

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Vetores, Retas e Planos

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

Produto interno em \mathbb{R}^n

Dados os vetores $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- o **produto interno** (ou **produto escalar**) de X e Y é o escalar real

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= X^T Y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \end{aligned}$$

Nota: Pode também utilizar-se a notação $X|Y$ ou $\langle X, Y \rangle$.

- o **comprimento** ou **norma** de X é

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Propriedades do produto interno em \mathbb{R}^n

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $X \cdot X \geq 0$;

2. $X \cdot X = 0 \iff X = \mathbf{0}$;

3. $X \cdot Y = Y \cdot X$;

4. i. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$,

ii. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;

5. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;

6. $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade triangular

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|.$$

Teorema (Desigualdade Triangular)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Ângulo entre vetores

Em \mathbb{R}^2 , sejam $X = (\color{red}{x}, 0)$, $\color{red}{x} > 0$

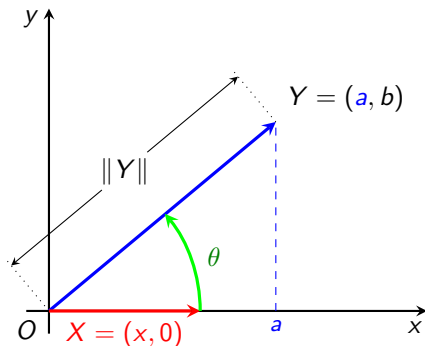
e $Y = (\color{blue}{a}, b) \neq (0, 0)$.

Temos:

- $X \cdot Y = \color{red}{x}\color{blue}{a}$ e $\|X\| = \color{red}{x}$

- $\frac{X \cdot Y}{\|X\|} = \color{blue}{a} = \|Y\| \cos(\theta)$

Logo, $\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$, $\theta \in [0, \pi]$



Em geral, para $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, o ângulo entre os vetores X e Y é

$$\theta = \angle(X, Y) = \arccos \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} = \arccos \left(\frac{X}{\|X\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|} \right).$$

Nota: pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $\left| \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \right| \leq 1$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Vetores ortogonais, colineares, com o mesmo sentido e unitários

- Dados os vetores $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
 - ▶ X e Y são **ortogonais ou perpendiculares**, $X \perp Y$, se $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e., se $X \cdot Y = 0$.
 - ▶ X e Y são **colineares ou paralelos ou têm a mesma direção**, se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, i.e., se $|X \cdot Y| = \|X\| \|Y\|$.
 - ▶ X e Y **têm o mesmo sentido**, se $\theta = 0$, i.e., se $X \cdot Y = \|X\| \|Y\|$.
 - ▶ X e Y **têm sentido oposto ou contrário**, se $\theta = \pi$, i.e., se $X \cdot Y = -\|X\| \|Y\|$.

Por convenção, se $X = 0$ ou $Y = 0$, então X e Y são **colineares e ortogonais**.

- Um vetor **unitário** é um vetor de norma igual a 1.

Se $X \neq 0$, o vetor

$$U = \frac{1}{\|X\|} X$$

é um vetor unitário com a mesma direção e sentido de X .

Produto externo em \mathbb{R}^3

Dados os vetores $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

- o **produto externo** (ou **produto vetorial**) de X e Y é o vetor de \mathbb{R}^3

$$X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nota: Para determinar o produto externo pode utilizar-se COMO AUXILIAR DE CÁLCULO o seguinte “determinante simbólico”

$$X \times Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} i &= (1, 0, 0) \\ j &= (0, 1, 0) \\ k &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

fazendo o seu desenvolvimento pela primeira linha.

Propriedades do produto externo em \mathbb{R}^3

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e O o vetor nulo de \mathbb{R}^3

1. $X \times Y = -(Y \times X);$

2. i. $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z,$

ii. $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z;$

3. $\alpha(X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y);$

4. $X \times X = O;$

5. $X \times O = O \times X = O;$

6. Fórmulas de Lagrange

i. $(X \times Y) \times Z = (Z \cdot X)Y - (Z \cdot Y)X,$

ii. $X \times (Y \times Z) = (X \cdot Z)Y - (X \cdot Y)Z.$

7. Identidade de Jacobi

$$X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) = O.$$

Vetor produto externo (interpretação geométrica)

Proposição:

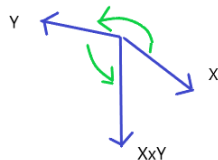
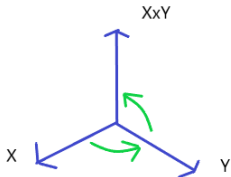
Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^3$. O vetor $X \times Y$ é **ortogonal** a X e a Y , e

$$\|X \times Y\| = \|X\| \|Y\| \sin(\theta),$$

onde θ é o ângulo entre X e Y .

Observação:

O vetor $X \times Y$ é o **vetor ortogonal** a X e Y , com norma $\|X\| \|Y\| \sin(\theta)$ e tal que os vetores X , Y e $X \times Y$, aplicados no mesmo ponto, **formam um triedro direto (regra da mão direita)**.



Produto misto

Se $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(X \times Y) \cdot Z = X \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

diz-se o **produto misto** de X , Y e Z .

Consequências das propriedades do produto interno em \mathbb{R}^3

1. Como $(X \times Y) \cdot X = (X \times Y) \cdot Y = 0$, então

$X \times Y$ é um vetor **ortogonal** a X e a Y .

2. $\|X \times Y\| = \|X\| \|Y\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre X e Y .

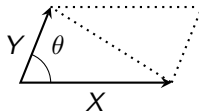
Exercício: Mostre que $Y \cdot (Z \times X) = (X \times Y) \cdot Z$.

Aplicações do produto externo e do produto misto

Sejam $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, então

- a **área do paralelogramo** com lados correspondentes aos vetores X, Y é

$$A_{\diamond} = \|X \times Y\|$$

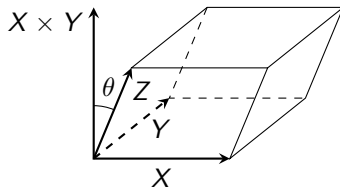


- a **área do triângulo** com dois dos seus lados correspondentes aos vetores X, Y é

$$A_{\triangle} = \frac{\|X \times Y\|}{2}$$

- o **volume do paralelepípedo** com arestas correspondentes aos vetores X, Y, Z é

$$V = |(X \times Y) \cdot Z|$$



Exercício: Prove estas afirmações, resolvendo os exercícios 7.(a) e 9.(a) da Folha de exercícios nº3.

Distâncias

A **distância entre dois pontos** P e Q de \mathbb{R}^n é

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Em particular, para $Q(x_1, \dots, x_n)$ e $P(y_1, \dots, y_n)$, tem-se

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Dados \mathcal{F} e \mathcal{G} (\mathcal{F} e \mathcal{G} são pontos, retas ou planos de \mathbb{R}^3), a **distância entre \mathcal{F} e \mathcal{G}** é

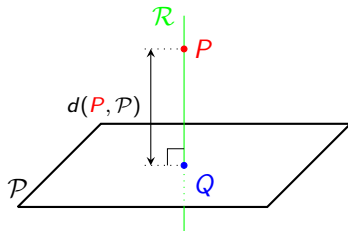
$$d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \min \{ d(P, Q) : P \in \mathcal{F}, Q \in \mathcal{G} \}.$$

Nota: Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, então $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$. De seguida, analisamos os casos em que \mathcal{F} e \mathcal{G} são disjuntos.

Distância de um ponto a um plano

→ Recorrendo ao ponto do plano mais próximo do ponto considerado.

Dados um plano \mathcal{P} e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, existe uma única reta \mathcal{R} perpendicular ao plano \mathcal{P} e contendo o ponto P .



A distância do ponto P ao plano \mathcal{P} é

$$d(P, \mathcal{P}) = d(P, Q),$$

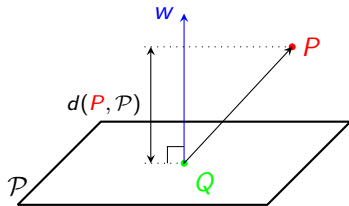
em que Q é o ponto de interseção da reta \mathcal{R} com o plano \mathcal{P} .

Distância de um ponto a um plano

→ Recorrendo a um ponto arbitrário do plano e à equação geral do plano.

Dados um plano \mathcal{P} e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, sejam $Q \in \mathcal{P}$ e w um vetor não nulo ortogonal ao plano \mathcal{P} . Então,

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot w|}{\|w\|}.$$



Sendo $P(x_0, y_0, z_0)$ e $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral do plano \mathcal{P} , tem-se

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aplicação: Distância de uma reta a um plano e distância entre dois planos

Uma reta \mathcal{R} e um plano \mathcal{P} disjuntos são estritamente paralelos. De forma análoga, dois planos disjuntos, \mathcal{P} e \mathcal{P}' , são estritamente paralelos.

- ▶ A distância de uma reta \mathcal{R} a um plano \mathcal{P} coincide com a distância de um qualquer ponto da reta \mathcal{R} ao plano \mathcal{P} , ou seja,

$$d(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = d(P, \mathcal{P}), \quad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}.$$

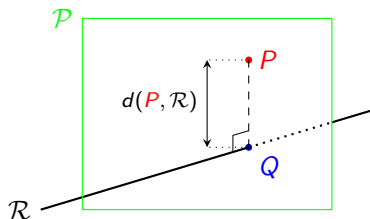
- ▶ A distância entre dois planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' , coincide com a distância de um ponto arbitrário de um dos planos, por exemplo, \mathcal{P}' , ao outro plano, ou seja,

$$d(\mathcal{P}', \mathcal{P}) = d(P, \mathcal{P}), \quad \text{para qualquer } P \in \mathcal{P}'.$$

Distância de um ponto a uma reta

→ Recorrendo ao ponto da reta mais próximo do ponto considerado.

Dada uma **reta** \mathcal{R} e um **ponto** $P \notin \mathcal{R}$, existe um único **plano** \mathcal{P} perpendicular a \mathcal{R} e que contém P .



A **distância** do ponto P à **reta** \mathcal{R} é

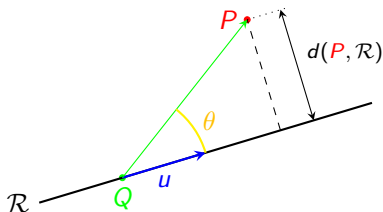
$$d(P, \mathcal{R}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da **reta** \mathcal{R} com o **plano** \mathcal{P} .

Distância de um ponto a uma reta

→ Recorrendo a um ponto arbitrário da reta e a um vetor diretor da reta.

Dada uma **reta** \mathcal{R} que passa pelo **ponto** Q e que tem **vetor diretor** u ,



e um **ponto** $P \notin \mathcal{R}$, tem-se que

$$d(P, \mathcal{R}) = \|\overrightarrow{QP}\| |\sin(\theta)| = \frac{\|u \times \overrightarrow{QP}\|}{\|u\|},$$

sendo θ o ângulo entre os vetores u e \overrightarrow{QP} .

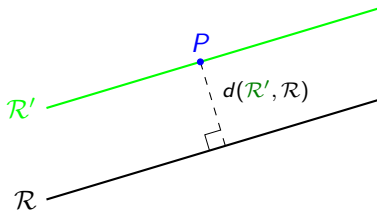
Aplicação: Distância entre retas paralelas

→ Através da distância entre um ponto e uma reta.

Duas retas disjuntas de \mathbb{R}^3 são estritamente paralelas ou enviesadas.

A distância entre duas retas estritamente paralelas \mathcal{R} e \mathcal{R}' coincide com a distância de um ponto arbitrário da reta \mathcal{R}' à reta \mathcal{R} , ou seja,

$$d(\mathcal{R}', \mathcal{R}) = d(P, \mathcal{R}), \quad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}'.$$



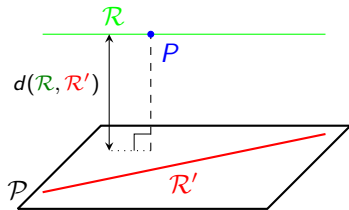
Aplicação: Distância entre retas enviesadas

→ Através da distância entre uma reta e um plano.

Sejam \mathcal{R} e \mathcal{R}' duas retas enviesadas. Existe um único plano \mathcal{P} estritamente paralelo a \mathcal{R} e que contém \mathcal{R}' .

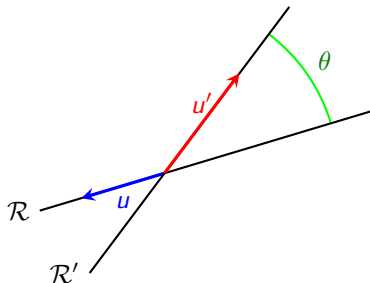
A distância entre as retas enviesadas \mathcal{R} e \mathcal{R}' coincide com a distância entre a reta \mathcal{R} e o plano \mathcal{P} :

$$d(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = d(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = d(P, \mathcal{P}), \quad \text{para qualquer } P \in \mathcal{R}.$$



Aplicação: Ângulo entre retas

Dadas duas retas \mathcal{R} e \mathcal{R}' de vetores diretores u e u' , respetivamente,

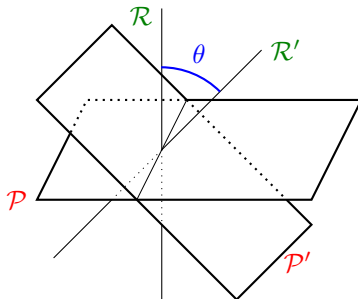


o ângulo entre as retas \mathcal{R} e \mathcal{R}' é

$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \theta = \arccos \frac{|u \cdot u'|}{\|u\| \|u'\|}$$

com $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $\theta = 0$ se e só se as retas são paralelas.

Aplicação: Ângulo entre planos

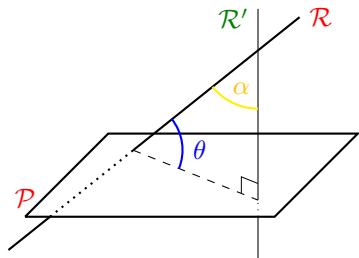


O ângulo entre os planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' é

$$\angle(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \theta = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}'),$$

sendo \mathcal{R} e \mathcal{R}' retas perpendiculares aos planos \mathcal{P} e \mathcal{P}' , respetivamente.

Aplicação: Ângulo entre uma reta e um plano



$$\theta = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{P})$$

$$\alpha = \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$$

são ângulos
complementares
 $(\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha)$

O ângulo entre uma reta \mathcal{R} e um plano \mathcal{P} é

$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \theta = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}'),$$

onde \mathcal{R}' é uma reta ortogonal ao plano \mathcal{P} . Então

$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \arcsin \frac{|u \cdot w|}{\|u\| \|w\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

onde u é um vetor diretor da reta \mathcal{R} e w é um vetor ortogonal ao plano \mathcal{P} .