线性代数 Cheat Sheet

By Kun Liu

行列式计算

1. 二阶行列式 $\det(A)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$
2. n 阶行列式 $\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 $1,2\cdots n$ 的排列，t 是这个排列的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是对所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.
3. $\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}...+a_{in}C_{in}$ 选择零最多的行，按第 i 列展开. $\det(A)=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}...+a_{nj}C_{nj}$ 选择零最多的列，按第 j 列展开.
4. $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 是删除第 i 行第 j 列的矩阵，选择零元素最多的矩阵以便于计算.
5. $\det(A^T)=\det(A),\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$
6. $\det(AB)=\det(A)\det(B),\det(kA)=k^n\det(A)$
7. A 可逆当且仅当 $\det(A)\neq 0$.
8. 三角矩阵或对角矩阵的对角线元素的乘积就是其对角线元素的乘积.
9. 解线性方程组的解:$Ax=b(b\neq\mathbf{0}),x=x_h+x_p,x_h$ 是齐次方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的通解，x_p 是该非齐次方程组的一个特解.
   (i) 若系数行列式 $\det(A)\neq\mathbf{0}$，那么它有唯一解，$x=\frac{\det(A_i)}{\det(A)}$,$\det(A_i)$ 是把方程组第 i 行由右边自由项 b 替代成的到的 n 阶行列式.
   (ii) 若 $\det(A)=\mathbf{0}$，方程组无解或有两个不同的解，特殊的 $b=0,\det(A)\neq 0$，其次方程组只有唯一 $\mathbf{0}$ 解，反之若齐次线性方程组有非零解，其系数行列式必等于 $\mathbf{0}$.

逆矩阵，矩阵乘法运算

1. 矩阵乘法 $\underset{(m\times p)}{C}=\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times p)}{B}$，有 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$，
$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}$$
2. $m\times n$ 矩阵和第 i 行 j 列元素，记做 $A_{m\times n}$,A,(a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$.
3. $A+B=B+A,\quad (A+B)+C=A+(B+C)$, $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A,\quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$, $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$, $(AB)C=A(BC),\quad A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AB+AC,AB$不一定等于BA.
4. $AB=O$,A 与 B 可以不都为零矩阵 O.
5. 矩阵的转置满足: $(A^T)^T=A,(kA)^T=k(A)^T$, $(A+B)^T=A^T+B^T,(AB)^T=B^TA^T$，若方阵满足 $A^T=A$，则 A 为对称阵，即 $a_{ij}=a_{ji}$.
6. 矩阵的迹 $tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},tr(A^T)=tr(A),tr(AB)=tr(BA)$,.
7. 方阵的幂 A^k 和方阵 A 的 m 次多项式 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$ 满足: $A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl},\varphi(A)f(A)=f(A)\varphi(A)$.
8. 方阵的行列式满足: $|A^T|=|A|,|\lambda A_n|=\lambda^n|A_n|,|AB|=|A||B|$
9. 单位阵 E 主对角线元素均为 1，其余元素全为 0.
10. 逆矩阵: 方阵 A 和 B 满足 $AB=BA=E$，记 $B=A^{-1}$. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow|A|\neq 0\Leftrightarrow$ 存在方阵 B, $AB=E$, 或 $BA=E$;
    若 A 可逆,$(A^{-1})^{-1}=A$;
    若 A^T 可逆,$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$;
    若 $k\neq 0,(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$;
    若 A,B 可逆,$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

伴随矩阵，克拉姆法则

1. 方阵 A 的伴随矩阵定义 $A^*=(C_{ij})^T$，$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，即代数余子式 C 的转置，M_{ij} 是行列式 $|A|$ 中划去第 i，第 j 列的余子式.
2. $AA^*=A^*A=|A|E$，若 $|A|\neq 0$，则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,A^*=|A|A^{-1}$. $(A^T)^*=(A^*)^T$. $|A^*|=|A|^{n-1}(n$ 是方阵的阶数)
3. 克拉姆法则的矩阵语言: 方阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$，则方程 $Ax=b$ 有唯一解 $x=\frac{1}{|A|}A^*b$，即 $x=A^{-1}b$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

初等矩阵变换，秩

1. 初等行变换 $(r_i\leftrightarrow r_j,r_i\times k,r_i+kr_j)$，矩阵 A 与 B 行等价，记 $A\overset{r}{\sim}B$; 初等列变换 $(c_i\leftrightarrow c_j,c_i\times k,c_i+kc_j)$，矩阵 A 与矩阵 B 列等价，记 $A\overset{c}{\sim}B$，矩阵 A 与 B 等价，记为 $A\sim B$.
2. $A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P，使得 $PA=B$;
   $A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 Q，使得 $AQ=B$.
3. 初等矩阵 A 可逆,$A^{-1}=E_kE_{k-1}\dots E_2E_1$，求矩阵逆的方法 $(A|E)\to(E|A^{-1})$
4. 若 $(A,E)\overset{r}{\sim}(B,P)$，则 P 可逆，且 $PA=B$
   若 $(A,E)\overset{r}{\sim}(E,P)$，则 P 可逆，且 $P=A^{-1}$
   若 $(A,B)\overset{r}{\sim}(E,X)$，则 P 可逆，且 $X=A^{-1}B$
5. 矩阵 A 的秩 $R(A)$: 矩阵 A 中最高阶非零子式的阶数,$R(A)=r\Leftrightarrow A$ 的行最简阶梯形含 r 个非零行 $\Leftrightarrow A$ 的标准形 $F=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$.
6. $0\leqslant R(A_{m\times n})\leqslant min\{m,n\};R(A^T)=R(A)$;
   $A\sim B\Rightarrow R(A)=R(B);P,Q$可逆 $\Rightarrow R(PAQ)=R(A);max\{R(A),R(B)\}\leqslant R(A,B)\leqslant R(A)+R(B);R(A+B\leqslant R(A)+R(B))$;
   $R(AB)\leqslant min\{R(A),R(B)\}$.

线性方程组解的情况

1. n 元线性方程组 $Ax=b$ 的解:
   无解的充要条件是 $R(A)<R(A,b)$;
   有唯一解的充要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$;
   有无穷多解的充要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.
2. n 元齐次线性方程 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充要条件 $R(A)<n$.
3. 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是 $R(A)=R(A,B)$.
4. 非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

把增广矩阵化为行最简行矩阵: $(A \quad b)=$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

根据最简行矩阵得到同解方程组:

$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

把 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 作为自由未知, 依次等于 $c_1,\cdots,c_{n-r}$ 可得通解:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_{n-r}\begin{bmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

上式可以记做:$x=c_1\xi_1+c_1\xi_1+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$, 故 $R(\xi_1,\cdots,\xi_{n-r})=n-r,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程组的基础解系.

特征值和特征向量

1. n 阶矩阵 A, 数 λ 和非零列向量 x 满足 $Ax=\lambda x$, 则 λ 为特征值,x 为对应的特征向量,$|A-\lambda I|$ 为特征矩阵.
2. $|A-\lambda I|=(-1)^n|A-\lambda I|$
3. 求 n 阶方阵 A 的特征值和特征向量步骤:
   (i) 求解特征方程 $|A-\lambda I|=0$, 其根就是方阵 A 的特征值.
   (ii) 解齐次方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 的全部非零解对应的特征值 λ 的全部特征向量.

线性相关性

1. 线性无关: 若 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=0$ 时, 只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时成立, 则向量组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 线性无关.
2. 线性相关: 若 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=0$ 时, 若 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 有非零解, 则向量组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 线性相关.
3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关, 则由向量组组合的行列式 $|(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)|=0$
4. 若向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=0$(即 $Ax=0$) 有非零解 $\Leftrightarrow R(a_1,a_2,\cdots,a_m)<m$
5. 线性表示和线性组合:
   (i) 向量 b 能被向量 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示
   $\Leftrightarrow x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=0$(即 $Ax=b$) 有解
   $\Leftrightarrow R(a_1,a_2,\cdots,a_m)=R(a_1,a_2,\cdots,a_m,b)$
   (ii) 向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_l$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性表示
   $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(a_1,\cdots,a_m)X=(b_1,\cdots,b_l)$ 有解
   $\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $K_{m\times l}$, 使得 $B=AK$
   $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)\Leftrightarrow R(B)\leqslant R(A)$.
6. 向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$

相似矩阵, 矩阵对角化

1. 若 P 是可逆矩阵,A,B 是 n 阶方阵, 有 $B=P^{-1}AP$, 则称方阵 B 相似于方阵 A,A 相似于 B.
2. 若 n 阶方阵 $A\sim B\Leftrightarrow tr(A)=tr(B)\Leftrightarrow|A|=|B|\Leftrightarrow R(A)=R(B)\Leftrightarrow\lambda_A=\lambda_B\Leftrightarrow R(A-\lambda I)=R(B-\lambda I)$
3. 若 $A\sim B$, 则 $A^{-1}\sim B^{-1},f(A^{-1})\sim f(B^{-1}),A^*\sim B^*,A^T\sim B^T$
4. 方阵 A 相似于对角阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$ 则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.
5. 若方阵 A 可与对角阵相似, 则称方阵 A 可对角化.
6. n 阶方阵可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量
   $\Leftrightarrow$ 如果 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 则矩阵 A 可对角化.
7. 求可逆矩阵 P, 是的方阵 A 对角化, 即 $P^{-1}AP=\Lambda$, 计算步骤:
   (i) 求 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;
   (ii) 求对应特征值的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 用求特征值和特征向量的方法;
   (iii) 令 $P=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$, 则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

8. 求对角阵 A 的 k 次幂 A^k 及 $f(A)$

$$P^{-1}A^kP=\Lambda^k, A^k=P\Lambda^kP^{-1}=P\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$P^{-1}f(A)P=f(\Lambda),$$

$$f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}=P\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{bmatrix}P^{-1}$$