

Signals and Systems 2

--- Linear Time-invariant Systems

School of Information &
Communication Engineering, BUPT

Reference:

1. Textbook: Chapter 2
2. Schaum's outline of signals and systems, Hwei P. Hsu, McGraw-Hill, 1995. Chapter 2

1

从多项式乘法说起

$$(x+1)(x^2+2x+5) = (x^3+2x^2+5x) + (x^2+2x+5) \\ = x^3+3x^2+7x+5$$

- **思考1**: 相乘的两个多项式系数和结果多项式系数之间是什么关系?
- **思考2**: 结果多项式中 x^3 的系数1、 x^2 的系数3、 x 的系数7、常数项5是通过先逐项相乘再合并同类项的方法得到的, 要得到结果多项式中的某个系数, 需要两步操作才行, 有没有办法一步操作就可以得到一个系数呢?

2

多项式乘法-直接求系数示例

$$\begin{array}{r} x+1 \\ 5+2x+x^2 \\ \hline x+1 \quad x^3 \longrightarrow x^3 \\ 5+2x+x^2 \\ 2x^2+x^2 \longrightarrow 3x^2 \\ x+1 \\ 5+2x+x^2 \\ 5x+2x \longrightarrow 7x \\ 5+2x+x^2 \\ \hline 5 \longrightarrow 5 \end{array}$$

多项式乘法-直接求系数方法

- **反折**: 第1个多项式按 x 的降幂排列, 第2个多项式的各项按 x 的升幂排列。
- **平移**: 将按 x 的升幂排列的多项式每次向右平移一项。
- **相乘**: 垂直对齐的项分别相乘。
- **求和**: 相乘的各结果相加。

反折、平移、相乘、求和
——“卷积”的计算过程

4

从多项式乘法到卷积-示例

- 多项式 $x+1$ 的系数 $[a(1) \ a(0)]=[1 \ 1]$
- 多项式 x^2+2x+5 的系数 $[b(2) \ b(1) \ b(0)]=[1 \ 2 \ 5]$
- 二者相乘所得结果多项式 x^3+3x^2+7x+5 的系数 $[c(3) \ c(2) \ c(1) \ c(0)]=[1 \ 3 \ 7 \ 5]$

$$c(0)=a(0)b(0)$$

$$c(1)=a(0)b(1)+a(1)b(0)$$

$$c(2)=a(0)b(2)+a(1)b(1)+a(2)b(0)$$

$$c(3)=a(0)b(3)+a(1)b(2)+a(2)b(1)+a(3)b(0)$$

隐含条件: $a(3)=a(2)=b(3)=0$

5

多项式乘法-直接求系数示例

$$\begin{array}{r} [b(2) \ b(1) \ b(0)]=[1 \ 2 \ 5] \quad x+1 \quad [a(1) \ a(0)]=[1 \ 1] \\ [b(0) \ b(1) \ b(2)]=[5 \ 2 \ 1] \quad 5+2x+x^2 \\ c(3)=a(0)b(3)+a(1)b(2)+a(2)b(1)+a(3)b(0) \quad x^3 \longrightarrow x^3 \\ x+1 \quad x^3 \longrightarrow x^3 \\ 5+2x+x^2 \\ 2x^2+x^2 \longrightarrow 3x^2 \\ c(2)=a(0)b(2)+a(1)b(1)+a(2)b(0) \\ x+1 \quad 5+2x+x^2 \\ 5x+2x \longrightarrow 7x \\ c(1)=a(0)b(1)+a(1)b(0) \\ 5+2x+x^2 \\ 5x+2x \longrightarrow 7x \\ c(0)=a(0)b(0) \\ 5 \longrightarrow 5 \end{array}$$

从多项式乘法到卷积-推而广之

- 假定两多项式的系数分别为 $a(n)$, $n=0\sim n_1$ 和 $b(n)$, $n=0\sim n_2$, 乘积多项式系数为 $c(n)$

$$c(0)=a(0)b(0)$$

$$n=0\sim(n_1+n_2)$$

$$c(1)=a(0)b(1)+a(1)b(0)$$

$$c(2)=a(0)b(2)+a(1)b(1)+a(2)b(0)$$

$$c(3)=a(0)b(3)+a(1)b(2)+a(2)b(1)+a(3)b(0)$$

$$c(4)=a(0)b(4)+a(1)b(3)+a(2)b(2)+a(3)b(1)+a(4)b(0)$$

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{k=0}^n a(k)b(n-k)$$

7

Matlab计算卷积

- 表面上看, 卷积的计算公式很复杂, 计算过程也很麻烦(反折, 平移, 相乘, 求和), 实际上使用Matlab很容易计算。

- $a(n) = [1 \ 1]$, $b(n) = [1 \ 2 \ 5]$ 的卷积计算为例

```
>> a = [1 1];
```

```
>> b = [1 2 5];
```

```
>> c = conv(a,b);
```

```
>> c
```

```
c =
```

```
1 3 7 5
```

8