Problem S4: Balanced Trees

Problem Description

Trees have many fascinating properties. While this is primarily true for trees in nature, the concept of trees in math and computer science is also interesting. A particular kind of tree, a *perfectly balanced tree*, is defined as follows.

Every perfectly balanced tree has a positive integer *weight*. A perfectly balanced tree of weight 1 always consists of a single node. Otherwise, if the weight of a perfectly balanced tree is w and $w \geq 2$, then the tree consists of a root node with branches to k subtrees, such that $2 \leq k \leq w$. In this case, all k subtrees must be completely identical, and be perfectly balanced themselves.

In particular, all k subtrees must have the same weight. This common weight must be the maximum integer value such that the sum of the weights of all k subtrees does not exceed w, the weight of the overall tree. For example, if a perfectly balanced tree of weight 8 has 3 subtrees, then each subtree would have weight 2, since $2 + 2 + 2 = 6 \leq 8$.

Given N, find the number of perfectly balanced trees with weight N.

Input Specification

The input will be a single line containing the integer N ($1 \leq N \leq 10^9$).

For 5 of the 15 marks available, $N \leq 1000$.

For an additional 2 of the 15 marks available, $N \leq 50000$.

For an additional 2 of the 15 marks available, $N \leq 10^6$.

Output Specification

Output a single integer, the number of perfectly balanced trees with weight N.

Sample Input 1

```
4
```

Output for Sample Input 1

```
3
```

Explanation for Output for Sample Input 1

One tree has a root with four subtrees of weight 1; a second tree has a root with two subtrees of weight 2; the third tree has a root with three subtrees of weight 1.

Sample Input 2

```
10
```

Output for Sample Input 2

```
13
```

Version française sont après la version anglaise

Problème S4 : Arbres équilibrés

Description du problème
Les arbres ont de nombreuses propriétés fascinantes. Bien que ce soit surtout le cas des arbres dans la nature, le concept d'arbre en mathématiques et en informatique est aussi intéressant. On définit un arbre particulier, soit un *arbre parfaitement équilibré*, comme suit.

Chaque arbre parfaitement équilibré a un *poids* qui est un entier strictement positif. Un arbre parfaitement équilibré, avec un poids de 1, est un arbre constitué d'exactement un noeud. Autrement, si un arbre parfaitement équilibré a une poids égal à p, avec $p \geq 2$, alors l'arbre est constitué d'une racine avec des branches vers k sous-arbres, de manière que $2 \leq k \leq p$. Dans ce cas, tous les k sous-arbres doivent être parfaitement identiques et parfaitement équilibrés eux-mêmes.

En particulier, tous les k sous-arbres doivent avoir le même poids. Ce poids commun doit être la valeur entière maximale telle que la somme des poids des k sous-arbres ne dépasse pas p, le poids de l'arbre global. Par exemple, si un arbre parfaitement équilibré a un poids de 8 et 3 sous-arbres, alors chaque sous-arbre aura un poids de 2, puisque $2 + 2 + 2 = 6 \leq 8$.

Étant donné N, déterminer le nombre d'arbres parfaitement équilibrés qui ont un poids de N.

Précisions par rapport aux entrées
L'entrée sera constituée d'une ligne contenant l'entier N ($1 \leq N \leq 10^9$).

Pour 5 des 15 points disponibles, on aura $N \leq 1000$.

Pour 2 autres des 15 points disponibles, on aura $N \leq 50000$.

Pour 2 autres des 15 points disponibles, on aura $N \leq 10^6$.

Précisions par rapport aux sorties
La sortie sera un entier qui représente le nombre d'arbres parfaitement équilibrés qui ont un poids de N.

Exemple d'entrée 1
```
4
```

Sortie pour l'exemple d'entrée 1
```
3
```

Explication de la sortie pour l'exemple d'entrée 1
Un arbre a une racine avec quatre sous-arbres qui ont un poids de 1 ; un deuxième arbre a une racine avec deux sous-arbres qui ont un poids de 2 ; le troisième arbre a une racine avec trois sous-arbres qui ont un poids de 1.

Exemple d'entrée 2
```
10
```

Sortie pour l'exemple d'entrée 2
```
13
```