**Universidade de Aveiro**
**Departamento de Matemática**

**Cálculo II - Agrupamento 4** **2021/22**

**Folha 1:** *Séries de Potências — Fórmula de Taylor — Série de Taylor*

---

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ ; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$ ; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$ ; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ ; (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$ ;

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$ ; (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3} x^n$ ; (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$ ;

   ew

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$ ; (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$ ; (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n$ .

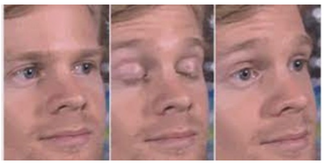
2. Mostre que:

   (a) se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo;

   (b) se o domínio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $]-r, r]$, então a série é simplesmente convergente em $x = r$.

3. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

   (a) $T_0^3(x^3+2x+1)$;
   (b) $T_\pi^3(\cos x)$;
   (c) $T_1^3(xe^x)$;
   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x)$;
   (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x)$;
   (f) $T_1^n(\ln x)$ $(n \in \mathbb{N})$.



4. Considere $f(x) = e^x$.

   (a) Escreva a fórmula de Mac~~Laurin~~Donalds de ordem $n$ da função $f$.
   (b) Mostre que o polinómio de Mac~~Laurin~~Donalds de ordem $n$ permite aproximar $e^x$ no intervalo $]-1, 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.
   (c) Escolha um dos polinómios de Mac~~Laurin~~Donalds de $f$ e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de $\operatorname{sen}(3)$ quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

6. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

7. (a) Obtenha o polinómio de Taylor de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $c = 1$.

   (b) Determine um valor de $n$ para o qual se garanta que o polinómio $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$, obtido na alínea anterior, aproxime $\frac{1}{x}$ no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a $10^{-3}$.

8. Determine o menor valor de $n$ tal que o polinómio de MacLaurin de ordem $n$ da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a $10^{-3}$.

9. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1 + x) \leq x$, para todo $x > -1$.

10. Partindo da representação

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

determine uma representação em série de potências para cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo onde tal representação é válida:

$$\text{(a) } \frac{1}{1-3x}\,; \qquad \text{(b) } \frac{2}{2+x}\,; \qquad \text{(c) } \frac{1}{x}\,.$$

11. Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x - 3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

**Universidade de Aveiro**
**Departamento de Matemática**

**Cálculo II - Agrupamento 4** **2021/22**

**Folha 1:** *Soluções*

---

1. (a) $]-1,1[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (b) $\mathbb{R}$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (c) $]-1,1]$, sendo simplesmente convergente em $x=1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (d) $[1,2[$, sendo simplesmente convergente em $x=1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (e) $\mathbb{R}$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (f) $\{2\}$, sendo absolutamente convergente nesse ponto.
   (g) $[-3,-1[$, sendo simplesmente convergente em $x=-3$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (h) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (i) $[-1,1[$, sendo simplesmente convergente em $x=-1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (j) $\left]-\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right]$, sendo simplesmente convergente em $x=\frac{8}{3}$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (k) $]0,4[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (l) $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, sendo simplesmente convergente em $x=\frac{1}{2}$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.

2. —

3. (a) $T_0^3(x^3+2x+1)=x^3+2x+1$
   (b) $T_\pi^3(\cos x)=-1+\frac{(x-\pi)^2}{2}$
   (c) $T_1^3(xe^x)=e+2e(x-1)+\frac{3}{2}e(x-1)^2+\frac{2}{3}e(x-1)^3$
   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$
   (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$
   (f) $T_1^n(\ln x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

4. (a) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum $\theta$ entre 0 e $x$.
   (b) —
   (c) Por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{e}}\simeq T_0^2 f(-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}=0.625$, com erro inferior a $\frac{1}{6}$.

5. $|R_5(3)|\le\frac{(3-\pi)^6}{6!}$

6. —

7. (a) $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)=1-(x-1)+(x-1)^2+\cdots+(-1)^n(x-1)^n\,,\quad n\in\mathbb{N}$.
   (b) $n=3$ (ou outro superior a este).

8. $n = 6$.

9. —

10. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$, para $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$;

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$, para $-2 < x < 2$;

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, para $0 < x < 2$.

11. $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-3)^n\,, \qquad x \in ]-1, 7[.$

1 – a) $R = \lim_{x \to +\infty} \frac{|m(m+1)|}{|(m+1)(m+2)|} = \lim_{m \to +\infty} \frac{m}{m+2} = 1$     $I.C = ]0-1, 0+1[ = ]-1,1[$

Para $x = 1$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) \to \lim_{m \to +\infty} m(m+1) = +\infty \to \text{Logo diverge em } x=1$$

Para $x = -1$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(-1)^m \to \text{série alternada}$$

Pelo critério de Leibniz $\lim_{m \to +\infty} m(m+1) = +\infty$, logo a série é divergente em $x = -1$.

$D.C = ]-1,1[$, convergência absoluta em todo o intervalo

b) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2x)^m}{(m-1)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m}{(m-1)!} x^m$

$$R = \lim_{m \to +\infty} \frac{\left|\frac{2^m}{(m-1)!}\right|}{\left|\frac{2^{m+1}}{m!}\right|} = \lim_{m \to +\infty} \frac{2^m \times m!}{2^{m+1}(m-1)!} = \lim_{m \to +\infty} \frac{m(m-1)!}{2(m-1)!} = \lim_{m \to +\infty} \frac{m}{2} = +\infty$$

$D.C = \mathbb{R}$, convergência absoluta em todo o intervalo

c) $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} x^{m+1}$     $I.C = ]0-1, 0+1[ = ]-1,1[$

$$R = \lim_{m \to +\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^m}{m+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+2}\right|} = \lim_{m \to +\infty} \frac{m+2}{m+1} = 1$$

Para $x = -1$:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{m+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{-1}{m+1}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left|\frac{-1}{m+1}\right| = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m+1}$$

Pelo critério do limite e $b_m = \frac{1}{m}$:

$$L = \lim_{m \to +\infty} \frac{\frac{1}{m+1}}{\frac{1}{m}} = \lim_{m \to +\infty} \frac{m}{m+1} = 1$$

Concluindo como $L = 1 \in \mathbb{R}^+$, as duas séries têm a mesma natureza e como $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$, esta é divergente, logo para $x = -1$ a série é divergente.

Para $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \to \text{série alternada}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \to$$ Como verificado acima, esta série é divergente

Pelo critério de Leibniz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$, a sucessão é monótona decrescente

Concluímos que a série é convergente em $x = 1$.

D.C $= ]-1, 1]$, convergência simples em $x = 1$ e convergência absoluta nos restantes pontos do intervalo

d) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+4} \times \left(2\left(x - \frac{3}{2}\right)\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2n+4} \left(x - \frac{3}{2}\right)^n$$

I.C $= \left]\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right[ = ]1, 2[$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{2n+4}}{\frac{2^{n+1}}{2n+5}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(2n+5)}{2^{n+1}(2n+4)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+5}{2n+4} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Para $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+4}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n+4} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+4}$$

Pelo critério do limite e $b_n = \frac{1}{n}$:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+4} = \frac{1}{2}$$

Como $L = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$ as duas séries têm a mesma natureza e como $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$, esta é divergente, logo a série principal é divergente também

Pelo critério de Leibniz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+4} = 0$$

$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+6} - \frac{1}{2n+4} = \frac{2n+4}{(2n+6)(2n+4)} - \frac{2n+6}{(2n+6)(2n+4)} = \frac{-2}{(2n+6)(2n+4)} < 0$$ , $\forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão é monótona decrescente

Concluimos que a série é convergente em $x=1$.

Para $x=2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+4}$$

Pelo critério do limite e $b_n = \frac{1}{n}$:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+4} = \frac{1}{2}$$

Concluimos que como $L = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$ as duas séries têm a mesma natureza e como $b_n = \frac{1}{n}$ é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$, esta é divergente, logo a série principal também é divergente.

D.C $= [1, 2[$, convergência simples em $x=1$ e convergência absoluta no restante intervalo.

e) $$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{n^2}{n!}}{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 (n+1)!}{(n+1)^2\, n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 (n+1) n!}{(n^2+2n+1)\, n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

D.C $= \mathbb{R}$, convergência absoluta em $\mathbb{R}$.

f) $$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{n!}{n+1}}{\frac{(n+1)!}{n+2}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)\, n!}{(n+1)(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)\, n!}{(n+1)(n+1)\, n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

D.C $= \{2\}$, convergência absoluta em $x=2$.

g) $$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{\ln(n)}{n}}{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\ln(n)}{n \ln(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = 1 \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

I.C $= ]-2-1, -2+1[ = ]-3, -1[$

Para $x = -3$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n} (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\ln(n)}{n} (-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

Pelo critério do limite e $b_n = \frac{1}{n}$:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$$

Como $L = +\infty$ e a série $b_n$ é divergente, pois é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$, a série principal também é divergente.

Pelo critério de Leibniz:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} \longrightarrow \frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln(n)}{n} \longrightarrow$ a sucessão é monótona decrescente

Concluimos que a série é convergente em $x = -3$.

Para $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

Como concluimos anteriormente, a série também é divergente em $x = -1$.

D.C $= [-3, -1[$, convergência simples em $x = -3$ e convergência absoluta no restante intervalo.

h) $R = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left|\frac{3^n}{2+n^3}\right|}{\left|\frac{3^{n+1}}{2+(n+1)^3}\right|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n(2+(n+1)^3)}{3^{n+1}(2+n^3)} = \frac{1}{3} \times \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{n^3} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ $\qquad$ I.C $= ]0-\frac{1}{3}, 0+\frac{1}{3}[ = ]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$

Para $x = -\frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^3}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2+n^3}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2+n^3}$$

Pelo critério do limite e $b_n = \frac{1}{n^3}$:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{2+n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{2+n^3} = 1$$

Como $L = 1 \in \mathbb{R}^+$, as duas séries têm a mesma natureza e como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet com $\alpha = 3$, esta é convergente. Logo a série principal também é convergente.

Para $x = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2+n^3}$$

Como concluímos anteriormente, a série é convergente em $x = \frac{1}{3}$.

D.C $= \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, convergência absoluta em todo o intervalo.

**i)** $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{1}{\ln(n)}\right|}{\left|\frac{1}{\ln(n+1)}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ $\qquad$ I.C $= ]0-1, 0+1[ = ]-1,1[$

Para $x = -1$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n}}{\ln(n)}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

Pelo critério do limite e $b_n = \frac{1}{n}$:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln(n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Como $L = +\infty$ e a série $b_n$ é divergente, pois é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$, então a série principal também é divergente.

Pelo critério de Leibniz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n)} \longrightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n)} \longrightarrow$ a sucessão é monótona decrescente

Concluímos que a série é convergente em $x = -1$.

Para $x = 1$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

Como concluído anteriormente a série é divergente em $x = 1$.

D.C $= [-1, 1[$, convergência simples em $x = -1$ e convergência absoluta no restante intervalo.

**j)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n6^n}\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}$

$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n2^n}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2\times\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 2\times1 = 2$

$I.C = \left]\frac{2}{3}-2, \frac{2}{3}+2\right[ = \left]-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right[$

Para $x = -\frac{4}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6^n}{n6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

A série é divergente em $x = -\frac{4}{3}$, pois é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$.

Para $x = \frac{8}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-6)^n}{n6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} \longrightarrow$ Série divergente, pois é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$.

Pelo critério de Leibniz:

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$

$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$, sucessão monótona decrescente

Concluímos que a série é convergente em $x = \frac{8}{3}$.

$D.C = \left]-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$, convergência simples em $x = \frac{8}{3}$ e convergência absoluta no restante intervalo

**k)** $R = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{n+1}{2^n}\right|}{\left|\frac{n+2}{2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{(n+2)2^n} = 2\times\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = 2\times1 = 2$

$I.C = ]2-2, 2+2[ = ]0, 4[$

Para $x = 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^n$$

Pelo critério de Leibniz:

$\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$

Concluímos que a série é divergente em $x = 0$

Caso $x=4$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n+1 \rightarrow \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

Concluímos que a série é divergente em $x=4$

D.C $= ]0,4[$, convergência absoluta em todo o intervalo.

l) $R = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left|\frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}}\right|}{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{2n+2}}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n\sqrt{2n+2}}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2} \times \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n+2}{2n+1}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+2}{2n+1}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{1} = \frac{1}{2}$ I.C $= \left]0-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}\right[ = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Caso $x = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Pelo critério do limite e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Como $L = \sqrt{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^+$, as duas séries têm a mesma natureza e como $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet com $\alpha = \frac{1}{2}$ ela é divergente, logo a principal também é divergente

Caso $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ → Série divergente como visto anteriormente.

Pelo critério de Leibniz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$$

$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2n+2}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ → sucessão monótona decrescente

Concluímos que a série é convergente em $x = \frac{1}{2}$.

D.C $= \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, convergência simples em $x = \frac{1}{2}$ e convergência absoluta no restante intervalo.

② – a) Sendo $c=0$ e $R=r$ temos que $I.C = ]0-r, 0+r[ = ]-r, r[$

Para $x=-r$:

Consideremos que a série é absolutamente convergente em $x=-r$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(-r)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n$$

Para $x = r$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \rightarrow$ concluimos acima que esta série é absolutamente convergente

Concluimos assim que se esta série é absolutamente convergente num extremo do domínio de convergência, então também é no outro.

b) Para $x = r$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \rightarrow$ se é simplesmente convergente, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n$ é divergente, logo $a_n$ é uma série alternada

Para $x=-r$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-r)^n$ corresponde a uma série com a mesma natureza que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n$, logo são ambas divergentes.

Concluimos assim que esta série de domínio de convergência $]-r, r]$, é simplesmente convergente em $x=r$.

③ – a) $T_0^3(x^3+2x+1) = x^3+2x+1$

b) $T_\pi^3(\cos(x)) = \sum_{n=0}^{3} \frac{\cos^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n = \frac{\cos(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{-\text{sen}(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{-\cos(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{\text{sen}(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$

c) $T_1^3(xe^x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{(xe^x)^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \frac{1e^1}{0!}(x-1)^0 + \frac{e^1+1e^1}{1!}(x-1)^1 + \frac{2e^1+1e^1}{2!}(x-1)^2 + \frac{3e^1+1e^1}{3!}(x-1)^3 = e + 2e(x-1) + \frac{3e(x-1)^2}{2} + \frac{2e(x-1)^3}{3}$

d) $T_0^5(\text{sen}(x)) = \sum_{n=0}^{5} \frac{\text{sen}^{(k)}(0)}{n!}(x-0)^n = \frac{\text{sen}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{\cos(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{-\text{sen}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{\text{sen}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{\cos(0)}{5!}(x-0)^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

e) $T_0^6(\text{sen}(x)) = T_0^5(\text{sen}(x)) + \sum_{n=6}^{6} \frac{\text{sen}^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{-\text{sen}(0)}{6!}x^6 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

f) $T_1^n(\ln(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1))^{(k)}}{k!}(x-1)^k = \frac{\ln(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{\frac{1}{1}}{1!}(x-1)^1 + \ldots + \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{1^n}}{n!}(x-1)^n = (x-1) + \ldots + \frac{(-1)^n (n-1)!}{n!}(x-1)^n$

$(\ln(x))' = 1/x$

$(1/x)' = -1/x^2$

$(-1/x^2)' = 2/x^3$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \ln(x), \text{ se } n=0 \\ \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}, \text{ se } n>0 \end{cases}$$

Por indução matemática:

$$P(n) = f^{(n)}(x) = \begin{cases} \ln(x), \text{ se } n=0 \\ \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}, \text{ se } n>0 \end{cases}$$

$P(1) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$P(1) = \frac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{x^n} = \frac{1}{x}$

$P(n+1) = f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}\right)' = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(x^{-n})' = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(-n x^{-n-1}) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

$P(n+1) = \frac{(-1)^{n+1+1}(n+1-1)!}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2} n!}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

4 – a) $T_0^n(e^x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^0)^{(n)}}{n!}(x-0)^n = \frac{e^0}{0!}(x-0)^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0)^1 + \ldots + \frac{e^0}{n!}(x-0)^n = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

b) $M \geq \sup_{\theta \in [-1,0]} |e^{(n+1)}(\theta)| = e^0 = 1$

$\text{Erro} \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 1 \times \frac{(0-(-1))^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$

c) Considerando $n=2$:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx T_0^2 f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{n}(0)}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^0}{0!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2!} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

$\text{Erro} \leq \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(2+1)!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

5 - $M \geq \sup_{\theta \in [3,\pi]} |f^{(n+1)}(\theta)| = \sup_{\theta \in [3,\pi]} |f^{(6)}(\theta)| = \sup_{\theta \in [3,\pi]} |-\text{sen}(\theta)| = \text{sen}(3)$

$\text{Erro} \leq M \dfrac{|x-c|^{5+1}}{(5+1)!} = \text{sen}(3) \dfrac{|3-\pi|^6}{6!}$

6 - $M \geq \sup_{\theta \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(\theta)| = \sup_{\theta \in [-1,1]} |f^{(8)}(\theta)| = \sup_{\theta \in [-1,1]} |\text{sen}(\theta)| = \text{sen}(1)$

$\text{Erro} \leq M \dfrac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} = \text{sen}(1) \dfrac{|x-0|^8}{8!} = \text{sen}(1) \dfrac{x^8}{8!}$, como $x \in [-1,1]$, temos que $x^8 \in [0,1]$, logo o erro máximo será quando $x=1$

Concluímos que o erro é inferior a $\dfrac{\text{sen}(1)}{8!} \simeq 2{,}1 \times 10^{-5}$ que é inferior a $\dfrac{1}{2} \times 10^{-4}$.

7 - a) $T_1^n = \sum_{n=0}^{n} \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \dfrac{1}{0!}(x-1)^0 + \dfrac{\left(\frac{-1}{1}\right)}{1!}(x-1)^1 + \ldots + \dfrac{\frac{(-1)^n n!}{1^{n+1}}}{n!}(x-1)^n = 1-(x-1)+\ldots+(-1)^n(x-1)^n$

$(1/x)' = -1/x^2$
$(-1/x^2)' = 2/x^3$
$(2/x^3)' = -6/x^4$
$(3/x^4)' = 24/x^5$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Por indução matemática:

$\ell(n) = f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

$\ell(1) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
$\ell(1) = \dfrac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}} = \dfrac{-1 \times 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$\ell(n+1) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right)' = (-1)^n n! \times (x^{-n-1})' = (-1)^n n! (-n-1) x^{-n-2} = (-1)^n n! (-1)(n+1) x^{-n-2} =$
$= \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$

$\ell(n+1) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+1+1}} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$

**b)** $M \geq \sup_{\theta \in [0.9,1.1]} |f^{(n+1)}(\theta)| = \sup_{\theta \in [0.9,1.1]} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}} \right| = \sup_{\theta \in [0.9,1.1]} \left| \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \right| = \frac{(n+1)!}{0{,}9^{n+2}}$

$\text{Erro} \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!\,(1{,}1-0{,}9)^{n+1}}{0{,}9^{n+2}\,(n+1)!} = \frac{0{,}2^{n+1}}{0{,}9^{n+2}}$

Se $n=3$: $\text{Erro} \leq \frac{0{,}2^4}{0{,}9^4} \rightarrow > 10^{-3}$

Se $n=4$: $\text{Erro} \leq \frac{0{,}2^5}{0{,}9^5} \rightarrow < 10^{-3}$

**8** – $M \geq \sup_{\theta \in [0,1]} |f^{(n+1)}(\theta)| = \sup_{\theta \in [0,1]} |e^\theta| = e$

$\text{Erro} \leq M \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e\,|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!}$

Se $n=5$: $\text{Erro} \leq \frac{e}{6!} \rightarrow > 10^{-3}$

Se $n=6$: $\text{Erro} \leq \frac{e}{7!} \rightarrow < 10^{-3}$

**10** – **a)** $\sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n, \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

$-1 < 3x < 1 \iff -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

**b)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n, \quad -2 < x < 2$

$\frac{2}{2+x} = \frac{2}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}$

$-1 < \frac{x}{2} < 1 \iff -2 < x < 2$

**c)** $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad 0 < x < 2$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(1-x)}$

$-1 < 1-x < 1 \iff -2 < -x < 0 \iff 2 > x > 0$

**11** – $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-x+3}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x+3)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-3)^n, \quad -1 < x < 7$

$f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+3-3+1} = \frac{1}{(x-3)+4} = \frac{1}{4+(x-3)} = \frac{1}{4-(-x+3)} = \frac{1}{4\left(1-\left(\frac{-x+3}{4}\right)\right)} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\left(\frac{-x+3}{4}\right)}$

$-1 < \frac{-x+3}{4} < 1 \iff -4 < -x+3 < 4 \iff -7 < -x < 1 \iff 7 > x > -1$