第三章 向量复习题

一、填空题：

1. 当 t ____$\underline{t \neq -3}$时，向量 $\alpha_1 = (1,2,-2)^T, \alpha_2 = (4,t,3)^T, \alpha_3 = (3,-1,1)^T$ 线性无关.

3. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，且 α_{n+1} 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，则

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ _的线性____________无关

4. 设 $\alpha_1 = (2,5)^T$ ，$\alpha_2 = (1，a)^T$，当 $a =$ ________时，α_1, α_2 线性相关.

5. 一个非零向量是线性__________无关; 的，一个零向量是线性__________相关的.

6. 设向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1 + \alpha_3$，$\alpha_2 - \alpha_1$，$\alpha_2 + \alpha_3$ 线性______相关

7. 设 A 为 n 阶方阵，且 $r(A) = n-1$， α_1, α_2 是 AX=0 的两个不同解，则 α_1，α_2 一定线性________相关

8. 向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_l$ 能由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表示的充分必要条件是

$R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m)$ ___等于_ $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l)$。（填大于，小于或等于）

9. 设向量组 $\alpha_1 = (1,1,1)$ ，$\alpha_2 = (1,2,3)$ ，$\alpha_3 = (1,3,t)$ 线性相关，则 t 的值为 $t = 5$。

二、选择题：

1.．n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 0$，则 A 的列向量（ A ）

A．线性相关　B．线性无关　C．$R(A) = 0$　D．$R(A) \neq 0$

2. 设 A 为 n 阶方阵，$R(A) = r < n$，则 A 的行向量中（A ）

A、必有 r 个行向量线性无关　B、任意 r 个行向量构成极大线性无关组
C、任意 r 个行向量线性相关　D、任一行都可由其余 r 个行向量线性表示

3. 设有 n 维向量组（Ⅰ）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 和（Ⅱ）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ $(m > r)$，则（ B ）.

A、向量组（Ⅰ）线性无关时，向量组（Ⅱ）线性无关

B、向量组（Ⅰ）线性相关时，向量组（Ⅱ）线性相关

C、向量组（Ⅱ）线性相关时，向量组（Ⅰ）线性相关

D、向量组（Ⅱ）线性无关时，向量组（Ⅰ）线性相关

4. 下列命题中正确的是(C)

(A)任意n个$n+1$维向量线性相关　　(B)任意n个$n+1$维向量线性无关

(C)任意$n+1$个n 维向量线性相关　　(D)任意$n+1$个n维向量线性无关

5. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关且秩为$s$，则(D)

（A）$r=s$　　(B) $r\le s$　　(C) $s\le r$　　(D) $s<r$

6. n维向量组 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s(3≤ s≤ n）线性无关的充要条件是（ B ）.

(A）α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s中任意两个向量都线性无关

(B) α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s中任一个向量都不能用其余向量线性表示

(C) α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s中存在一个向量不能用其余向量线性表示

(D) α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s中不含零向量

7. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是（D ）

A、任意α_i不为零向量

B、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中任两个向量的对应分量不成比例

C、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中有部分向量线性无关

D、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中任一向量均不能由其余 n-1 个向量线性表示

8. 设A为n阶方阵，$R(A)=r<n$，则A的行向量中（A ）

A、必有r个行向量线性无关

B、任意r个行向量构成极大线性无关组

C、任意r个行向量线性相关

D、任一行都可由其余r个行向量线性表示

9. 设A为n阶方阵，且秩$(A)=n-1.\alpha_1,\alpha_2$是非齐次方程组$AX=B$的两个不同的解

向量, 则 $AX=0$ 的通解为（ C ）

A、$k\alpha_1$　　B、$k\alpha_2$　　C、$k(\alpha_1-\alpha_2)$　　D、$k(\alpha_1+\alpha_2)$

10. 已知向量组 $\alpha_1=(1,1,-1,1),\alpha_2=(2,0,t,0),\alpha_3=(0,-2,5,-2)$ 的秩为 2，则 $t=$（ A）.

A、3　　B、-3　　C、2　　D、-2

11. 设 A 为 n 阶方阵， $R(A)=r<n$，则 A 的行向量中（ A ）

A、必有 r 个行向量线性无关
B、任意 r 个行向量构成极大线性无关组
C、任意 r 个行向量线性相关
D、任一行都可由其余 r 个行向量线性表示

12. 设向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性无关的是（C ）

A、$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$， $2\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3$， $3\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$

B、$\alpha_1+\alpha_2$， $\alpha_2+\alpha_3$， $\alpha_3-\alpha_1$

C、$\alpha_1+2\alpha_2$， $2\alpha_2+3\alpha_3$， $3\alpha_3+\alpha_1$

D、$-\alpha_1+\alpha_2$， $\alpha_2+\alpha_3$， $-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

14. 已知向量组 A 线性相关，则在这个向量组中（ C ）
(A)必有一个零向量 .
(B)必有两个向量成比例 .
(C)必有一个向量是其余向量的线性组合 .
(D)任一个向量是其余向量的线性组合 .

15. 设 A 为 n 阶方阵，且秩 $R(A)=n-1$，a_1,a_2 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解向量，则 $Ax=0$ 的通解为 （ ）

（A） $k(a_1+a_2)$　（B） $k(a_1-a_2)$　（C） ka_1　（D） ka_2

16. 已知向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性相关， 则（C ）

（A）该向量组的任何部分组必线性相关 .
（B） 该向量组的任何部分组必线性无关 .
（C） 该向量组的秩小于 m .
(D) 该向量组的最大线性无关组是唯一的.

17．已知 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2, R(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,$ 则 （ C ）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关　　（B）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

（C）α_1 能由 α_2,α_3 线性表示　　（D）α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

18．若有 $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$，则 k 等于

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

第三题　计算题：

1．已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩以及它的一个极大线性无关组；

（2）将其余的向量用所求的极大线性无关组线性表示。

解：：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$

其极大线性无关组可以取为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$

且：$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_5$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_5$

2. 求向量组 A：$\alpha_1=(-2,6,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,-2,-1,0)^T$，$\alpha_3=(-2,-4,0,2)^T$，$\alpha_4=(0,10,2,-2)^T$，的一个极大无关组，并将其余向量由它线性表示.

解：由题意，

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&-2&0\\6&-2&-4&10\\2&-1&0&2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+3r_1}\begin{pmatrix}-2&1&-2&0\\0&1&-10&10\\0&0&-2&2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_1]{\substack{r_4+r_3\\-\frac{1}{2}r_3}}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&1&0\\0&1&-10&10\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-\frac{1}{2}r_2]{\substack{r_1-r_3\\r_2+10r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故向量组 A 的一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，其中$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_3$

3. 设$\alpha_1=(1,4,3)^T,\alpha_2=(2,a,-1)^T,\alpha_3=(-2,3,1)^T$

1）a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

2）a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

4. 求向量组$A:\alpha_1=(1,2,-1,1)^T$、$\alpha_2=(2,-3,1,-2)^T$、$\alpha_3=(4,1,-1,0)^T$ 的极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表示.

解　第一步先用初等行变换把矩阵化成行 (最简形) 阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-3&1\\-1&1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-7&-7\\0&3&3\\0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_2\\r_4+4r_2}]{-\frac{1}{7}r_2}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=F$$

知$r(A)=2$, 即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 或 α_1,α_3 均为 A 的极大无关组，记 $F=(f_1,f_2,f_3)$，由矩阵 F 可见 $f_3=2f_1+f_2$，则有$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$.

5. 已知$\alpha_1=(1,4,2)^T,\alpha_2=(2,7,3)^T,\alpha_3=(0,1,a)^T,\beta=(3,10,4)^T$，问$a$为何值时，$\beta$可

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示？并写出表示式

解 $$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & a & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}\overset{c_2+c_3}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & a+3 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7(a+3)$$

（1） 当$a=-3$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

当$a\neq-3$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

7. 求向量组A：$\alpha_1=(1,-1,2)^T$，$\alpha_2=(0,3,1)^T$，$\alpha_3=(1,5,4)^T$，$\alpha_4=(1,-2,2)^T$，$\alpha_5=(2,-3,4)^T$的一个极大无关组，并将其余向量由它线性表示.

解：由题意，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 5 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 4 & 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 6 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

故向量组 A 的一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，其中$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2$

8. 试求向量组$\alpha_1=(1,1,2,2)^T,\alpha_2=(0,2,1,5)^T,\alpha_3=(2,0,3,-1)^T,\alpha_4=(1,1,0,4)^T$的秩和该向量组的一个最大无关组，并将其他向量用此最大无关组表示。

解:

以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$作为列构造矩阵 A,即 A=($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$)

用初等行变换化 A 为行阶梯形矩阵 T,则 T 的非零行的行数 r 即为 R(A),再化 T 为行最简形 T_0,则 T_0 中任意 r 个线性无关的向量所对应的向量组即为该向量组的最大无关组.

A=(α_1 , α_2 , α_3 , α_4)= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=T,

所以 R(A)=3.　　故 R($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$)=3.

四、证明题：（10 分）

1、 设向量组 A ： $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，求证： $\alpha_1 + 2\alpha_2$ ， $2\alpha_2 - 3\alpha_3$ ， $3\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

证明：设存在数 k_1, k_2, k_3 ，使 $k_1(\alpha_1 + 2\alpha_2) + k_2(2\alpha_1 - 3\alpha_3) + k_3(3\alpha_3 + \alpha_1) = 0$ 成立。

由 $k_1(\alpha_1 + 2\alpha_2) + k_2(2\alpha_1 - 3\alpha_3) + k_3(3\alpha_3 + \alpha_1) = 0$ 得，

$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (2k_1 - 2k_2)\alpha_2 + (-3k_2 + 3k_3)\alpha_3 = 0$ 。…2 分

$\because a_1, a_2, a_3$ 线性无关

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ 2k_1 - 2k_2 = 0 \\ -3k_3 + 3k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \qquad \ldots 4\text{ 分}$$

$\alpha_1 + 2\alpha_2$ ， $2\alpha_2 - 3\alpha_3$ ， $3\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

2. 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关， $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_3$ 线性无关.

. 证：因为

$$\left(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_3\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{vmatrix}\overset{r_2-2r_1}{=}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&2&2\end{vmatrix}=1\bullet\begin{vmatrix}1&-2\\2&2\end{vmatrix}=6\neq 0$$

因而向量组$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_3$线性无关.

3. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关， 而$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$， $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，试 证：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关。

证明：

设存在常数k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

得 $(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2+3k_3)\alpha_2+(k_1+2k_2+3k_3)\alpha_3=0$

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关得 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+k_2+2k_3=0\\k_1+2k_2+3k_3=0\end{cases}$，

由于它的系数行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$

由克莱姆法则，此方程只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，

因此 β_1,β_2,β_3 线 性 无 关。

方法 2

由已知，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$

由于$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$，故矩阵$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$可逆，

由矩阵的秩的性质可知：$R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

又因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$=3.

则$R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$=3.

故β_1,β_2,β_3 线 性 无 关.