

### 第三章 向量复习题

一、填空题：

1. 当  $t$  \_\_\_\_\_ 时，向量  $\alpha_1 = (1, 2, -2)^T, \alpha_2 = (4, t, 3)^T, \alpha_3 = (3, -1, 1)^T$  线性无关。
3. 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关，且  $\alpha_{n+1}$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示，则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  的线性 \_\_\_\_\_。
4. 设  $\alpha_1 = (2, 5)^T, \alpha_2 = (1, a)^T$ ，当  $a =$  \_\_\_\_\_ 时， $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关。
5. 一个非零向量是线性 \_\_\_\_\_；的，一个零向量是线性 \_\_\_\_\_。
6. 设向量组 A:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关， $\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3$  线性 \_\_\_\_\_。
7. 设  $A$  为  $n$  阶方阵，且  $r(A) = n - 1$ ， $\alpha_1, \alpha_2$  是  $AX = 0$  的两个不同解，则  $\alpha_1, \alpha_2$  一定线性 \_\_\_\_\_。
8. 向量组  $\beta_1, \dots, \beta_l$  能由向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示的充分必要条件是  $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \underline{\quad} R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ 。（填大于，小于或等于）
9. 设向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 3), \alpha_3 = (1, 3, t)$  线性相关，则  $t$  的值为 \_\_\_\_\_。

二、选择题：

1.  $n$  阶方阵  $A$  的行列式  $|A| = 0$ ，则  $A$  的列向量（ ）  
A. 线性相关 B. 线性无关 C.  $R(A) = 0$  D.  $R(A) \neq 0$
2. 设  $A$  为  $n$  阶方阵， $R(A) = r < n$ ，则  $A$  的行向量中（ ）  
A. 必有  $r$  个行向量线性无关 B. 任意  $r$  个行向量构成极大线性无关组  
C. 任意  $r$  个行向量线性相关 D. 任一行都可由其余  $r$  个行向量线性表示
3. 设有  $n$  维向量组（I）:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  和（II）:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m > r)$ ，则（ ）。  
A. 向量组（I）线性无关时，向量组（II）线性无关

B、向量组(I)线性相关时,向量组(II)线性相关

C、向量组(II)线性相关时,向量组(I)线性相关

D、向量组(II)线性无关时,向量组(I)线性相关

4. 下列命题中正确的是( )

(A) 任意  $n$  个  $n+1$  维向量线性相关 (B) 任意  $n$  个  $n+1$  维向量线性无关

(C) 任意  $n+1$  个  $n$  维向量线性相关 (D) 任意  $n+1$  个  $n$  维向量线性无关

5. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关且秩为  $s$ , 则( )

(A)  $r = s$  (B)  $r \leq s$  (C)  $s \leq r$  (D)  $s < r$

6.  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ( $3 \leq s \leq n$ ) 线性无关的充要条件是( ).

(A)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意两个向量都线性无关

(B)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任一个向量都不能用其余向量线性表示

(C)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中存在一个向量不能用其余向量线性表示

(D)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中不含零向量

7. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关的充要条件是( )

A、任意  $\alpha_i$  不为零向量

B、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任两个向量的对应分量不成比例

C、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中有部分向量线性无关

D、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任一向量均不能由其余  $n-1$  个向量线性表示

8. 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $R(A) = r < n$ , 则  $A$  的行向量中( )

A、必有  $r$  个行向量线性无关

B、任意  $r$  个行向量构成极大线性无关组

C、任意  $r$  个行向量线性相关

D、任一行都可由其余  $r$  个行向量线性表示

9. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $R(A) = n-1$ .  $\alpha_1, \alpha_2$  是非齐次方程组  $AX = B$  的两个不同的解

向量, 则  $AX = 0$  的通解为( )

- A、  $k\alpha_1$       B、  $k\alpha_2$       C、  $k(\alpha_1 - \alpha_2)$       D、  $k(\alpha_1 + \alpha_2)$

10. 已知向量组  $\alpha_1 = (1, 1, -1, 1), \alpha_2 = (2, 0, t, 0), \alpha_3 = (0, -2, 5, -2)$  的秩为 2, 则  $t = ( )$ .

- A、 3      B、 -3      C、 2      D、 -2

11. 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $R(A) = r < n$ , 则  $A$  的行向量中( )

- A、 必有  $r$  个行向量线性无关  
B、 任意  $r$  个行向量构成极大线性无关组  
C、 任意  $r$  个行向量线性相关  
D、 任一行都可由其余  $r$  个行向量线性表示

12. 设向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性无关的是( )

- A、  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3, 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$   
B、  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$   
C、  $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$   
D、  $-\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

14. 已知向量组  $A$  线性相关, 则在这个向量组中( )

- (A) 必有一个零向量 .  
(B) 必有两个向量成比例 .  
(C) 必有一个向量是其余向量的线性组合 .  
(D) 任一个向量是其余向量的线性组合 .

15. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且秩  $R(A) = n - 1$ ,  $a_1, a_2$  是非齐次方程组  $Ax = b$  的两个不同的解向量, 则  $Ax = 0$  的通解为 ( )

- (A)  $k(a_1 + a_2)$       (B)  $k(a_1 - a_2)$       (C)  $ka_1$       (D)  $ka_2$

16. 已知向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则( )

- (A) 该向量组的任何部分组必线性相关 .  
(B) 该向量组的任何部分组必线性无关 .  
(C) 该向量组的秩小于  $m$  .  
(D) 该向量组的最大线性无关组是唯一的.

17. 已知  $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ ,  $R(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$ , 则 ( )

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关      (B)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关  
(C)  $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表示      (D)  $\alpha_4$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示

18. 若有  $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ , 则  $k$  等于

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4

### 第三题 计算题:

1. 已知向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  的秩以及它的一个极大线性无关组;

(2) 将其余的向量用所求的极大线性无关组线性表示。

2. 求向量组  $A$ :  $\alpha_1 = (-2, 6, 2, 0)^T, \alpha_2 = (1, -2, -1, 0)^T, \alpha_3 = (-2, -4, 0, 2)^T, \alpha_4 = (0, 10, 2, -2)^T$ , 的一个极大无关组, 并将其余向量由它线性表示.

3. 设  $\alpha_1 = (1, 4, 3)^T, \alpha_2 = (2, a, -1)^T, \alpha_3 = (-2, 3, 1)^T$

1)  $a$  为何值时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

2)  $a$  为何值时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关.

4. 求向量组  $A: \alpha_1 = (1, 2, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, -3, 1, -2)^T, \alpha_3 = (4, 1, -1, 0)^T$  的极大无关

组，并把其余向量用极大无关组线性表示。

5. 已知  $\alpha_1 = (1, 4, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 7, 3)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, a)^T$ ,  $\beta = (3, 10, 4)^T$ , 问  $a$  为何值时,  $\beta$  可

由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  唯一线性表示? 并写出表示式

7. 求向量组  $A$ :  $\alpha_1 = (1, -1, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 3, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 5, 4)^T$ ,  $\alpha_4 = (1, -2, 2)^T$ ,

$\alpha_5 = (2, -3, 4)^T$  的一个极大无关组, 并将其余向量由它线性表示。

8. 试求向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 2, 1, 5)^T$ ,  $\alpha_3 = (2, 0, 3, -1)^T$ ,  $\alpha_4 = (1, 1, 0, 4)^T$  的秩和该向量组的一个最大无关组, 并将其他向量用此最大无关组表示。

#### 四、证明题: (10 分)

1. 设向量组  $A$ :  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 求证:  $\alpha_1 + 2\alpha_2$ ,  $2\alpha_2 - 3\alpha_3$ ,  $3\alpha_3 + \alpha_1$  线性无关。

2. 已知向量组  $a_1, a_2, a_3$  线性无关,  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_3$  线性无关。

.

3. 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 而  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ ,  
 $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ , 试证:  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关。

,