

DIFERENCIABILIDADE

Quando estamos a trabalhar com funções reais de várias variáveis reais, f.r.v.v.r, e falamos em derivação/diferenciação levanta-se sempre o problema da existência de várias variáveis. Com uma só variável, a derivada da função num ponto dá-nos a informação acerca da variação instantânea dessa mesma função nesse exato ponto. Em contexto prático, o valor da derivada num ponto dá-nos a variação prevista na função caso se varie em uma unidade a variável independente. No entanto, quando trabalhamos com f.r.v.v.r temos várias variáveis que podem provocar variações na função e então surge o conceito de derivadas parciais.

DERIVADAS PARCIAIS

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D um intervalo aberto e $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um ponto de D .

Chamamos derivadas parciais de f no ponto A , relativamente às variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , respetivamente a:

$$f'_{x_1}(A), \dots, f'_{x_n}(A) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$$

Nota: Em \mathbb{R}^2 temos $f'_x(A)$ e $f'_y(A)$ e em \mathbb{R}^3 , temos $f'_x(A)$, $f'_y(A)$ e $f'_z(A)$.

DEFINIÇÃO:

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \in \text{int}(D)$, chamamos derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) ao limite, caso exista em \mathbb{R} ,

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

E chamamos derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) ao limite, caso exista em \mathbb{R} ,

$$f'_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Interpretação geométrica:

$f'_x(a, b) \rightarrow$ declive da reta contida no plano $y=b$ e que é tangente, no ponto $(a, b, f(a, b))$, à curva de interseção do gráfico de f com o plano.

No caso de termos funções definidas por mais do que uma expressão (funções definidas por ramos), tal como já acontecia para o caso de f.r.v.r, em pontos de troca de ramo teremos de efetuar o cálculo da derivada nesse ponto recorrendo à definição. Nos restantes pontos e em funções com apenas uma expressão designatória podemos aplicar diretamente as regras de derivação que já conhecemos para as f.r.v.r.

Nota pratica:

$f'_x \rightarrow$ obtém-se derivando a função f em ordem a x , isto é, considerando x a variável e y e z como constantes.

$f'_y \rightarrow$ obtém-se derivando a função f em ordem a y , isto é, considerando y a variável e x e z como constantes.

$f'_z \rightarrow$ obtém-se derivando a função f em ordem a z , isto é, considerando z a variável e x e y como constantes.

Exemplos:

$$f(x, y, z) = 3x^2y + 2yz + z^3$$

$$f'_x(x, y, z) = 3y(x^2)'_x + (2yz)'_x + (z^3)'_x = 6xy + 0 + 0 = 6xy$$

$$f'_y(x, y, z) = 3x^2(y)'_y + 2z(y)'_y + (z^3)'_y = 3x^2 + 2z$$

$$f'_z(x, y, z) = (3x^2y)'_z + 2y(z)'_z + (z^3)'_z = 2y + 3z^2$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{se } xy \neq 0 \\ x^3, & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

$$f'_x(1,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) * 1 - 1^3}{h} = 1$$

GRADIENTE DE F

Chamamos Gradiente de f ao vetor ∇f com:

$$\nabla f = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})$$

Nota: em \mathbb{R}^2 temos $\nabla f = (f'_x, f'_y)$ e em \mathbb{R}^3 temos $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$

No contexto das funções reais de uma variável real, sabemos que se uma dada função admite derivada finita num ponto então ela também é contínua nesse ponto, embora o contrário não seja necessariamente verdade.

Uma vez que falamos agora de funções reais de várias variáveis reais, seria razoável pensar que a existência de derivadas parciais seria suficiente para garantir a diferenciabilidade num ponto e consequente continuidade? A resposta é não, mas vejamos o exemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } xy \neq 0 \\ x+y, & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

As derivadas parciais $f'_x(0,0) = 1$ e $f'_y(0,0) = 1$, no entanto, a função não é contínua no ponto $(0,0)$ e podemos facilmente verificar isto calculando o limite da função no ponto.

Então e se em vez de pensarmos na existência das derivadas parciais, consoante a variação de x e de y , pensarmos na existência de **derivadas em todas as direções**?

Vejamos então o conceito de derivadas direcionais.

DERIVADAS DIRECIONAIS

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, P \in \text{int}(D)$ e \vec{u} um vetor de norma 1 (unitário). A derivada direcional de f segundo o vetor \vec{u} é dada por:

$$D_{\vec{u}} f \text{ ou } f'_{\vec{u}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h}$$

Nota 1: assim o incremento de h aparecerá em todas as coordenadas em que haja variação.

Nota 2: Se considerarmos os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ em \mathbb{R}^2 , temos que $f'_{(1,0)} = f'_x$ e $f'_{(0,1)} = f'_y$.

Nota 3: Estas derivadas podem ainda ser calculadas via gradiente, na forma: $f'_{\vec{u}} = \nabla f(P) \diamond \vec{u}$

Voltemos ao exemplo anterior:

$$f'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h\vec{u}, 0 + h\vec{u}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$$

Limite este que não existe. Mas será por isso que a função não é contínua em $(0,0)$?

A verdade é que existem funções que admitem as derivadas em todas as direções, mas não são contínuas nesse ponto, pois o limite no ponto não existe ou não coincide com a imagem. A existência de derivadas direcionais, por si só, não garante a diferenciabilidade nem a continuidade, a noção de diferenciabilidade para f.r.v.v.r é algo mais forte do que a mera existência de derivadas.

DIFERENCIABILIDADE DE UMA FUNÇÃO:

Em \mathbb{R} , a função diz-se diferenciável em A se e só se admite **reta tangente** ao gráfico nesse ponto. A reta tangente tem de equação $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ e então como:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Temos então que,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]}{x - a} = 0$$

Em \mathbb{R}^2 , f diz-se diferenciável em $A=(a,b)$ se e só se admite **plano tangente** nesse ponto e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - [f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)]}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0$$

Em que o plano tangente tem de equação:

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

Temos então que, no caso geral, uma função diz-se diferenciável em A se e só se admite um **espaço tangente** ao gráfico da função e se este mesmo espaço, **aproximar linearmente** a função, ou seja se,

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - [f(P_0) + (f'_x(P_0), f'_y(P_0)) \diamond (P - P_0)]}{\|P - P_0\|} = 0$$

Ou

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - [f(P_0) + \nabla f(P_0) \diamond (P - P_0)]}{\|P - P_0\|} = 0$$

Nota: Haverá casos em que conseguimos encontrar a equação que traduz o plano/espaço tangente mas em que o limite acima referido não dá zero, nesse caso o plano/espaço não aproxima linearmente a função e então concluímos a não existência do mesmo.

Não obstante, existe uma maneira mais simples para verificar a diferenciabilidade de uma função num ponto P_0 , vejamos:

TEOREMA (CONDIÇÃO SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDADE)

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, P_0 \in \text{int}(D)$, se as derivadas parciais de f existem e são finitas numa bola aberta centrada em P_0 , e são contínuas nesse mesmo ponto, então f é diferenciável em P_0 .

Também no caso das f.r.v.v.r podemos então concluir que:

TEOREMA (CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS)

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, P_0 \in \text{int}(D)$, se f é diferenciável em P_0 , então f é contínua nesse ponto.