

### 第三章 向量复习题

#### 一、填空题:

1. 当 $t$ \_\_\_\_时, 向量 $\alpha_1 = (1, 2, -2)^T, \alpha_2 = (4, t, 3)^T, \alpha_3 = (3, -1, 1)^T$ 线性无关.
3. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 且 $\alpha_{n+1}$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 的线性\_\_\_\_\_
4. 设 $\alpha_1 = (2, 5)^T, \alpha_2 = (1, a)^T$ , 当 $a =$ \_\_\_\_\_时,  $\alpha_1, \alpha_2$ 线性相关.
5. 一个非零向量是线性\_\_\_\_\_的, 一个零向量是线性\_\_\_\_\_.
6. 设向量组 A:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,  $\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3$ 线性\_\_\_\_\_
7. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵, 且 $r(A) = n - 1$ ,  $\alpha_1, \alpha_2$ 是 $AX = 0$ 的两个不同解, 则 $\alpha_1, \alpha_2$ 一定线性\_\_\_\_\_
8. 向量组 $\beta_1, \dots, \beta_l$ 能由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表示的充分必要条件是 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ \_\_\_\_ $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ 。(填大于, 小于或等于)
9. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 3), \alpha_3 = (1, 3, t)$ 线性相关, 则 $t$ 的值为\_\_\_\_\_。

#### 二、选择题:

1.  $n$ 阶方阵 $A$ 的行列式 $|A| = 0$ , 则 $A$ 的列向量 ( )  
A. 线性相关 B. 线性无关 C.  $R(A) = 0$  D.  $R(A) \neq 0$
2. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,  $R(A) = r < n$ , 则 $A$ 的行向量中 ( )  
A、必有 $r$ 个行向量线性无关 B、任意 $r$ 个行向量构成极大线性无关组  
C、任意 $r$ 个行向量线性相关 D、任一行都可由其余 $r$ 个行向量线性表示
3. 设有 $n$ 维向量组 ( I ):  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  和 ( II ):  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  ( $m > r$ ), 则 ( ).  
A、向量组 ( I ) 线性无关时, 向量组 ( II ) 线性无关

- B、向量组 ( I ) 线性相关时, 向量组 ( II ) 线性相关
- C、向量组 ( II ) 线性相关时, 向量组 ( I ) 线性相关
- D、向量组 ( II ) 线性无关时, 向量组 ( I ) 线性相关
4. 下列命题中正确的是 ( )
- (A) 任意  $n$  个  $n+1$  维向量线性相关 (B) 任意  $n$  个  $n+1$  维向量线性无关
- (C) 任意  $n+1$  个  $n$  维向量线性相关 (D) 任意  $n+1$  个  $n$  维向量线性无关
5. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关且秩为  $s$ , 则 ( )
- (A)  $r = s$  (B)  $r \leq s$  (C)  $s \leq r$  (D)  $s < r$
6.  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ( $3 \leq s \leq n$ ) 线性无关的充要条件是 ( ) .
- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意两个向量都线性无关
- (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任一个向量都不能用其余向量线性表示
- (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中存在一个向量不能用其余向量线性表示
- (D)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中不含零向量
7. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关的充要条件是 ( )
- A、任意  $\alpha_i$  不为零向量
- B、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任两个向量的对应分量不成比例
- C、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中有部分向量线性无关
- D、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任一向量均不能由其余  $n-1$  个向量线性表示
8. 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $R(A) = r < n$ , 则  $A$  的行向量中 ( )
- A、必有  $r$  个行向量线性无关
- B、任意  $r$  个行向量构成极大线性无关组
- C、任意  $r$  个行向量线性相关
- D、任一行都可由其余  $r$  个行向量线性表示
9. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且秩  $(A) = n-1$ .  $\alpha_1, \alpha_2$  是非齐次方程组  $AX = B$  的两个不同的解

向量, 则  $AX=0$  的通解为 ( )

- A、 $k\alpha_1$                       B、 $k\alpha_2$                       C、 $k(\alpha_1 - \alpha_2)$                       D、 $k(\alpha_1 + \alpha_2)$

10. 已知向量组  $\alpha_1=(1,1,-1,1), \alpha_2=(2,0,t,0), \alpha_3=(0,-2,5,-2)$  的秩为 2, 则  $t=(\quad)$ .

- A、3                      B、-3                      C、2                      D、-2

11. 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $R(A)=r < n$ , 则  $A$  的行向量中 ( )

- A、必有  $r$  个行向量线性无关  
B、任意  $r$  个行向量构成极大线性无关组  
C、任意  $r$  个行向量线性相关  
D、任一行都可由其余  $r$  个行向量线性表示

12. 设向量组 A:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性无关的是 ( )

A、 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3, 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

B、 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

C、 $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$

D、 $-\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

14. 已知向量组 A 线性相关, 则在这个向量组中 ( )

- (A) 必有一个零向量 .  
(B) 必有两个向量成比例 .  
(C) 必有一个向量是其余向量的线性组合 .  
(D) 任一个向量是其余向量的线性组合 .

15. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且秩  $R(A)=n-1$ ,  $a_1, a_2$  是非齐次方程组  $Ax=b$  的两个不同的解向量, 则  $Ax=0$  的通解为 ( )

- (A)  $k(a_1 + a_2)$       (B)  $k(a_1 - a_2)$       (C)  $ka_1$       (D)  $ka_2$

16. 已知向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则 ( )

- (A) 该向量组的任何部分组必线性相关 .  
(B) 该向量组的任何部分组必线性无关 .  
(C) 该向量组的秩小于  $m$  .  
(D) 该向量组的最大线性无关组是唯一的.

17. 已知  $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, R(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$ , 则 ( )

- (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关 (B)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关  
(C)  $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表示 (D)  $\alpha_4$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示

18. 若有  $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ , 则  $k$  等于

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

第三题 计算题:

1. 已知向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  的秩以及它的一个极大线性无关组;

(2) 将其余的向量用所求的极大线性无关组线性表示。

2. 求向量组  $A: \alpha_1 = (-2, 6, 2, 0)^T, \alpha_2 = (1, -2, -1, 0)^T, \alpha_3 = (-2, -4, 0, 2)^T, \alpha_4 = (0, 10, 2, -2)^T$  的一个极大无关组, 并将其余向量由它线性表示。

3. 设  $\alpha_1 = (1, 4, 3)^T, \alpha_2 = (2, a, -1)^T, \alpha_3 = (-2, 3, 1)^T$

1)  $a$  为何值时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

2)  $a$  为何值时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关.

4. 求向量组  $A: \alpha_1 = (1, 2, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, -3, 1, -2)^T, \alpha_3 = (4, 1, -1, 0)^T$  的极大无关

组, 并把其余向量用极大无关组线性表示.

5. 已知  $\alpha_1 = (1, 4, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, a)^T, \beta = (3, 10, 4)^T$ , 问  $a$  为何值时,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  唯一线性表示? 并写出表示式

7. 求向量组  $A: \alpha_1 = (1, -1, 2)^T, \alpha_2 = (0, 3, 1)^T, \alpha_3 = (1, 5, 4)^T, \alpha_4 = (1, -2, 2)^T, \alpha_5 = (2, -3, 4)^T$  的一个极大无关组, 并将其余向量由它线性表示.

8. 试求向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (0, 2, 1, 5)^T, \alpha_3 = (2, 0, 3, -1)^T, \alpha_4 = (1, 1, 0, 4)^T$  的秩和该向量组的一个最大无关组, 并将其他向量用此最大无关组表示.

#### 四、证明题: (10 分)

1、 设向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 求证:  $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 - 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$  线性无关.

2. 已知向量组  $a_1, a_2, a_3$  线性无关,  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_3$  线性无关.

3. 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 而  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ , 试证:  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关.