第四章　相似矩阵及二次型

1．在向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中,求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,2,-2)^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(2,-1,-2)^T$ 的夹角 θ.

解 由夹角公式 $\cos\theta=\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}$,得

$$\cos\theta=\frac{0}{3\cdot 3}=0.$$

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

2．设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,-1,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-2)^T$,$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,若 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交,求 k 的值.

解 由 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交得

$$[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2]=[k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]=k[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]+[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]=0.$$

所以 $-3k+9=0$,则 $k=3$.

3．求下列向量组正交单位化:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1)^T$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,4,0)^T$.

解 (1) 正交化 取 $\boldsymbol{\beta}_1$=$\boldsymbol{\alpha}_1$,

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

再单位化: 取 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 即为所求.

(2) **正交化** 取 $\boldsymbol{\beta}_1$=$\boldsymbol{\alpha}_1$,

取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$,

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

然后再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化,

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 即为所求**.**

4．试判断下列矩阵是否为正交矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

解 (1) 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

(2) 易知此矩阵虽然满足任意两行或两列正交,但是每一行向量或列向量都非单位向量, 故不是正交阵.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量, $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$, 令 $\boldsymbol{H}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\boldsymbol{I}$, 证明: $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.

证明 因为

$$\boldsymbol{H}^T=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\boldsymbol{I})^T=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)^T-\boldsymbol{I}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{H},$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵.

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}&=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\boldsymbol{I})(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\boldsymbol{I})\\&=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{I}\\&=4\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^T-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{I}\\&=\boldsymbol{I},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是正交矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$ 也是正交矩阵.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正交矩阵, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$,

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$$

故 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$ 也是正交矩阵.

7. 求下列矩阵的特征值与特征向量:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda).$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1)^T$,所以特征值 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}_1(k\neq 0)$.

当 $\lambda_2=4$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1)^T$,所以特征值 $\lambda_2=4$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}_2(k\neq 0)$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

故得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^T$,所以特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ (k_1,k_2 不全为 0) .

当 $\lambda_3=-2$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-2)^T$,所以特征值 $\lambda_3=-2$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ (k_3 不为 0).

(3) 解 $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5),$$
故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=1$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^T$,所以特征值 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$ (k_1 不为 0).

当 $\lambda_3=3$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T$,所以特征值 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ (k_2 不为 0).

当 $\lambda_3=5$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)^T$,所以特征值 $\lambda_3=5$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ (k_3 不为 0).

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 试判断 $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是否相同,并请说明理由.

解 因为
$$\left|\boldsymbol{A}^T-\lambda\boldsymbol{I}\right|=\left|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^T\right|=\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|^T=\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|$$
所以 $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式相同, 从而 $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

9. 设 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 5 或 -1.

解 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量, 则
$$(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}-4\lambda\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{x}=(\lambda^2-4\lambda-5)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$
因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2-4\lambda-5=0$, 即 λ 是方程 $\lambda^2-4\lambda-5=0$ 的根, 也就是说 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=5$.

10. 已知二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,3$, 求 $|\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}|$.

解 令 $\varphi(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$, 则, $\varphi(-1)=6$, $\varphi(3)=2$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 故
$$|\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}|=6\cdot 2=12.$$

11. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$, 求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|$.

解 因为 $|\boldsymbol{A}|=1\times(-1)\times 2=-2\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故
$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-2\boldsymbol{A}^{-1},$$
$$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=-2\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}.$$
令 $\varphi(\lambda)=-2\lambda^{-1}+3\lambda^2-2$, 则 $\varphi(1)=-1$, $\varphi(-1)=-3$, $\varphi(2)=3$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 故
$$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=-1\cdot(-3)\cdot 3=9.$$

12. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 求 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$.

解 由$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 为$\boldsymbol{A}$的全部特征值，则$\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$为$\boldsymbol{A}^2$的全部特征值,所以

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_1^2=tr\boldsymbol{A}^2,$$

而$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$tr\boldsymbol{A}^2=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

13. 设λ是方阵$\boldsymbol{A}$的特征值,μ为任意常数,证明: $\mu\lambda$是$\mu\boldsymbol{A}$的特征值.

证明 由于λ是方阵$\boldsymbol{A}$的特征值,则存在向量$\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$,使$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$.于是

$$(\mu\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}=(\mu\lambda)\boldsymbol{p}.$$

因此,$\mu\lambda$是$\mu\boldsymbol{A}$的特征值.

14. 设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都是n阶矩阵, 且$\boldsymbol{B}$可逆, 试判断$\boldsymbol{BA}$与$\boldsymbol{AB}$是否相似,并说明理由.

解 取$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BAP}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{BAB}=\boldsymbol{AB},$$

因此,$\boldsymbol{BA}$与$\boldsymbol{AB}$相似.

15. 判断下列矩阵能否相似对角化,并说明其理由:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$; (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&4&2\\1&-3&1\end{pmatrix}$.

解 (1) 由$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=(4-\lambda)(2-\lambda)=0$,

解得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$.

当$\lambda_1=2$时, 解方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即$\begin{pmatrix}3-2&-1\\-1&3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,得基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

当$\lambda_2=4$ 时, 解方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即$\begin{pmatrix}3-4&-1\\-1&3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,得基础解系为为$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

于是,2 阶矩阵$\boldsymbol{A}$有 2 个线性无关的特征向量,所以它能与对角矩阵相似.且只须取

$\boldsymbol{T}=(\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,就有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

(2) 由$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$,解得$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$

当$\lambda_1=-2$时,由$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即$\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$,得基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$,

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时, 由$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即$\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$,得基础解系为$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

于是,3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$有 3 个线性无关的特征向量,所以它能与对角矩阵相似.且只须取

$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}-2&-1&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

(3) 由$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&3&2\\1&4-\lambda&2\\1&-3&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-3)^2=0$,解得$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=3$.

当$\lambda_1=1$时,由$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即$\begin{pmatrix}1&3&2\\1&3&2\\1&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,得基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$,

当$\lambda_2=\lambda_3=3$时, 由$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即$\begin{pmatrix}-1&3&2\\1&1&2\\1&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,得基础解系仅有$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

于是,3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$仅有 2 个线性无关的特征向量,所以它不能与对角矩阵相似.

16. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&a&3\\4&b&2\\-2&1&-2\end{pmatrix}$$

有特征值为±1,问: $\boldsymbol{A}$能否对角化?并说明理由.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 ±1,知当 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$ 可得 $a=-1$, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0$ 可得 $b=-3$.再计算 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$,可得 $(\lambda^2+3\lambda+2)(1-\lambda)=0$, 于是可求得 $\boldsymbol{A}$ 的最后一个特征值为 -2. 由于 $\boldsymbol{A}$ 具有阶数个不同的特征值.因此, $\boldsymbol{A}$ 必可对角化.

17. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & x\end{pmatrix}.$$

已知 $\boldsymbol{A}$ 与对角形矩阵相似, $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2，2，y, 求 x 和 y 的值.

解 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=diag\left(2,2,y\right)$ 相似,于是有

$$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{B})\Rightarrow 6(x-1)=4y,\ tr\boldsymbol{A}=tr\boldsymbol{B}\ \Rightarrow\ 5+x=4+y.$$

从而 $x=5,\ y=6$.

18. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix},$$

已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 求:

(1) x 和 y 的值,

(2)可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,

(3) $\boldsymbol{A}^n$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以 $tr\boldsymbol{A}=tr\boldsymbol{B}$,且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,则

$$\begin{cases}x=y-4\\ -25x=-5y\end{cases},$$

得 $\begin{cases}x=1\\ y=5\end{cases}$.

(2) 由题意知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda_3=-5$, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ $(i=1,2,3)$,得 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征向量分别为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(3) 由于 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$,因此 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{PB}^n\boldsymbol{P}^{-1}$,于是

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^n&0\\0&0&(-5)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\times5^{n-1}(1+(-1))^{n+1}&5^{n-1}(4+(-1)^n)-1\\0&5^{n-1}(1+4(-1)^n)&2\times5^{n-1}(1+(-1))^{n+1}\\0&2\times5^{n-1}(1+(-1))^{n+1}&5^{n-1}(4+(-1)^n)\end{pmatrix}.$$

19. 设

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_1=3,\lambda_2=7$ 的特征向量,求 $\boldsymbol{A}$.

解 1 由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,可得 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7\\-6&14\end{pmatrix}$.

所以

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&7\\-6&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&7\\-6&14\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\4&5\end{pmatrix}.$$

解 2 由已知条件可知相似矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}$,对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}3&0\\0&7\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda$,则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5&1\\4&5\end{pmatrix}.$$

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I},2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}$ 不可逆,证明: $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I},2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}$ 不可逆,说明 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值 $-1,2,\frac{3}{2}$.因此, $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵.

21. 社会调查表明, 某地劳动力从业转移情况是:从农人员中每年有$\frac{3}{4}$改为从事非农工作,在非农从业人员中每年有$\frac{1}{20}$改为从农工作. 到某年年底该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的$\frac{1}{5}$和$\frac{4}{5}$,试预测到 5 年后年底该地劳动力从业情况以及经过多年之后该地劳动力从业情况的发展趋势.

解 到下一年年底该地从农工作和从事非农工作人员占全部劳动力的百分比分别为

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\times\frac{4}{5} \text{ 和 } \frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{19}{20}\times\frac{4}{5}.$$

如果引入2阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,其中$a_{12}=\frac{1}{20}$,表示每年非农从业人员中有$\frac{1}{20}$改为从农工作. $\boldsymbol{a}_{21}=\frac{3}{4}$表示每年从农人员中有$\frac{3}{4}$改为从事非农工作.于是有$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{20}\\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20}\end{pmatrix}$.引入 2 维列向量,其分量依次为到某年底从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的百分比.如向量$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$表示到某年底该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的$\frac{1}{5}$和$\frac{4}{5}$,那么下一年年底该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的百分比就可由下述运算得出

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{20}\\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\times\frac{4}{5}\\ \frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{19}{20}\times\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{100}\\ \frac{91}{100}\end{pmatrix},$$

于是,到5年后年底该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的百分比应为$\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{x}$ k年后该地劳动力的从业情况,可由计算$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}$而得.矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}\frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{20}\\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20}-\lambda\end{vmatrix}=(1-5\lambda)(1-\lambda)$$

,

得$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=\frac{1}{5},\lambda_2=1$, 由本章第 3 节推论 4.3 知,$\boldsymbol{A}$能与对角矩阵相似. 求特征值$\lambda_1=\frac{1}{5}$对应的特征向量,得$\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$,求特征值$\lambda_2=1$对应的特征向量,得$\begin{pmatrix}1\\ 15\end{pmatrix}$,取矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 15\end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{P}$为可逆矩阵,且使

得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,因为 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}15 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^5\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\frac{1}{5^5} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5^5} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{16}\begin{pmatrix}15 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1+\frac{11}{5^6}\\ 15-\frac{11}{5^6}\end{pmatrix}.$$

类似的,第 k 年底该地劳动力的从业情况为

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5^k} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1+\frac{15}{5^k} & 1-\frac{1}{5^k}\\ 15\left(1-\frac{1}{5^k}\right) & 15+\frac{15}{5^k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1+\frac{11}{5^{k+1}}\\ 15-\frac{11}{5^{k+1}}\end{pmatrix}.$$

按此规律发展,多年之后该地从农工作和从事非农工作人员占全部劳动力的百分比趋于

$\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1\\ 15\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\frac{6}{100}\\ \frac{94}{100}\end{pmatrix}$,即多年之后该地从农工作和从事非农工作人员各占全部劳动力的 $\frac{6}{100}$ 和 $\frac{94}{100}$.

22. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

试求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)^2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=3$ (二重).

当 $\lambda_1=0$ 时,由 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2=3$ 时,由 $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

先将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 正交得 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

再将它们单位化,得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\eta_3=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

于是得正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

且有 $$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}.$$

23. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=1$，属于特征值 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

解 1 由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$. 所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^T.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$, 则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 所对应的单位正交特征向量.

因为实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，且 $\boldsymbol{\eta}=(0,1,1)^T$,为对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量,所以对应于 $\lambda_2=1,\lambda_3=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\eta}=(x_1,x_2,x_3)^T$ 应满足

$$[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}_1]=0$$

即 $0x_1+x_2+x_3=0$,解得正交基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

把 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

于是得正交矩阵 $$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

解 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_2&a_4&a_5\\a_3&a_5&a_6\end{pmatrix}$.

由于 $\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,1)^T$,所以有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=(-1)\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, 即

$$\begin{cases}a_2+a_3=0\\a_4+a_5=-1\\a_5+a_6=-1\end{cases}\qquad(1)$$

因 $\lambda_2=1,\lambda_3=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,利用 (1) 可推出

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}a_1-1&a_2&a_3\\a_2&a_4-1&a_5\\a_3&a_5&a_6-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a_1-1&a_2&0\\a_2&a_4-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}.$$

据实对称矩阵的性质定理知 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$, 所以 $a_1=1$ 且 $a_2=0$, $a_4=0$,再带入 (1) 式,可推出 $a_3=0$, $a_6=0$, $a_5=-1$.因此

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

24. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8-3\boldsymbol{A}^7$.

解 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$.

对于 $\lambda_1=3$, 解方程 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1)^T$.

对于 $\lambda_2=-1$, 解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 1)^T$.

于是有正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$ ，

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$．因此

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^8-3\boldsymbol{\Lambda}^7)\boldsymbol{P}^{-1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}3^8 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3^7 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f=x_1{}^2-4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2{}^2+2x_2x_3-2x_3{}^2$；

(2) $f=-2x_1x_2+6x_2x_3-2x_3^2$；

(3) $f=x^2-4xy+4xz-y^2-2yz+5z^2$.

解 (1) $f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

(2) $f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

(3) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

26. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f=\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$； (2) $f=\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix}2 & -2 & 5\\ 4 & 1 & 6\\ -7 & 2 & 5\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

解 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

(2) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 4\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

27. 求一个正交变换,将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+2x_2{}^2+2x_3{}^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

化成标准形.

解 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1{}^2+2x_2{}^2+2x_3{}^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

故二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$,

由 $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2\quad\therefore\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=3.$

对 $\lambda_1=0$,解 $(\boldsymbol{A}-0\cdot\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

对 $\lambda_2=\lambda_3=3$,解 $(\boldsymbol{A}-3\cdot\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

单位化得 $$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

由于不同特征值的特征向量线性无关,故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_{2,}\boldsymbol{\eta}_3$ 线性无关.

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{TY}$,其中

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}=3x_2^2+3x_3^2$.

28. 求一个正交变换,将二次型

$$f=x_1{}^2-4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2{}^2+8x_2x_3-2x_3{}^2$$

化成标准方程,并指出其表示何种二次曲面.

解 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-7$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 可求得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^T$, $\boldsymbol{p}_2=(2,0,1)^T$.

将其正交化 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{p}_2-\frac{[\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{\alpha}_1]}{[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)^T$.

再单位化得 $\boldsymbol{q}_1=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T$, $\boldsymbol{q}_2=(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}})^T$.

对 $\lambda_3=-7$, 可求得其对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(-1,-2,2)^T$,单位化得 $\boldsymbol{q}_3=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$,从而有正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

使原二次方程变为标准方程 $f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

可知 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示旋转单叶双曲面.

29. 用配方法化下列二次型为标准形, 并求所用的变换矩阵.

(1) $f=(x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3)+x_2^2+2x_2x_3-2x_3^2$;

(2) $f=x_1x_2+x_1x_3+3x_2x_3$.

解 (1) $f=(x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3)+x_2^2+2x_2x_3-2x_3^2$

$$=((x_1-2x_2+x_3)^2-4x_2^2-x_3^2+4x_2x_3)+x_2^2+2x_2x_3-2x_3^2$$

$$=(x_1-2x_2+x_3)^2-3x_2^2+6x_2x_3-3x_3^2$$

$$=(x_1-2x_2+x_3)^2-3(x_2-x_3)^2,$$

令$\begin{cases} y_1=x_1-2x_2+x_3 \\ y_2=\qquad x_2-x_3 \\ y_3=\qquad\qquad x_3 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1=y_1+2y_2+y_3 \\ x_2=\qquad y_2+y_3 \\ x_3=\qquad\qquad y_3 \end{cases}$，

则 f 化成标准形 $\qquad f=y_1^2-3y_2^2$，

所用线性替换矩阵为 $\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 令$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=\qquad\quad y_3 \end{cases}$,代入,再配方可得

$$\begin{aligned} f&=y_1^2+3y_1y_3-y_2^2-y_2y_3 \\ &=(y_1+\frac{3}{2}y_3)^2-\frac{9}{4}y_3^2-y_2^2-y_2y_3 \\ &=(y_1+\frac{3}{2}y_3)^2-((y_2+\frac{1}{2}y_3)^2-\frac{1}{4}y_3^2)-\frac{9}{4}y_3^2 \\ &=(y_1+\frac{3}{2}y_3)^2-(y_2+\frac{1}{2}y_3)^2-2y_3^2, \end{aligned}$$

令$\begin{cases} z_1=y_1+\qquad\frac{3}{2}y_3 \\ z_2=\qquad y_2+\frac{1}{2}y_3 \\ z_3=\qquad\qquad y_3 \end{cases}$,即$\begin{cases} y_1=z_1\qquad-\frac{3}{2}z_3 \\ y_2=\qquad z_2-\frac{1}{2}z_3 \\ y_3=\qquad\qquad z_3 \end{cases}$，

则 $\qquad f=z_1^2-z_2^2-2z_3^2$.

所用变换矩阵为

$$
\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

30. 试求当t取什么值时,二次型

$$
x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3
$$

是正定的.

解 二次型的矩阵为
$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix},
$$

由于$\boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式为

$$
\Delta_1=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}>0,\Delta_3=|A|=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}>0,
$$

当原二次型为正定时,有
$$
\begin{cases}1-t^2>0\\ -5t^2-4t>0\end{cases},
$$

解上面不等式组,可得$-\dfrac{4}{5}<t<0$.

31. 判别下列二次型的正定性:

(1) $f=-5x_1^2-6x_2^2+4x_1x_3+4x_2x_3-4x_3^2$;

(2) $f=99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$;

(3) $f=10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+8x_3^2$.

解 (1) 二次型f的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$, 由于

$$
a_{11}=-5<0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,\quad |A|=-80<0,
$$

故f不是正定,而易证$-f$是正定二次型,即f是负定二次型.

(2) 因为

$$
\Delta_1=99>0,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}99 & -6\\ -6 & 130\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_3=|A|>0,
$$

故二次型f为正定二次型.

(3) 因为$\left|\boldsymbol{A}\right|<0$,所以二次型$f$非正定.

32. 设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})=n$,证明: 实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是正定的.

证明 因为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，且$R(\boldsymbol{A})=n$.所以对于任意$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$. 从而

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0.$$