第四章线性方程组复习题

一、填空题：

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩为______2,，线性方程组 $AX=O$ 的基础解系的向量个数为_____2.

2. 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组 $AX=b$ 有唯一解的充分要条件是 $\underline{r(A)=r(A,b)=n}$.

3. 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充分要条件是 _$\underline{r(A)<n}$_.

4. 设 A 为 n 阶方阵，且 $r(A)=n-1$， α_1,α_2 是 AX=0 的两个不同解，则 α_1，α_2 一定线性_______相关

6. 在 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 中，若秩 $R(A)=k$, 且 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是它的一个基础解系，则 $r=$ ___$n-k$ 。

二、 选择题：

1. 当（ C ）时，齐次线性方程组 $\begin{cases} kx+z=0 \\ 2x+ky+z=0 \\ kx-2y+z=0 \end{cases}$，仅有零解

   (A) $k\neq 0$ (B) $k\neq -1$ (C) $k\neq 2$ (D) $k\neq -2$

2. . 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $b\neq 0$, 且 $r(A)=n$, 则线性方程组 $Ax=b$ ___C.

(A). 有唯一解；(B). 有无穷多解； (C). 无解； (D). 可能无解。

3．当（C　）时，齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$，有非零解

（A）1 或 2　　（B）－1 或－2　　（C）1 或－2　　（D）－1 或 2

4. 设A为n阶方阵，且秩$(A)=n-1.\alpha_1,\alpha_2$是非齐次方程组$AX=B$的两个不同的解向量, 则$AX=0$的通解为（　C　）

A、$k\alpha_1$　　B、$k\alpha_2$　　C、$k(\alpha_1-\alpha_2)$　　D、$k(\alpha_1+\alpha_2)$

6.　若有 $\begin{pmatrix}k&1&1\\3&0&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\k\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\6\\5\end{pmatrix}$，则 k 等于

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

计算题：（共 60 分）

1．求 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$ 的通解

解　$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{再}r_2/(-4)]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故有同解方程组$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4\\ x_3=0\end{cases}$，于是通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k_1 + k_2 \\ k_1 \\ 0 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2,$$

其中 k_1, k_2 为任意实数.

2. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$ 的通解.

解：对该齐次线性方程组的增广矩阵作行初等变换有：

$$A = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

即 $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = \dfrac{7}{2}x_3 - 2x_4 + 2 \end{cases}$,

取 x_3，x_4 为 0，可得方程组的一个特解 $\xi = (1,2,0,0)$

取 x_3，x_4 为自由未知量，可得对应齐次方程组的一个基础解系：

$\eta_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0)$，$\eta_2 = (-1, -2, 0, 1)$

故方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$，其中 k_1, k_2 为任意常数

3. 求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases}$的通解.

解：对该齐次线性方程组的增广矩阵作行初等变换有：

$$A = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -14 & 8 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

即$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - x_4 + 3 \\ x_2 = \dfrac{7}{2}x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases}$，

取 x_3，x_4 为 0，可得方程组的一个特解 $\xi = (1,2,0,0)$

取 x_3，x_4 为自由未知量，可得对应齐次方程组的一个基础解系：

$\eta_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0)$，$\eta_2 = (-1, -2, 0, 1)$

故方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

，其中 k_1, k_2 为任意常数

4. 求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$的通解.

解：对该齐次线性方程组的增广矩阵作行初等变换有：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1&\vdots 0\\1&1&-2&3&\vdots 2\\3&-1&8&1&\vdots 2\\1&3&-9&7&\vdots 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-1&\vdots 0\\0&2&-7&4&\vdots 2\\0&2&-7&4&\vdots 2\\0&4&-14&8&\vdots 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1&\vdots 1\\0&1&-\frac{7}{2}&2&\vdots 1\\0&0&0&0&\vdots 0\\0&0&0&0&\vdots 0\end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{2}x_3-x_4+1\\x_2=\dfrac{7}{2}x_3-2x_4+1\end{cases}$，

取 x_3，x_4 为 0，可得方程组的一个特解 $\xi=(2,1,0,0)$

取 x_3，x_4 为自由未知量，可得对应齐次方程组的一个基础解系：

$\eta_1=(-\frac{3}{2},\frac{7}{2},1,0)$，$\eta_2=(-1,-2,0,1)$

故方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{7}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$，其中 k_1,k_2 为任意常数

5. 设线性方程组为 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$

试问 λ 取何值时，此线性方程组无解，有唯一解，有无穷多解？当其有无穷多解时，用基础解系表示其通解。

解： **设** $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\neq 0$

$\Rightarrow \lambda\neq 1$ **且** $\lambda\neq -2$ **时，方程组有唯一解，**

（2）当$\lambda=-2$时，$\left(\bar{A}\right)=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta\right)$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

因为$r(A)=2, r(\bar{A})=3$,所以方程组无解。

（3）当$\lambda=1$时，$\left(\bar{A}\right)=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta\right)$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为$r(A)=r(\bar{A})=1<3$,所以方程有无穷多解，其基础解系为：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

通解为$X=c_1\eta_1+c_2\eta_2=\begin{pmatrix}-c_1-c_2\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}$

7、问当k取何值时，$Ax=b$无解、有唯一解或有无穷多解？当有无穷多解时写出$Ax=b$的全部解$\begin{cases}2x_1+kx_2-x_3=1,\\ kx_1-x_2+x_3=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1.\end{cases}$

6. 解 1　　作方程组的增广矩阵（A⋮b），并对它施以初等变换：

$$\left(\bar{A}\right)=\left(A\mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & k & -1 & 1\\ k & -1 & 1 & 2\\ 4 & 5 & -5 & -1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & k & -1 & 1\\ k+2 & k-1 & 0 & 3\\ -6 & 5-5k & 0 & -6\end{array}\right)\xrightarrow[\text{再}-r_3]{r_3-5r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & k & -1 & 1\\ k+2 & k-1 & 0 & 3\\ 5k+4 & 0 & 0 & 21\end{array}\right)$$

于是，　当$k=-\frac{4}{5}$时，原方程组无解；

当$k\neq 1,k\neq -\frac{4}{5}$时，原方程组有唯一解；

当$k=1$时，原方程组有无穷多组解，其全部解为$x_1=1,x_2=-1+k,x_3=k$（其中k为任意常数），（或$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T=k\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T$（$k$为任意常数）.

解 2

$$D=\begin{vmatrix}2 & k & -1\\ k & -1 & 1\\ 4 & 5 & -5\end{vmatrix}\underline{\underline{c_2+c_3}}\begin{vmatrix}2 & k-1 & -1\\ k & 0 & 1\\ 4 & 0 & -5\end{vmatrix}=-(k-1)\begin{vmatrix}k & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-(k-1)(-5k-4)=(k-1)(5k+4),$$

当$k\neq 1,k\neq -\frac{4}{5}$时，方程组有唯一解.

当$k=1$时，原方程组为$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\ x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$；

$$(\overline{A})=(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 4 & 5 & -5 & -1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 4 & 5 & -5 & -1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 9 & -9 & -9\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{再}r_3-9r_2]{r_2/3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$，同解方程组为$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-1+k\\ x_3=k\end{cases}$，即

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T=k\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T \text{（}k\text{为任意常数）.}$$

当$k=-\frac{4}{5}$时，原方程组为$\begin{cases}2x_1-\frac{4}{5}x_2-x_3=1\\ -\frac{4}{5}x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$，即$\begin{cases}10x_1-4x_2-5x_3=5\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-10\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$，这时第二个第三个方程左边相同，而右边不等，故方程组无解.

9. 求非齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+5x_2+x_3+15x_4=7\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\ x_1+3x_2+2x_3+11x_4=5\end{cases}$的通解, 并求其对应的齐次线性方程组的基础解系。

解:

对方程组的增广矩阵 B 施行初等行变换，将其化为行最简形，

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 15 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 11 & 5 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_2-2r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1-2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 R(A)=R(B)=2<4,故方程组有无穷多解。
得与同解方程组原方程组同解的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = 7x_3 + 10x_4 - 4 \\ x_2 = -3x_3 - 7x_4 + 3 \end{cases}$$

选 x_3， x_4 为自由未知量，令 $x_3=c_1$,， $x_4=c_2$,得原方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7c_1+10c_2-4 \\ -3c_1-7c_2+3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

亦可知对应的齐次方程组的基础解系为 $\xi_1=(7,-3,1,0)^T$ ， $\xi_2=(10,-7,0,1)^T$,