Devoir Maison

ANADISS

M2 MIND

Zakaria Belaribi

16 16 31 09 52 16

2020 - 2021

BELARIBI ZAKARIA 16 16 31 03 52 16
M2 MIND 16/03/2021

Devoir Maison

Exercice 01 :

1) les expressions :

Centre de gravité du groupe K :

$$g_K^j = \frac{1}{n_K} \sum_{i \in I_K} x_{ij} \quad , \quad \forall j \in [1, p]$$

avec I_K : l'ensemble des indices du groupe K et j indiquant la $j^{ème}$ variable.

$$g_K = \begin{pmatrix} g_K^1 \\ \vdots \\ g_K^p \end{pmatrix}$$

centre de gravité global g :

$$g^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad , \quad \forall j \in [1, p]$$

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$$

Matrice de Variance ~~et de~~ covariance totale :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - g)(x_i - g)'$$

Matrice de Variance Covariance Inter-groupes B :

$$B = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{q} n_K (g_K - g)(g_K - g)'$$

Matrice Variance Covariance intra-groupes W :

$$W = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{q} n_k V_k$$

2) on cherche u tq la variance inter-groupes $u'Bu$ soit maximum et la variance inter-groupes $u'Wu$ soit minimum.
si on ne pose pas de contraintes sur u, donc on peut dériver le rapport c et le mettre à nulle pour obtenir une solution :

$$\frac{d\left(\frac{u'Bu}{u'Wu}\right)}{du} = \frac{d(u'Bu)(u'Wu) - d(u'Wu)(u'Bu)}{(u'Wu)^2} = \frac{2Bu\,(u'Wu) - 2Wu\,(u'Bu)}{(u'Wu)^2} = 0$$

on $u'Wu \neq 0$ donc on obtient : $2Bu\,(u'Wu) = 2Wu\,(u'Bu)$

$$\Leftrightarrow \quad Bu(u'Wu) = Wu(u'Bu)$$

donc le rapport c dépend de u, et étant donné que on ne pose pas de contrainte sur u, donc les valeurs de c sont dans $\mathbb{R}$

3) On pose la contrainte $u'Vu = 1$

a) on a $\frac{u'Bu}{u'Wu}$ et d'après la propriété $u'Vu = u'Wu + u'Bu$

on a $\max_{u\in\mathbb{R}} \frac{u'Bu}{u'Wu} \Leftrightarrow \max_{u\in\mathbb{R}} \frac{u'Bu}{u'Vu} \Leftrightarrow \min_{u\in\mathbb{R}} \frac{u'Vu}{u'Bu}$ <u>CQFD</u>

b) on a la contrainte $u'Vu = 1$

$$\min_{u\in\mathbb{R}} \frac{u'Vu}{u'Bu} \Leftrightarrow \min_{u\in\mathbb{R}} \frac{1}{u'Bu} \Leftrightarrow \max_{u\in\mathbb{R}} u'Bu$$

c) on recherche un maximum avec une contrainte, donc on applique le lagrangien $L(u) = u'Bu - \lambda(u'Vu - 1)$

on dérive

$$\frac{\partial L(u)}{\partial u} = \frac{\partial u'Bu}{\partial u} - \lambda \frac{u'Vu}{\partial u}$$

$$= 2Bu - 2\lambda Vu$$ (car B et V sont des matrices symétriques)

$$\frac{\partial L(u)}{\partial u} = 0 \iff 2Bu = 2\lambda Vu$$

$$\iff Bu = \lambda Vu \quad (*)$$

$$\iff \boxed{V^{-1}Bu = \lambda u}$$

$u'Bu$ est maximal pour u, qui est un vecteur propre de $V^{-1}B$ associé à la plus grande valeur propre λ qui a pour valeur :

on multiplie $(*)$ par u' : $u'Bu = \lambda u'Vu$

on a $\lambda = \dfrac{u'Bu}{u'Vu}$

4) a) $V^{-1}Bu = \lambda u \iff Bu = \lambda Vu$

$\iff Bu = \lambda(B+W)u \iff Bu = \lambda Bu + \lambda Wu$

$\iff (1-\lambda)Bu = \lambda Wu \iff (1-\lambda)W^{-1}Bu = \lambda u$

$\iff W^{-1}Bu = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} u$

u est un vecteur propre de $V^{-1}B$ associé à la valeur propre λ

u est aussi un $\vec{vp}$ de $W^{-1}B$ associé à la valeur propre $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$

donc $V^{-1}B$ et $W^{-1}B$ ont le même vecteur propre mais des valeurs propres differentes λ et μ, on pose

$$\boxed{\mu = \frac{\lambda}{1-\lambda}}$$

b) on a : $0 \leq u'Bu \leq u'Bu + u'Wu \iff 0 \leq \dfrac{u'Bu}{u'Vu} \leq \dfrac{u'Bu + u'Wu}{u'Vu}$

$\iff 0 \leq \dfrac{u'Bu}{u'Vu} \leq 1 \iff \boxed{0 \leq \lambda \leq 1}$

Exercice 02 :

1) L'équation à resoudre dans l'exo 1

$$Bu = \lambda W u \iff Bu = \lambda (V-B) u$$

$\iff Bu = \lambda V u - \lambda B u$

$\iff Bu + \lambda B u = \lambda V u$

$\iff (1+\lambda) B u = \lambda V u$

$\iff Bu = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} V u$

Posons $\vartheta = Vu$, donc $u = V^{-1}\vartheta$

on obtient $BV^{-1}\vartheta = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\vartheta$ --- (1)

posons $\mu = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$

d'après ~~mes~~ conaissance, on sait que résoudre une ACP revient à résoudre l'équation : $VMu = \mu u$ --- (2)

avec V Matrice des variance Covariance des individus

et on a ϑ est un $\vec{v}_p$ de $V^{-1}B$ associé à la valeur propre $\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$ et $u'Vu = 1 \iff \vartheta' V^{-1} \vartheta = 1$ avec $M = V^{-1}$ (M métrique)

donc effectuer une AFD revient à effectuer une ACP sur les centres des groupes. $\{g_1, \ldots g_q\}$

2) la distance d'un point x par rapport au groupe k (centre de gravité g_k) dans l'espace $\mathbb{R}^p$ muni de la métrique W^{-1}

$$d^2_{W^{-1}}(x, g_k) = (x - g_k) W^{-1} (x - g_k)'$$

$$= x' W^{-1} x - g_k' W^{-1} x - x' W^{-1} g_k + g_k' W^{-1} g_k$$

$$= \underbrace{x' W^{-1} x - 2 g_k' W^{-1} x + g_k' W^{-1} g_k}$$

toutes ces quantites ont $x'W^{-1}x$ qui est indépendant de k, donc la comparaison des distance se fait sans cette élement :

$D_k = d^2_{W^{-1}}(x, g_k) - x' W^{-1} x \iff \boxed{D_k = g_k' W^{-1} g_k - 2 g_k' W^{-1} x}$

$$D_k = \frac{1}{2} g_k' W^{-1} g_k - g_k' W^{-1} x$$

donc le groupe auquel on affecte l'individu x est le groupe k^* ;

$$D_{k^*} = \min \{ D_k , k = 1 .. q \}$$

on pose $Q_k = - D_k$, donc

$$Q_k = g_k' W^{-1} x - \frac{1}{2} g_k' W^{-1} g_k \quad , \text{ avec}$$

$$Q_{k^*} = \max \{ Q_k , k = 1, \dots q \}$$

3) a) on affecte x au groupe 1 plutôt qu'au groupe 2 si :

$$f_1(x) < f_2(x) \iff f_1(x) - f_2(x) < 0$$

$$\iff g_1' W^{-1} g_1 - 2 g_1' W^{-1} x - g_2' W^{-1} g_2 + 2 g_2' W^{-1} x < 0$$

$$\iff g_1' W^{-1} g_1 - g_2' W^{-1} g_2 - 2 g_1' W^{-1} x + 2 g_2' W^{-1} x < 0$$

$$\iff (g_1' - g_2') W^{-1} (g_1 + g_2) - 2 (g_1' - g_2') W^{-1} x < 0$$

$$\iff -2 \left(-\frac{1}{2} (g_1' - g_2') W^{-1} (g_1 + g_2) + (g_1' - g_2') W^{-1} x \right) < 0$$

$$\iff -\frac{1}{2} (g_1' - g_2') W^{-1} (g_1 + g_2) + (g_1' - g_2') W^{-1} x > 0$$

$$\iff \boxed{ f(x) > 0 } \qquad \text{CQFD}$$

b) De la question (a) on déduit que dans le cas de 2 groupes la règle géométrique revient à projeter l'individu x sur l'axe $u = W^{-1} (g_1 - g_2)$ et ce selon la moyenne des centres des gravités des 2 groupes (d'où la présence du $\frac{1}{2}(g_1 + g_2)$)

Exercice 03 :

$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad g_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Calcul de W et W^{-1}

$$W = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{q} n_k V_k = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$W^{-1} = \frac{1}{\det W} \cdot {}^t\mathrm{Com} \Rightarrow \det W = \frac{1}{4}(50) = 12{,}5$$

$$\mathrm{Com}(W) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1} = \frac{4}{50} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{W^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}}$$

b) On Calcul la distance de l'individu par rapport au centre de gravité des deux groupes séparement, et on prend le min. On prend le carré de la distance de Mahalanobis muni de la métrique $M = W^{-1}$ comme règle pour ~~calcul~~ calculer les distances :

$$d^2_{W^{-1}}(x, g_k) = {}^t(x - g_k)\, W^{-1} (x - g_k) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d^2_{W^{-1}}(x, g_1) = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d^2_{W^{-1}}(x, g_1) = 13{,}6}$$

$$d^2_{W^{-1}}(x, g_2) = {}^t(x - g_2) W^{-1} (x - g_2) = (-3 \quad 4) \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d^2_{W^{-1}}(x, g_2) = (-0,6 \quad 1,6) \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d^2_{W^{-1}}(x, g_2) = 8,2}$$

on a $d^2_{W^{-1}}(x, g_1) > d^2_{W^{-1}}(x, g_2)$

donc on affecte l'individu $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ au groupe 2.

d) L'ensemble des points équidistants des 2 groupes constitue à eux seuls la frontière de décision

cette frontière va trancher (va nous aider) pour affecter un individu au groupe 1 ou bien au 2e groupe.

on a : $d^2_{W^{-1}}(x, g_1) = d^2_{W^{-1}}(x, g_2)$ avec x un individu quelconque

$$\Leftrightarrow {}^t(x - g_1) W^{-1} (x - g_1) = {}^t(x - g_2) W^{-1} (x - g_2)$$

$$\Leftrightarrow (x' W^{-1} - g_1' W^{-1})(x - g_1) = x' W^{-1} x - g_2' W^{-1} x - x' W^{-1} g_2 + g_2' W^{-1} g_2$$

$$\Leftrightarrow g_1' W^{-1} g_1 - 2 g_1' W^{-1} x = g_2' W^{-1} g_2 - 2 g_2' W^{-1} x$$

$$\Leftrightarrow g_1' W^{-1} g_1 - g_2' W^{-1} g_2 - 2 g_1' W^{-1} x + 2 g_2' W^{-1} x = 0$$

$$\Leftrightarrow (g_1 - g_2)' W^{-1} (g_1 + g_2) - 2 (g_1' - g_2') W^{-1} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(g_1 - g_2)' W^{-1}}\, x - \frac{1}{2} \underbrace{(g_1 - g_2)' W^{-1}}\, (g_1 + g_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^t(g_1 - g_2) W^{-1} \left(x - \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (0 - 9 \quad 0 - 0) \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-9 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 4,5 \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1{,}8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 4{,}5 \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ ~~$1{,}8x$~~ $\boxed{-1{,}8x + 8{,}1 = 0}$

2) $D(z, g_1) = (z - g_1)' V_1^{-1} (z - g_1)$

$D(z, g_2) = (z - g_2)' V_2^{-1} (z - g_2)$

a) $V_1^{-1} = \frac{1}{\det V_1} \cdot {}^t Com(V_1)$

$\Rightarrow \det V_1 = 9 \times 4 = 36$

$\Rightarrow V_1^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$V_2^{-1} = \frac{1}{\det V_2} \, {}^t Com(V_2)$

$\Rightarrow \det V_2 = 1$

$\Rightarrow V_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

soit l'individu $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

distance de l'individu x et g_1 :

$D(x, g_1) = \begin{pmatrix} 6-0 & 4-0 \end{pmatrix} \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$D(x, g_1) = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 24 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$D(x, g_1) = \frac{1}{36}(288) \Rightarrow \boxed{D(x, g_1) = 8}$

distance de l'individu x et g_2 :

$D(x, g_2) = \begin{pmatrix} 6-9 & 4-0 \end{pmatrix} \cancel{\frac{1}{36}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$D(x, g_2) = \cancel{\frac{1}{36}} \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{36}(\times 90)} \Rightarrow \boxed{D(x, g_2) = 25}$

on a $\underset{\substack{\| \\ 13{,}6}}{d^2_{W^{-1}}(x_1\, g_1)} > \underset{\substack{\| \\ 8}}{D(x_1\, g_1)}$

et $\underset{\substack{\| \\ 8{,}2}}{d^2_{W^{-1}}(x_1\, g_2)} < \underset{\substack{\| \\ 25}}{D(x_1\, g_2)}$

si on prend la métrique $M = V^{-1}$, l'individu $\binom{6}{4}$ sera cette fois affecté au groupe 1 (le plus proche)

b) on a $D(z, g_1) = D(z, g_2)$

$$\Leftrightarrow (z-g_1)' V_1^{-1} (z-g_1) = (z-g_2)' V_2^{-1} (z-g_2)$$

$$\Leftrightarrow z'V_1^{-1}z - z'V_1^{-1}g_1 - g_1'V_1^{-1}z + g_1'V_1^{-1}g_1 = z'V_2^{-1}z - z'V_2^{-1}g_2 - g_2'V_2^{-1}z + g_2'V_2^{-1}g_2$$

$$\Leftrightarrow g_1'V_1^{-1}g_1 - g_2'V_2^{-1}g_2 - 2g_1'V_1^{-1}z + 2g_2'V_2^{-1}z = 0$$

$$\Leftrightarrow (g_1'-g_2')(V_1^{-1}+V_2^{-1})(g_1+g_2) - 2(g_1'-g_2')(V_1^{-1}+V_2^{-1})z = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(g_1-g_2)'(V_1^{-1}+V_2^{-1})}z - \frac{1}{2}\underbrace{(g_1-g_2)'(V_1^{-1}+V_2^{-1})}(g_1+g_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (g_1-g_2)'(V_1^{-1}+V_2^{-1})\left(z - \frac{1}{2}(g_1+g_2)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-9\ \ 0)\left(\begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 0{,}25\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ 0\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-9\ \ 0)\begin{pmatrix} 10/9 & 0 \\ 0 & 1{,}25\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 4{,}5 \\ y\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-10\ \ 0)\begin{pmatrix} x - 4{,}5 \\ y\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-10x + 45 = 0}$$