

# 机器学习损失函数

原创 by 朱一搏([zhuyibo@yuewen.com](mailto:zhuyibo@yuewen.com))

通常，监督学习的优化目标函数（或者叫代价函数）形式如下<sup>[1]</sup>：

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(y_i, f(x_i; \theta)) + \lambda \Omega(\theta) \right) \quad (1)$$

即学习到使得右边式子达到最小值的参数 $\theta$ 的解 $\theta^*$ 。其中，前面部分 $L(y_i, f(x_i; \theta))$ 是第 $i$ 个样本的预测值 $f(x_i; \theta)$ 和真实值 $y_i$ 之间的误差，也即损失函数<sup>[2]</sup>。后面的 $\Omega(\theta)$ 是对参数 $\theta$ 的正则化项或者惩罚项，主要用来降低模型的复杂度，避免过拟合。损失函数 $L$ 也被称为经验风险，加上正则项后就是结构风险<sup>[3]</sup>。我们令 $\hat{y}_i = f(x_i; \theta)$ ，下面分别看一下分类问题和回归问题中的一些常见损失函数。为了简化表示，略去代表第 $i$ 个样本的下标 $i$ 。

## 分类问题

### 1. 0-1损失<sup>[4]</sup>

$$L(y, \hat{y}) = \begin{cases} 1, & y \neq \hat{y} \\ 0, & y = \hat{y} \end{cases}$$

如果是二分类问题，则等价于判断 $y$ 和 $\hat{y}$ 的符号是否相同：

$$L(y, \hat{y}) = \begin{cases} 1, & y\hat{y} \leq 0 \\ 0, & y\hat{y} > 0 \end{cases}$$

此时亦等价于<sup>[5]</sup>：

$$L(y, \hat{y}) = \frac{1}{2}(1 - \text{sign}(y\hat{y}))$$

该损失函数能够直观地刻画分类的错误率，但是非凸、非光滑的特点，在算法上难以优化，0-1损失的

一个代理损失函数是Hinge损失函数<sup>[6]</sup>。

## 2. Hinge loss

Hinge loss和SVM息息相关<sup>[7]</sup>，具体公式如下：

$$L(y, \hat{y}) = \max(0, 1 - y\hat{y}), \quad y = \pm 1$$

可见，当真实值 $y$ 和预测值 $\hat{y}$ 符号相同时，并且 $y\hat{y} \geq 1$ 时，Hinge loss为0；当 $y$ 和 $\hat{y}$ 符号相反时，Hinge loss随着 $\hat{y}$ 的增大而线性增大<sup>[8]</sup>。

另外，Hinge loss在 $y\hat{y} = 1$ 处不可导，因此不能用梯度下降法进行优化，而是用次梯度下降法(Subgradient Descent Method)<sup>[9]</sup>。

## 3. 指数损失Exponential loss<sup>[10]</sup>

指数损失函数也是0-1损失函数的一种代理函数：

$$L(y, \hat{y}) = \exp(-y\hat{y})$$

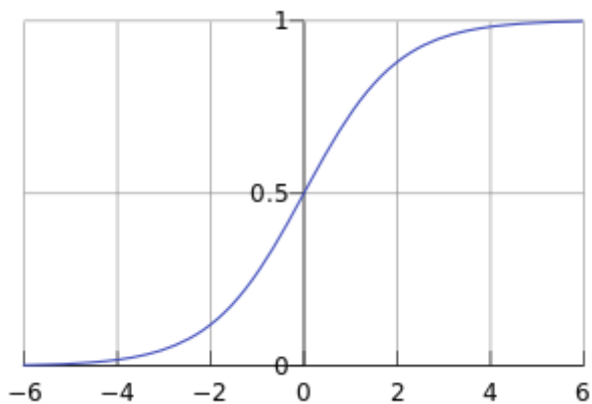
运用指数损失的典型分类器是AdaBoost算法。

## 4. Logistic损失(log loss)

我们先来看一下Logistic函数。

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \text{sigmoid}(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)} \\ \sigma(-z) &= 1 - \sigma(z) \end{aligned} \tag{4.0}$$

其函数图像：



在 $y \in \{-1, 1\}$ 时, log loss形式为: [\[9:1\]](#) [\[11\]](#)

$$L(y, \hat{y}) = \log(1 + \exp(-y\hat{y})), \quad y = \pm 1 \quad (4.1)$$

**注意, 其中**  $\hat{y} = f(x; \theta) = \theta^T x$

在 $y \in \{0, 1\}$ 时, log loss形式为: [\[12\]](#) [\[13\]](#)

$$L(y, \hat{y}) = -(y \log \sigma(\hat{y}) + (1 - y) \log(1 - \sigma(\hat{y}))), \quad y = 0, 1 \quad (4.2)$$

如果我们调整一下  $\hat{y}$  的定义:  $\hat{y} = \sigma(f(x; \theta)) = \sigma(\theta^T x)$ , 此时其形式就变为我们熟悉的二元交叉熵形式[\[14\]](#):

$$L(y, \hat{y}) = -(y \log \hat{y} + (1 - y) \log(1 - \hat{y})), \quad y = 0, 1 \quad (4.3)$$

式(4.1)、式(4.2)和式(4.3)等价, 我们来看一下(4.1)和(4.2)式等价的推导过程。

(4.1)式中 $y = 1$ 时(4.2)式中也有 $y = 1$ , (4.1)式化简为:

$$\begin{aligned} L(y, \hat{y}) &= L(1, \hat{y}) = \log(1 + \exp(-\hat{y})) \\ &= -\log \sigma(\hat{y}) \\ &= -\log \sigma(\theta^T x) \end{aligned}$$

(4.2)式化简为:

$$\begin{aligned} L(y, \hat{y}) &= L(1, \hat{y}) = -\log \sigma(\hat{y}) \\ &= -\log \sigma(\theta^T x) \end{aligned}$$

可见当 $y$ 取标签1 (正例) 时, (4.1)和(4.2)式相等。

再看当 $y$ 取负例时, 此时(4.1)式中 $y = -1$ , (4.2)式中 $y = 0$ 。(4.1)式化简为:

$$\begin{aligned}
L(y, \hat{y}) &= L(-1, \hat{y}) = \log(1 + \exp(\hat{y})) \\
&= -\log\left(\frac{1}{1 + \exp(\hat{y})}\right) \\
&= -\log(\sigma(-\hat{y})) \\
&= -\log(1 - \sigma(\hat{y})) \\
&= -\log(1 - \sigma(\theta^T x))
\end{aligned}$$

最后一步是因为(4.0)式 $\sigma(-z) = 1 - \sigma(z)$ 。(4.2)式化简为：

$$\begin{aligned}
L(y, \hat{y}) &= L(0, \hat{y}) = -\log(1 - \sigma(\hat{y})) \\
&= -\log(1 - \sigma(\theta^T x))
\end{aligned}$$

因此当 $y$ 取负例时(4.1)和(4.2)式相等，综合起来就是两者等价。

我们现在再来推导一下这个损失函数的由来。

对于 $n$ 个服从i.i.d.分布（独立同分布）的样本 $\{x_i, y_i\}$ ， $x_i$ 是输入特征向量， $y_i$ 是真实分类标签并且 $y_i \in \{0, 1\}$ 。设随机变量 $X$ 代表输入 $x$ ，随机变量 $Y$ 代表类别标签 $y$ ，我们试图寻找出具体的联合分布 $P(X, Y)$ 以及条件分布 $P(Y|X)$ （或者连续值情况下的概率密度函数），但是因为我们无法获得所有的样本，输入的复杂性等等原因，我们很难求解没有给出具体分布函数形式的非参数统计(nonparametric)问题。另一方面，我们可以基于经验、数据生成的方式或中心极限定理来猜测具体的分布形式（比如正态分布、0-1伯努利分布、二项分布、泊松分布等），一旦我们做出分布假定，就可以用一组参数 $\theta$ 来确定该分布，所以问题就转为对这组参数 $\theta$ 的估计，也即“分布已知，参数未知”的参数统计(parametric)问题。最大似然估计(maximum-likelihood estimation, MLE)就是其中一种参数估计方法（还有最小方差无偏估计、贝叶斯估计等方法）<sup>[15]</sup>。

最大似然的意思就是最为相似，即最大的可能性。对于获得的服从i.i.d.的 $n$ 个样本 $\{x_i, y_i\}$ ，我们假定样本服从某种分布，

找到使以下概率最大化（使该样本结果出现的可能性最大）的参数 $\theta$ 就是最大似然估计：

$$\arg \max_{\theta} P(y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_n; \theta)$$

因为样本服从i.i.d.，所以等价于：

$$\arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^n P(y_i | x_i; \theta)$$

连续相乘比较复杂，为了简化计算，我们对优化目标取对数 $\log$ （一般取自然对数 $\ln$ 或者 $\log_2$ ），因为 $\log$ 严格单调递增，并不影响结果：

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^n P(y_i|x_i; \theta) \\
l(\theta) &= \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log P(y_i|x_i; \theta)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

最大化 $L(\theta)$ 和最大化 $l(\theta)$ 是等价的，但是 $l(\theta)$ 是求和计算，简单多了。在逻辑回归二元分类任务中，分类标签 $y \in \{0, 1\}$ ，因此我们可以认为数据服从0-1伯努利分布：

$$y \sim \text{Bernoulli}(1, p)$$

即对于每一个样本的分类标签 $y$ ，为1（正例）的概率 $p$ ，为0（反例）的概率则为 $1 - p$ 。因此：

$$\begin{aligned}
P(y = 1|x; \theta) &= h_\theta(x) \\
P(y = 0|x; \theta) &= 1 - h_\theta(x)
\end{aligned}$$

上面两个公式可以合并成一个公式：

$$P(y|x; \theta) = (h_\theta(x))^y * (1 - h_\theta(x))^{1-y}$$

代入到(4.4)式中，得：

$$\begin{aligned}
l(\theta) &= \sum_{i=1}^n \log(h_\theta(x_i))^{y_i} * (1 - h_\theta(x_i))^{1-y_i} \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i \log h_\theta(x_i) + (1 - y_i) \log(1 - h_\theta(x_i)))
\end{aligned} \tag{4.5}$$

最大化 $l(\theta)$ 相当于最小化 $-l(\theta)$ ，而 $h_\theta(x) = \sigma(\theta^T x) = \hat{y}$ ，因此(4.5)式等价于最小化：

$$-\sum_{i=1}^n (y_i \log \hat{y}_i + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i))$$

最后除以样本的数量 $n$ ，得到平均到每个样本的平均损失使结果更直观：

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i \log \hat{y}_i + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i))$$

对于单个样本（去掉下标）损失函数则是：

$$L(y, \hat{y}) = -(y \log \hat{y} + (1 - y) \log(1 - \hat{y})), \quad y = 0, 1$$

这正是(4.3)式。至此，log loss的由来推导完毕。

## 5. 交叉熵损失(Cross Entropy)

交叉熵来自于KL散度（Kullback-Leibler (KL) divergence，KL散度也叫相对熵），主要用来度量两个分布的差异，交叉熵越小，差异越小，分布越相似。其形式如下：

$$L(y, \hat{y}) = - \sum_{j=1}^m y^j \log \hat{y}^j$$

注意 $y^j$ ,  $\hat{y}^j$ 分别表示在 $m$ 类中第 $j$ 类的真实值和预测值，一个样本只能属于 $m$ 个类别中的一个，也就是说这是一个多分类情况下的公式。如果在把 $n$ 个样本考虑进来则损失函数变为：

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i^j \log \hat{y}_i^j$$

可见，包括从上面第4节log loss的介绍中我们也已经发现，log loss其实是交叉熵损失在二分类情况下的一个特例。

因为只能属于 $m$ 个类别中的1个，也就是真实标签 $y_{ij}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ 只能有一个值为1，其它都是0，因此可以化简为：

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \hat{y}_i^{(j)}$$

其中， $\hat{y}_i^{(j)}$ 表示第 $i$ 个样本真实标签值为1的第 $(j)$ 个分类的预测概率。

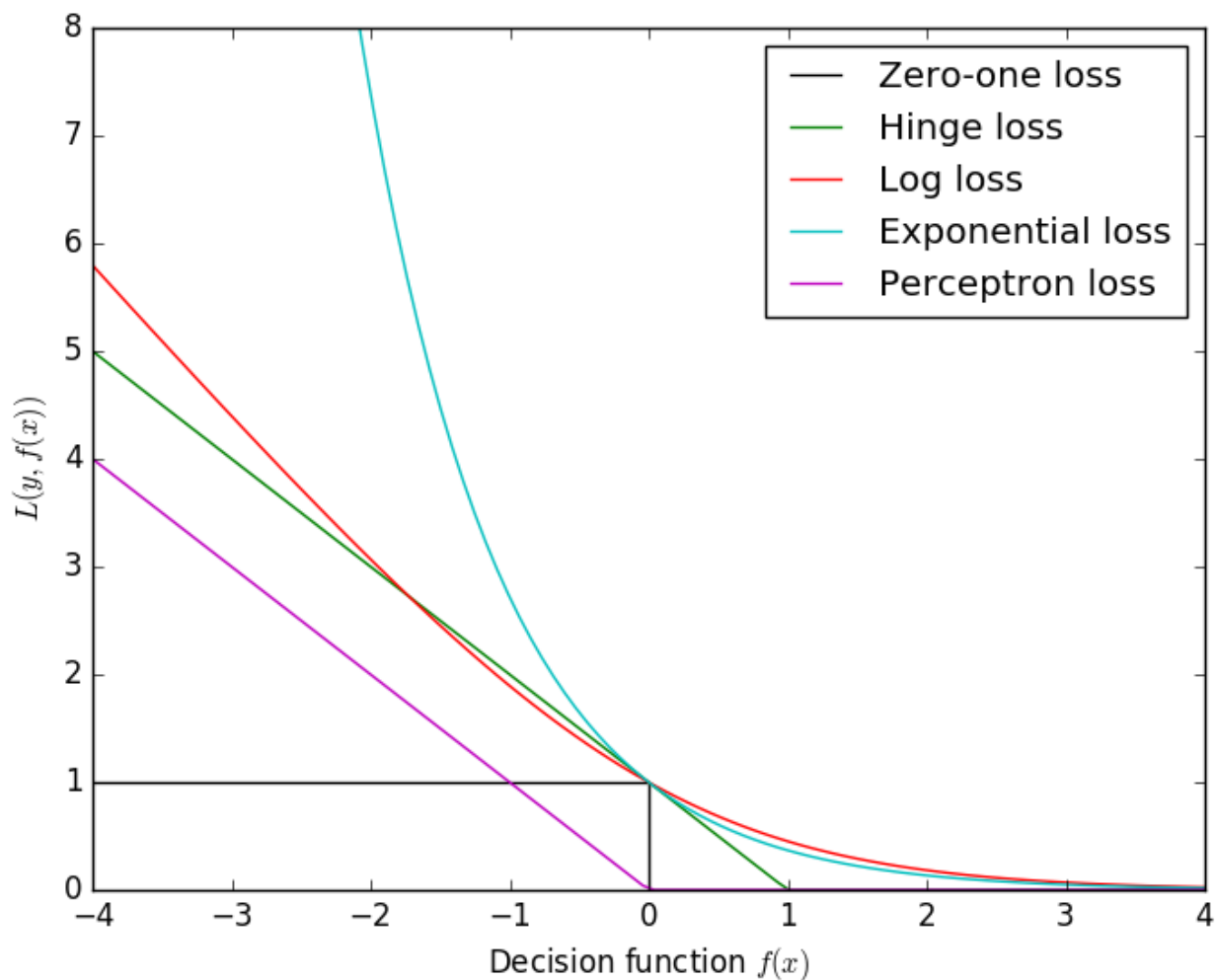
对于多分类问题，深度学习神经网络的最后一层通常会加一层softmax层来计算预测概率：

$$z_i = f(x_i; \theta)$$

$$\hat{y}_i = \text{softmax}(z_i) = \frac{\exp(z_i)}{\sum_{j=1}^m \exp(z_j)}, \quad i = 1, \dots, m$$

因此多分类交叉熵经常和softmax函数结合使用。

以上一些损失函数曲线对比如下图：



回归问题，大多数参考[\[16\]](#)[\[17\]](#)[\[18\]](#)

假设：

真实值：  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

预测值：  $\hat{y} = \{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n\}$

## 1、平方损失（也叫L2损失），或者均方误差MSE(Mean Square Error)

$$L(y, \hat{y}) = \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2$$

其中乘以 $\frac{1}{2}$ 是为了求导时去掉系数。平方损失主要用于均值回归，其函数光滑处处可导，可以用梯度下降法进行优化。然而，当预测值距离真实值越远，平方损失惩罚力度就越大，对异常点很敏感。在训练时，会赋予异常样本更大的权重，以牺牲其它样本的误差为代价，朝着减小异常点误差的方向更新，这样就会降低模型的整体性能。

当用于预测结果评估指标时，则是大家熟悉的MSE指标：

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

范围 $[0, +\infty)$ ，当预测值与真实值完全吻合时等于0，即完美模型；误差越大，该值越大。

## 2、均方根误差RMSE(Root Mean Square Error)

对MSE加个根号运算就是RMSE，这样数量级上比较直观，可以和 $y, \hat{y}$ 值在同一根轴上进行比较。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

同MSE一样，如果实际问题中，如果存在个别偏离程度非常大的离群点（Outlier）时，即使离群点数量非常少，也会让MSE和RMSE指标变得很差。突发事件通常会带来不少离群点。

## 3、绝对损失（也叫L1损失），或者平均绝对误差MAE(Mean Absolute Error)

$$L(y, \hat{y}) = |y - \hat{y}|$$

绝对损失相当于是在做中值回归，相对于平方损失而言，对异常点更鲁棒一些。但是，绝对损失在0点( $y = \hat{y}$ )时不可导，此时无法使用梯度下降算法。更严重的是，绝对损失在非0点的梯度始终相同，即使是很小的损失梯度也很大，这样不利于模型的学习（不过也有解决方法，就是在损失接近0时降低学习率，也就是采用变化的学习率）。而平方损失的梯度随着损失的增大而增大，在损失靠近0时则梯度也会随之减小，这样在训练结束时模型就会收敛到更精确的结果。



如果异常点代表在商业中很重要的异常情况，并且需要被检测出来，则应选用平方损失函数。相反，如果只把异常值当作受损数据，则应选用绝对损失函数。

当用于预测结果评估指标时，则是大家熟悉的MAE指标：

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|$$

MAE对于离群点的处理比RMSE要稳定一点，因为平方相对于绝对值会放大差异。

## 4、平均绝对百分比误差MAPE(Mean Absolute Percentage Error)

$$MAPE = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \right|$$

MAPE把每个点的误差进行了归一化，降低了离群点带来的绝对误差的影响。但是注意当真实值有数据等于0时，存在分母为0公式不能用的问题。

## 5、对称平均绝对百分比误差SMAPE(Symmetric Mean Absolute Percentage Error)

$$SMAPE = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\hat{y}_i - y_i|}{(|\hat{y}_i| + |y_i|)/2}$$

SMAPE也把每个点的误差进行了归一化，也要注意当真实值和预测值都等于0时，存在分母为0公式不能用的问题。

## 6、Huber损失

$$L(y, \hat{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2, & |y - \hat{y}| \leq \delta \\ \delta|y - \hat{y}| - \frac{1}{2}\delta^2, & |y - \hat{y}| > \delta \end{cases}$$

其中 $\delta$ 是大于0的超参数。可见，当绝对误差 $|y - \hat{y}|$ 在 $[-\delta, \delta]$ 之间时，Huber损失等价于平方损失；在 $(-\infty, \delta)$ 或 $(\delta, +\infty)$ 时，等价于绝对损失。因此 $\delta$ 的选择很重要，这决定你如何定义异常点，决定何时

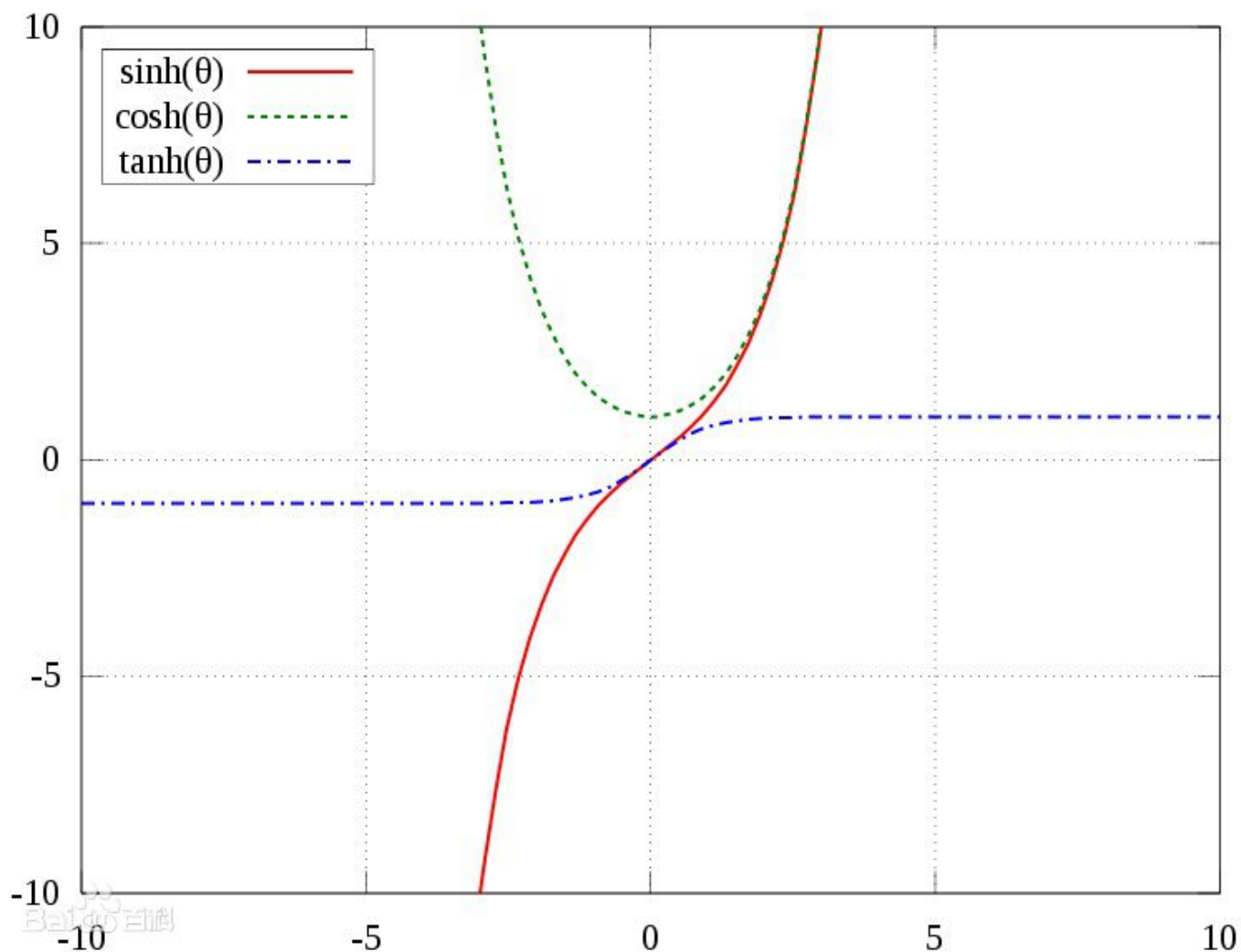
采用绝对损失，何时采用平方损失。

Huber损失结合了平方损失和绝对损失的优点，但是需要不断的实验以确定比较好的超参 $\delta$ 。

## 7、Log-Cosh损失

$$L(y, \hat{y}) = \log(\cosh(y - \hat{y}))$$

cosh是双曲余弦函数。该损失函数二阶可导，且比平方损失更光滑，它也具有Huber损失的所有优点。缺点是当误差很大时，一阶导数和Hessian矩阵会变成定值，会导致XGBoost中出现的缺少分裂点类似的问题。



这里再介绍一下双曲函数 [\[19\]](#)。

双曲正弦:  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

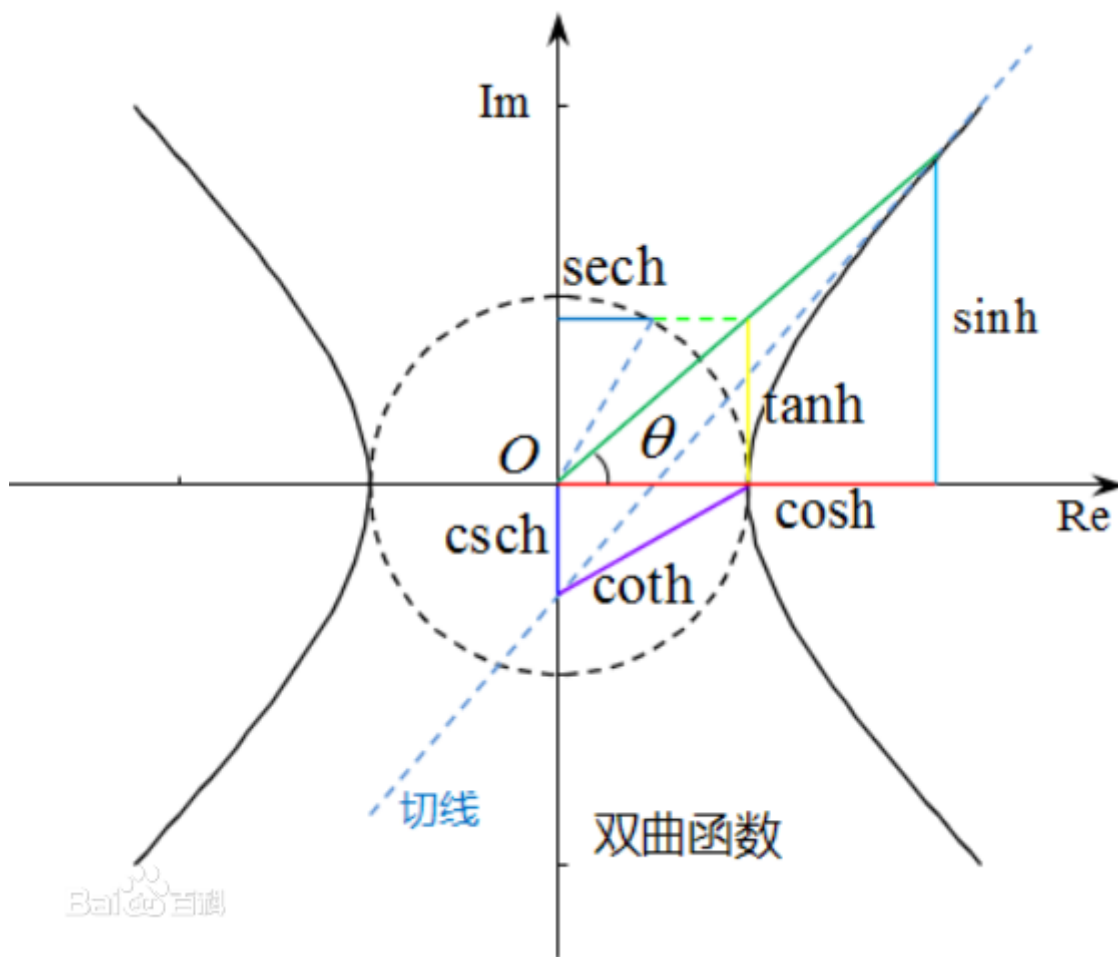
双曲余弦:  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

双曲正切:  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

双曲余切:  $\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\text{双曲正割: } \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{双曲余割: } \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



## 8、分位数损失<sup>[20]</sup>

$$L(y, \hat{y}) = \sum_{i: y_i < \hat{y}_i} (1 - \gamma) |y_i - \hat{y}_i| + \sum_{i: y_i \geq \hat{y}_i} \gamma |y_i - \hat{y}_i|$$

$\gamma \in (0, 1)$  就是所需的超参分位数。 $\gamma$  等于 0.5 时就是绝对误差 MAE。分位数损失用于预测范围，而不是单值。设置多个  $\gamma$  值，得到多个预测模型，然后绘制成图表，即可知道预测范围及对应概率(两个  $\gamma$  值相减)。

## 深度学习激活函数<sup>[21]</sup>

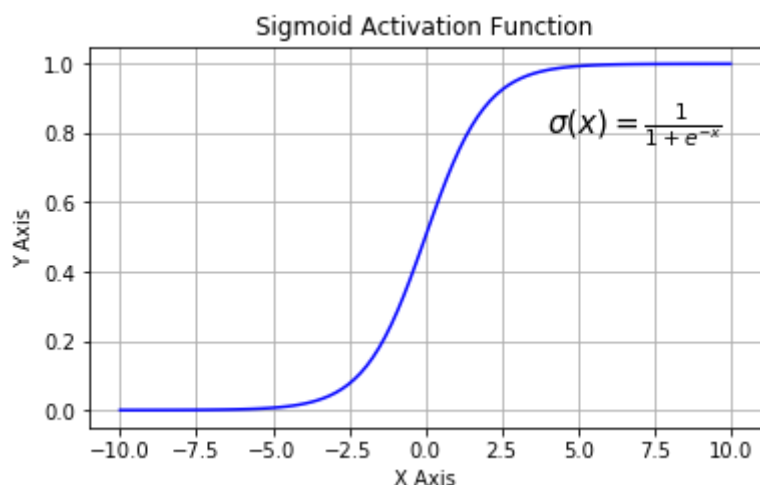
对于深度神经网络，需要在每一层线性变换后叠加一个非线性激活函数，以避免多层神经网络等效于单层线性函数，增加模型的非线性拟合能力，解决真实世界中线性不可分问题。

激活函数也用于将神经网络的输出压缩到特定边界内，对于神经元的输出值 $w^T x + b$ 可能非常大，如果直接传给下一层，又会被放大，从而导致计算复杂消耗算力<sup>[22]</sup>。

## 1、对数几率Sigmoid

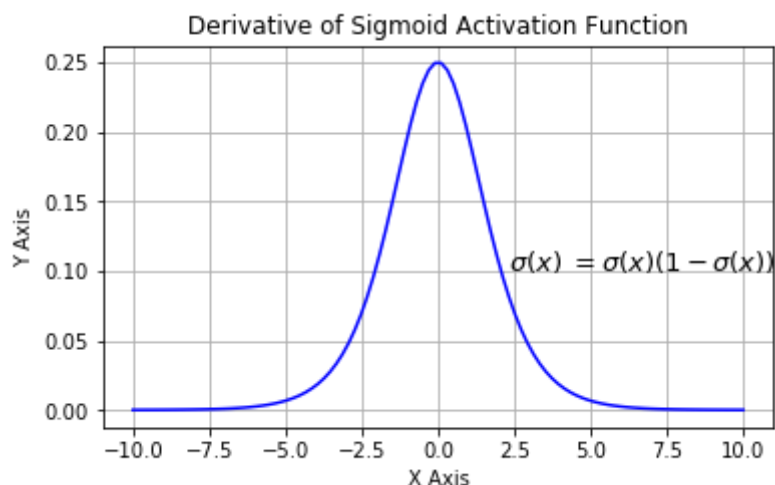
Sigmoid激活函数形式为：

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$



其导数为：

$$f'(z) = f(z)(1 - f(z))$$



Sigmoid主要有如下几个问题：

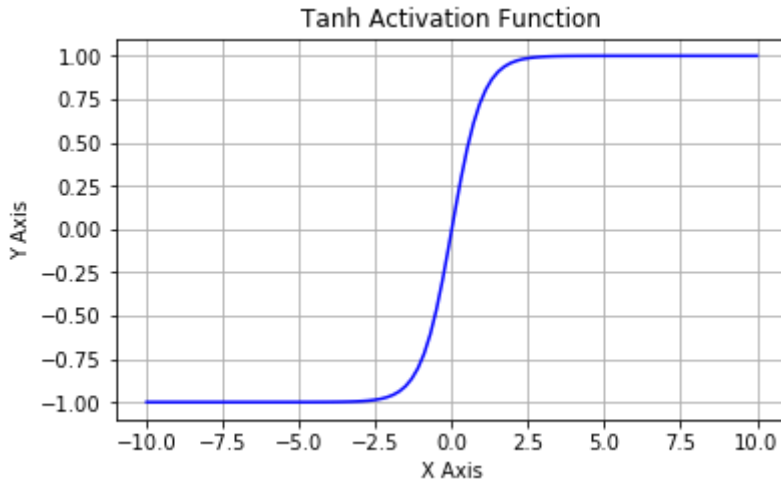
- Sigmoid将输入 $z$ 映射到区间 $(0, 1)$ ，当 $z$ 很大时， $f(z)$ 趋近于1， $z$ 很小时， $f(z)$ 趋近于0，而此时其导数都会趋近于0，从而导致梯度消失的现象：神经元饱和，权重不会更新，与之相连的神经元的权重也更新很慢，反向传播几乎无法执行；
- 不以0为中心（zero-centered）；

- 幂运算 $\exp()$ 函数计算成本比较高。

## 2、双曲正切Tanh

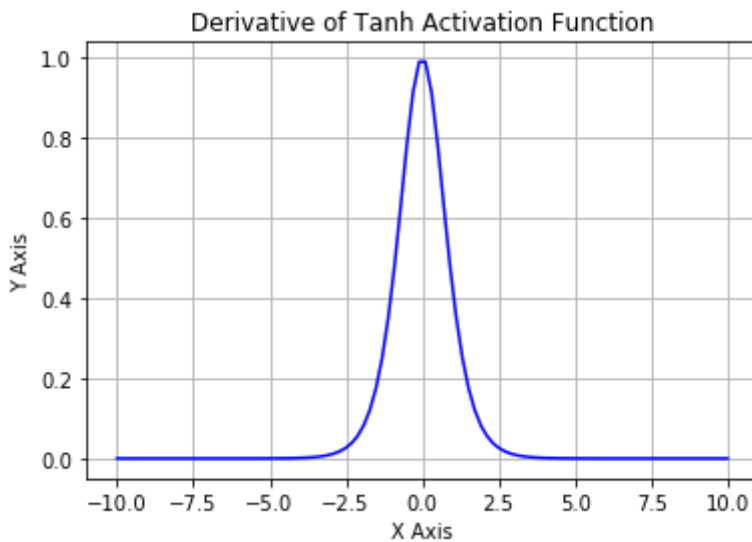
Tanh激活函数形式为：

$$f(z) = \tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$



其导数为：

$$f'(z) = 1 - (f(z))^2$$



可以发现：

$$\tanh(z) = 2\text{sigmoid}(2z) - 1$$

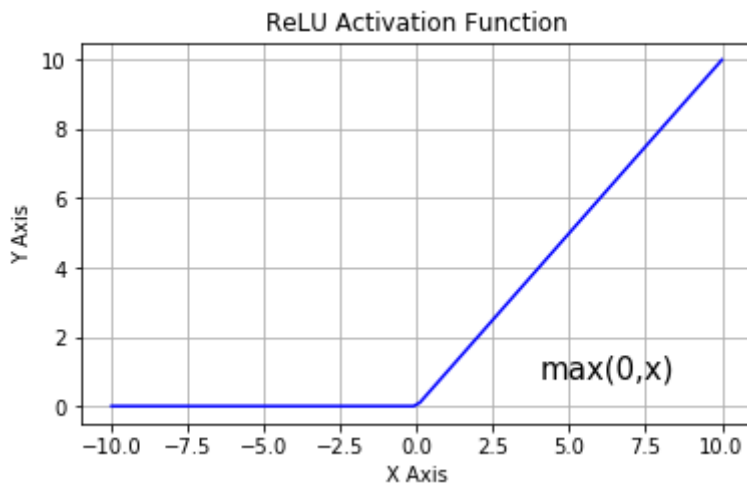
Tanh主要有如下几个问题：

- Tanh将输入 $z$ 映射到区间 $(-1, 1)$ ，当 $z$ 很大时， $f(z)$ 趋近于1， $z$ 很小时， $f(z)$ 趋近于-1，而此时其导数都会趋近于0，也会导致梯度消失的现象；
- 也有幂运算 $\exp()$ ，计算成本比较高。  
但Tanh是zero-centered的，正值输入输出正值，0值输入输出0值，负值输入输出负值，因此实践中Tanh的优先级高于Sigmoid。

### 3、修正线性单元ReLU(Rectified Linear Units)

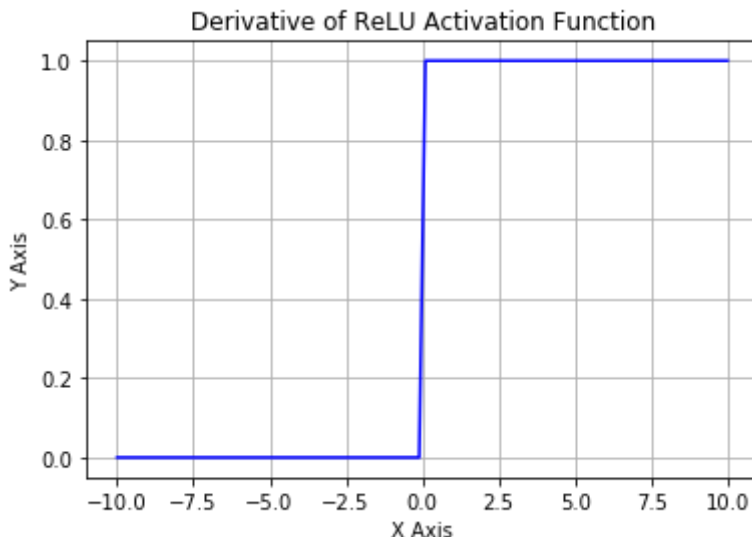
ReLU激活函数形式为：

$$f(z) = \max(0, z)$$



其导数为：

$$f'(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$



ReLU优点：

- 在正数区域其导数为1，因此可以有效对抗梯度消失的问题，提供相对宽的激活边界；另外导数恒为1也可以避免梯度爆炸以及梯度弥散的问题，具体见下文简要分析。
- ReLU的正向计算和反向梯度计算效率都非常高，只需要一个阈值判断；
- ReLU的单侧抑制能力提供了网络的稀疏表达能力<sup>[23]</sup>。

ReLU的缺点：

- 在 $x \leq 0$ 时，负梯度在经过该ReLU单元时被置为0，且在之后也不再被任何数据激活，流经该神经元的梯度永远为0，如果学习率较大，会导致一些神经元不可逆死亡，参数无法更新，网络无法学习；
- 也不以0为中心，non-zero-centered；

## 4、Leaky ReLU(LReLU)及其变种

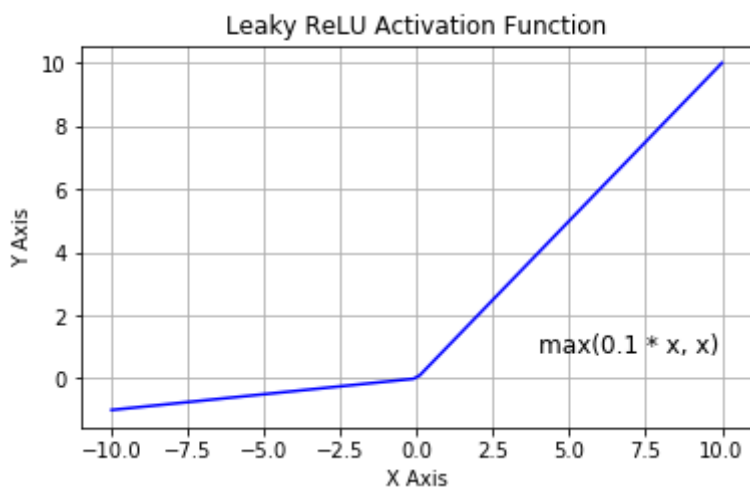
LReLU激活函数形式为：

$$f(z) = \begin{cases} z, & z > 0 \\ \alpha z, & z \leq 0 \end{cases}$$

或者也可以简写成这种形式：

$$f(z) = \max(\alpha z, z)$$

$\alpha = 0.1$ 时其图像：



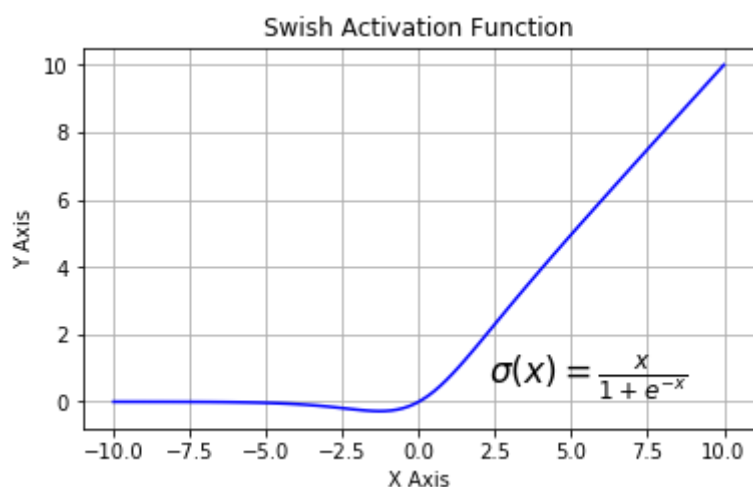
当 $\alpha$ 是事先确的好的固定超参，就是普通的Leaky ReLU；当 $\alpha$ 作为网络中一个可学习的参数时，那就是参数化的LReLU：Parametric ReLU，简称PReLU。还有的把 $\alpha$ 作为一个满足某种分布的随机采样，测试时再固定下来，就成了Random ReLU简称RReLU，RReLU能在一定程度上起到正则化作用。

LReLU及其变种都能在一定程度上解决ReLU在 $z \leq 0$ 时梯度消失神经元死亡的问题，同时仍然保留一定的单侧抑制能力。

## 5、Swish

Swish由谷歌大脑提出，据称效果比ReLU要好<sup>[24][25]</sup>，其函数形式为：

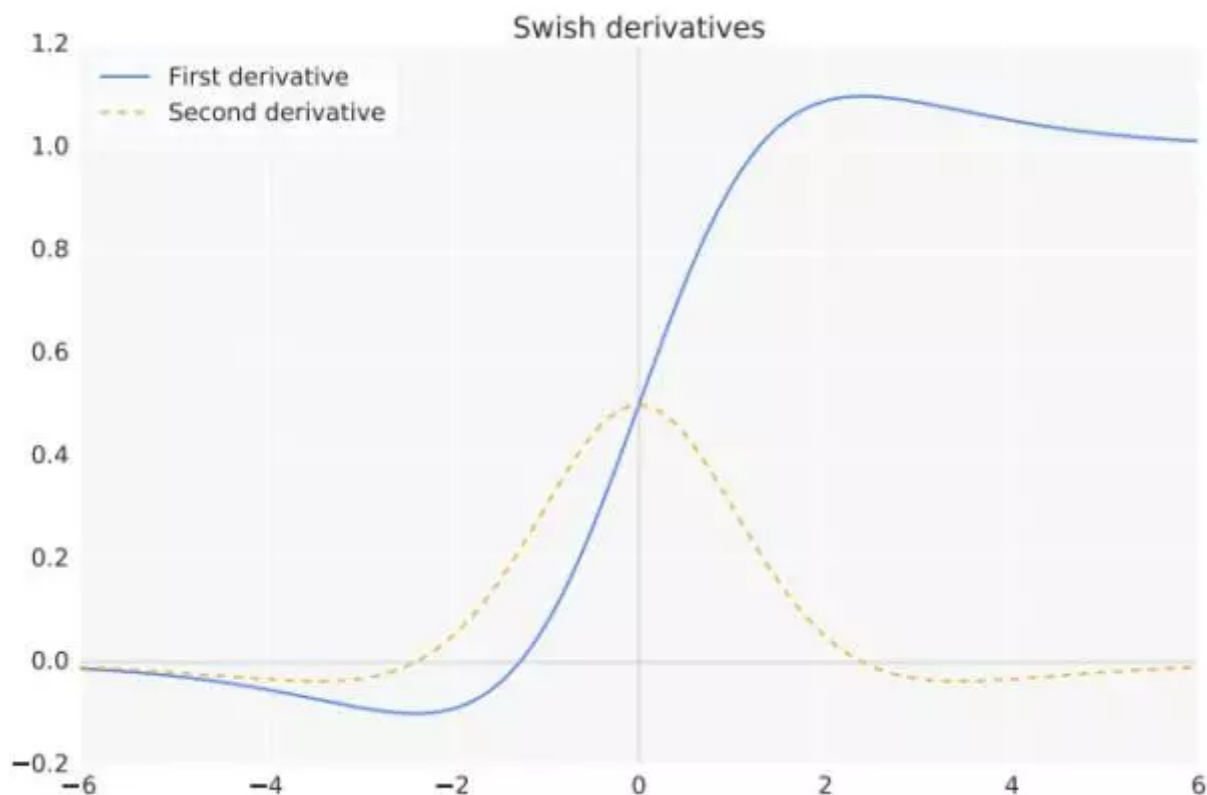
$$f(z) = z \cdot \text{sigmoid}(z) = \frac{z}{1 + e^{-z}}$$



其导数：

$$f'(z) = f(z) + \text{sigmoid}(z)(1 - f(z))$$





## 梯度爆炸与梯度弥散<sup>[26]</sup>

### 原因：

- 梯度爆炸：由于导数的链式法则，连续多层大于1的梯度相乘会使梯度越来越大，最终导致梯度太大的问题；
- 梯度弥散：由于导数的链式法则，连续多层小于1的梯度相乘会使梯度越来越小，最终导致某层梯度为0。

### 影响：

- 梯度爆炸 会使得某层的参数 $w$ 过大，造成网络不稳定，极端情况下，数据数据乘以一个大 $w$ 发生溢出，得到NaN值。
- 梯度弥散 会使得网络前几层的参数不再更新，最终导致模型的性能很差；

### 解决：

- 梯度爆炸：
  - 用梯度截断方法，即当梯度超过一个阈值时，让他变小点
  - 权重正则化方法 (on the difficulty of training rnn, 2013)

- 从rnn -> lstm
- 使用relu激活函数，梯度为1
- 梯度弥散：
  - 采用BN算法
  - 改变激活函数

## 如何判断训练中发生了梯度爆炸和梯度弥散

- 梯度爆炸：
  - 模型不稳定，训练损失显著变化
  - 模型损失变成NAN
  - 梯度快速增大
  - 每个节点的和层的误差梯度都超过1
- 梯度弥散：
  - 前几层的网络参数不更新
  - 梯度很接近0

1. <http://www.csuldw.com/2016/03/26/2016-03-26-loss-function/>, 开头部分 ↩
2. <https://blog.csdn.net/zouxy09/article/details/24971995> ↩
3. 《统计学习方法 第2版》P18, 李航 ↩
4. 《统计学习方法 第2版》P16, 李航 ↩
5. <https://blog.csdn.net/google19890102/article/details/50522945>, 第1部分 ↩
6. 《百面机器学习》P142, 葫芦娃 ↩
7. <http://www.csuldw.com/2016/03/26/2016-03-26-loss-function/>, 第四部分 ↩
8. <https://www.cnblogs.com/hejunlin1992/p/8158933.html> ↩
9. 《百面机器学习》P143, 葫芦娃 ↩ ↩
10. <https://blog.csdn.net/google19890102/article/details/50522945>, 第4部分 ↩
11. <http://www.hongliangjie.com/wp-content/uploads/2011/10/logistic.pdf>, 第3节Logistic Loss ↩
12. <https://blog.csdn.net/walilk/article/details/51107380> ↩
13. <https://blog.csdn.net/google19890102/article/details/50522945>, 第2部分 ↩
14. <https://blog.csdn.net/u012223913/article/details/75112246> ↩
15. 《程序员的数学-概率统计》，第6章 ↩
16. <https://blog.csdn.net/guolindonggld/article/details/87856780> ↩
17. <https://www.jiqizhixin.com/articles/2018-06-21-3> ↩
18. 《百面机器学习》P25, 葫芦娃 ↩
19. <https://baike.baidu.com/item/双曲函数> ↩
20. <https://blog.csdn.net/sjokes/article/details/84504436> ↩
21. 《百面机器学习》P207, 葫芦娃 ↩

22. <https://www.jiqizhixin.com/articles/2017-11-02-26> ↩
23. <https://www.cnblogs.com/neopenx/p/4453161.html> ↩
24. <https://arxiv.org/abs/1710.05941> ↩
25. [https://mp.weixin.qq.com/s?\\_\\_biz=MzA3MzI4MjgzMw==&mid=2650732184&idx=1&sn=7e7ded430f5884d6d099980267fcfb15&chksm=871b32e6b06cbbf07c133e826351bae045858699d72f65474c7cebcb5b2762c3522dfc62ef7&scene=21#wechat\\_redirect](https://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzA3MzI4MjgzMw==&mid=2650732184&idx=1&sn=7e7ded430f5884d6d099980267fcfb15&chksm=871b32e6b06cbbf07c133e826351bae045858699d72f65474c7cebcb5b2762c3522dfc62ef7&scene=21#wechat_redirect) ↩
26. <https://blog.csdn.net/promisejia/article/details/88801307> ↩