Temas: EDO's Bernoulli
Resolução de exercícios.

EDO's de Bernoulli

$$y' + a(x)\, y = b(x)\, y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação é linear de 1.ª ordem.
- Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, a equação é redutível a uma EDO linear de 1.ª ordem, usando a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$.

Se $\alpha = 0 \Rightarrow y' + a(x)y = b(x) \longrightarrow$ EDO Linear 1ª ordem

Se $\alpha = 1 \Rightarrow y' + a(x)y = b(x)y$

$\Leftrightarrow y' + \big(a(x) - b(x)\big)y = 0 \longrightarrow$ EDO Linear de 1ª ordem homogénea

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$ permite transformar a EDO de Bernoulli em uma EDO Linear 1º ordem.

Se consideramos $z = y^{1-\alpha}$ então $z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} y'$

Para conseguirmos fazer a mudança de variável na EDO temos de a manipular, fazendo surgir estas expressões. Vejamos, temos:

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow y^{-\alpha}y' + a(x)\, y\, y^{-\alpha} = b(x)\, y^{\alpha}\, y^{-\alpha}$$

1º Passo: multiplicar tudo por $y^{-\alpha}$

$$\Leftrightarrow \quad y^{-\alpha} y' + a(x)\, y^{1-\alpha} = b(x)$$

2º passo: Multiplicar tudo por $(1-\alpha)$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\alpha) y^{-\alpha} y' + (1-\alpha) a(x) y^{1-\alpha} = (1-\alpha) b(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{z' + (1-\alpha) a(x)\, z = (1-\alpha) b(x)}_{\text{EDO Linear 1º ordem}}$$

3º passo: Encontrar o integral geral da EDO Linear de 1º ordem.

4º passo: Mudança de variável inversa: $z = y^{1-\alpha}$

Exemplo

$xy' + y = y^2 \ln x \qquad x > 0$

$$xy' + y = y^2 \ln x \qquad x > 0 \qquad \alpha = 2$$

$\times\, y^{-2}$

$$x y^{-2} y' + y\, y^{-2} = \frac{y^2}{y^2} \ln(x) \Leftrightarrow$$

$\times(-1)$

$$\Leftrightarrow -x y^{-2} y' - y^{-1} = -\ln(x) \Leftrightarrow$$

Mud. VAR:

$z = y^{-1}$

$z' = -1 y^{-2} y'$

$$\Leftrightarrow x z' - z = -\ln(x) \rightarrow \text{EDO linear}$$

× fator integrante $\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} z = \underbrace{-\frac{1}{x}\ln(x)}_{q(x)} \Leftrightarrow$$

Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln(x)},\ x>0$$

$$= e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x},\ x>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{x} - \frac{1}{x^2} z = -\frac{\ln(x)}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} z\right)' = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} z = \int -\frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} z = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$$

calc. aux: Por partes

$$-\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \quad u = \ln x \quad v' = x^{-2}$$

$$u' = \frac{1}{x} \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$= -\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C,\ x>0,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z = \ln(x) + 1 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

integral geral da EDO linear

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \ln(x) + 1 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln(x) + 1 + Cx}$$

integral geral da EDO de Bernoulli

Exemplo

$$y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5 \qquad x \neq 0$$

$$y' - \frac{1}{2x}\,y = 5x^2y^5$$

$\times\, y^{-5}$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y^5} = -\frac{1}{2x} \times \frac{1}{y^4} = 5x^2$$

$\times\,(-4)$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{y^5}\,y' + \frac{2}{xy^4} = -20x^2$$

$$\Leftrightarrow z' + \frac{2}{x}\,z = -20x^2$$

EDO linear

Mud. de Variável

$$z = y^{(1-\alpha)} = y^{(1-5)}$$
$$= y^{-4} = \frac{1}{y^4}$$
$$z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}\,y'$$
$$= (1-5)\,y^{-5}\,y'$$
$$= -4y^{-5}\,y'$$
$$= -\frac{4}{y^5}\,y'$$

Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} =$$
$$= e^{\ln|x|^2} = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2z' + 2x\,z = -20x^4$$

$$\Leftrightarrow (x^2z)' = -20x^4$$

$$\Leftrightarrow x^2z = \int -20x^4\,dx$$

$$\Leftrightarrow x^2z = -\frac{20x^5}{5} - 20C$$

$$\Leftrightarrow x^2z = -4x^5 - 20C$$

$$\Leftrightarrow z = -4x^3 - \frac{20C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Integral geral da EDO linear}$$

$$\Leftrightarrow y^{-4} = -4x^3 - \frac{20C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Integral geral da EDO de Bernoulli}$$

Lista de exercícios: <u>folha 4</u> – ex 1, ex 4, ex 5, ex 6, ex 7, ex 8
ex 9, ex 10, ex 14

Bom trabalho!

Filipa Santana

PS: Obrigado Mariana!