

第四章线性方程组复习题

一、填空题：

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则矩阵 A 的秩为_____, 线性方程组 $AX = O$

的基础解系的向量个数为_____.

2. 若 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则非齐次线性方程组 $AX = b$ 有唯一解的充分要条件是.

3. 若 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $AX = O$ 有非零解的充分要条件是_____.

4. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $r(A) = n - 1$, α_1, α_2 是 $AX = 0$ 的两个不同解, 则 α_1, α_2 一定线性_____

6. 在 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 中, 若秩 $R(A) = k$, 且 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 是它的一个基础解系, 则 $r =$ _____.

二、 选择题：

1. 当()时, 齐次线性方程组
$$\begin{cases} kx + z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \end{cases}$$
 仅有零解

(A) $k \neq 0$ (B) $k \neq -1$ (C) $k \neq 2$ (D) $k \neq -2$

2. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $b \neq 0$, 且 $r(A) = n$, 则线性方程组 $Ax = b$ _____.

(A). 有唯一解; (B). 有无穷多解; (C). 无解; (D). 可能无解。

3. 当()时, 齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解

(A) 1 或 2 (B) -1 或 -2 (C) 1 或 -2 (D) -1 或 2

4. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $\text{秩}(A) = n-1$. α_1, α_2 是非齐次方程组 $AX = B$ 的两个不同的解向量, 则 $AX = 0$ 的通解为 ()

A、 $k\alpha_1$

B、 $k\alpha_2$

C、 $k(\alpha_1 - \alpha_2)$

D、 $k(\alpha_1 + \alpha_2)$

6. 若有
$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$
 则 k 等于

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

计算题: (共 60 分)

1. 求
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
 的通解

2. 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$
 的通解.

3. 求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases}$$
 的通解.

4. 求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$
 的通解.

5. 设线性方程组为
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

试问 λ 取何值时，此线性方程组无解，有唯一解，有无穷多解？当其有无穷多解时，用基础解系表示其通解。

6. 问当 k 取何值时， $Ax=b$ 无解、有唯一解或有无穷多解？当有无穷多解时写出

$Ax=b$ 的全部解
$$\begin{cases} 2x_1 + kx_2 - x_3 = 1, \\ kx_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

7. 求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 15x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 5 \end{cases}$$
 的通解, 并求其对应的齐次线性方程组的基础解系。