Módulo 1 – Complexos e Sinusóides

Sistema Multimédia

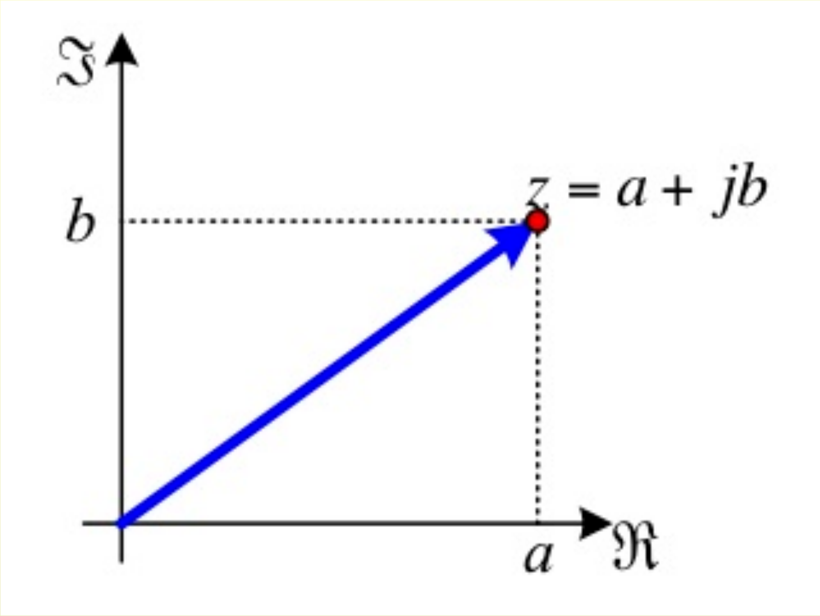
Ana Tomé

José Vieira

Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro

Números Complexos



Notação cartesiana

$$(a,b) \Rightarrow z = a + jb = a + ib$$

$$\sqrt{-1} = j = i$$

z - ponto no plano

a – parte real

b – parte imaginária

2

Números Complexos

Notação polar

$$z = re^{j\varphi}$$

r - módulo

φ – fase

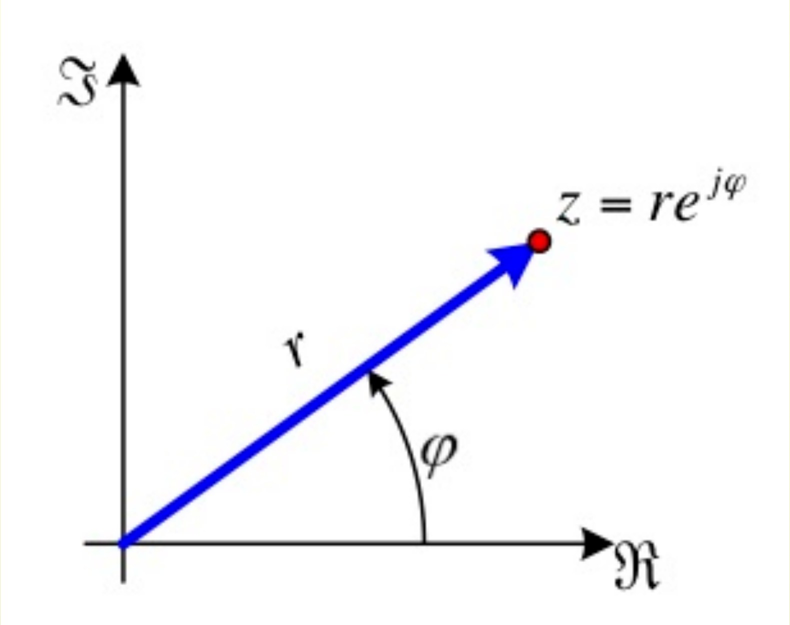
Conversão cartesiana para polar $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\varphi = arctg\left(\tfrac{b}{a}\right)$$

Conversão polar para cartesiana

$$a = r\cos\varphi$$

$$b = r\sin\varphi$$



Fórmula de Euler

$$re^{j\varphi} = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)$$

Operações com números complexos

Adição

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Produto

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

Quociente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

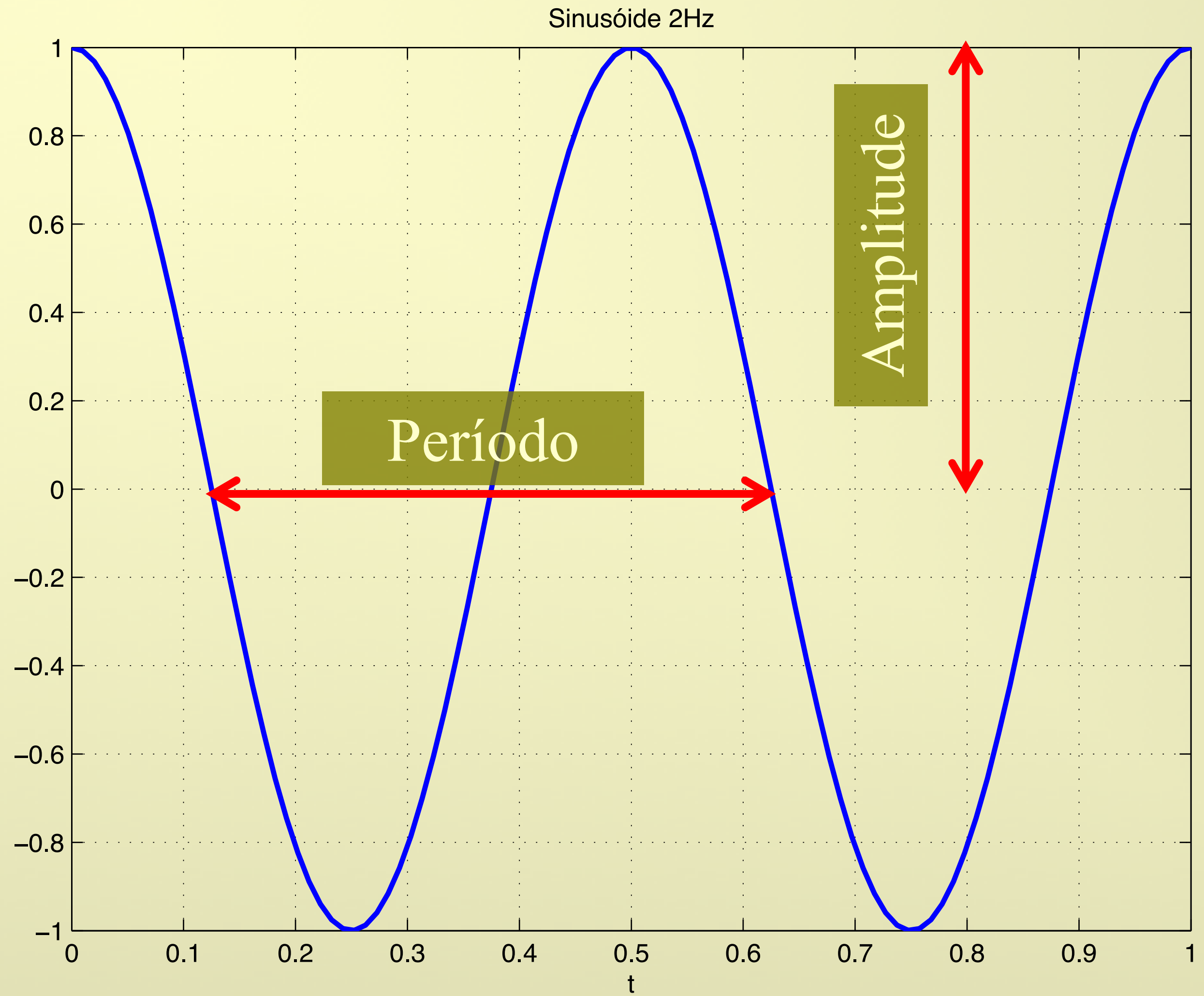
Raizes

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{j\frac{\phi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \ldots n-1$$

Perguntas:

1. Adição em notação polar é possível?
2. Produto em notação cartesiana?
3. Quociente em notação cartesiana?
4. Qual é o lugar geométrico das raízes do número complexo?

Sinais Sinusoidais



Sinais Sinusoidais

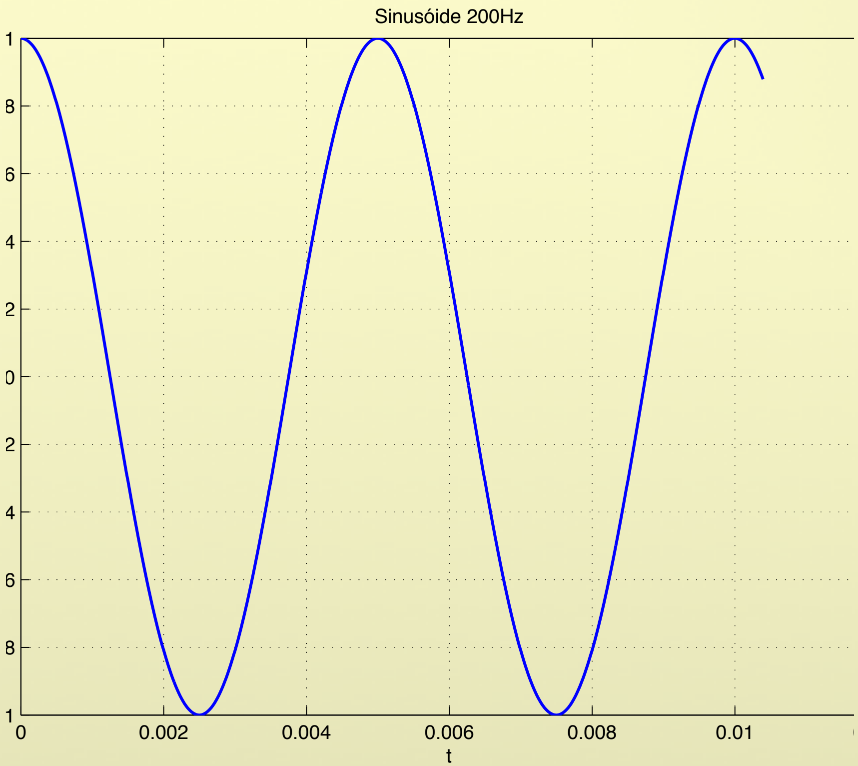
- Um sinal sinusoidal pode ser representado pela equação

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

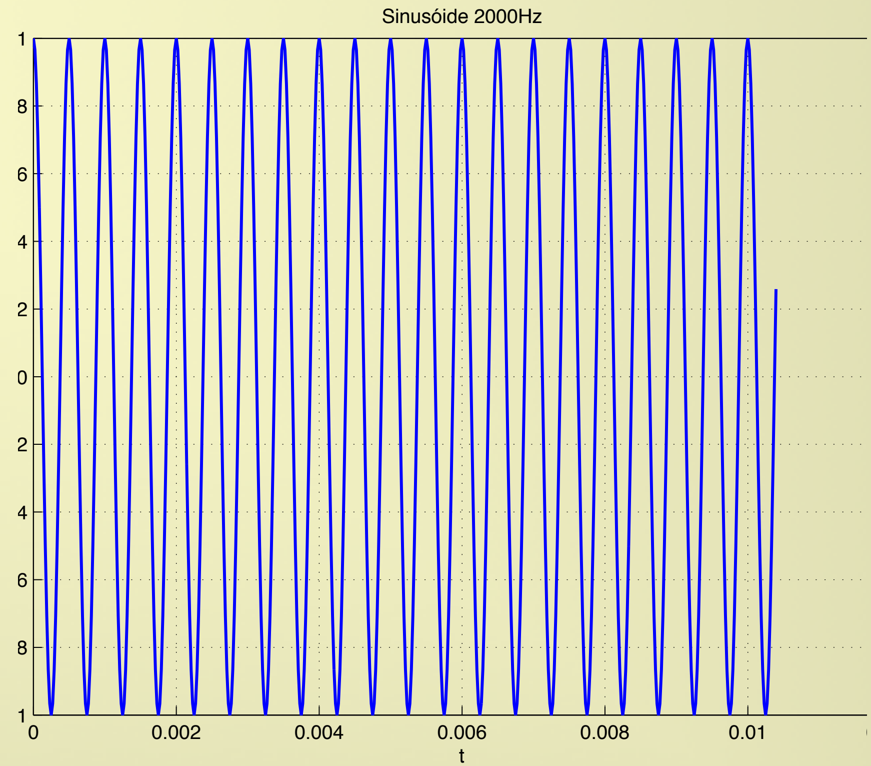
- Em que
  - A – amplitude
  - $f = 1/T$ – frequência em Hertz
  - T – Período
  - ω – frequência em rad/seg.
  - t – tempo
  - φ – fase

Sinais Sinusoidais

Grave – 200Hz



Agudo – 2000Hz

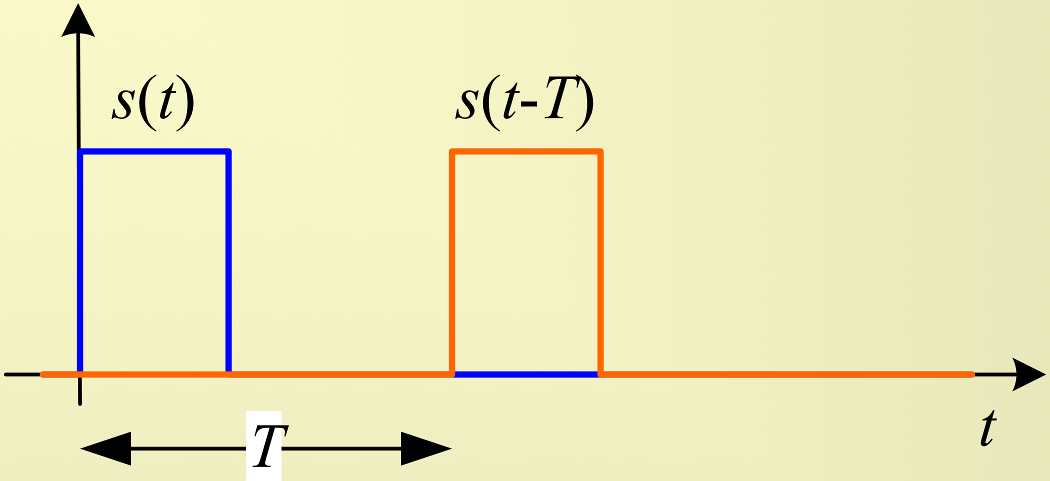


Sinais Sinusoidais

- A importância das sinusóides resulta do facto de muitos sinais do mundo real poderem ser representados de forma muito aproximada por uma sinusóide ou uma soma de sinusóides. Exemplos sonoros:
  - Instrumentos musicais
  - Diapasão
  - Assobio

Atraso Temporal e Atraso de Fase

- Atraso temporal de T segundos de um sinal $s(t)$



- No caso de $s(t)$ ser uma sinusóide temos

$$s(t) = \cos(2\pi ft)$$

$$s(t-T) = \cos(2\pi f(t-T)) = \cos(2\pi ft - 2\pi fT)$$

Atraso de fase

Sinais Periódicos

- Um sinal diz-se periódico se satisfazer a condição

$$x(t) = x(t - T)$$

- A sinusóide é um sinal periódico porque cumpre esta condição

$$\cos(2\pi ft) = \cos(2\pi f(t - T)) =$$
$$\cos(2\pi ft - 2\pi fT) = \cos(2\pi ft)$$

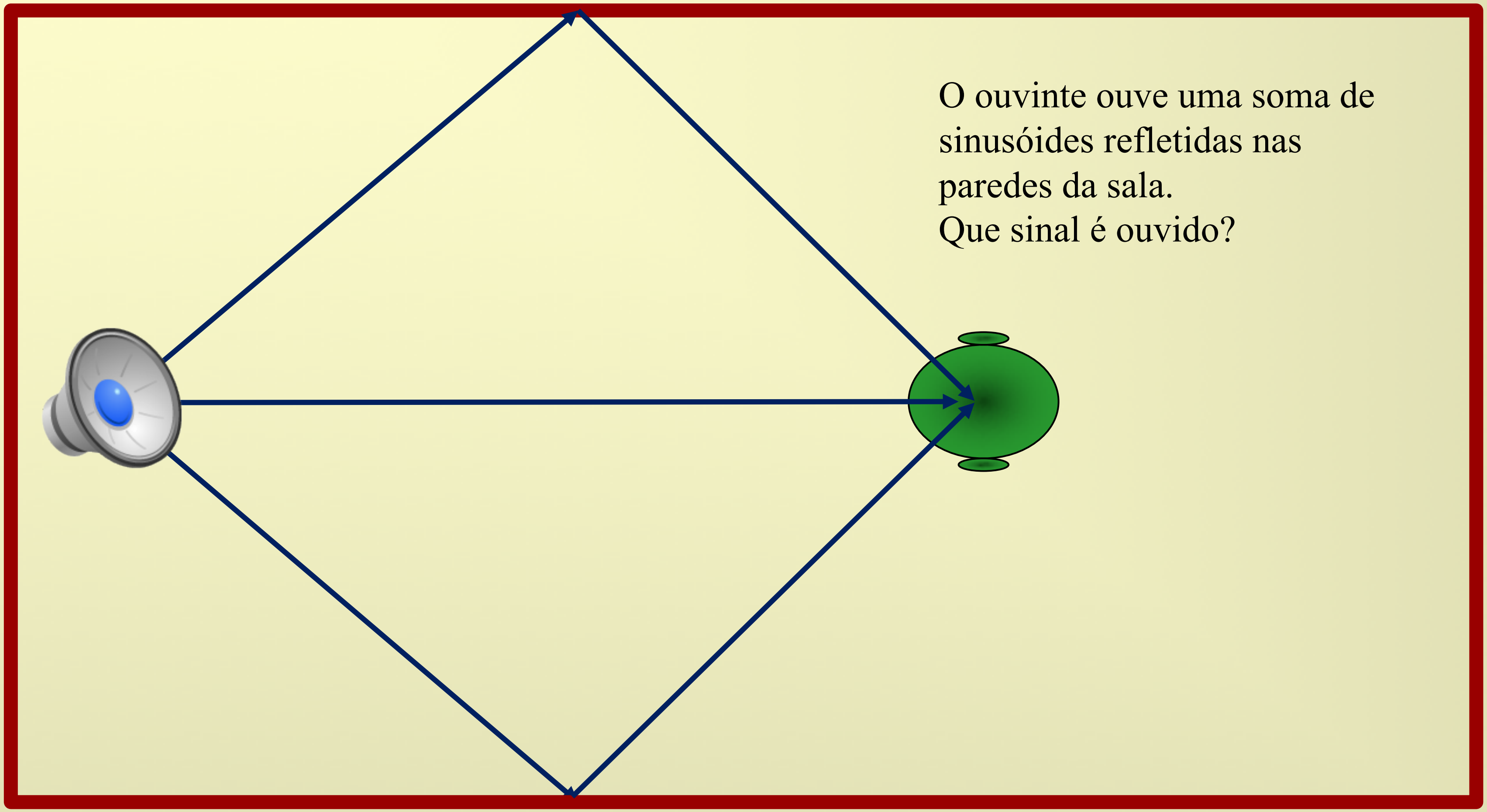
Representação Exponencial

- A representação exponencial de sinusóides é definida por

$$x(t) = \Re\left\{Ae^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- E permite simplificar algumas operações de manipulação de sinusóides

Sinusóides numa sala



O ouvinte ouve uma soma de sinusóides refletidas nas paredes da sala.
Que sinal é ouvido?

Soma de sinusóides com a mesma frequência – Fasores

- Considere-se a soma de duas sinusóides com a mesma frequência ω_0

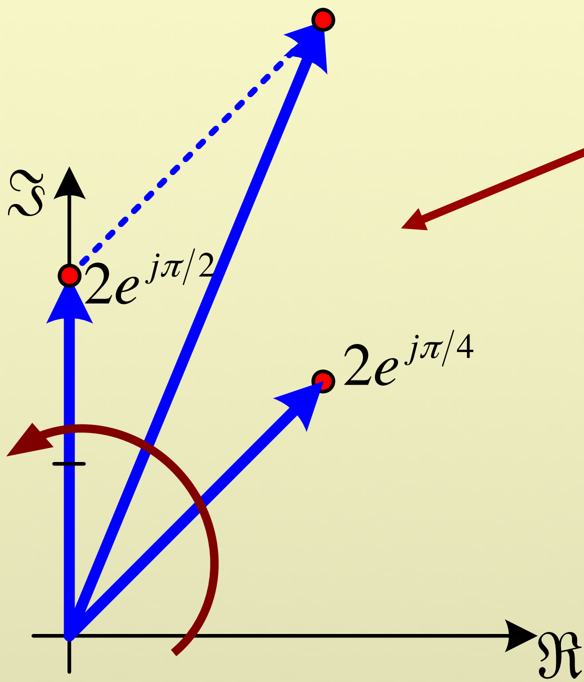
$$A\cos(\omega_0 t + \alpha) + B\cos(\omega_0 t + \beta) = \Re\{Ae^{j(\omega_0 t + \alpha)} + Be^{j(\omega_0 t + \beta)}\}$$

- Colocando em evidência a exponencial dependente de t

$$\Re\left\{e^{j\omega_0 t}\left(Ae^{j\alpha} + Be^{j\beta}\right)\right\} = \Re\left\{e^{j\omega_0 t}Ce^{j\varphi}\right\} = \Re\left\{Ce^{j(\omega_0 t + \varphi)}\right\} = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Soma de sinusóides com a mesma frequência – Fasores

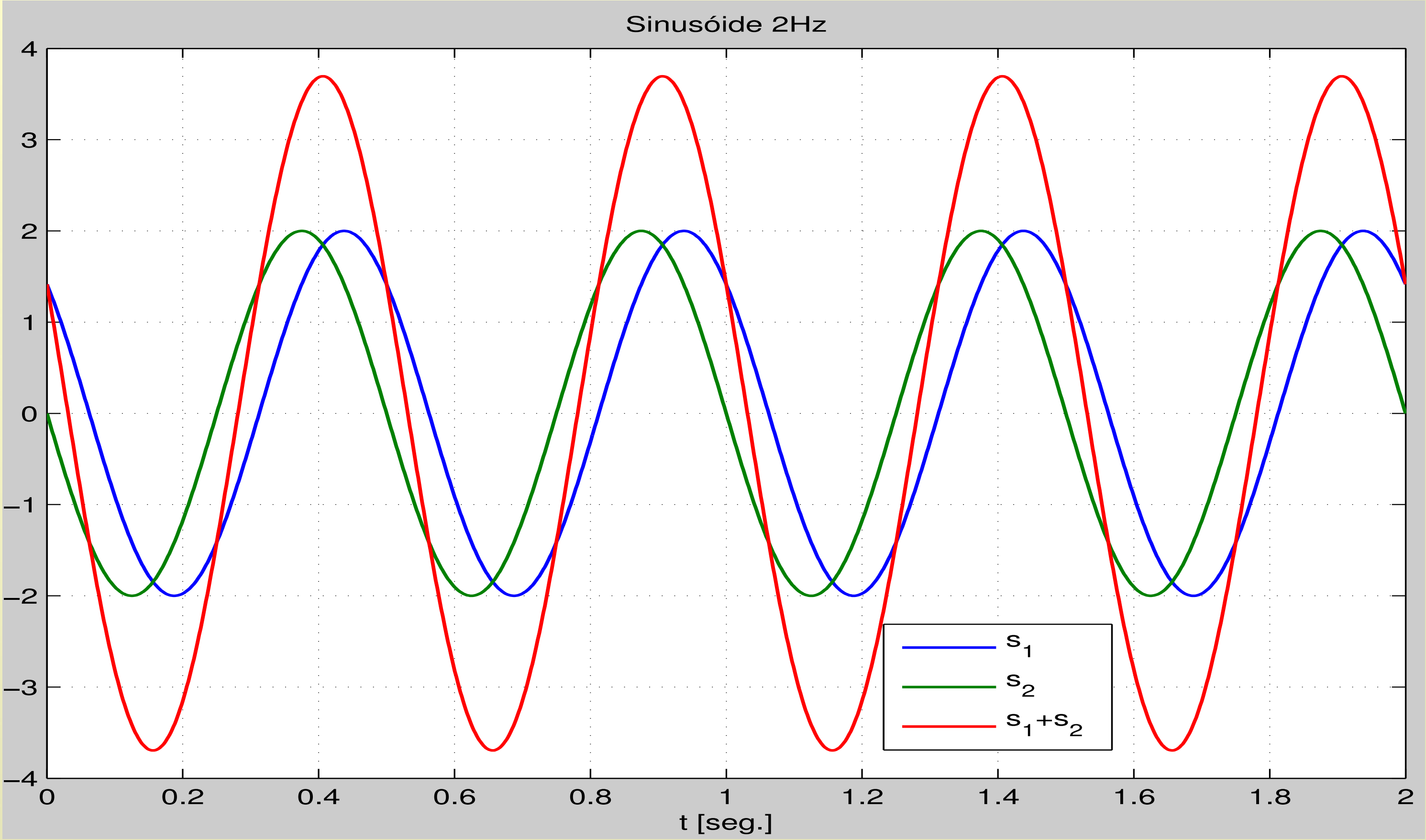
Conclui-se assim que a soma de duas sinusóides com a mesma frequência ω_0 resulta numa sinusóide de frequência ω_0 com amplitude e fase dependentes das amplitudes e fases das sinusóides originais



Soma vetorial de fasores

$$2\cos(\omega_0 t + \tfrac{\pi}{4}) + 2\cos(\omega_0 t + \tfrac{\pi}{2})$$

Soma de sinusóides com a mesma frequência – Fasores



$$2\cos(\omega t + \pi/4) + 2\cos(\omega t + \pi/2)$$

Soma de sinusóides com a mesma frequência – Fasores

Para k sinusóides

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos(2\pi f_o t + \varphi_k) = A\cos(2\pi f_o t + \varphi)$$

A soma de N sinusóides com amplitudes A_k e fases φ_k mas com a mesma frequência f_o, resulta numa sinusóide com uma dada amplitude e fase mas com a mesma frequência f_o.

Bibliografia

- James H. McClellan, "Signal Processing First", Prentice Hall, 2003. (Capítulo 2)
- Signal Processing First Website: http://spfirst.gatech.edu/contents/dspfirst/index.html