1. Emlékeztető

Az (absztrakt) halmazok mérését (a mértéküknek az értelmezését) egy

$$\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

függvény segítségével végezzük, ahol X egy adott alaphalmaz. Ezen

1. φ **(véges) additív**, ha

$$\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(A_k)$$

minden olyan $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ páronként diszjunkt elemű halmazrendszerre fennáll, amelynek az egyesítésére $A_0 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ teljesül;

2. φ **szigma-additív** (röviden $\boldsymbol{\sigma}$**-additív**), ha

$$\varphi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A_n)$$

minden olyan (A_n) páronként diszjunkt tagokból álló $\mathcal{D}_\varphi$-beli sorozatra igaz, amelynek az egyesítésére $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ teljesül.

Ekkor

$$\mathcal{P}(X) := \left\{ A \text{ halmaz} \;\middle|\; A \subseteq X \right\}$$

az X úgynevezett hatványhalmaza.

1.1. Definíció: Mérték, kvázimérték, előmérték

Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény egy

1. **mérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ szigma-algebra, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív;
2. **kvázimérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ halmazgyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív;
3. **előmérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ halmazgyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ additív.

1.2. Tétel: Az előmérték tulajdonságai

Legyen μ előmérték a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, továbbá $A, B, A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$.

1. Ha $B \subseteq A$, akkor $\mu(B) \leq \mu(A)$.
2. Ha $B \subseteq A$ és $\mu(B)$ véges, akkor $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
3. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
4. Minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$.
5. Ha az (A_n) tagjai páronként diszjunktak és $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

Tehát $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ egy előmérték.

1. tulajdonság: $\boldsymbol{\mu}$ **monoton növő**.

2. tulajdonság: $\boldsymbol{\mu}$ **szubtraktív**.

3. tulajdonság: **szita-formula**.

4. tulajdonság: $\boldsymbol{\mu}$ **szubadditív**.

2. A kvázimérték jellemzése

2.1. Tétel

Legyen μ előmérték a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, és vegyük az alábbi állításokat.

Vagyis $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ alakú függvény.

a) A μ kvázimérték.

b) Minden $\mathcal{G}$-beli $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ monoton bővülő halmazsorozatra

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

A b) állítást röviden úgy mondjuk, hogy

„a μ alulról félig folytonos”.

c) Minden $\mathcal{G}$-beli $B_{n+1} \subseteq B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozatra, ha $\mu(B_n) < +\infty$

$$B := \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

A c) állítást röviden úgy mondjuk, hogy

„a μ felülről félig folytonos”.

d) Minden $\mathcal{G}$-beli $C_{n+1} \subseteq C_n$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozatra, ha $\mu(C_n) < +\infty$

$$\emptyset = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0.$$

Ekkor

1. a) $\Longleftrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) $\Longleftrightarrow$ d);
2. ha μ véges, akkor még b) $\Longleftrightarrow$ c) is fennáll.

Figyelem! Ilyenkor b) $\not\Longleftarrow$ c).

Tehát minden $Z \in \mathcal{G}$ esetén $\mu(Z)$ véges.

Bizonyítás.

$\boxed{\text{a)} \Longrightarrow \text{b)}}$ Tekintsük az A „határhalmaznak” az

$$A = A_0 \cup (A_1 \setminus A_0) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots$$

páronként diszjunkt halmazokból álló felbontását. Ekkor

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A_0) + \mu(A_1 \setminus A_0) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\mu(A_0) + \mu(A_1 \setminus A_0) + \cdots + \mu(A_n \setminus A_{n-1})\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\big(A_0 \cup (A_1 \setminus A_0) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1})\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Tehát az előbbi halmazsorozat elemei

$$D_0 := A_0, \; D_n := A_n \setminus A_{n-1},$$

ha $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor nyilvánvaló módon

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n} D_k \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

is igaz, hiszen az (A_n) monoton bővül.

Kihasználtuk, hogy μ szigma- és véges additív, valamint a $(*)$ egyenlőséget.

$\boxed{\text{b)} \Longrightarrow \text{a)}}$ Azt kell igazolni, hogy μ szigma-additív. Legyen ehhez

$$X_n \in \mathcal{G}, \quad A := \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k \in \mathcal{G} \qquad \text{és} \qquad A_n := \bigcup_{k=0}^{n} X_k \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol az (X_n) halmazsorozat tagjai páronként diszjunktak. Ekkor az (A_n) sorozat tagjai monoton bővülő módon tartanak az A-hoz, ezért

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \mu(A) \overset{\text{b)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \overset{**}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(X_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(X_k).$$

Kihasználjuk, hogy μ addititása miatt

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} X_n\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu(X_k). \qquad (**)$$

A többi állítás bizonyítása során gyakran alkalmazzuk az alábbi észrevételt.

Lemma. Amennyiben $Z \subseteq W$ és $\mu(W)$ véges, akkor $\mu(Z)$ is véges, és ezért

$$\mu(W \setminus Z) = \mu(W) - \mu(Z).$$

Természetesen $Z, W \in \mathcal{G}$ halmazok.

Bizonyítás. Mivel a μ monoton, ezért $\mu(Z) \leq \mu(W)$, ahonnan $\mu(Z)$ véges mivolta következik. Továbbá a második állítás minden előmértékre igaz. ■

$\boxed{\text{b)} \implies \text{c)}}$ Mivel a (B_n) sorozat monoton szűkül, ezért az

$$A_n := B_0 \setminus B_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozat monoton bővülve tart a $B_0 \setminus B \in \mathcal{G}$ határhalmazhoz. Ekkor

$$\mu(B_0 \setminus B) \overset{\text{b)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(B_0 \setminus B_n) = \mu(B_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Mivel $B_n \subseteq B_0$ és $\mu(B_n)$ véges, ezért

$$\mu(B_0 \setminus B_n) = \mu(B_0) - \mu(B_n).$$

Nyilván $B \subseteq B_0$. Mivel $\mu(B_0)$ véges, ezért a μ monotonitás miatt $\mu(B)$ is az.

$$\mu(B_0 \setminus B) = \mu(B_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B_0) - \mu(B).$$

Innen $\mu(B_0)$-vel egyszerűsítve adódik a bizonyítandó állítás.

$\boxed{\text{c)} \implies \text{d)}}$ Az igazolandó d) állítás speciális esete a c) kijelentésnek.

$\boxed{\text{d)} \implies \text{c)}}$ Ha a (B_n) sorozat monoton szűkülve tart a B-hez, akkor a

$$C_n := B_n \setminus B \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozat monoton szűkülve tart az üres halmazhoz. Ekkor

$$0 = \mu(\emptyset) \overset{\text{d)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) - \mu(B).$$

Mivel $B \subseteq B_n$ és $\mu(B_n)$ véges, ezért

$$\mu(B_n \setminus B) = \mu(B_n) - \mu(B).$$

Mivel itt $\mu(B)$ véges, ezért átrendezés után kapjuk a bizonyítandó állítást.

A továbbiakban feltesszük, hogy μ véges. Az alábbi állítást mutatjuk meg.

$\boxed{\text{d)} \implies \text{b)}}$ Ha az (A_n) sorozat monoton bővülve tart az A-hoz, akkor a

$$C_n := A \setminus A_n \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat monoton szűkülve tart az üres halmazhoz. Mivel μ véges, így

$$0 = \mu(\emptyset) \overset{\text{d)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Innen átrendezéssel adódik a bizonyítandó állítás.

$\boxed{\text{c)} \implies \text{b)}}$ Ha μ véges, akkor a c) $\implies$ d) $\implies$ b) állítások következménye.

3. A Lebesgue-féle kvázimérték

A továbbiakban legyen $p \in \mathbb{N}^+$ egy rögzített kitevő, valamint az

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p),\ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$$

vektorok körében definiáljuk a komponensenkénti rendezést az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \le \mathbf{y} \quad &:\Longleftrightarrow \quad x_i \le y_i \\ \mathbf{x} < \mathbf{y} \quad &:\Longleftrightarrow \quad x_i < y_i \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Amennyiben $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, akkor az

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^p \;\middle|\; \mathbf{x} \le \mathbf{z} < \mathbf{y} \right\} = [x_1, y_1) \times \cdots \times [x_p, y_p)$$

halmazt az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ végpontú, balról zárt és jobbról nyílt (p-dimenziós) intervallumnak nevezzük. Könnyen belátható ilyenkor, hogy az

$$\mathbf{I}^p := \left\{ \emptyset,\ [\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\middle|\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \ \text{ és } \ \mathbf{x} < \mathbf{y} \right\}$$

halmazrendszer egy félgyűrű. Tekintsük az $\mathbf{I}^p$ által generált gyűrűt, vagyis az

$$\mathcal{I}^p := \mathcal{G}(\mathbf{I}^p) = \left\{ A := \bigcup_{k=0}^{n} I_k \;\middle|\; I_0, \ldots, I_n \in \mathbf{I}^p \text{ diszjunktak } (n \in \mathbb{N}) \right\}$$

halmazt.

3.1. Definíció: Lebesgue-féle kvázimérték

Legyen $m_p : \mathbf{I}^p \to [0, +\infty)$ az a véges halmazfüggvény, amire

$$m_p(\emptyset) := 0, \quad m_p\big([\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) := \prod_{k=1}^{p} (y_i - x_i) \qquad \big([\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{I}^p\big).$$

Ekkor az m_p halmazfüggvény $\mathcal{I}^p$-re történő

$$\widetilde{\mu}_p : \mathcal{I}^p \to [0, +\infty), \qquad \widetilde{\mu}_p\big|_{\mathbf{I}^p} = m_p.$$

kiterjesztését **Lebesgue-féle kvázimértéknek** nevezzük.

Vagyis tetszőlegesen véve egy

$$A \in \mathcal{I}^p,\ A = \bigcup_{k=0}^{n} I_k$$

diszjunkt felbontású halmazt, akkor

$$\widetilde{\mu}_p(A) = \sum_{k=0}^{n} m_p(I_k).$$

3.2. Tétel

Az előbb definiált $\widetilde{\mu}_p : \mathcal{I}^p \to [0, +\infty)$ függvény egy kvázimérték.

Bizonyítás. Mivel a $\widetilde{\mu}_p$ egy véges előmérték, ezért a 2.1. tétel miatt elegendő azt megmutatni, hogy minden $\mathcal{I}^p$-beli monoton szűkülő (A_n) sorozatra

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}_p(A_n) = 0.$$

Indirekt tegyük fel, hogy van olyan, az előbbi feltételeknek eleget tevő (A_n) halmazsorozat, amelyre

$$\delta := \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}_p(A_n) = \inf\left\{ \widetilde{\mu}_p(A_n) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} > 0.$$

Ekkor megadható olyan (B_n) halmazsorozat, illetve (δ_n) számsorozat, hogy

$$\overline{B}_n \subseteq A_n \qquad \text{és} \qquad \widetilde{\mu}_p(A_n) - \widetilde{\mu}_p(B_n) < \delta_n \qquad (n \in \mathbb{N}). \qquad (*)$$

Továbbá legyen

$$C_n := \bigcap_{k=0}^{n} B_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Nyilvánvaló, hogy az így megadott halmazsorozatokra igaz a következő:

$$\overline{C}_n \subseteq \overline{B}_n \subseteq A_n \subseteq A_0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen a $\overline{C}_n$ halmazok mindegyike korlátos és zárt, valamint

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n = \emptyset.$$

Megmutatjuk, hogy egyetlen egy C_n halmaz sem üres. Mivel ilyenkor a $\overline{C}_n$ halmazok sem üresek, valamint ezek korlátos és zárt, egymásba skatulyázott intervallumok, ezért a Cantor-tétel alkalmazásával a

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n \neq \emptyset$$

ellentmondás áll elő. Tehát legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_p\big(C_{n+1}\big) &= \widetilde{\mu}_p\big(C_n \cap B_{n+1}\big) \\
&= \widetilde{\mu}_p\big(C_n\big) + \widetilde{\mu}_p\big(B_{n+1}\big) - \widetilde{\mu}_p\big(C_n \cup B_{n+1}\big) \\
&\geq \widetilde{\mu}_p\big(C_n\big) + \widetilde{\mu}_p\big(B_{n+1}\big) - \widetilde{\mu}_p\big(A_n\big) \\
&> \widetilde{\mu}_p\big(C_n\big) + \widetilde{\mu}_p\big(A_{n+1}\big) - \delta_{n+1} - \widetilde{\mu}_p\big(A_n\big).
\end{aligned}$$

Ezt átrendezve a soron következő rekurzióhoz jutunk:

$$\widetilde{\mu}_p\big(C_{n+1}\big) - \widetilde{\mu}_p\big(A_{n+1}\big) > \widetilde{\mu}_p\big(C_n\big) - \widetilde{\mu}_p\big(A_n\big) - \delta_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Visszafejtve a rekurziót azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_p\big(C_n\big) - \widetilde{\mu}_p\big(A_n\big) &> \widetilde{\mu}_p\big(C_0\big) - \widetilde{\mu}_p\big(A_0\big) - \textstyle\sum_{k=1}^{n} \delta_k \\
&= \widetilde{\mu}_p\big(B_0\big) - \widetilde{\mu}_p\big(A_0\big) - \textstyle\sum_{k=1}^{n} \delta_k \\
&> -\delta_0 - \sum_{k=1}^{n} \delta_k > -\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k.
\end{aligned}$$

Ha most az eddig tetszőleges (δ_n) sorozatól megköveteljük, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \delta \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\mu}_p\big(C_n\big) > \widetilde{\mu}_p\big(A_n\big) - \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k > 0 \quad \Longrightarrow \quad C_n \neq \emptyset. \checkmark$$

Ezzel eljutottunk a kívánt ellentmondáshoz.

Két $\mathbb{R}^p$-beli $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ vektor esetén az

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^p \;\middle|\; \mathbf{x} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{y} \right\}$$

halmazt zárt intervallumnak nevezzük.

Tétel (Cantor-tétel)**.** Amennyiben

$$[\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}] \subseteq [\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n]$$

fennáll minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, akkor

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n] \neq \emptyset.$$

Lásd szita-formula.

Lásd μ monoton ($C_n \cup B_{n+1} \subseteq A_n$).

Lásd $(*)$ becslés átrendezve.