1. Emlékeztető

1.1. Tétel: Kvázimérték kiterjesztése mértékké

Legyen X egy halmaz, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrű, $\widetilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ kvázimérték.

Ekkor van olyan $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra és $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték, hogy

$$\mathcal{G} \subseteq \Omega \qquad \text{és} \qquad \widetilde{\mu} = \mu\big|_{\mathcal{G}}.$$

1.2. Definíció: Külső mérték, μ^*-mérhető

Legyen X egy halmaz, valamint $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan halmazfüggvény, ami

1. **nemnegatív**, azaz $\mu^* \geq 0$;
2. **eltűnik $\emptyset$-ban**, azaz $\mu^*(\emptyset) = 0$;
3. **monoton**, azaz minden $B \subseteq A$ esetén $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$;
4. **σ-szubadditív**, azaz minden A_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a μ^* halmazfüggvény egy **külső mérték**.

Továbbá egy $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazt **μ^*-mérhetőnek** nevezünk, amennyiben

$$\forall B \in \mathcal{P}(X) : \quad \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Ekvivalens, hogy minden $B \in \mathcal{P}(X)$-re

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

1.3. Tétel: Caratheodory-tétel

Legyen X egy halmaz, $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ külső mérték, valamint

$$\Omega := \left\{ A \in \mathcal{P}(X) \;\middle|\; A \ \mu^*\text{-mérhető} \right\}.$$

Ekkor Ω szigma-algebra és $\mu := \mu^*|_{\Omega}$ mérték.

2. A kiterjesztés egyértelműsége

Ha egy X halmaz és $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrű mellett $\widetilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ kvázimérték, és a

$$\mu : \Omega \to [0, +\infty]$$

mérték kiterjesztése az $\widetilde{\mu}$-nek, akkor az minden esetben kijelenthető, hogy

$$\mathcal{G} \subseteq \Omega(\mathcal{G}) \subseteq \Omega.$$

Felmerül a kérdés, hogy vajon a $\mathcal{G}$ gyűrű által generált $\Omega(\mathcal{G})$ szigma-algebrára hányféleképpen terjeszthetjük ki $\widetilde{\mu}$-t? Teljesül az egyértelmű kiterjeszthetőség?

Példa. Legyen $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, és tekintsük a $\mathcal{G} = \{\emptyset\}$ triviális gyűrűt,

$$\widetilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty], \qquad \widetilde{\mu}(\emptyset) = 0, \qquad \Omega(\mathcal{G}) = \{\emptyset, X\}.$$

Ekkor $\widetilde{\mu}$ kvázimérték, valamint legyen

$$\mu_1(\emptyset) = \mu_2(\emptyset) = 0, \qquad \mu_1(X) = 0, \qquad \mu_2(X) = +\infty.$$

Világos, hogy μ_1 és μ_2 mérték a triviális szigma-algebrán, ugyanakkor

$$\mu_1 \neq \mu_2, \qquad \mu_1|_{\mathcal{G}} = \mu_2|_{\mathcal{G}}.$$

2.1. Definíció: Szigma-véges halmazfüggvény

Legyen X adott halmaz, valamint $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény. Azt mondjuk, hogy φ **szigma-véges** (röviden $\boldsymbol{\sigma}$**-véges**), amennyiben

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{és} \quad \varphi(A_n) < +\infty \qquad (n \in \mathbb{N})$$

igaz, valamilyen $A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ páronként diszjunkt halmazokból álló sorozatra.

2.2. Tétel: Szigma-véges kvázimérték kiterjesztése

Legyen $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrű, valamint $\widetilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ egy kvázimérték. Amennyiben $\widetilde{\mu}$ szigma-véges, akkor egyértelműen létezik olyan

$$\mu : \Omega(\mathcal{G}) \to [0, +\infty]$$

mérték, ami kiterjesztése $\widetilde{\mu}$-nak.

3. Teljes mérték

3.1. Definíció: Teljes mérték

Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér. Azt mondjuk, hogy μ **teljes**, ha minden

$$A \in \Omega, \;\; \mu(A) = 0$$

nullamértékű halmazra esetén a $B \subset A$ halmaz is mérhető, azaz $B \in \Omega$.

Állítás. A Caratheodory-tételben szereplő $\mu = \mu^*|_\Omega$ mérték teljes.

Bizonyítás. Legyen $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ és vegyünk egy tetszőleges $B \subset A$ halmazt. Azt kell megmutatnunk, hogy B egy μ^*-mérhető halmaz. Ehhez vegyük észre, hogy

$$0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(B) = 0.$$

Ha $Z \subseteq X$ egy tetszőleges halmaz, akkor

$$0 \leq \mu^*(Z \cap B) \leq \mu^*(B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(Z \cap B) = 0.$$

Innen rögtön adódik, hogy

$$\mu^*(Z \cap B) + \mu^*(Z \setminus B) \leq \mu^*(Z).$$

Ez pedig azzal ekvivalens, hogy B valóban μ^*-mérhető. Tehát $B \in \Omega$. ∎

4. Lebesgue–mérték

Legyen $p \in \mathbb{N}^+$ egy rögzített kitevő. Ekkor az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ vektorok esetén az

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \{\, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{z} < \mathbf{y} \,\}$$

halmazt az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ végpontú, balról zárt és jobbról nyílt (p-dimenziós) intervallumnak nevezzük. Könnyen belátható ilyenkor, hogy az

$$\mathbf{I}^p := \left\{ \emptyset,\ [\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\middle|\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \text{ és } \mathbf{x} < \mathbf{y} \right\}$$

halmazrendszer egy félgyűrű. Tekintsük az $\mathbf{I}^p$ által generált gyűrűt, vagyis az

$$\mathcal{I}^p := \mathcal{G}(\mathbf{I}^p) = \left\{ \bigcup_{k=0}^{n} I_k \;\middle|\; I_0, \dots, I_n \in \mathbf{I}^p \text{ páronként diszjunktak } (n \in \mathbb{N}) \right\}$$

halmazt. Ezek segítségével definiáljuk az $\mathbf{I}^p$-n az alábbi additív halmazfüggvényt.

$$m_p(\emptyset) := 0, \qquad m_p\big([\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) := \prod_{i=1}^{p} (y_i - x_i) \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p,\ \mathbf{x} < \mathbf{y})$$

4.1. Tétel

Egyetlen olyan $\widetilde{\mu}_p : \mathcal{I}^p \to [0, +\infty)$ kvázimérték létezik, amire $m_p = \widetilde{\mu}_p|_{\mathbf{I}^p}$.

Ezt az egyértelműen létező $\widetilde{\mu}_p$ függvényt **Lebesgue-kvázimértéknek** hívjuk. Ha

$$A \in \mathcal{I}^p \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \bigcup_{k=0}^{n} I_k$$

valamilyen $I_0, \dots, I_n \in \mathbf{I}^p$ páronként diszjunkt intervallumok esetén, akkor

$$\widetilde{\mu}_p(A) = \sum_{k=0}^{n} m_p(I_k).$$

4.2. Definíció: Lebesgue-mérték

Tekintsük a soron következő külső mértéket:

$$\mu_p^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}_p(A_n) \;\middle|\; (A_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{I}^p,\ A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right\} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^p).$$

Legyen az úgynevezett **Lebesgue-mérhető** halmazok szigma-algebrája

$$\widehat{\Omega}_p := \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^p \;\middle|\; \text{az } A\ \mu_p^*\text{-mérhető} \right\}.$$

Ekkor a $\widehat{\mu}_p := \mu_p^*|_{\widehat{\Omega}_p}$ függvényt az $\mathbb{R}^p$-beli **Lebesgue-mértéknek** hívjuk.

Megjegyzés. A $\widehat{\mu}_p$ mérték szigma-véges és teljes.

5. Lebesgue–Stieltjes-mérték

Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges monoton növő, balról folytonos függvény,

$$m_\varphi(\emptyset) = 0, \quad m_\varphi\big([a,b)\big) \coloneqq \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a < b).$$

5.1. Tétel

Egyetlen olyan $\widetilde{\mu}_\varphi : \mathcal{I} \to [0, +\infty)$ kvázimérték létezik, amire $m_\varphi = \widetilde{\mu}_\varphi|_{\mathbf{I}}$.

Ezt az egyértelműen létező $\widetilde{\mu}_p$ függvényt **Lebesgue-kvázimértéknek** hívjuk. Ha

$$A \in \mathcal{I} \quad \iff \quad A = \bigcup_{k=0}^{n} I_k$$

valamilyen $I_0, \ldots, I_n \in \mathbf{I}$ páronként diszjunkt intervallumok esetén, akkor

$$\widetilde{\mu}_\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n} m_\varphi(I_k).$$

Alkalmazzuk a Caratheodory-tételt az $\widehat{\mu}_\varphi$ Stieltjes-féle kvázimértékre.

5.2. Definíció: Lebesgue–Stieltjes-mérték

Tekintsük a soron következő külső mértéket:

$$\mu^*_\varphi(A) \coloneqq \inf\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}_\varphi(A_n) \;\middle|\; (A_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{I},\ A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right\} \quad (A \subseteq \mathbb{R}).$$

Legyen a **Lebesgue–Stieltjes-mérhető** halmazok szigma-algebrája

$$\widehat{\Omega}_\varphi \coloneqq \left\{ A \subseteq \mathbb{R} \;\middle|\; \text{az } A\ \mu^*_\varphi\text{-mérhető} \right\}.$$

Ekkor a $\widehat{\mu}_\varphi \coloneqq \mu^*_\varphi|_{\widehat{\Omega}_\varphi}$ függvény az $\mathbb{R}$-beli **Lebesgue–Stieltjes-mérték**.

Megjegyzés. A $\widehat{\mu}_\varphi$ mérték szigma-véges és teljes.