More examples with transformations:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A \circ B = \left[-4\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad -3\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$\begin{matrix} -12 \\ 12 \end{matrix}$$

What is the composition for $\begin{bmatrix} x & 5 \\ y & -4 \end{bmatrix}$ $A \circ B$?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Then

the image would be with prime (')

Finding $B\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Finding $A\left(B\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)$

$$= A\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left[3\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} -12 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} -3 \\ 9 \end{matrix}$$

$$B \circ A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[0\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 2\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + -1\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right]$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 20 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 \circ A_1 = \left[-4\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad -3\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right]$$

$$\begin{bmatrix} -14 & -13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$$

Consider this transformation:

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ What is the image of $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ under this transformation

$$\left[-2\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix} + \begin{matrix} 8 \\ 4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$