Mérték, integrál, ...

1. Előadás

1. Riemann-integrálható függvények.

Induljunk ki az $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ értelmezett

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

korlátos függvényből. A $\tau \subset [a, b]$ véges halmazt az $[a, b]$ intervallum *felosztásának* nevezzük, ha $a, b \in \tau$. Ekkor tehát egy $1 \leq n \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\tau = \{x_0, ..., x_n\}$$

alkalmas $x_0, ..., x_n \in [a, b]$ számokkal, ahol (a későbbiekben ezt mindig feltételezzük a jelölésben)

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b.$$

A

$$\delta_\tau := \max\{x_{k+1} - x_k : k = 0, ..., n-1\}$$

számot a τ felosztás *finomságának* nevezzük.

Legyen

$$I_j := [x_j, x_{j+1}] \qquad (j = 0, ..., n-1)$$

a τ felosztás által meghatározott j*-edik osztásintervallum,* ill.

$$\mathcal{F}(\tau) := \{I_j : j = 0, ..., n-1\}.$$

Definiáljuk az $m_j,\ M_j \in \mathbf{R}$ $\ (j = 0, ..., n-1)$ számokat a következőképpen:

$$m_j := m_{I_j} := \inf\{f(x) : x \in I_j\},\ M_j := M_{I_j} := \sup\{f(x) : x \in I_j\},$$

ill. egy $I := [u, v]$ $\ (u,\ v \in \mathbf{R},\ u < v)$ intervallum esetén legyen $|I| := v - u$ az I *hossza.*[1] Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{j=0}^{n-1} m_j \cdot |I_j|$$

az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó *alsó összege,*

$$S(f, \tau) := \sum_{j=0}^{n-1} M_j \cdot |I_j|$$

[1]Ugyanígy értelmezzük az $(u, v]$, $[u, v)$, (u, v) intervallumok hosszát is.

pedig az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó *felső összege.* Világos, hogy bármely $\tau \subset [a,b]$ felosztás esetén

$$s(f,\tau) \le S(f,\tau),$$

sőt, könnyen beláthatóan tetszőleges $\tau, \mu \subset [a,b]$ felosztásokra

$$s(f,\tau) \le S(f,\mu).$$

Legyen

$$\omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$$

az f függvény τ által meghatározott *oszcillációs összege.* Az alsó, felső összegek definíciója szerint

$$\omega(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} (M_J - m_J) \cdot |J|,$$

ahol a J intervallumon vett $M_J - m_J$ oszcillációról a következőt mondhatjuk:

$$M_J - m_J = \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in J\}.$$

Jelöljük az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}_a^b$-vel. Ekkor az

$$\left\{ s(f,\tau) \in \mathbf{R} : \tau \in \mathcal{F}_a^b \right\}$$

halmaz felülről korlátos, és minden $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra az utóbbi halmaznak az $S(f,\mu)$ felső összeg egy felső korlátja:

$$s(f,\tau) \le S(f,\mu) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b).$$

Ezért

$$I_*(f) := \sup\{s(f,\tau) \in \mathbf{R} : \tau \in \mathcal{F}_a^b\} \le S(f,\mu) < +\infty.$$

Hasonlóan, az

$$\left\{ S(f,\tau) \in \mathbf{R} : \tau \in \mathcal{F}_a^b \right\}$$

halmaz alulról korlátos, aminek minden $\mu \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra az $s(f,\mu)$ alsó összeg egy alsó korlátja:

$$S(f,\tau) \ge s(f,\mu) \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b).$$

Így

$$I^*(f) := \inf\left\{ S(f,\tau) \in \mathbf{R} : \tau \in \mathcal{F}_a^b \right\} \ge s(f,\mu) > -\infty.$$

Következésképpen $I_*(f)$, $I^*(f) \in \mathbf{R}$ és

$$I_*(f) \leq I^*(f).$$

A most definiált $I_*(f)$ számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának,* $I^*(f)$-et pedig az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük. A szóban forgó f függvény *Riemann*[2]*-integrálható,* ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor az

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f)$$

szám az f függvény *Riemann-integrálja* (vagy más szóval *határozott integrálja.*)

Az előbbiekben értelmezett Riemann-integrálható függvények halmazát az $R[a,b]$ szimbólummal fogjuk jelölni. Esetenként használni fogjuk az

$$\int_{[a,b]} f := \int_I f := \int_a^b f$$

jelöléseket is (ahol $I := [a,b]$).

1. Tétel. *Legyen az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény korlátos. Ekkor a következő ekvivalencia igaz: $f \in R[a,b]$ akkor és csak akkor teljesül, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztás, amellyel $\omega(f,\tau) < \varepsilon$.*

2. A Riemann-integrál kritikája: folytonosság.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy „lényegében" csak a folytonos függvények Riemann-integrálhatók.[3] Vezessük be ehhez a (Lebesgue szerint) nullamértékű halmaz fogalmát: azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz *nullamértékű,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

[2]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866).

[3]Emlékeztetünk arra, hogy ha az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor $f \in R[a,b]$. Ugyanakkor a folytonosság nem szükséges feltétele a Riemann-integrálhatóságnak. Pl. $f \in R[a,b]$ teljesül akkor is, ha az f monoton.

Ekkor az $\mathbf{R}$ minden, legfeljebb megszámlálható részhalmaza nullamértékű. Ha $X_k \subset \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ nullamértékű, akkor az $\bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$ halmaz is nullamértékű. A definícióban (ha szükség van rá) nyugodtan feltehető, hogy a szóban forgó I_k $(k \in \mathbf{N})$ intervallumok mindegyike nyílt. Egy nullamértékű halmaz minden részhalmaza is nullamértékű. Az $[a,b]$ $(a,b \in \mathbf{R}, a < b)$ intervallum nem nullamértékű.

2. Tétel (*Lebesgue*[4]*-kritérium*). *Tegyük fel, hogy az* $[a,b]$ *kompakt intervallumon értelmezett* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *függvény korlátos, és legyen az* f *szakadási helyeinek a halmaza*

$$\mathcal{A}_f := \Big\{x \in [a,b] : f \notin C\{x\}\Big\}.$$

Ekkor az f *Riemann-integrálhatósága, azaz* $f \in R[a,b]$ *azzal ekvivalens, hogy az* $\mathcal{A}_f$ *halmaz nullamértékű.*

Bizonyítás. Legyen először $f \in R[a,b]$, ill. $\alpha \in [a,b]$, és valamilyen $J \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén $\alpha \in \operatorname{int} J$, amikor is

$$O_J(f) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in J \cap [a,b]\}$$

az f *oszcillációja* a J intervallumon. Az f függvény α-beli *lokális oszcillációját* a következőképpen értelmezzük:

$$\Delta_\alpha f := \inf\{O_J(f) : J \subset \mathbf{R} \text{ intervallum}, \ \alpha \in \operatorname{int} J\}.$$

Mutassuk meg először is azt, hogy

$$f \in C\{\alpha\} \iff \Delta_\alpha f = 0.$$

Valóban, ha $f \in C\{\alpha\}$, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \qquad (x \in [a,b], |x - \alpha| < \delta).$$

Ezért

$$|f(x) - f(y)| \leq$$
$$|f(x) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(y)| < 2\varepsilon \qquad (x,\, y \in [a,b], |x - \alpha|, |y - \alpha| < \delta).$$

Így minden olyan $J \subset \mathbf{R}$ intervallumra, amelyre $\alpha \in \operatorname{int} J$ és $|J| < \delta$, igaz, hogy

$$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon \qquad (x, y \in J \cap [a,b]),$$

amiből $O_J(f) \leq 2\varepsilon$ következik. Ez azt jelenti, hogy $(0 \leq)\Delta_\alpha f \leq 2\varepsilon$. Mindez csak úgy lehetséges, ha $\Delta_\alpha f = 0$.

Ha most azt tesszük fel, hogy $\Delta_\alpha f = 0$, akkor az infimum tulajdonságait figyelembe véve bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz találunk olyan $J \subset \mathbf{R}$ intervallumot, amellyel $\alpha \in \operatorname{int} J$ és $O_J(f) < \varepsilon$. Tehát

[4] Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941).

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (x,\, y \in J \cap [a,b]),$$

speciálisan

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \qquad (x \in J \cap [a,b]).$$

Mivel $\alpha \in \operatorname{int} J$, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in J \quad (x \in [a,b],\ |x-\alpha| < \delta)$. Így

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \qquad (x \in I, |x - \alpha| < \delta),$$

azaz $f \in C\{\alpha\}$.

A lokális oszcilláció és a pontbeli folytonosság kapcsolatáról most belátott ekvivalencia alapján

$$\mathcal{A}_f = \Big\{x \in [a,b] : \Delta_x f > 0\Big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{x \in [a,b] : \Delta_x f > 1/k\Big\} =: \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékűségéhez ezért elegendő azt megmutatni, hogy az

$$A_\delta := \Big\{x \in [a,b] : \Delta_x f > \delta\Big\} \qquad (\delta > 0)$$

halmazok nullamértékűek. Legyen $\sigma > 0$, amikor is a Riemann-integrálhatóságnak az oszcillációs összegekkel való jellemzése (ld. 1. Tétel) folytán az $[a,b]$ intervallum egy alkalmas τ felosztásával

$$\omega(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} O_J(f) \cdot |J| < \sigma.$$

Ekkor tetszőleges $\delta > 0$ mellett

$$\sigma > \omega(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} O_J(f) \cdot |J| \geq \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} O_J(f) \cdot |J|.$$

Világos, hogy minden $J \in \mathcal{F}(\tau)$, $A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset$ osztásintervallum esetén $O_J(f) \geq \delta$, ezért

$$\sigma > \delta \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} |J|.$$

Más szóval

$$\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} |J| < \frac{\sigma}{\delta}.$$

Legyen itt valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett a $\sigma > 0$ olyan, hogy $\sigma/\delta < \varepsilon/2$.

Nyilván
$$A_\delta \subset \left(\bigcup_{J\in\mathcal{F}(\tau),\, A_\delta\cap \mathrm{int}\, J\neq\emptyset} J \right) \bigcup \tau.$$
Mivel a τ halmaz nullamértékű, ezért alkalmas $K_j \subset \mathbf{R}$ $\quad (j \in \mathbf{N})$ intervallumsorozattal
$$\tau \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$$
és $\sum_{j=0}^{\infty} |K_j| < \varepsilon/2$. Mindezeket egybevetve
$$A_\delta \subset \left(\bigcup_{J\in\mathcal{F}(\tau),\, A_\delta\cap \mathrm{int}\, J\neq\emptyset} J \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j \right)$$
és
$$\sum_{J\in\mathcal{F}(\tau),\, A_\delta\cap \mathrm{int}\, J\neq\emptyset} |J| + \sum_{j=0}^{\infty} |K_j| < \varepsilon.$$
Ez pontosan azt jelenti, hogy az A_δ halmaz nullamértékű.

Most tegyük fel azt, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű. Legyen adott az $\varepsilon > 0$ szám, ekkor egy alkalmas, kompakt intervallumokból álló $L_k \subset \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ intervallumsorozattal
$$\mathcal{A}_f \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{int}\, L_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |L_k| < \frac{\varepsilon}{4C},$$
ahol a $C > 0$ számmal
$$|f(x)| \leq C \qquad (x \in [a, b]).$$
Ha $x \in [a, b] \setminus \mathcal{A}_f$, azaz $f \in C\{x\}$, akkor van olyan $I_x \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum, amelyre $x \in \mathrm{int}\, I_x$, és
$$O_{I_x}(f) = \sup\{|f(t) - f(y)| \in \mathbf{R} : t,\, y \in I_x \cap I)\} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$
Világos, hogy
$$[a, b] \subset \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{int}\, L_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{x\in I\setminus\mathcal{A}_f} \mathrm{int}\, I_x \right).$$

Az $[a,b]$ kompaktsága miatt az előbbi nyílt lefedést figyelembe véve kapunk olyan véges $A \subset \mathbf{N}$, $B \subset [a,b] \setminus \mathcal{A}_f$ halmazokat[5], amelyekkel

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{k \in A} \operatorname{int} L_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \in B} \operatorname{int} I_x \right).$$

Legyen $\tau \subset [a,b]$ az a felosztás, amit az a, b és az $L_k \quad (k \in A)$, $I_x \quad (x \in B)$ intervallumok $[a,b]$-be eső végpontjai alkotnak. Bármelyik $J \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallumra egy-egy alkalmas $k \in A$, vagy $x \in B$ mellett $J \subset L_k$, vagy $J \subset I_x$ (esetleg mindkét tartalmazás igaz). Ha $k \in A$ és $J \subset L_k$, akkor

$$O_J(f) \leq 2C.$$

Ha pedig $x \in B$ és $J \subset I_x$, akkor

$$O_J(f) \leq \varepsilon/(2(b-a)).$$

Ezért a τ-hoz tartozó $\omega(f,\tau)$ oszcillációs összegről az alábbiakat mondhatjuk:

$$\omega(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} O_J(f) \cdot |J| \leq$$

$$\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists k \in A : J \subset L_k} O_J(f) \cdot |J| + \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists x \in B : J \subset I_x} O_J(f) \cdot |J| \leq$$

$$2C \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists k \in A : J \subset L_k} |J| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists x \in B : J \subset I_x} |J| \leq$$

$$2C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |L_k| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J| \leq 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Tehát (ld. 1. Tétel) $f \in R[a,b]$. $\blacksquare$

[5]Borel-féle lefedési tétel: *bárhogyan is adunk meg olyan* $\mathbf{R}$*-beli* J_γ $(\gamma \in \Gamma)$ *nyílt intervallumokat (valamilyen* Γ *indexhalmazzal), amelyek együttesen lefedik az* $[a,b]$ *intervallumot:* $[a,b] \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} J_\gamma$, *akkor ezek közül a nyílt intervallumok közül véges sok is lefedi az* $[a,b]$*-t.* Ha ui. ez nem lenne igaz, akkor felezzük meg az $[a,b]$-t. Az egyik fele nem lenne lefedhető véges sok J_γ-val. Ha az $[a,b]$-nek ezt a felét is megfelezzük, akkor az utóbbi felek valamelyike szintén nem fedhető le véges sok J_γ-val. Ezt az eljárást folytatva a kiválasztott fél intervallumok metszete az $[a,b]$ egyetlen c pontja által alkotott halmaz. A c-t egy alkalmas $\alpha \in \Gamma$ mellett a J_α nyílt intervallum tartalmazza. Világos, hogy elég sok lépés után a kiválasztott fél intervallumok valamelyike (J) részhalmaza a J_α-nak. (Ui. a felezések miatt a szóban forgó fél intervallumok hosszai nullasorozatot alkotnak.) Így a J-t, amit a konstrukció miatt nem fed le véges sok J_γ, már az egyetlen J_α lefedi. Ez nyilván ellentmondás.

3. Megjegyzések.

i) Induljunk ki egy korlátos $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényből, és tekintsük (valamilyen $1 \le n \in \mathbf{N}$ mellett) a $\tau = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ felosztást. Ekkor tetszőleges $y_j \in I_j \in \mathcal{F}(\tau)$ $(j = 0, ..., n-1)$ választással legyen

$$y := (y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$$

és

$$\sigma(f, \tau, y) := \sum_{j=0}^{n-1} f(y_j) \cdot |I_j|$$

(az f függvény (integrál) *közelítő összege*). Legyen továbbá

$$\widehat{\tau} := \{y = (y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n : y_j \in I_j \in \mathcal{F}(\tau) \ \ (j = 0, ..., n-1)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy bármely $\tau \subset [a,b]$ felosztásra

$$s(f,\tau) \le \sigma(f,\tau,y) \le S(f,\tau) \qquad (y \in \widehat{\tau}).$$

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény korlátos. Ekkor:*

a) *tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy*

$$|s(f,\tau) - I_*(f)| < \varepsilon, \ |S(f,\tau) - I^*(f)| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_a^b, \ \delta_\tau < \delta);$$

b) *ha $q \in \mathbf{R}$, akkor az $f \in R[a,b]$, $\int_a^b f = q$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amellyel*

$$|\sigma(f,\tau,y) - q| < \varepsilon \qquad \left(\tau \in \mathcal{F}_a^b, \ \delta_\tau < \delta, \ y \in \widehat{\tau}\right).$$

ii) A Riemann-integrál egyik általánosítása az ún. Riemann–Stieltjes-integrál. Legyenek ehhez adottak az

$$f, \ g : [a,b] \to \mathbf{R}$$

függvények, és valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett vegyük az $[a,b]$ intervallumnak egy

$$\tau := \{x_0, ..., x_n\}$$

felosztását. Legyenek továbbá (tetszőlegesen) adottak a $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, ..., n-1)$ pontok, és a $\xi_\tau := (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ jelöléssel definiáljuk az $S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)$ összeget a következőképpen:

$$S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (g(x_{i+1}) - g(x_i)).$$

Tegyük fel, hogy valamilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ mellett minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ szám, amivel a fenti τ és a ξ_i-k tetszőleges megválasztása mellett

$$|\alpha - S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)| < \varepsilon,$$

hacsak

$$\delta_\tau = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, ..., n-1\} < \delta.$$

Világos, hogy ekkor egyértelműen létezik ilyen α. Mindezt röviden így fogjuk jelölni:

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) = \alpha.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az f függvény *Riemann–Stieltjes-integrálható* a g függvényre nézve, az

$$\int_a^b f\,dg := \alpha$$

szám pedig az f függvény *Riemann–Stieltjes-integrálja* a g függvényre vonatkozóan.

iii) Ha az előbbi megjegyzésben $g(x) := x \quad (x \in [a,b])$, akkor

$$S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

az f függvénynek a τ felosztásra vonatkozó Riemann-közelítő összege. Így – feltételezve, hogy $f \in R[a,b]$ – létezik az $\int_a^b f\,dg$ Riemann–Stieltjes-integrál, és

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)\,dx$$

(az f „közönséges" Riemann-integrálja).

iv) A Cauchy-kritérium alapján az $\int_a^b f\,dg$ integrál létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy bármelyik $\varepsilon > 0$ esetén legyen olyan $\delta > 0$, amivel

$$|S_{\sigma,\zeta_\sigma}(f,g) - S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)| < \varepsilon$$

fennáll az $[a,b]$ intervallum minden olyan σ, τ felosztásaira, amelyekre δ_σ, $\delta_\tau < \delta$, mégpedig a ζ_σ, ξ_τ vektorok tetszőleges megadása mellett.

v) Mutassuk meg, hogy ha $f \in C[a,b]$, a $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény pedig monoton növő, akkor létezik az $\int_a^b f\,dg$ Riemann–Stieltjes-integrál. Legyen ehhez

$$\tau = \{x_0, ..., x_n\},\ \sigma = \{z_0, ..., z_m\}$$

az $[a,b]$ intervallum egy-egy felosztása, és jelöljük $\{y_0, ..., y_r\}$-rel a $\tau \cup \sigma$ felosztást. Ekkor minden $l = 0, ..., n-1$ indexre alkalmasan választott

$$\mathcal{I}_l \subset \{0, ..., r-1\}$$

halmazzal az $[y_j, y_{j+1}]$ $(j \in \mathcal{I}_l)$ intervallumok az $[x_l, x_{l+1}]$-nek egy felosztását alkotják. Hasonlóan, ha $i = 0, ..., m-1$, akkor valamilyen

$$\mathcal{I}_i \subset \{0, ..., r-1\}$$

mellett az $[y_j, y_{j+1}]$ $(j \in \mathcal{I}_i)$ intervallumok a $[z_i, z_{i+1}]$-nek egy felosztását adják. Világos, hogy tetszőleges ξ_τ, ζ_σ vektorok esetén

$$f(\xi_l)\cdot(g(x_{l+1}) - g(x_l)) = \sum_{j\in\mathcal{I}_l} f(\xi_l)\cdot(g(y_{j+1}) - g(y_j)) \qquad (l = 0, ..., n-1),$$

$$f(\zeta_i)\cdot(g(z_{i+1}) - g(z_i)) = \sum_{j\in\mathcal{I}_i} f(\zeta_i)\cdot(g(y_{j+1}) - g(y_j)) \qquad (i = 0, ..., m-1).$$

Következésképpen

$$S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) = \sum_{k=0}^{r-1} f(\varrho_k)\cdot(g(y_{k+1}) - g(y_k)),$$

$$S_{\sigma,\zeta_\sigma}(f,g) = \sum_{k=0}^{r-1} f(\gamma_k)\cdot(g(y_{k+1}) - g(y_k)),$$

ahol az itt szereplő ϱ_k-k és γ_k-k mindegyike vagy egy alkalmas ξ_l-lel $(l = 0, ..., n-1)$, vagy pedig egy ζ_i-vel $(i = 0, ..., m-1)$ egyezik meg. Az is eléggé nyilvánvaló, hogy

$$|\varrho_k - \gamma_k| \le 2\cdot \max\{\delta_\tau, \delta_\sigma\} \qquad (k = 0, ..., r-1).$$

Az f függvény egyenletes folytonossága miatt minden $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$ mellett van olyan $0 < \delta \in \mathbf{R}$, hogy

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon \qquad (u, v \in [a,b],\ |u - v| < \delta).$$

Ha tehát $2\cdot \max\{\delta_\tau, \delta_\sigma\} < \delta$, akkor

$$\left|S_{\tau,\xi_\tau}(f,g) - S_{\sigma,\zeta_\sigma}(f,g)\right| \le \sum_{k=0}^{r-1} |f(\varrho_k) - f(\gamma_k)|\cdot (g(y_{k+1}) - g(y_k)) \le$$

$$\varepsilon\cdot \sum_{k=0}^{r-1}(g(y_{k+1}) - g(y_k)) = \varepsilon\cdot (g(b) - g(a)).$$

Ez azt jelenti, hogy teljesül a Cauchy-kritérium, így (ld. iv)) létezik a (véges) $\lim_{\delta_\tau\to 0} S_{\tau,\xi_\tau}(f,g)$ határérték, azaz az $\displaystyle\int_a^b f\,dg$ integrál.

vi) Ha egy bizonyos tulajdonság egy nullamértékű halmaz pontjainak a kivételével igaz valamilyen halmaz pontjaiban, akkor a szóban forgó tulajdonság (az illető halmaz pontjaira nézve) *majdnem mindenütt* (vagy másképp fogalmazva *majdnem minden pontban*) igaz (röviden: m.m.).[6] Így pl. a Lebesgue-kritérium feltétele ebben a megfogalmazásban úgy szól, hogy az f az $[a,b]$ intervallum pontjaiban m.m. folytonos.

vii) Vigyázat: az

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x=0) \\ 1/x & (0 < x \le 1) \end{cases}$$

függvény m.m. folytonos, de nem Riemann-integrálható, ui. nem korlátos!

[6] angolul: a.e. (*almost every*, vagy *almost everywhere*), vagy a.a. (*almost all*), németül: f.ü. (*fast überall)*, vagy f.a. (*fast alle*), oroszul: p.v. (*pacstyi vszjudu*).