DIFERENCIABILIDADE (CONTINUAÇÃO)

PROPRIEDADES DO VETOR GRADIENTE

Vimos já anteriormente que chamamos **Gradiente** de f ao vetor ∇f com:

$$\nabla f = (\, f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n} \,)$$

Nota: em $\mathbb{R}^2$ temos $\nabla f = (\, f'_x, f'_y \,)$ e em $\mathbb{R}^3$ temos $\nabla f = (\, f'_x, f'_y \,, f'_z \,)$

Vimos ainda que as derivadas direcionais podem também ser calculadas via gradiente, na forma:

$$D_{\vec{u}}\, f = f'_{\vec{u}} = \nabla f(P) \diamond \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

PROPRIEDADE 1: GRADIENTE E A TAXA DE VARIAÇÃO DE F

Se considerarmos $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ e\ P_0 \in int(D),$ a derivada direcional $D_{\vec{u}}\, f(p_0)$, que em termos práticos se traduz na **taxa de variação**, de uma função diferenciável atinge o seu valor máximo quando $\vec{u} = \nabla f(p_0)$, sendo esse valor máximo igual a $\|\nabla f(p_0)\|$, e atinge o valor mínimo quando $\vec{u} = -\nabla f(p_0)$, sendo esse valor mínimo igual $-\|\nabla f(p_0)\|$.

PROPRIEDADE 2: GRADIENTE E O VETOR ORTOGONAL A N_k

Sejam D aberto e $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em D. Então para todo $e\ P_0 \in \mathrm{N}_k\,(\mathrm{f}) = \{\mathrm{X} \in \mathrm{D}\colon \mathrm{f}(\mathrm{X}) = \mathrm{k}\}$, o gradiente $= \nabla f(p_0)$, se não é um vetor nulo é um vetor ortogonal ao Conjunto de nível $\mathrm{N}_k\,(\mathrm{f})$ em p_0 .

<u>Em $\mathbb{R}^2$</u>, o gradiente $= \nabla f(p_0)$, ou é um vetor nulo é um vetor ortogonal à Curva de nível $\mathrm{N}_k\,(\mathrm{f})$ em p_0

<u>Em $\mathbb{R}^3$</u>, o gradiente $= \nabla f(p_0)$, ou é um vetor nulo é um vetor ortogonal à Superfície de nível $\mathrm{N}_k\,(\mathrm{f})$ em p_0

PROPRIEDADE 3: GRADIENTE E O VETOR ORTOGONAL A G_f

Caso particular: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em D (aberto). O gráfico de f, $G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ é em particular um conjunto de nível $G(f) = N_0(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) - z = 0\}$, pelo que o gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1) \neq \vec{0}$, é um vector ortogonal à superfície de nível $N_0(g) = G(f)$, isto é, ao gráfico de f, no ponto $(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0))$.

PROPRIEDADE 4: GRADIENTE E O PLANO TANGENTE

Se a superfície é dada pelo G_f, gráfico de f, isto é, por uma equação do tipo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, onde f é diferenciável num ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ (interior ao domínio de f), então o plano tangente a G_f no ponto $(p_0, f(p_0))$ é dado por $z = A(x, y)$, em que $A(x, y)$ é a linearização de f, isto é, $A(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$.

Podemos também encontrar o plano tangente a G_f calculando um vetor ortogonal ao mesmo no ponto $(p_0, f(p_0))$. Vimos atrás que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ é um vetor ortogonal ao gráfico de f no ponto $(p_0, f(p_0))$, então o plano tangente ao gráfico de f em $(p_0, f(p_0))$ pode ser descrito como o conjunto dos vetores com base em p_0 que são perpendiculares a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$, ou seja:

$$\{(x, y, z) : (x - x_0, y - y_0, z - f(p_0)) \circ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), -1\right) = 0\}$$

Se a superfície é dada pelo conjunto de nível $N_k(f)$, isto é, por uma equação do tipo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{k}$, então calcular o plano tangente a $N_k(f)$ no ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é facilitado calculando primeiro o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, que se este for não nulo então é um vetor ortogonal ao plano tangente. Então o plano é dado por:

$$\{(x, y, z) : (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \circ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\right) = 0\}$$

EXERCICIOS PROPOSTOS (SLIDES DE ESTUDO AUTONOMO)

1. Determine a direcção e o sentido em que se atinge o valor máximo e o valor mínimo da derivada
direccional das seguintes funções nos pontos indicados:

(a) $f(x, y) = x^2 y^3$ no ponto $(1, 1)$.

(b) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy) - \operatorname{sen}(yz)$ no ponto $(0, 1, 0)$.

(c) $f(x, y, z) = xyz + x^2$ no ponto $(1, 1, 0)$.

2. Determine as equações do plano tangente e da reta normal aos graficos das seguintes funções nos pontos indicados:

(a) $f(x, y) = xy$ no ponto $(1, 2, 2)$.

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ no ponto $(1, 0, 1)$.

(c) $f(x, y) = \ln(x + y)$ no ponto $(1, 1, \ln 2)$.

3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal às seguintes superfíes de nível nos pontos indicados:

(a) $x^2 + xy + 2z = 1$ em $(-2, 4, 3)$.

(b) $y \operatorname{sen}(x) - z^2 = 2$ em $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}, 1)$.

(c) (elipsóide) $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ em $(-2, 1, -3)$.

(d) $\cosh(xy) + xy + yz = 5$ em $(0, 1, 4)$.