

Signals and Systems 2

--- *Linear Time-invariant Systems*

***School of Information &
Communication Engineering, BUPT***

Reference:

- 1. Textbook: Chapter 2*
- 2. Schaum's outline of signals and systems, Hwei P. Hsu, McGraw-Hill, 1995. Chapter 2*

从多项式乘法说起

$$\begin{aligned}(x+1)(x^2+2x+5) &= (x^3+2x^2+5x) + (x^2+2x+5) \\ &= x^3+3x^2+7x+5\end{aligned}$$

- **思考1**：相乘的两个多项式系数和结果多项式系数之间是什么关系？
- **思考2**：结果多项式中 x^3 的系数1、 x^2 的系数3、 x 的系数7、常数项5是通过先逐项相乘再合并同类项的方法得到的，要得到结果多项式中的某个系数，需要两步操作才行，有没有办法一步操作就可以得到一个系数呢？

多项式乘法-直接求系数示例

$x + 1$

$$\underline{5 + 2x + x^2}$$

$x + 1$

x^3

x^3

$$\underline{5 + 2x + x^2}$$

$$2x^2 + x^2$$

$$3x^2$$

$x + 1$

$$\underline{5 + 2x + x^2}$$

$$5x + 2x$$

$7x$

$x + 1$

$$5 + 2x + x^2$$

5

5

多项式乘法-直接求系数方法

- **反折**：第1个多项式按 x 的降幂排列，第2个多项式的各项按 x 的升幂排列。
- **平移**：将按 x 的升幂排列的多项式每次向右平移一项。
- **相乘**：垂直对齐的项分别相乘。
- **求和**：相乘的各结果相加。

反折、平移、相乘、求和
——“卷积”的计算过程

从多项式乘法到卷积-示例

- 多项式 $x+1$ 的系数 $[a(1) \ a(0)]=[1 \ 1]$
- 多项式 x^2+2x+5 的系数 $[b(2) \ b(1) \ b(0)]=[1 \ 2 \ 5]$
- 二者相乘所得结果多项式 x^3+3x^2+7x+5 的系数 $[c(3) \ c(2) \ c(1) \ c(0)]=[1 \ 3 \ 7 \ 5]$

$$c(0)=a(0)b(0)$$

$$c(1)=a(0)b(1)+a(1)b(0)$$

$$c(2)=a(0)b(2)+a(1)b(1)+a(2)b(0)$$

$$c(3)=a(0)b(3)+a(1)b(2)+a(2)b(1)+a(3)b(0)$$

隐含条件： $a(3)=a(2)=b(3)=0$

多项式乘法-直接求系数示例

$$[b(2) \ b(1) \ b(0)] = [1 \ 2 \ 5]$$

$$x + 1$$

$$[a(1) \ a(0)] = [1 \ 1]$$

$$[b(0) \ b(1) \ b(2)] = [5 \ 2 \ 1]$$

$$5 + 2x + x^2$$

$$c(3) =$$

$$a(0)b(3) + a(1)b(2) + a(2)b(1) + a(3)b(0)$$

$$x^3 \longrightarrow x^3$$

$$x + 1$$

$$5 + 2x + x^2$$

$$c(2) =$$

$$a(0)b(2) + a(1)b(1) + a(2)b(0)$$

$$x + 1$$

$$2x^2 + x^2$$

$$\longrightarrow 3x^2$$

$$5 + 2x + x^2$$

$$c(1) = a(0)b(1) + a(1)b(0)$$

$$5x + 2x$$

$$\longrightarrow 7x$$

$$x + 1$$

$$5 + 2x + x^2$$

$$c(0) = a(0)b(0)$$

$$5$$

$$\longrightarrow 5$$

c(3)	1
c(2)	3
c(1)	7
c(0)	5

从多项式乘法到卷积-推而广之

- 假定两多项式的系数分别为 $a(n)$, $n=0\sim n_1$ 和 $b(n)$, $n=0\sim n_2$, 乘积多项式系数为 $c(n)$

$$c(0)=a(0)b(0)$$

$$n = 0 \sim (n_1 + n_2)$$

$$c(1)=a(0)b(1)+a(1)b(0)$$

$$c(2)=a(0)b(2)+a(1)b(1)+a(2)b(0)$$

$$c(3)=a(0)b(3)+a(1)b(2)+a(2)b(1)+a(3)b(0)$$

$$c(4)=a(0)b(4)+a(1)b(3)+a(2)b(2)+a(3)b(1)+a(4)b(0)$$

$$c(n) = a(n) * b(n) = \sum_{k=0}^n a(k)b(n-k)$$

Matlab计算卷积

- 表面上看，卷积的计算公式很复杂，计算过程也很麻烦（反折，平移，相乘，求和），实际上使用**Matlab**很容易计算。
- $a(n) = [1 \ 1]$ ， $b(n) = [1 \ 2 \ 5]$ 的卷积计算为例

```
>> a = [1 1];
>> b = [1 2 5];
>> c = conv(a,b);
>> c
c =
1 3 7 5
```