1. Beppo Levi tétele

1.1. Tétel: Beppo Levi

Legyen $(f_n):\mathbb{N}\to L^+$ egy monoton növekedő függvénysorozat. Ekkor

$$f := \lim(f_n) \in L^+ \qquad \text{és} \qquad \int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Tehát az (f_n) sorozatra

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Mivel az (f_n) sorozat tagjai valamennyien L^+-ban vannak, így

$$\begin{array}{llllll} f_{00} & f_{01}\cdots\cdots\cdots f_{0n}\cdots\cdots\cdots\nearrow & f_0 & & \\ f_{10} & f_{11}\cdots\cdots\cdots f_{1n}\cdots\cdots\cdots\nearrow & f_1 & & \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots & & (n\in\mathbb{N}). \\ f_{n0} & f_{n1}\cdots\cdots\cdots f_{nn}\cdots\cdots\cdots\nearrow & f_n & & \end{array}$$

Tehát minden $n\in\mathbb{N}$ indexhez van olyan

$$(f_{kn}):\mathbb{N}\to L_0^+$$

sorozat, ami monoton növekedve tart a

$$\lim_{k\to\infty} f_{kn} = f_n$$

határfüggvényhez.

Tekintsük az alábbi függvénysorozatot:

$$g_n := \max\{\, f_{ij} \mid i,j=0,\ldots,n \,\} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy fennállnak a soron következő állítások:

$$g_n \in L_0^+,\quad g_n \le g_{n+1},\quad g_n \le f_n \le f \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Az utóbbi egyenlőtlenség következménye, hogy

$$\lim(g_n) \le \lim(f_n) = f.$$

Ugyanakkor (g_n) monoton nő, így tetszőleges $i,j=0,\ldots,n$ index esetén

$$f_{ij} \le g_n \le \lim(g_n).$$

Amennyiben vesszük az $i,j\to\infty$ határátmenetet, akkor

$$f = \lim(f_n) \le \lim(g_n).$$

Tehát $f=\lim(g_n)$, ami definíció szerint egy L^+-beli függvény, továbbá

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,\mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu \le \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

Kihasználva az

$$g_n \le f_n \le f \qquad (n\in\mathbb{N})$$

egyenlőtlenséget és a monotonitást.

2. Következmények

Fogalmazzuk meg a Beppo Levi–tételt tetszőleges L^+-beli függvénysor esetén!

2.1. Tétel: Beppo Levi–tétel függvénysorokra

Legyen $(h_n) : \mathbb{N} \to L^+$ egy tetszőleges függvénysorozat. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n \in L^+ \qquad \text{és} \qquad \int \sum_{n=0}^{\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int h_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi részletösszeg-sorozatot:

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} h_k \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor (f_n) egy L^+-beli, monoton növekedő függvényekből álló sorozat, így a Beppo Levi–tétel alkalmazásával adódik, hogy az (f_n) konvergens és

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int h_n \,\mathrm{d}\mu.$$

2.2. Definíció: Majdnem mindenhol terminológia

Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér, valamint T egy tulajdonság az X elemein. Ekkor T **majdnem mindenhol** igaz, ha megadható olyan $A \in \Omega$, hogy

1. $\mu(A) = 0$,
2. minden $x \in X \setminus A$ esetén a T igaz x-ben.

Megjegyzések:

i) Használatos még a T **majdnem mindenütt** igaz megnevezés is, illetve ezek rövidítésére a T **μ-m.m.** és (egyetlen mérték esetén) a T **m.m.** szimbólum.

ii) **Figyelem!** A most bevezetett majdnem mindenhol terminológia azt jelenti, hogy *egy alkalmas nullamértékű halmaz pontjait leszámítva a T tulajdonság mindenhol teljesül.*

Azt nem állíthatjuk, hogy egy nullamértékű A halmaz pontjaiban a T hamis és egyébként meg mindenhol igaz. Csupán azt követeljük meg, hogy az

$$N := \{\, x \in X \mid T \text{ nem igaz } x\text{-ben} \,\}$$

halmaz lefedhető legyen egy nullamértékű A halmazzal. Vagyis legyen $N \subseteq A$ és $\mu(A) = 0$.

iii) Előfordulhat, hogy $N \notin \Omega$. Viszont, ha a μ mérték teljes és T μ-m.m., akkor

$$N \in \Omega \qquad \text{és} \qquad \mu(N) = 0.$$

■

2.3. Tétel

Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér, valamint $f, g \in L^+$ adott függvények.

1. $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu = 0 \iff f = 0$ majdnem mindenhol.
2. Ha $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu$ véges, akkor $|f| < +\infty$ majdnem mindenhol.
3. Ha $f = g$ majdnem mindenhol, akkor $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Bizonyítás. Az 1. állítás bizonyítása.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tekintsük a $\{f > q\}$ nívóhalmazt, ahol $q > 0$ rögzített. Ekkor

$$f \geq q \cdot \chi_{\{f>q\}} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \int f \,\mathrm{d}\mu \geq q \cdot \mu\big(\{f > q\}\big) \geq 0.$$

Ugyanakkor

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f > \frac{1}{n}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu\big(\{f > 0\}\big) = 0.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tekintsük az $f_n := n{\cdot}\chi_{\{f>0\}}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatot. Ekkor

$$f_n \in L^+, \quad f_n \leq f_{n+1}, \quad f \leq \sup_n f_n = \lim(f_n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Alkalmazva a Beppo Levi–tételt azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(n \cdot \mu\big(\{f > 0\}\big)\Big) = 0.$$

A 2. állítás bizonyítása. Tetszőleges $q > 0$ számmal, hogy $f \geq q{\cdot}\chi_{\{f=+\infty\}}$.

$$0 \leq q \cdot \mu\big(\{f = +\infty\}\big) \leq \int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

ahonnan $\mu\big(\{f = +\infty\}\big) = 0$.

A 3. állítás bizonyítása. Tekintsük az f függvény alábbi felbontását:

$$f = f \cdot \chi_{\{f=g\}} + f \cdot \chi_{\{f\neq g\}}$$

Mivel az integrál additív, ennél fogva

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f{\cdot}\chi_{\{f=g\}} \,\mathrm{d}\mu + \int f{\cdot}\chi_{\{f\neq g\}} \,\mathrm{d}\mu.$$

Mivel az $f{\cdot}\chi_{\{f\neq g\}} = 0$ majdnem mindenhol igaz, ezért az 1. állítás miatt

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f{\cdot}\chi_{\{f=g\}} \,\mathrm{d}\mu = \int g{\cdot}\chi_{\{f=g\}} \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Ugyanezen oknál fogva

$$g = g \cdot \chi_{\{f=g\}} + g \cdot \chi_{\{f\neq g\}}.$$

Ekkor az integrál additivitása miatt

$$\int g \,\mathrm{d}\mu = \int g{\cdot}\chi_{\{f=g\}} \,\mathrm{d}\mu,$$

hiszen az $f = g$ m.m. feltétel alapján

$$\int g{\cdot}\chi_{\{f\neq g\}} \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

2.4. Lemma: Fatou–lemma

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $(h_n) : \mathbb{N} \to L^+$ egy függvénysorozat.

a) Ekkor

$$\liminf(h_n) \in L^+ \qquad \text{és} \qquad \int \liminf_{n\to\infty} h_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu.$$

b) Tegyük fel, hogy létezik olyan $F \in L^+$ függvény, amire

$$\int F \, d\mu < +\infty \qquad \text{és} \qquad h_n \leq F \ \mu\text{-m.m.} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\limsup(h_n) \in L^+ \qquad \text{és} \qquad \limsup_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} h_n \, d\mu.$$

Bizonyítás. Az a) állítás bizonyításához legyen

$$\liminf(h_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} h_k \right) =: \lim(f_n).$$

Itt (f_n) egy L^+-beli monoton növő sorozat, ezért a Beppo Levi–tétel alapján

$$\int \liminf_{n\to\infty} h_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Mivel $f_n \leq h_k$ $(k \geq n)$, ezért az integrál monotonitása miatt

Ugyanis minden $k \geq n$ indexre

$$\int f_n \, d\mu \leq \int h_k \, d\mu.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} \int h_k \, d\mu \right) = \liminf_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu.$$

A b) állítás bizonyítását nem részletezzük.

Csupán megjegyezzük, hogy az F függvény μ-m.m. majorálja a (h_n) sorozat tagjait, vagyis egy alkalmas $A \in \Omega$ mérhető halmazzal

$$\mu(A) = 0, \quad h_n(x) \leq F(x) < +\infty \qquad (n \in \mathbb{N}, \ x \in X \setminus A).$$

Ezek után alkalmazzuk az a) állítást az

$$F - h_n \cdot \chi_C \in L^+ \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozaton, ahol $C := X \setminus A$.