Temas: Introdução às séries de Fourier ;
Séries de Fourier de funções 2pi-periódicas.
Exemplos de determinação dos coeficientes de algumas séries de Fourier.
Construção da série (de Fourier) de senos e da série de cossenos.

Séries Trigonométricas

Nestas aulas vamos discutir a possibilidade de representar funções "pouco regulares" (mesmo descontínuas) através de séries de funções trigonométricas.

Definição:
As série de funções com a seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x)\right] \quad (1)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}^+$ e $(a_n), (b_n)$ são sucessões numéricas, têm a designação genérica de séries trigonométricas.

Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem absolutamente convergentes, então a série acima é absolutamente e uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Se recorrermos ao critério de Weierstrass:

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são absolutamente convergentes, a sua série dos módulos converge. Então, pelas propriedades das séries numéricas:

$$\sum_{n=1} (|a_n| + |b_n|) \text{ converge absolutamente}$$

e a série trigonométrica converge uniformemente.

Estas séries são muito usadas para aproximar funções periodicas.

Definição:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica se existir $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O período de f é o menor valor de T que verifica a igualdade anterior. Neste caso, dizemos que, f é T–periódica.

Uma função T-periódica pode sempre ser convertida numa função 2π-periódica usando usando uma mudança de variável.

$$\boxed{F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi} x\right)}$$

vejamos...

Seja f uma função T-periódica:

$$f(x) = f(x+T)$$

$$F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right)$$

$$= f\left(\frac{Tx + 2\pi T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right)$$

$$= F(x + 2\pi) \quad \square$$

Ou seja, F é 2π-periódica.

Coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se esta série trigonométrica convergir uniformemente, a_n e b_n são completamente determinadas pela função f da seguinte forma:

$(n=0)$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

$(n \geq 1)$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx}$$

Os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando um qualquer intervalo de integração de amplitude 2π (devido à periodicidade das funções integrandas em causa).

Assim podemos concluir que:

Definição:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$. Chama-se série de Fourier associada à função f (ou da função f) à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right],$$

onde a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ e b_n $(n \in \mathbb{N})$ são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx.$$

a_n e b_n são designados por coeficientes de Fourier da função f.

Se substituirmos n por 0 teremos $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$ uma vez que: $\cos(0) = 1$

E temos que $\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)}$

Série de Fourier de Cossenos

$f(x) = f(-x)$
simétrica em oy

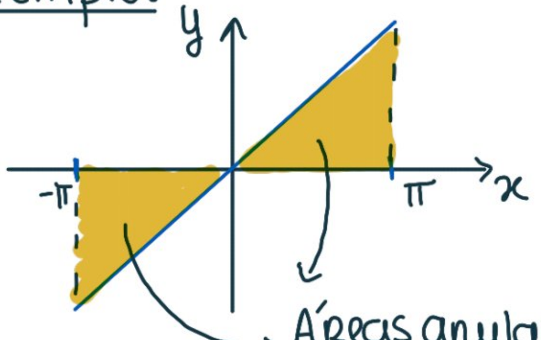
Se f for uma função par $\Rightarrow$ $b_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}}\, \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{\text{impar}}}_{\text{impar}}\, dx = 0$$

$\Downarrow$

Simétrica na origem

Exemplo:



Áreas anulam-se!

Por outro lado,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\cos(nx)}_{\text{par}}}_{\text{par}} \, dx =$$

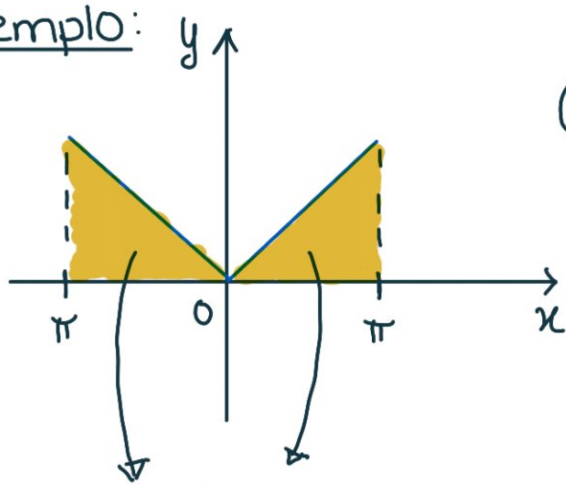
Simétrica em Oy

$$= \boxed{2} \times \frac{1}{\pi} \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} f(x) \cos(nx) \, dx$$

dobro

metade do intervalo

Exemplo:



Áreas iguais

Então a série de Fourier de f tem a forma:

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)}$$

Série de Fourier de Senos

$-f(x) = f(-x)$

Simetria na origem

Se f for uma função ímpar $\Rightarrow$ $a_n = 0$ e $a_0 = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{ímpar}} \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{impar}}\ \underbrace{\cos(nx)}_{\text{par}}}_{\text{impar}}\, dx = 0$$

Por outro lado,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{impar}}\ \underbrace{\text{sen}(nx)}_{\text{impar}}}_{\text{par}}\, dx =$$

$$= 2 \times \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\, dx$$

Assim a série de Foureier de f tem a forma:

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}(nx)}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\pi} 1\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\, dx = \frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi - 0) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi} n\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[\operatorname{sen}(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(0)\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi} n\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + 1\right] \xrightarrow{n \text{ é par}} 0$$

$$\xrightarrow[n = 2K-1]{n \text{ impar}} \frac{2}{(2K-1)\pi}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2}{(2K-1)\pi}\operatorname{sen}[(2K-1)x]$$

b) $f(x) = \begin{cases} -1/2 &, -\pi < x \leq 0 \\ 1/2 &, 0 < x < \pi \end{cases}$

f é impar $\Rightarrow a_0 = 0$ e $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \cancel{2} \times \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi} n\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]$$

n par: $[(-1)^{n+1}+1] = 0$

n impar: $[(-1)^{n+1}+1] = 2$

$\hookrightarrow n = 2k-1$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}[(2k-1)x]$$

série de Fourier de Senos

c) $f(x) = |x|$, $x \in]-\pi, \pi[$

Revendo:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow f$ é par $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \, dx = \boxed{2} \times \frac{1}{\pi} \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} x \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} - 0 \right] = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\cos(nx)}_{\text{par}}}_{\text{par}} \, dx = \boxed{\frac{2}{\pi}} \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} x \cos(nx) \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \operatorname{sen}(nx)}{n} - \int \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \, dx \right]_0^{\pi}$$

usando primitivação por partes

$$= \frac{2}{\pi} \left[\cancelto{0}{\frac{x \operatorname{sen}(nx)}{n}} + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_0^{\pi}$$

$f' = \cos(nx)$

$g = x$

$f = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$

$g' = 1$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2} \cos(0) \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi} \left[(-1)^n - 1 \right]$$

$$(-1)^n - 1 \xrightarrow{n \text{ par}} 0$$
$$\xrightarrow[n=2k-1]{n \text{ impar}} -2$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)^2\pi} \cos[(2k-1)x]$$

Série de Fourier de Cossenos

d) $f(x) = x^2 \quad , \; x \in]-\pi, \pi[$

f é par $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{3} - 0\right] = \frac{2\pi^3}{\pi \times 3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = 2 \times \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n}} - \int \frac{2x \operatorname{sen}(nx)}{n}\,dx\right]_0^{\pi}$$

0

Por partes:
$f' = \cos(nx)$
$g = x^2$
$f = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$
$g' = 2x$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\right)\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\,dx$$
$$= \frac{-4}{n\pi}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n} + \int \frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{-4}{n\cancel{\pi}}\left[\frac{-\cancel{\pi}(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\cancel{[\operatorname{sen}(nx)]_0^{\pi}}\right]$$

0

$$= \frac{-4(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Por partes:
$f' = \operatorname{sen}(nx)$
$g = x$
$f = -\frac{\cos(nx)}{n}$
$g' = 1$

$$f(x) \sim \frac{2\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx)$$

e) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)| \longrightarrow$ Atenção: π - periódica $F(x) = f\left(\frac{\pi}{2\pi}x\right)$

$$F(x) = f\left(\frac{\pi}{2\pi}x\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \underbrace{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right|}_{\text{par e } 2\pi\text{-periódica}}$$

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\times\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{2\times 2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{4}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right] = \frac{4}{\pi}\times 1 = \frac{4}{\pi}$$

I

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{g}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\underset{f'}{\cos(nx)}dx$$

$f' = \cos(nx)$

$g = \operatorname{sen}(x/2)$

$f = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$

$g' = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Prim. por partes

$$= \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Prim. por partes

$f' = \operatorname{sen}(nx)$

$g = \cos(x/2)$

$f = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$g' = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2n}\cos(nx)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{-1}{n^2\pi} - \frac{1}{2n^2\pi}\int_0^{x}\cos(nx)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

I

Equação: $\longrightarrow$ sempre que voltamos ao integral inicial

$$\frac{2}{\pi} I = -\frac{1}{n^2\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} I$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 I = -2 - 1 I$$

$$\Leftrightarrow (4n^2+1) I = -2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I} = -\frac{2}{4n^2+1}$$

$$f(x) \sim \frac{\frac{4}{\pi}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{-\frac{4}{(4n^2+1)\pi}}_{a_n = \frac{2}{\pi}\boxed{I}} \cos(n\pi)$$

Desafios extra:

f) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in]0,\pi[\\ -1 & , x \in]-\pi,0] \end{cases}$ $\longrightarrow$ Impar

$a_0 = 0$, $a_n = 0$

g) $f(x) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ $t \in]-\pi,\pi[$

h) $f(x) = x$ $x \in]-\pi,\pi[$ $\longrightarrow$ Impar

$a_0 = 0$, $a_n = 0$

Bom Trabalho!