1. Stieltjes-féle kvázimérték

A továbbiakban legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, valamint

$$m(\emptyset) := 0, \quad m\big([x,y)\big) := \varphi(y) - \varphi(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R},\ x < y).$$

Tehát az itt szereplő halmazfüggvény

$$m : \mathbf{I} \to [0, +\infty)$$

Az itt szereplő $\mathbf{I}$ halmazrendszer az üres halmazt, valamint az $\mathbb{R}$ balról zárt, jobbról nyílt intervallumait tartalmazza, $\mathcal{I}$ pedig az $\mathbf{I}$ félgyűrű által generált gyűrű, azaz

$$\mathbf{I} := \Big\{ \emptyset, [a,b) \subseteq \mathbb{R} \;\Big|\; a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Big\}, \qquad \mathcal{I} := \mathcal{G}(\mathbf{I}).$$

Mivel az m egy félgyűrűn értelmezett nemnegatív, additív és az üres halmazhoz nullát rendelő halmazfüggvény, ezért érvényes rá az alábbi kiterjesztési tétel.

1.1. Tétel

Definiáljuk az alábbi (**Stieltjes-féle kvázimérték**) halmazfüggvényt:

$$\widetilde{\mu}_\varphi : \mathcal{I} \to [0, +\infty), \qquad \mu(I) := \sum_{k=0}^{n} m(I_k),$$

ahol az $I \in \mathcal{I}$ esetén vannak olyan páronként diszjunkt $I_0, \dots, I_n \in \mathbf{I}$, hogy

$$I = \bigcup_{k=0}^{n} I_k.$$

Ekkor $\widetilde{\mu}_\varphi$ előmérték, és ez az egyetlen olyan előmérték $\mathcal{I}$-n, amire $\widetilde{\mu}_\varphi|_{\mathbf{I}} = m$.

Bizonyos feltétel mellett $\widetilde{\mu}_\varphi$ nemcsak előmérték, hanem valóban kvázimérték.

1.2. Tétel

A most bevezetett $\widetilde{\mu}_\varphi$ kvázimérték $\iff$ φ balról folytonos.

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Indirekt tegyük fel, hogy a φ nem folytonos balról egy $x \in \mathbb{R}$ helyen.

Ami most azzal ekvivalens, hogy

$$\lim_{t \to x-0} \varphi(t) \neq \varphi(x).$$

Legyen az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő, $\lim(x_n) = x$. Ekkor

$$[x_0, x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1})$$

egy páronként diszjunkt felbontás, ezért a $\widetilde{\mu}_\varphi$ szigma-additivitása miatt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_\varphi\big([x_0, x)\big) &= \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}_\varphi\big([x_n, x_{n+1})\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\Big) = \lim_{n\to\infty} \big(\varphi(x_n) - \varphi(x_0)\big) \\
&\overset{*}{=} \lim_{t \to x-0} \big(\varphi(t) - \varphi(x_0)\big)
\end{aligned}$$

Itt kihasználjuk, hogy mivel léteznek a

$$\lim_{t \to x-0} f(t), \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

határértékek, ezért az átviteli-elv miatt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{t \to x-0} f(t). \qquad (*)$$

Ugyanakkor az m halmazfüggvény definíciójából adódóan

$$\widetilde{\mu}_\varphi\big([x, x_0)\big) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \lim_{t \to x-0} \big(\varphi(t) - \varphi(x_0)\big).$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a φ balról folytonos az x-ben.

Vagyis az alábbi ellentmondást kapjuk:

$$\lim_{t \to x-0} \varphi(t) = \varphi(x).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Azt kell megmutatni, hogy a $\widetilde{\mu}_\varphi$ szigma-additív. Ehhez elég lenne azt belátni, hogy az m szigma-additív. Mivel a $\widetilde{\mu}_\varphi$ előmérték, ezért tetszőleges

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n < b_n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \mathbf{I} \ni [a, b) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n)$$

páronként diszjunkt felbontás esetén

Lásd előmértékek tulajdonságai és

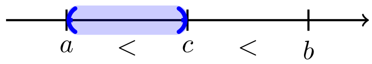
$$\widetilde{\mu}_\varphi\big|_{\mathbf{I}} = m.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m\big([a_n, b_n)\big) \le m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n)\right) = m\big([a, b)\big).$$

Most megmutatjuk, hogy fennáll a fordított irányú egyenlőtlenség is, azaz

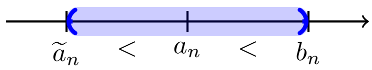
$$m\big([a, b)\big) = \varphi(b) - \varphi(a) \le \sum_{n=0}^{\infty} \big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\big).$$

Válasszunk egy tetszőleges $c \in (a, b)$ számot, lásd 1. ábra. Mivel a φ balról folytonos és monoton nő, ezért bármely $\varepsilon > 0$-hoz és $n \in \mathbb{N}$ indexhez



1. ábra

$$\exists\, \widetilde{a}_n < a_n : \qquad \varphi(a_n) - \varphi(\widetilde{a}_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{$**$}$$



2. ábra

fennáll, lásd 2 ábra. Ez alapján világos, hogy

$$[a, c] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (\,\widetilde{a}_n, b_n).$$

Ekkor a Borel-lemma alapján feltehető, hogy alkalmas $N \in \mathbb{N}$ mellett

$$[a, c) \subset [a, c] \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} (\,\widetilde{a}_n, b_n) \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} [\,\widetilde{a}_n, b_n).$$

Mivel a $\widetilde{\mu}_\varphi$ előmérték monoton és véges szubadditív, ezért

Itt kihasználjuk, hogy ($**$) miatt a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(\varphi(a_n) - \varphi(\widetilde{a}_n)\big)$$

sorösszegzés felső becslése

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{1 - 1/2} = 2\varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
\varphi(c) - \varphi(a) &\le \sum_{n=0}^{N} \big(\varphi(b_n) - \varphi(\widetilde{a}_n)\big) \le \sum_{n=0}^{\infty} \big(\varphi(b_n) - \varphi(\widetilde{a}_n)\big) \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\big) + \sum_{n=0}^{\infty} \big(\varphi(a_n) - \varphi(\widetilde{a}_n)\big) \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\big) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Innen a baloldali $c \to b - 0$, valamint az $\varepsilon \to 0$ határátmenet következtében

$$\varphi(b) - \varphi(a) \le \sum_{n=0}^{\infty} \big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\big).$$

Megjegyzés. Nyilván az identitásfüggvény eleget tesz a kívánalmaknak, és

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

esetén visszakapjuk az úgynevezett **Borel–Lebesgue-kvázimértéket**, azaz

$$\widetilde{\mu}_\varphi = \widetilde{\mu}_1.$$