

MATEMÁTICA DISCRETA

Ano Letivo 2021/22 (Versão: 3 de Maio de 2022)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
<https://elearning.ua.pt/>

CAPÍTULO IV

RECORRÊNCIA E FUNÇÕES GERADORAS

PARTE 1

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

INTRODUÇÃO

TORRE DE HANÓI

O problema é



mover n discos de **origem** para **destino** com a ajuda de **auxiliar**, de modo que

TORRE DE HANÓI

O problema é



mover n discos de **origem** para **destino** com a ajuda de **auxiliar**, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode ficar acima de um disco menor.

TORRE DE HANÓI

O problema é



mover n discos de **origem** para **destino** com a ajuda de **auxiliar**, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode ficar acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo «Brama» de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de **origem** para **destino**, o mundo desapareceria.

TORRE DE HANÓI

O problema é



mover n discos de **origem** para **destino** com a ajuda de **auxiliar**, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode ficar acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo «Brama» de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de **origem** para **destino**, o mundo desapareceria.

Temos de preocupar-nós?

TORRE DE HANÓI

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

TORRE DE HANÓI

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar **recursivamente**:

TORRE DE HANÓI

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar **recursivamente**:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de **origem** para **destino**. Logo, $a_n = 1$.

TORRE DE HANÓI

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar **recursivamente**:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de **origem** para **destino**. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:

TORRE DE HANÓI

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar **recursivamente**:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de **origem** para **destino**. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
 - mover os $n - 1$ discos acima de **origem** para **auxiliar** utilizando **destino**, depois

TORRE DE HANÓI

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar **recursivamente**:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de **origem** para **destino**. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
 - mover os $n - 1$ discos acima de **origem** para **auxiliar** utilizando **destino**, depois
 - mover o último disco de **origem** para **destino**; depois

TORRE DE HANÓI

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar **recursivamente**:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de **origem** para **destino**. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
 - mover os $n - 1$ discos acima de **origem** para **auxiliar** utilizando **destino**, depois
 - mover o último disco de **origem** para **destino**; depois
 - mover os $n - 1$ discos de **auxiliar** para **destino** utilizando **origem**.

TORRE DE HANÓI

A questão



Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar **recursivamente**:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de **origem** para **destino**. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
 - mover os $n - 1$ discos acima de **origem** para **auxiliar** utilizando **destino**, depois
 - mover o último disco de **origem** para **destino**; depois
 - mover os $n - 1$ discos de **auxiliar** para **destino** utilizando **origem**.

Logo, $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$.

OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Os números

Os famosos números de Fibonacci^a

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

^aLeonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Os números

Os famosos números de Fibonacci^a

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

são os termos da sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

^aLeonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Os números

Os famosos números de Fibonacci^a

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

são os termos da sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1 , não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}$, ... e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

^aLeonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Os números

Os famosos números de Fibonacci^a

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

são os termos da sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1 , não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}$, ... e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

Estes números aparecem em muitos contextos

^aLeonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais **adultos** (que podem ter descendentes) e animais **jovens** (que ainda não podem ter descendente).

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais **adultos** (que podem ter descendentes) e animais **jovens** (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais **adultos** (que podem ter descendentes) e animais **jovens** (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais **adultos** (que podem ter descendentes) e animais **jovens** (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais **adultos** (que podem ter descendentes) e animais **jovens** (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n . *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?*

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais **adultos** (que podem ter descendentes) e animais **jovens** (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n . *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?* Por hipótese, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais **adultos** (que podem ter descendentes) e animais **jovens** (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n . *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?* Por hipótese, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

Portanto, para $n \geq 2$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$; e $c_n = A_n + J_n$ satisfaz

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO II)

Quadrados

Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n ?

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 1,$$

$$\vdots$$


OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO II)

Quadrados

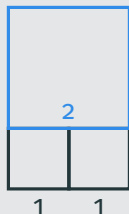
Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n ?

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

\vdots



OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO II)

Quadrados

Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n ?

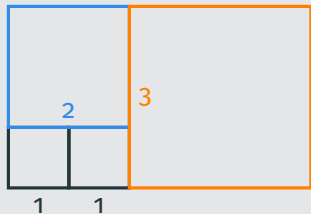
$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

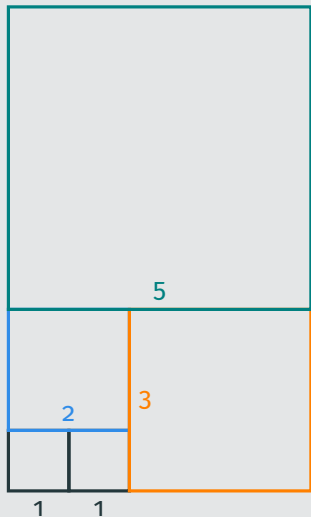
$$a_3 = 3,$$

\vdots



OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO II)

Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n ?

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

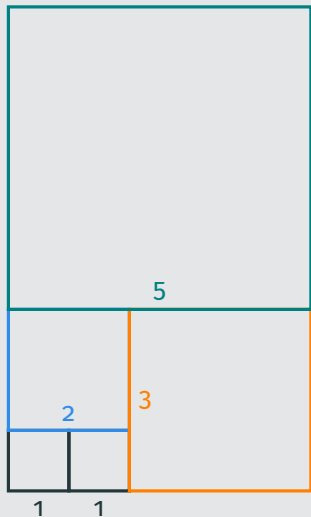
$$a_3 = 3,$$

$$a_4 = 5,$$

$$\vdots$$

OS NÚMEROS DE FIBONACCI (EXEMPLO II)

Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n ?

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

$$a_3 = 3,$$

$$a_4 = 5,$$

\vdots

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

SOMA DE NÚMEROS DE FIBONACCI

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

SOMA DE NÚMEROS DE FIBONACCI

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 +$$

SOMA DE NÚMEROS DE FIBONACCI

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 +$$

Cálculo auxiliar:

$$+ (F_2 - F_0)$$

$$+ (F_3 - F_1)$$

$$+ (F_4 - F_2)$$

...

$$+ (F_n + F_{n-2})$$

SOMA DE NÚMEROS DE FIBONACCI

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^n F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k$$

Cálculo auxiliar:

$$+ (F_2 - F_0)$$

$$+ (F_3 - F_1)$$

$$+ (F_4 - F_2)$$

...

$$+ (F_n + F_{n-2})$$

SOMA DE NÚMEROS DE FIBONACCI

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^n F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1$$

Cálculo auxiliar:

$$+ (F_2 - F_0)$$

$$+ (F_3 - F_1)$$

$$+ (F_4 - F_2)$$

...

$$+ (F_n + F_{n-2})$$

SOMA DE NÚMEROS DE FIBONACCI

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^n F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1.$$

Cálculo auxiliar:

$$+ (F_2 - F_0)$$

$$+ (F_3 - F_1)$$

$$+ (F_4 - F_2)$$

...

$$+ (F_n + F_{n-2})$$

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em \emptyset é $a_0 = 1$.

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em \emptyset é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ podemos obter de seguinte modo:

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em \emptyset é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n ; depois

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em \emptyset é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n ; depois
- podemos inserir $n + 1$, aqui há $n + 1$ possibilidades.

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em \emptyset é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n ; depois
- podemos inserir $n + 1$, aqui há $n + 1$ possibilidades.

Pelo princípio da multiplicação, o número a_{n+1} de ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ é

$$a_{n+1} = (n + 1)a_n.$$

1. Noções gerais
2. Equações de recorrência lineares
3. Equações de recorrência lineares homogêneas
4. Equações de recorrência lineares em geral
5. Equações de recorrência não lineares

1. NOÇÕES GERAIS

Definição

- Uma **equação de recorrência**^a é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \quad (*)$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

^aou relação de recorrência

Definição

- Uma **equação de recorrência**^a é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \quad (*)$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

- A equação de recorrência (*) diz-se de **ordem** k ou que tem **profundidade** k (supondo que f depende da última variável).

^aou relação de recorrência

Definição

- Uma **equação de recorrência**^a é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \quad (*)$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

- A equação de recorrência (*) diz-se de **ordem** k ou que tem **profundidade** k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se **solução** de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

^aou relação de recorrência

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Definição

- Uma **equação de recorrência**^a é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \quad (*)$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

- A equação de recorrência (*) diz-se de **ordem** k ou que tem **profundidade** k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se **solução** de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

^aou relação de recorrência

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções.

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Definição

- Uma **equação de recorrência**^a é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \quad (*)$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

- A equação de recorrência (*) diz-se de **ordem** k ou que tem **profundidade** k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se **solução** de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

^aou relação de recorrência

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções. Estamos particularmente interessados em descrever as soluções com **fórmulas fechadas**; ou seja, na forma

$a_n = \text{«uma expressão que apenas envolve a variável } n\text{»}.$

2. EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES

Definição

- Uma **equação de recorrência linear** (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \quad (*)$$

(para $n \geq k$) onde c_1, c_2, \dots, c_k ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

Definição

- Uma **equação de recorrência linear** (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \quad (*)$$

(para $n \geq k$) onde c_1, c_2, \dots, c_k ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação (*) diz-se **homogênea** quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.

Definição

- Uma **equação de recorrência linear** (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \quad (*)$$

(para $n \geq k$) onde c_1, c_2, \dots, c_k ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação (*) diz-se **homogênea** quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogênea **associada** a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES

Definição

- Uma **equação de recorrência linear** (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \quad (*)$$

(para $n \geq k$) onde c_1, c_2, \dots, c_k ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação (*) diz-se **homogênea** quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogênea **associada** a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogênea) da ordem 2.

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES

Definição

- Uma **equação de recorrência linear** (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \quad (*)$$

(para $n \geq k$) onde c_1, c_2, \dots, c_k ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação (*) diz-se **homogênea** quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogênea **associada** a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogênea) da ordem 2.
- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2}$ é a equação homogênea associada.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogênea mas **não tem coeficientes constantes**.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogênea mas **não tem coeficientes constantes**.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ ($n \geq 2$) é uma equação de recorrência linear homogênea (de coeficientes constantes).

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogênea mas **não tem coeficientes constantes**.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ ($n \geq 2$) é uma equação de recorrência linear homogênea (de coeficientes constantes).

Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = 3n \quad (n \in \mathbb{N})$$

é solução desta equação.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas **não tem coeficientes constantes**.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ ($n \geq 2$) é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = 3n \quad (n \in \mathbb{N})$$

é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ &= 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n. \end{aligned}$$

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogênea mas **não tem coeficientes constantes**.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ ($n \geq 2$) é uma equação de recorrência linear homogênea (de coeficientes constantes).

Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = 3n \quad (n \in \mathbb{N})$$

é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ &= 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n. \end{aligned}$$

Um cálculo semelhante revela que as sucessões

$$(0)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (1)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (5n+2)_{n \in \mathbb{N}}$$

são soluções da equação acima.

COMO RESOLVER EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$X_n = c_1 X_{n-1} + c_2 X_{n-2} + \cdots + c_k X_{n-k} + d_n \quad (*)$$

obtém-se como

uma solução particular de ().*

+

todas as soluções da equação homogênea associada à equação ().*

COMO RESOLVER EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n \quad (*)$$

obtem-se como

uma solução particular de ().*

+

todas as soluções da equação homogênea associada à equação ().*

Nota

Um resultado deste tipo já conhecemos de

- ALGA \rightsquigarrow resolver equações lineares;
- Cálculo II \rightsquigarrow resolver equações diferenciais lineares.

COMO RESOLVER EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$X_n = c_1 X_{n-1} + c_2 X_{n-2} + \cdots + c_k X_{n-k} + d_n \quad (*)$$

obtém-se como

uma solução particular de ().*

+

todas as soluções da equação homogênea associada à equação ().*

Demonstração.

- Se b é uma solução de (*) e a é uma solução da equação homogênea associada, então $a + b$ é uma solução de (*).

COMO RESOLVER EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n \quad (*)$$

obtém-se como

uma solução particular de ().*

+

todas as soluções da equação homogênea associada à equação ().*

Demonstração.

- Se b é uma solução de (*) e a é uma solução da equação homogênea associada, então $a + b$ é uma solução de (*).
- Se b_1 e b_0 são soluções de (*), então $b_1 - b_0$ é uma solução da equação homogênea associada, e $b_1 = b_0 + (b_1 - b_0)$.



3. EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} \quad (*)$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogênea de ordem k .

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (*)$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogênea de ordem k .

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (*)$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogênea de ordem k .

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

$$\mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k \longrightarrow \{\text{as soluções de (*)}\}$$

$$(a_0, \dots, a_{k-1}) \longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots)$$

é um isomorfismo;

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (*)$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogênea de ordem k .

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

$$\mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k \longrightarrow \{\text{as soluções de (*)}\}$$

$$(a_0, \dots, a_{k-1}) \longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots)$$

é um isomorfismo; logo: $\dim\{\text{as soluções de (*)}\} = k$.

O ESPAÇO DAS SOLUÇÕES

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (*)$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogênea de ordem k .

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

$$\mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k \longrightarrow \{\text{as soluções de (*)}\}$$

$$(a_0, \dots, a_{k-1}) \longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots)$$

é um isomorfismo; logo: $\dim\{\text{as soluções de (*)}\} = k$.

Conclusão

Para descrever todas as soluções de (*), procuramos k soluções de (*) linearmente independente.

A EQUAÇÃO CARATERÍSTICA

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = X_n - c_1 X_{n-1} - c_2 X_{n-2} - \cdots - c_k X_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0). \quad (*)$$

A EQUAÇÃO CARATERÍSTICA

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0). \quad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções?

A EQUAÇÃO CARATERÍSTICA

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0). \quad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$,

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0). \quad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k} (q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0). \quad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma solução? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k} (q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é solução de $(*)$ se e somente se

$$0 = \underbrace{q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k}_{\text{polinômio em } q \text{ de grau } k}.$$

A EQUAÇÃO CARATERÍSTICA

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0). \quad (*)$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k} (q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é solução de $(*)$ se e somente se

$$0 = \underbrace{q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k}_{\text{polinómio em } q \text{ de grau } k}.$$

A equação acima diz-se **equação caraterística** de $(*)$.

UM EXEMPLO

Exemplo

Procuramos todas as soluções da equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

UM EXEMPLO

Exemplo

Procuramos todas as soluções da equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

A equação característica é

$$0 = q^2 - q - 2 =$$

Exemplo

Procuramos todas as soluções da equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

A equação característica é

$$0 = q^2 - q - 2 =$$

Nota: As raízes **inteiras** de um polinômio da forma

$$q^n + \dots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Exemplo

Procuramos todas as soluções da equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

A equação característica é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q - 2)$$

Nota: As raízes **inteiras** de um polinômio da forma

$$q^n + \dots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Exemplo

Procuramos todas as soluções da equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

A equação característica é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q - 2)(q + 1),$$

Nota: As raízes **inteiras** de um polinômio da forma

$$q^n + \cdots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q - 2)(q + 1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$.

Exemplo

Procuramos todas as soluções da equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

A equação característica é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q - 2)(q + 1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Verifica-se que as sucessões

$$(2^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

são linearmente independentes^a; portanto,

^aMais tarde veremos que são vetores próprios associados a valores próprios diferentes.

Exemplo

Procuramos todas as soluções da equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (*)$$

A equação característica é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q - 2)(q + 1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Verifica-se que as sucessões

$$(2^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

são linearmente independentes^a; portanto, todas as soluções (reais) da equação (*) tem a forma

$$(\alpha 2^n + \beta (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

^aMais tarde veremos que são vetores próprios associados a valores próprios diferentes.

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos **a** solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação);

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos **a** solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \quad (\text{o caso } n = 0) \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \quad (\text{o caso } n = 1).$$

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos **a** solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \quad (\text{o caso } n = 0) \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \quad (\text{o caso } n = 1).$$

Resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos **a** solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \quad (\text{o caso } n = 0) \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \quad (\text{o caso } n = 1).$$

Resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Assim, a solução é a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Corolário

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0). \quad (*)$$

Se a equação característica

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

de (*) têm as k soluções (diferentes) q_1, q_2, \dots, q_k , então as soluções de (*) são precisamente as combinações lineares das sucessões^a $(q_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (q_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$; ou seja, as sucessões da forma

$$(c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

com constantes c_1, c_2, \dots, c_k .

^alinearmente independente

OS NÚMEROS DE FIBONACCI OUTRA VEZ ...

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

OS NÚMEROS DE FIBONACCI OUTRA VEZ ...

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogênea

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

consideremos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem as duas soluções:

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

e

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

OS NÚMEROS DE FIBONACCI OUTRA VEZ ...

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogênea

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

consideremos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem as duas soluções:

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, todas as soluções da equação homogênea são combinações lineares das sucessões $(\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Em particular,

$$(F_n)_{n \in \mathbb{N}} = \alpha(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

OS NÚMEROS DE FIBONACCI OUTRA VEZ ...

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = 1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \quad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}^{\phi}.$$

^aJacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matemático francês.

OS NÚMEROS DE FIBONACCI OUTRA VEZ ...

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = 1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \quad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}^{\phi}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \phi & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \phi - \psi & (1 - \psi) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1 - \psi}{\phi - \psi} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$.

^aJacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matemático francês.

OS NÚMEROS DE FIBONACCI OUTRA VEZ ...

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = 1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \quad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}^{\phi}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \phi & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \phi - \psi & (1 - \psi) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1-\psi}{\phi-\psi} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$. Portanto, obtém-se a fórmula de Binet^a:

$$F_n = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

^aJacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matemático francês.

SOBRE O NÚMERO DE OURO

Nota

$\phi = 1.618033988749894\dots$ é o **número de ouro**, e

$$\psi = \frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\dots$$

SOBRE O NÚMERO DE OURO

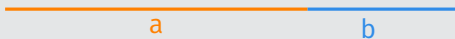
Nota

$\phi = 1.618033988749894 \dots$ é o **número de ouro**, e

$$\psi = \frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894 \dots$$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

SOBRE O NÚMERO DE OURO

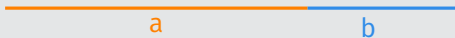
Nota

$\phi = 1.618033988749894\dots$ é o **número de ouro**, e

$$\psi = \frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.618033988749894\dots$$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ , então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

SOBRE O NÚMERO DE OURO

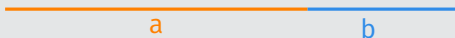
Nota

$\phi = 1.618033988749894 \dots$ é o **número de ouro**, e

$$\psi = \frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.618033988749894 \dots$$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ , então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

ou seja, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$,

SOBRE O NÚMERO DE OURO

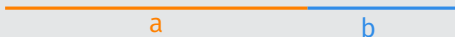
Nota

$\phi = 1.618033988749894 \dots$ é o **número de ouro**, e

$$\psi = \frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.618033988749894 \dots$$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ , então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

ou seja, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, o que implica $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (a única raiz positiva).

LIMITE DA RAZÃO ENTRE NÚMEROS DE FIBONACCI

Nota

Utilizando a fórmula de Binet:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n} = \phi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n} \longrightarrow \phi$$

para $n \rightarrow \infty$ porque $\left|\frac{\psi}{\phi}\right| < 1$.

RESUMO (RESOLVER EQ. DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k}$.

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.

RESUMO (RESOLVER EQ. DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$.

- Obter a equação característica

$$0 = q^k - c_1q^{k-1} - c_2q^{k-2} - \dots - c_k$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação característica: $0 = q^3$

RESUMO (RESOLVER EQ. DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$.

- Obter a equação característica

$$0 = q^k - c_1q^{k-1} - c_2q^{k-2} - \dots - c_k$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação característica: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2$

RESUMO (RESOLVER EQ. DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1q^{k-1} - c_2q^{k-2} - \dots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\dots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q -$

RESUMO (RESOLVER EQ. DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1q^{k-1} - c_2q^{k-2} - \dots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\dots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q$

RESUMO (RESOLVER EQ. DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1q^{k-1} - c_2q^{k-2} - \dots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\dots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q + 1)(q$

RESUMO (RESOLVER EQ. DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$.

- Obter a equação característica

$$0 = q^k - c_1q^{k-1} - c_2q^{k-2} - \dots - c_k$$

- e obter as soluções da equação característica:

$$\dots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação característica: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q + 1)(q + 2)$.

RESUMO (RESOLVER EQ. DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1q^{k-1} - c_2q^{k-2} - \dots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\dots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$

- Se obtemos k soluções diferentes, então todas as soluções da equação de recorrência tem a forma

$$(C_1q_1^n + C_2q_2^n + \dots + C_kq_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

com constantes C_1, C_2, \dots, C_k .

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q + 1)(q + 2)$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q - 1)(q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q - 1)(q + 2)(q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q - 1)(q + 2)(q - 1)$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q - 1)(q + 2)(q - 1) = (q - 1)^2(q + 2).$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q - 1)(q + 2)(q - 1) = (q - 1)^2(q + 2).$$

E agora? Temos apenas as duas soluções independentes

$$(1^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \dots$$

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS (CASO GERAL)

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0) \quad (*)$$

com a equação característica

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \cdots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ e $n_i > 0$.

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS (CASO GERAL)

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0) \quad (*)$$

com a equação característica

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \cdots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ e $n_i > 0$. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das k sucessões

$$(q_1^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(q_2^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

\dots

$$(q_l^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS (CASO GERAL)

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0) \quad (*)$$

com a equação característica

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \cdots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ e $n_i > 0$. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das k sucessões

$$(q_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (n \cdot q_1^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(q_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (n \cdot q_2^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

...

$$(q_l^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (n \cdot q_l^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES HOMOGÊNEAS (CASO GERAL)

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1, c_k \neq 0) \quad (*)$$

com a equação característica

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \cdots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ e $n_i > 0$. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das k sucessões

$$\begin{array}{ccccccc} (q_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, & (n \cdot q_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, & \cdots & (n^{n_1-1} \cdot q_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ (q_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, & (n \cdot q_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, & \cdots & (n^{n_2-1} \cdot q_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \vdots & & & & \\ (q_l^n)_{n \in \mathbb{N}}, & (n \cdot q_l^n)_{n \in \mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_l^n)_{n \in \mathbb{N}}, & \cdots & (n^{n_l-1} \cdot q_l^n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 18$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 18$.

A equação característica é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q - 1)(q - 2)(q - 2) = (q - 1)(q - 2)^2;$$

portanto, as soluções da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogênea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 18$.

A equação característica é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q - 1)(q - 2)(q - 2) = (q - 1)(q - 2)^2;$$

portanto, as soluções da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Considerando os valores iniciais, procuramos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha + 2\beta + 2\gamma = 4, \quad \alpha + 4\beta + 8\gamma = 18.$$

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\alpha + \beta = 0,$$

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma = 4,$$

$$\alpha + 4\beta + 8\gamma = 18$$

reduz ($\alpha = -\beta$) ao sistema

$$\beta + 2\gamma = 4,$$

$$3\beta + 8\gamma = 18;$$

cujas soluções são $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$.

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\alpha + \beta = 0,$$

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma = 4,$$

$$\alpha + 4\beta + 8\gamma = 18$$

reduz ($\alpha = -\beta$) ao sistema

$$\beta + 2\gamma = 4,$$

$$3\beta + 8\gamma = 18;$$

cujas soluções são $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$. Assim, a solução da equação de recorrência com os valores iniciais é a sucessão

$$(2 - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot n \cdot 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida por

$$S((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida por

$$S((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k}$$

se e somente se

$$\begin{aligned} \text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1 S^{n-1}(a) - \cdots - c_k S^{n-k}(a) \\ &= (S^n - c_1 S^{n-1} - \cdots - c_k S^{n-k})(a) \\ &= S^{n-k} \circ (S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \text{id})(a), \end{aligned}$$

para cada $n \geq k$.

A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida por

$$S((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k}$$

se e somente se

$$\begin{aligned} \text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1 S^{n-1}(a) - \cdots - c_k S^{n-k}(a) \\ &= (S^n - c_1 S^{n-1} - \cdots - c_k S^{n-k})(a) \\ &= S^{n-k} \circ (S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \text{id})(a), \end{aligned}$$

para cada $n \geq k$. Veremos agora quais sucessões a função linear

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \text{id}$$

anula.

A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \dots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação característica,

A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \dots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação característica, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \dots - c_k \text{id} = (S - q_1 \text{id})^{n_1} \circ \dots \circ (S - q_k \text{id})^{n_k}.$$

A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \dots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \dots - c_k \text{id} = (S - q_1 \text{id})^{n_1} \circ \dots \circ (S - q_k \text{id})^{n_k}.$$

«A chave» da prova do teorema é o seguinte lema.

A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \dots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \dots - c_k \text{id} = (S - q_1 \text{id})^{n_1} \circ \dots \circ (S - q_k \text{id})^{n_k}.$$

«A chave» da prova do teorema é o seguinte lema.

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q \text{id})^m$ anula as sucessões

$$(q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (n \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (n^2 \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \dots \quad (n^{m-1} \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

A DEMONSTRAÇÃO DO LEMA

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q \text{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad s_2 = (n \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \dots \quad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

A DEMONSTRAÇÃO DO LEMA

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q \text{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad s_2 = (n \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \dots \quad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Para $m = 1$: $S((q^n)_{n \in \mathbb{N}}) = (q^{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = q(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$; ou seja

$$(S - q \text{id})(s_1) = \text{a sucessão nula}.$$

Nota: Portanto, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um vetor próprio de S com valor próprio q .

A DEMONSTRAÇÃO DO LEMA

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q \text{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad s_2 = (n \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \dots \quad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q \text{id})^{m-1}$ anula s_1, \dots, s_{m-1} . Logo, $(S - q \text{id})^m$ também anula s_1, \dots, s_{m-1} .

A DEMONSTRAÇÃO DO LEMA

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q \text{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad s_2 = (n \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \dots \quad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q \text{id})^{m-1}$ anula s_1, \dots, s_{m-1} . Logo, $(S - q \text{id})^m$ também anula s_1, \dots, s_{m-1} . Calculamos primeiro, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $(S - q \text{id})(s_m)$:

$$\begin{aligned} (n+1)^{m-1} \cdot q^{n+1} - n^{m-1} q^{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^{n+1} \right) - n^{m-1} q^{n+1} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q \cdot \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^n \right)}_{\text{combinação linear do termo } n \text{ de } s_1, \dots, s_{m-1}} ; \end{aligned}$$

A DEMONSTRAÇÃO DO LEMA

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q \text{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad s_2 = (n \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \dots \quad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q \text{id})^{m-1}$ anula s_1, \dots, s_{m-1} . Logo, $(S - q \text{id})^m$ também anula s_1, \dots, s_{m-1} . Calculamos primeiro, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $(S - q \text{id})(s_m)$:

$$\begin{aligned} (n+1)^{m-1} \cdot q^{n+1} - n^{m-1} q^{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^{n+1} \right) - n^{m-1} q^{n+1} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q \cdot \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^n \right)}_{\text{combinação linear do termo } n \text{ de } s_1, \dots, s_{m-1}}; \end{aligned}$$

Logo, $(S - q \text{id})(s_m) = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_{m-1} s_{m-1}$ e por isso

$$(S - q \text{id})^m(s_m) = \text{a sucessão nula.}$$



... E SE AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinômio característico de uma equação de recorrência linear homogênea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{z} = a - ib.$$

... E SE AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinômio característico de uma equação de recorrência linear homogênea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$b = (\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

... E SE AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinômio característico de uma equação de recorrência linear homogênea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$b = (\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- $z = a + ib = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).

... E SE AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinômio característico de uma equação de recorrência linear homogênea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)))_{n \in \mathbb{N}},$$

$$b = (\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) - i \operatorname{sen}(\varphi)))_{n \in \mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).

... E SE AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinômio característico de uma equação de recorrência linear homogênea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)))_{n \in \mathbb{N}},$$

$$b = (\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) - i \operatorname{sen}(\varphi)))_{n \in \mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).

- $(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi).$

Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês.

... E SE AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinômio característico de uma equação de recorrência linear homogênea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)))_{n \in \mathbb{N}},$$

$$b = (\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i \operatorname{sen}(n\varphi)))_{n \in \mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).

- $(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi).$

Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês.

... E SE AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinômio característico de uma equação de recorrência linear homogênea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)))_{n \in \mathbb{N}},$$

$$b = (\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i \operatorname{sen}(n\varphi)))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Assim, obtemos as soluções (linearmente independentes)

$$\frac{a + b}{2} = (r^n \cos(n\varphi))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \frac{a - b}{2i} = (r^n \operatorname{sen}(n\varphi))_{n \in \mathbb{N}}.$$

... E SE AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinômio característico de uma equação de recorrência linear homogênea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)))_{n \in \mathbb{N}},$$

$$b = (\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i \operatorname{sen}(n\varphi)))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Assim, obtemos as soluções (linearmente independentes)

$$\frac{a + b}{2} = (r^n \cos(n\varphi))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \frac{a - b}{2i} = (r^n \operatorname{sen}(n\varphi))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Finalmente, se z e \bar{z} são raízes múltiplas, consideremos

$$\dots, (r^n n^j \cos(n\varphi))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (r^n n^j \operatorname{sen}(n\varphi))_{n \in \mathbb{N}}, \dots$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{com} \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{com} \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

A correspondente equação característica é $0 = q^2 - q + 1$,

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{com} \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

A correspondente equação característica é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{com} \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

A correspondente equação característica é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{com } a_0 = 0, a_1 = 1.$$

A correspondente equação característica é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{com} \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

A correspondente equação característica é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$,

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{com} \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

A correspondente equação característica é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$, e com $a_1 = 1$ obtemos

$$1 = \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \beta \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \text{com} \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

A correspondente equação característica é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$, e com $a_1 = 1$ obtemos

$$1 = \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \beta \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, a solução é a sucessão $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES EM GERAL

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES EM GERAL

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \quad (*)$$

obtém-se como

todas as soluções da equação homogênea associada à (*)

+

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES EM GERAL

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \quad (*)$$

obtem-se como

todas as soluções da equação homogênea associada à (*)

+

uma solução particular de (*)

.

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES EM GERAL

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \quad (*)$$

obtém-se como

todas as soluções da equação homogênea associada à (*)

+

uma solução particular de (*)

.

Nota

- Já sabemos resolver a primeira questão.

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES EM GERAL

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n \quad (*)$$

obtem-se como

todas as soluções da equação homogênea associada à (*)

+

uma solução particular de (*)

.

Nota

- Já sabemos resolver a primeira questão.
- Estudamos agora métodos para obter uma solução particular de (*).

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n$.

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação característica

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \quad \text{resp.} \quad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação característica
(mais geral, se p é solução da equação característica de multiplicidade m).

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \quad \text{resp.} \quad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação característica (mais geral, se p é solução da equação característica de multiplicidade m).

(B) Se $d_n = \text{um polinômio em } n \text{ de grau } j$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1n + \cdots + A_jn^j \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação característica respetivamente

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \quad \text{resp.} \quad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação característica (mais geral, se p é solução da equação característica de multiplicidade m).

(B) Se $d_n = \text{um polinômio em } n \text{ de grau } j$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1n + \cdots + A_jn^j \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação característica respectivamente

$$b_n = (A_0 + A_1n + \cdots + A_jn^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 é solução da equação característica de multiplicidade m .

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \quad \text{resp.} \quad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação característica (mais geral, se p é solução da equação característica de multiplicidade m).

(B) Se $d_n = \text{um polinômio em } n \text{ de grau } j$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1n + \cdots + A_jn^j \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação característica respectivamente

$$b_n = (A_0 + A_1n + \cdots + A_jn^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 é solução da equação característica de multiplicidade m .

Os valores dos parâmetros A, A_i obtêm-se substituindo b_n na equação de recorrência dada.

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogênea associada, cuja equação característica é

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogênea associada, cuja equação característica é

$$0 = q^2 - 3q + 2 =$$

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogênea associada, cuja equação característica é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q - 2)(q - 1).$$

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogênea associada, cuja equação característica é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q - 2)(q - 1).$$

Portanto, a solução geral da equação de recorrência homogênea é a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n = \alpha + \beta \cdot 2^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

Logo, uma solução da equação de recorrência acima é $(n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta + 4 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -6 & = & \alpha + 2\beta \end{array}.$$

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta + 4 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -6 & = & \alpha + 2\beta \end{array}.$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta = -6$ e por isso $\alpha = 6$.

UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta + 4 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -6 & = & \alpha + 2\beta \end{array}.$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta = -6$ e por isso $\alpha = 6$.

Portanto, a solução é

$$(6 - 6 \cdot 2^n + n2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Teorema

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)} + \cdots + d_n^{(m)} \quad (*)$$

uma equação de recorrência linear e suponhamos que as sucessões $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, ..., $b^{(m)}$ são soluções de

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)},$$

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(2)},$$

$$\vdots$$

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(m)},$$

respetivamente. Então, a sucessão $b^{(1)} + \cdots + b^{(m)}$ é uma solução de (*).

MAIS UM EXEMPLO

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1 + n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1 + n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1 + n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogênea associada,

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1 + n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogênea associada, $(b_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1 + n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogênea associada, $(b_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots,$$

e $(b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + (1 + n), \quad n = 2, 3, \dots$$

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Falta determinar **uma solução** da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots$$

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Falta determinar **uma solução** da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinômio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q - 2)(q - 1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$.

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Falta determinar **uma solução** da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinômio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q - 2)(q - 1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Falta determinar **uma solução** da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinômio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q - 2)(q - 1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

Portanto, a solução geral da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1 + n), \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por

$$(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquela solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquela solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta + 4 - \frac{7+1}{2} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta \end{array} ;$$

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquela solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta + 4 - \frac{7+1}{2} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta \end{array} ;$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquela solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$(\alpha + \beta 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta + 4 - \frac{7+1}{2} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ -2 & = & \alpha + 2\beta \end{array} ;$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

Logo, a solução da equação de recorrência dada com as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$ é

$$(2 - 2 \cdot 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n \in \mathbb{N}}.$$

5. EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA NÃO LINEARES

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA NÃO LINEARES

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos x_{n-1}, \dots, x_{n-k} .

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA NÃO LINEARES

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos x_{n-1}, \dots, x_{n-k} . Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando uma substituição adequada.

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA NÃO LINEARES

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos x_{n-1}, \dots, x_{n-k} . Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando uma substituição adequada.

Exemplo (substituição «simples»)

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \quad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$; aqui suponhamos $x_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA NÃO LINEARES

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos x_{n-1}, \dots, x_{n-k} . Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando uma substituição adequada.

Exemplo (substituição «simples»)

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \quad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$; aqui suponhamos $x_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Escrevendo $y_n = x_n^2$, esta equação de recorrência não linear transforma-se na equação de recorrência linear

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \quad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $y_0 = x_0^2 = 4$.

EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \quad (n \geq 1), \quad y_0 = 4.$$

EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \quad (n \geq 1), \quad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogênea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \quad (n \geq 1), \quad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo «não homogéneo» é o polinómio 1 de grau zero, e como 1 não é raiz do polinómio característico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.

EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \quad (n \geq 1), \quad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogênea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo «não homogêneo» é o polinômio 1 de grau zero, e como 1 não é raiz do polinômio característico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.
- Consequentemente, as soluções desta equação de recorrência são precisamente as sucessões $(c \cdot 2^n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$, com $c \in \mathbb{R}$.
Tendo em conta a condição inicial $y_0 = 4$, obtemos $c = 5$; assim, a solução da equação $x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1$ com $x_0 = 2$ é a sucessão

$$(\sqrt{5 \cdot 2^n - 1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

UTILIZAR O «LINEARIZATOR»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

UTILIZAR O «LINEARIZATOR»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

UTILIZAR O «LINEARIZATOR»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

UTILIZAR O «LINEARIZATOR»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad y_0 = y_1 = 1;$$

UTILIZAR O «LINEARIZATOR»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad y_0 = y_1 = 1;$$

cuja solução é a sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci.

UTILIZAR O «LINEARIZATOR»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a solução da equação acima com as condições iniciais é

$$(2^{F_n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$.

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$,

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ ($n \geq 2$);

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ ($n \geq 2$); o que é equivalente a

$$2 \log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \quad (n \geq 2).$$

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ ($n \geq 2$); o que é equivalente a

$$2 \log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \quad (n \geq 2).$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

com a condição inicial $y_1 = 1$.

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\frac{1}{2}\right) + 1;$$

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\frac{1}{2}\right) + 1;$$

logo, $c = 0$.

MAIS UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\frac{1}{2}\right) + 1;$$

logo, $c = 0$. Portanto, para todo o $n \geq 1$,

$$x_n = 2^{y_n} = 2,$$

e $x_0 = 4$.

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$.

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$. Portanto, a solução geral da equação acima é dada por

$$(n! \cdot c)_{n \in \mathbb{N}} \quad (c \in \mathbb{R}).$$