是'*'，它可以匹配0个或任意多个字符，需要考虑 $A[m-1]$ 有没有被这个*匹配
 - $A[m-1]$ 不被'*'匹配，能否匹配取决于 $A[0..m-1]$ 和 $B[0..n-2]$ 是否匹配
 - $A[m-1]$ 被'*'匹配，能否匹配取决于 $A[0..m-2]$ 和 $B[0..n-1]$ 是否匹配

子问题

- 要求A前m个字符和B前n个字符能否匹配，需要知道A前m-1个字符和B前n-1个字符， A前m个字符和B前n-1个字符以及A前m-1个字符和B前n个字符能否匹配
- 子问题
- 状态：设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 能否匹配

动态规划组成部分二：转移方程

- 设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 能否匹配

$$f[i][j] = \begin{cases} f[i-1][j-1], & \text{如果 } B[j-1]='?' \text{ 或者 } A[i-1]=B[j-1] \\ f[i-1][j] \text{ OR } f[i][j-1], & \text{如果 } B[j-1]='*' \end{cases}$$

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况



- 设 $f[i][j]$ 为A前i个字符 $A[0..i-1]$ 和B前j个字符 $B[0..j-1]$ 能否匹配
- 空串和空Wildcard匹配： $f[0][0] = \text{TRUE}$
- 空的Wildcard不能匹配长度 >0 的串
 - $f[1][0] = \dots = f[m][0] = \text{FALSE}$
- $f[0][1..n]$ 也用动态规划计算，但是因为缺少 $A[-1]$ ，所以只能用第二种情况中的 $f[i][j-1]$

动态规划组成部分四：计算顺序



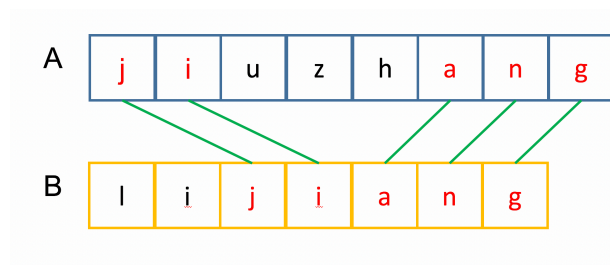
- $f[0][0], f[0][1], \dots, f[0][n]$
- $f[1][0], f[1][1], \dots, f[1][n]$
- ...
- $f[m][0], f[m][1], \dots, f[m][n]$
- 答案是 $f[m][n]$
- 时间复杂度（计算步数） $O(MN)$ ，空间复杂度（数组大小） $O(MN)$
- 可以用滚动数组优化空间至 $O(N)$

编程



双序列型动态规划总结

- 两个一维序列/字符串
- 突破口
 - 串A和串B的最后一个字符是否匹配
 - 是否需要串A/串B的最后一个字符
 - 缩减问题规模
- 数组下标表示序列A前i个，序列B前j个: $f[i][j]$
- 初始条件和边界情况
 - 空串如何处理
 - 计数型(情况1+情况2+...)以及最值型($\min/\max\{\text{情况1}, \text{情况2}, \dots\}$)
- 匹配的情况下勿忘+1(操作数多1次，匹配长度多1)



Ones and Zeroes

<http://www.lintcode.com/en/problem/ones-and-zeroes/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/ones-and-zeroes>

LintCode 668 Ones And Zeroes



- 题意：
- 给定T个01串 S_0, S_1, \dots, S_{T-1}
- 现有m个0, n个1
- 问最多能组成多少个给定01串
- 每个串最多组成一次

- 例子：
- 输入：["10", "0001", "111001", "1", "0"], $m = 5, n = 3$
- 输出：4 ("10", "0001", "1", "0")

动态规划组成部分一：确定状态



- 最后一步：最优策略组成了最多的01串，其中有没有最后一个字符串 S_{T-1}
- 情况1：没有 S_{T-1}
 - 需要知道前 $T-1$ 个01串中，用 m 个0和 n 个1最多能组成多少个01串
- 情况2：有 S_{T-1}
 - 设第 $T-1$ 个01串中有 a_{T-1} 个0， b_{T-1} 个1
 - 需要知道前 $T-1$ 个01串中，用 $m-a_{T-1}$ 个0和 $n-b_{T-1}$ 个1最多能组成多少个01串
- 子问题
- 0和1的个数在变化，如何记录？
 - 直接放入状态
 - 状态：设 $f[i][j][k]$ 为前 i 个01串最多能有多少个被 j 个0和 k 个1组成

动态规划组成部分二：转移方程

- 设 $f[i][j][k]$ 为前 i 个01串最多能有多少个被 j 个0和 k 个1组成
- 设 S_i 中有 a_i 个0, b_i 个1

$$f[i][j][k] = \max\{f[i-1][j][k], f[i-1][j-a_{i-1}][k-b_{i-1}] + 1 \mid j \geq a_{i-1} \text{ AND } k \geq b_{i-1}\}$$

前 i 个01串最多能有多少个被 j 个0和 k 个1组成

前 $i-1$ 个01串最多能有多少个被 j 个0和 k 个1组成

前 $i-1$ 个01串最多能有多少个被 $j-a_{i-1}$ 个0和 $k-b_{i-1}$ 个1组成, 再加上 S_{i-1}

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设 $f[i][j][k]$ 为前 i 个01串最多能有多少个被 j 个0和 k 个1组成
- 设 S_i 中有 a_i 个0, b_i 个1
- $f[i][j][k] = \max\{f[i-1][j][k], f[i-1][j-a_{i-1}][k-b_{i-1}] + 1 \mid j \geq a_{i-1} \text{ AND } k \geq b_{i-1}\}$
- 初始条件： $f[0][0 \sim m][0 \sim n] = 0$
 - 无论有多少0和1，前0个01串中最多能组成0个
- 边界情况： $f[i-1][j-a_{i-1}][k-b_{i-1}] + 1$ 必须 $j \geq a_{i-1} \text{ AND } k \geq b_{i-1}$

动态规划组成部分四：计算顺序



- $f[0][0][0], f[0][0][1], \dots, f[0][0][n], f[0][1][0], \dots, f[0][1][n], \dots, f[0][m][n]$
- $f[1][0][0], f[1][0][1], \dots, f[1][0][n], f[1][1][0], \dots, f[1][1][n], \dots, f[1][m][n]$
- ...
- $f[T][0][0], f[T][0][1], \dots, f[T][0][n], f[T][1][0], \dots, f[T][1][n], \dots, f[T][m][n]$
- 答案是 $f[T][m][n]$
- 时间复杂度： $O(Tmn)$ ，空间复杂度： $O(Tmn)$ ，可以用滚动数组优化至 $O(mn)$

编程



九章算法