Mérték, integrál, ...

10. Előadás

1. Emlékeztető.

a) Tetszőleges $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvény és $0 < p < +\infty$ „kitevő" esetén

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

az f ún. *p-normája.* Továbbá

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : |f| \leq \alpha \ \ \mu\text{-m.m.}\}$$

az f *∞-normája.*

b) Hölder-egyenlőtlenség: tegyük fel, hogy az $1 \leq p,\, q \leq +\infty$ kitevőkre

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ekkor bármely $f,\, h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvényre igaz az

$$\|fh\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_q$$

egyenlőtlenség.[1]

c) Minkowski-egyenlőtlenség: a mérhető $f,\, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvényekről tegyük fel, hogy létezik az $f + g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ összegük. Ekkor tetszőleges $1 \leq p \leq +\infty$ mellett fennáll az

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

becslés.[2]

[1]Ha itt $\|f\|_p,\, \|h\|_q < +\infty$, akkor az $1 < p, q < +\infty$ esetben az $\|fh\|_1 = \|f\|_p \cdot \|h\|_q$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha egy $\lambda \geq 0$ számmal $|f|^p = \lambda \cdot |h|^q$ μ-m.m., vagy $|h|^q = \lambda \cdot |f|^p$ μ-m.m. Az $\|fh\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|h\|_\infty$ egyenlőség pedig azzal ekvivalens, hogy $|h(x)| = \|h\|_\infty$ (μ-m.m. $x \in \{|f| > 0\}$).

[2]Ha $1 < p < +\infty$ és $\|f\|_p,\, \|g\|_p < +\infty$, akkor az $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ egyenlőség akkor és csak akkor igaz, ha egy alkalmas $c \geq 0$ együtthatóval vagy $f = cg$ μ-m.m., vagy pedig $g = cf$ μ-m.m.

2. L^p**-terek.**

Adott $1 \le p \le +\infty$ esetén legyen

$$L^p := L^p(\mu) := \{f : X \to \mathbf{R} : f \ \text{ mérhető és } \ \|f\|_p < +\infty\}.$$

1. Tétel. *Legyen* $1 \le p \le +\infty$. *Ekkor a fenti* L^p*-terekre az alábbi állítások teljesülnek:*

a) *az* L^p *lineáris tér az* $\mathbf{R}$ *felett;*

b) *minden* $f, g \in L^p$ *esetén* $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} \in L^p$;

c) $f \in L^p \iff f^+,\ f^- \in L^p$;

d) *ha* $1 \le q \le +\infty$ *és* $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, *akkor* $f \cdot g \in L^1$;

e) *véges* μ *esetén*[3] $L^\infty \subset L^p \subset L^1$.

Bizonyítás. Az a) állítás (ld. Minkowski-egyenlőtlenség) nyilvánvaló.

A

$$\max\{f, g\},\ \min\{f, g\} : X \to \mathbf{R}$$

függvények mérhetők és

$$|\max\{f, g\}|,\ |\min\{f, g\}| \le |f| + |g|.$$

Ezért $p < +\infty$ mellett az integrál monotonitása, $p = +\infty$ esetén pedig

$$|f| \le \|f\|_\infty \ \ \mu\text{−m.m.}, \quad |g| \le \|g\|_\infty \ \ \mu\text{−m.m.}$$

alapján a Minkowski-egyenlőtlenséget felhasználva

$$\|\max\{f, g\}\|_p,\ \|\min\{f, g\}\|_p \le \||f| + |g|\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p < +\infty,$$

azaz a b) is igaz.

A c) állítás egyszerűen következik az a)-ből és a b)-ből az

$$f^+ = \max\{f, 0\},\ f^- = \max\{-f, 0\},\ f = f^+ - f^-$$

egyenlőségekre tekintettel.

A d)-t illetően ld. Hölder-egyenlőtlenség.

[3] Tehát $\mu(X) < +\infty$.

Az e)-ben szereplő $L^p \subset L^1$ tartalmazás igazolásához feltehető, hogy $p > 1$. Legyen ekkor a $q \in \mathbf{R}$ olyan, hogy $1/p + 1/q = 1$, és egy $c \in \mathbf{R}$ paraméterrel tekintsük a nyilván mérhető

$$f_c(x) := c \qquad (x \in X)$$

függvényt. Ekkor

$$\int |f_c|^q \, d\mu = |c|^q \cdot \mu(X) < +\infty,$$

így $f_c \in L^q$. Alkalmazzuk a d) állítást az $f \in L^p$ és a $g := f_1 \in L^q$ függvényre, amikor is $f = f \cdot g \in L^1$, más szóval $L^p \subset L^1$.

Az $L^\infty \subset L^p$-hez legyen $p < +\infty$ és $f \in L^\infty$. Ekkor

$$|f|^p \leq \|f\|_\infty^p \;\; \mu\text{–m.m.},$$

így

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \cdot \mu(X) < +\infty,$$

következésképpen $f \in L^p$, tehát valóban $L^\infty \subset L^p$. ■

Ha az L^p-terek definíciójában szereplő μ mérték véges, akkor

$$L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1 \qquad (1 \leq p \leq q \leq +\infty).$$

Mindez már csak $1 < p < q < +\infty$ mellett kíván indokolást. Ekkor a Hölder-egyenlőtlenséget a

$$\tilde{p} := \frac{q}{p}, \;\; \tilde{q} := \frac{q}{q-p}$$

paraméterekkel alkalmazva $f \in L^q$ esetén azt kapjuk, hogy (a $h := f_1 \equiv 1$ függvénnyel)

$$\|f\|_p^p = \||f|^p \cdot h\|_1 \leq \||f|^p\|_{\tilde{p}} \cdot \|h\|_{\tilde{q}} = \|f\|_q^p \cdot (\mu(X))^{1/\tilde{q}}.$$

Innen

$$\|f\|_p \leq \Big(\mu(X)\Big)^{1/p-1/q} \cdot \|f\|_q < +\infty$$

következik, tehát $f \in L^p$.

Az utóbbi becslés $q = +\infty$ esetén is igaz:

$$\|f\|_p \leq \Big(\mu(X)\Big)^{1/p} \cdot \|f\|_\infty,$$

ui. ($p < +\infty$ mellett) $|f|^p \le \|f\|_\infty^p$ μ-m.m. miatt

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int \|f\|_\infty^p \, d\mu\right)^{1/p} = \big(\mu(X)\big)^{1/p} \cdot \|f\|_\infty .$$

Hasonlóan, ha $p = 1 < q \le +\infty$, akkor a fenti $h \equiv 1$ függvénnyel a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\|f\|_1 = \int |fh| \, d\mu \le \|f\|_q \cdot \|h\|_r = \|f\|_q \cdot \big(\mu(X)\big)^{1/r},$$

ahol $1 \le r < +\infty$ és $1/q + 1/r = 1$.

Speciálisan, ha $\mu(X) \le 1$, akkor a most mondottak szerint

$$\|f\|_p \le \|f\|_q \qquad (1 \le p \le q \le +\infty).$$

3. Lebesgue-tétel.

A Lebesgue-tételként idézett konvergencia-tétel m.m. konvergens függvénysorozatok határfüggvényének az integrálhatóságáról, valamint a sorozat „tagonkénti integrálhatóságáról" ad felvilágosítást.

2. Tétel (Lebesgue). *Adott az (X, Ω, μ) mértéktér, $1 \le p < +\infty$, az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ pedig legyen egy olyan függvénysorozat, amire a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték μ-m.m. $x \in X$ helyen létezik. Tegyük fel továbbá, hogy egy $F \in L^+$ függvénnyel egyrészt $\|F\|_p < +\infty$, másrészt minden $n \in \mathbf{N}$ indexre*

$$|f_n(x)| \le F(x) \quad \mu\text{-m.m. } x \in X.$$

Ekkor:

a) *van olyan $f : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvény, hogy*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{-m.m.};$$

b) *minden* a)*-beli f függvényre $f \in L^p$ és $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.*

Bizonyítás. Legyen az $A \in \Omega$ olyan halmaz, hogy $\mu(A) = 0$ és bármelyik $x \in X \setminus A$ pontban létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték. Hasonlóan: van olyan $B \in \Omega$, hogy $\mu(B) = 0$ és

$$F(x) < +\infty \qquad (x \in X \setminus B).[4]$$

[4]Ilyen B halmaz $\int F^p \, d\mu < +\infty$ miatt megadható.

Továbbá minden $n \in \mathbf{N}$ indexre valamilyen $C_n \in \Omega$ halmazzal $\mu(C_n) = 0$ és

$$|f_n(x)| \leq F(x) \qquad (x \in X \setminus C_n).$$

Ha

$$D := A \bigcup B \bigcup \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \Big),$$

akkor $D \in \Omega$, $\mu(D) = 0$, és az előbb felsorolt valamennyi követelmény teljesül: tetszőleges $k \in \mathbf{N}$, $x \in Y := X \setminus D$ mellett

$$|f_k(x)| \leq F(x) < +\infty \ \text{ és létezik a } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \text{ határérték.}$$

Definiáljuk az f függvényt a következőképpen:

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & (x \in Y) \\ 0 & (x \in D). \end{cases}$$

Az f mérhető függvény. Mivel

$$|f(x)| = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq F(x) < +\infty & (x \in Y) \\ 0 & (x \in D), \end{cases}$$

ezért az f nyilván valós értékű, azaz $f : X \to \mathbf{R}$. Továbbá

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in Y)$$

miatt $f = \lim\limits_n f_n$ μ-m.m. Más szóval az f-re igaz mindaz, amit az a)-ban állítottunk.

Ha egy mérhető $f : X \to \mathbf{R}$ függvény eleget tesz az a)-nak, akkor

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{-m.m.}$$

szerint az f_n-ekre tett feltételből adódóan $|f| \leq F$ μ-m.m. is teljesül. Következésképpen

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \int F^p \, d\mu < +\infty.$$

Tehát $f \in L^p$ is igaz.[5]

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Legyen ehhez

$$g_n := |f - f_n|^p \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

[5]Vegyük észre, hogy amit eddig mondtunk, az $p = +\infty$ esetén is elmondható.

Ekkor $g_n \in L^+$ és $g_n \le 2^p \cdot F^p$ μ-m.m. $(n \in \mathbf{N})$. Ezért (ld. Fatou-lemma)

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} g_n\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n\, d\mu = 0,$$

hiszen $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$ μ-m.m. Tehát

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = 0,$$

amiből $\liminf\limits_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = 0$, azaz valóban létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p^p = 0$$

határérték. ■

Ha a μ mérték véges és a Lebesgue-tételben valamilyen $c \ge 0$ konstanssal

$$|f_n| \le c \quad \mu\text{-m.m.} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor bármilyen $1 \le p < +\infty$ mellett teljesül a Lebesgue-tétel valamennyi állítása. Ekkor ui. az $F \equiv c$ választással

$$\int F^p\, d\mu = c^p \cdot \mu(X) < +\infty.$$

Szokás a tételnek ezt a speciális esetét „kis Lebesgue-tétel"-ként említeni.

Legyen a 2. Tételben $p = 1$. Ekkor

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Valóban,

$$\left| \int f\, d\mu - \int f_n\, d\mu \right| \le \int |f - f_n|\, d\mu = \|f - f_n\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

A jelentősége miatt nem érdektelen külön állításként is szerepeltetni (formailag picit más megfogalmazásban) a most mondottakat, mint az új mérték- és integrálelmélet emblematikus tételét. Ez az az eredmény, ami választ ad a Riemann-integrál kritikája kapcsán megfogalmazott elvárásoknak.

3. Tétel (Lebesgue). *Tegyük fel, hogy a Lebesgue-tételben az integrálható* $f_n \in L \quad (n \in \mathbf{N})$ *függvényekből álló sorozatnak* μ*-m.m. van határértéke, és egy* $F \in L \cap L^+$ *integrálható függvénnyel*

$$|f_n| \leq F \quad \mu\text{-m.m.} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor van olyan $f \in L$*, hogy* $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n \quad \mu$*-m.m., és minden ilyen* f *(határ-)függvényre*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Ha tehát az $f,\, g \in L$ függvényekre

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{−m.m. és } g = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{−m.m.},$$

akkor $f = g \ \ \mu$-m.m., valamint

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Jelöljük a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ szimbólummal az előbbi $f,\, g, \ldots$ függvények bármelyikét, akkor azt írhatjuk, hogy

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu,$$

ami (a Lebesgue-tételben tett feltételek mellett) az integrálás és a határátmenet felcserélhetőségét fejezi ki.

A Lebesgue-tétel „függvénysoros alakját" is könnyen megfogalmazhatjuk: ha a $g_n \in L \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló $\sum(g_n)$ függvénysornak μ-m.m. van határértéke, és valamilyen $G \in L \cap L^+$ függvénnyel

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} g_k\Big| \leq G \quad \mu\text{−m.m.} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor létezik olyan $g \in L$ függvény, hogy

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \quad \mu\text{-m.m.}$$

és

$$\int g \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Ez a helyzet speciálisan akkor, ha a $\sum(g_n)$ függvénysor μ-m.m. abszolút konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n| \in L$. Ekkor ui. a $G := \sum_{n=0}^{\infty} |g_n|$ függvény nyilván egy integrálható majoránsa az illető függvénysornak.

4. Teljesség.

A következő tételben megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le +\infty)$ normafüggvény rendelkezik a számsorozatokkal kapcsolatban „érvényes" teljességi tulajdonsággal.

4. Tétel. *Tekintsük az eddigiekben is szereplő (X, Ω, μ) mértékteret, legyen továbbá $1 \le p \le +\infty$, az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbf{N})$ pedig egy olyan függvénysorozat, amire teljesül az ún. Cauchy-kritérium: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ index, hogy hacsak $m, n \in \mathbf{N}$ és $m, n > N$, akkor*

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Ekkor:

a) *van olyan $f \in L^p$ függvény, hogy* $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$;

b) *egy alkalmas $n_k \in \mathbf{N}$ $(k \in \mathbf{N})$ indexsorozattal*

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k} \quad \mu\text{-m.m.}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $p < +\infty$. Ekkor a tételben szereplő Cauchy-kritérium miatt megadható olyan $n_k \in \mathbf{N}$ $(k \in \mathbf{N})$ indexsorozat, amivel

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k-1} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ha

$$g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \quad (k \in \mathbf{N}) \text{ és } g := \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|,$$

akkor

$$\|g\|_p \le \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_p < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} = 1.$$

Ui. egyrészt a Minkowski-egyenlőtlenség miatt minden $n \in \mathbf{N}$ index mellett

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} |g_k| \right\|_p = \left(\int \Big(\sum_{k=0}^{n} |g_k| \Big)^p d\mu \right)^{1/p} \le \sum_{k=0}^{n} \|g_k\|_p \le \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_p \le 1.$$

Másrészt az itt szereplő $\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}|g_k|\Big)^p$ $(n\in\mathbf{N})$ sorozat nyilván monoton nőve tart a g^p-hez, ezért a Beppo Levi-tétel alapján

$$\int g^p\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\Big(\sum_{k=0}^{n}|g_k|\Big)^p\,d\mu,$$

amiből a mondott becslés már triviálisan következik.

Tehát $g<+\infty$ μ-m.m., ami azt jelenti, hogy a $\sum(g_n)$ függvénysor μ-m.m. abszolút konvergens. Tekintve, hogy minden $k\in\mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{i=0}^{k}g_i=f_{n_{k+1}}-f_{n_0},$$

ezért az f_{n_k} $(k\in\mathbf{N})$ sorozat is μ-m.m. konvergens. Azt is tudjuk viszont, hogy

$$|f_{n_{k+1}}|=\left|\sum_{i=0}^{k}g_i+f_{n_0}\right|\le g+|f_{n_0}|,$$

és

$$\|g+|f_{n_0}|\|_p\le\|g\|_p+\|f_{n_0}\|_p\le 1+\|f_{n_0}\|_p<+\infty.$$

Így alkalmazható a Lebesgue-tétel, miszerint van olyan $f\in L^p$ függvény, amelyikkel

$$f=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}\ \ \mu\text{-m.m. és }\ \lim_{k\to\infty}\|f-f_{n_k}\|_p=0$$

igaz. Jól ismert, hogy ha egy Cauchy-sorozat valamilyen részsorozatáról már tudjuk, hogy konvergens,[6] akkor maga a sorozat is konvergens. Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0.$$

Ezzel „elintéztük" a $p<+\infty$ esetet. Ha $p=+\infty$, akkor a fenti bizonyításban csak a

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_{n_k}\|_p=0$$

reláció igazolása igényel némi módosítást, ti. ekkor nem alkalmazható a Lebesgue-tétel megfelelő része. Azonban

$$\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_\infty<2^{-k-1}\qquad(k\in\mathbf{N}),$$

amiből egyszerűen kapjuk az

$$\|f_{n_{k+m}}-f_{n_k}\|_\infty<2^{-k}\qquad(m,k\in\mathbf{N})$$

[6]Jelen esetben az (f_{n_k}) a $\|.\|_p$ norma szerint.

becslést:

$$\|f_{n_{k+m}} - f_{n_k}\|_\infty = \left\| \sum_{j=k}^{k+m-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \right\|_\infty \leq \sum_{j=k}^{k+m-1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_\infty <$$

$$\sum_{j=k}^{k+m-1} 2^{-j-1} < \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j-1} = 2^{-k}.$$

Innen viszont

$$|f - f_{n_k}| = \lim_{m\to\infty} |f_{n_{k+m}} - f_{n_k}| \leq 2^{-k} \quad \mu\text{-m.m.} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

tehát

$$\|f - f_{n_k}\|_\infty \leq 2^{-k} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

adódik, következésképpen

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\|_\infty = 0.$$

■

Az eddigiek alapján a következőket mondhatjuk: az L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$ függvényhalmaz az $\mathbf{R}$ feletti lineáris tér (vektortér), az

$$L^p \ni f \mapsto \|f\|_p$$

leképezés félnorma az L^p-n. Ha valamilyen $p \in [1, +\infty]$ esetén az L^p vektortérben az

$$f \sim g \iff \|f - g\|_p = 0 \qquad (f, g \in L^p)$$

utasítással definiált relációt tekintjük, akkor a $\sim$ reláció ekvivalencia. Az általa generált L^p-beli ekvivalencia-osztályokra tehát az jellemző, hogy az $f, g \in L^p$ függvények akkor és csak akkor tartoznak ugyanabba az ekvivalenciaosztályba, ha $f = g$ μ-m.m.

Jelöljük az $f \in L^p$ függvény által generált ekvivalenciaosztályt a következőképpen:

$$\widehat{f} := \{g \in L^p : \|g - f\|_p = 0\},$$

és legyen $\mathbf{L}^p$ az $\widehat{f}$ $(f \in L^p)$ ekvivalenciaosztályok halmaza. A „szokásos" módon értelmezve az $\mathbf{L}^p$-ben a vektorműveleteket, az $\mathbf{L}^p$ lineáris tér az $\mathbf{R}$ felett,

$$\|\widehat{f}\|_p := \|f\|_p \qquad (\widehat{f} \in \mathbf{L}^p)$$

pedig norma ezen a téren. Az $(\mathbf{L}^p, \|\cdot\|_p)$ teljes normált tér (Banach-tér).[7]

5. Lebesgue-terek.

Legyen pl. valamilyen $-\infty < a < b < +\infty$ esetén $X := [a,b]$ és

$$\Omega := \{A \in \mathcal{P}([a,b]) : A \in \widehat{\Omega}_1\},\ \mu(A) := \widehat{\mu}_1(A) \qquad (A \in \Omega).$$

Tekintsük az (X, Ω, μ) mértékteret. A most bevezetett (teljes) mértéktérnek megfelelő L^p-tereket a következőképpen fogjuk jelölni:

$$L^p[a,b] := L^p \qquad (1 \le p \le +\infty).$$

Mivel a μ mérték véges, ezért (ld. fent)

$$L^\infty[a,b] \subset L^q[a,b] \subset L^p[a,b] \subset L^1[a,b] \qquad (1 \le p \le q \le +\infty).$$

Azt mondjuk, hogy az

$$f : [a,b] \to \mathbf{R}$$

függvény (klasszikus értelemben) *Lebesgue-integrálható*, ha $f \in L^1[a,b]$, és ebben az esetben $\int f\, d\mu$ az f függvény (klasszikus) *Lebesgue-integrálja*. Ez utóbbira – hacsak nem okoz félreértést – használhatjuk a Riemann-integrállal kapcsolatban megszokott $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\, dx$ szimbólumokat is.

Könnyű példát adni olyan Lebesgue-integrálható $f \in L^1[a,b]$ függvényre, amelyik nem Riemann-integrálható: $f \notin R[a,b]$. Ilyen pl. az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [a,b] \cap \mathbf{Q}) \\ \\ 0 & (x \in [a,b] \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}$$

(Dirichlet-)függvény, ami nem más, mint az $[a,b] \cap \mathbf{Q}$ halmaznak az $[a,b]$-re vonatkozó karakterisztikus függvénye. Mivel a szóban forgó halmaz megszámlálható, ezért (Lebesgue-)mérhető és $\mu([a,b] \cap \mathbf{Q}) = 0$. Tehát valóban igaz, hogy $f \in L^1[a,b]$, továbbá

$$\int f\, d\mu = \mu([a,b] \cap \mathbf{Q}) = 0.$$

Ugyanakkor jól ismert az elemi analízisből, hogy az f nem Riemann-integrálható.

[7] A későbbiekben nem teszünk jelölésbeli különbséget az $\mathbf{L}^p$ és az L^p terek között, azaz ezentúl az L^p „függvénytér" minden $f \in L^p$ eleme egyúttal az összes olyan $g : X \to \mathbf{R}$ mérhető függvényt is jelöli, amire $\|f - g\|_p = 0$. Ebben az értelemben tehát minden $1 \le p \le +\infty$ esetén az $(L^p, \|\cdot\|_p)$ egy Banach-tér.

6. Megjegyzések.

i) Az 1. Tétel e) állítása, azaz, hogy véges μ esetén

$$L^\infty \subset L^p \subset L^1 \qquad (1 \le p \le +\infty),$$

nem véges μ mértékre általában nem igaz. Legyen ui.

$$X := \mathbf{N},\, \Omega := \mathcal{P}(\mathbf{N}),\, \mu(\{n\}) := 1 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amikor[8]

$$L^p = \ell_p := \begin{cases} \Big\{(x_k) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\Big\} & (1 \le p < +\infty) \\ \Big\{(x_k) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sup_k |x_k| < +\infty\Big\} & (p = +\infty), \end{cases}$$

és az $(x_k) \in \ell_p$ sorozatokra

$$\|(x_k)\|_p = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} & (0 < p < +\infty) \\ \sup_k |x_k| & (p = +\infty). \end{cases}$$

Ekkor $p > 1$ esetén az említett e) állítással ellentétben éppen az ℓ_1 lesz valódi részhalmaza az ℓ_p-nek.

ii) Amennyiben valamilyen $1 \le p < q \le +\infty$ mellett (a μ mértékkel)

$$L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$$

teljesül, akkor egyúttal minden $1 \le r < s \le +\infty$ esetén is igaz az

$$L^r(\mu) \subset L^s(\mu)$$

reláció. Ha viszont itt azt tudjuk, hogy $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$, akkor minden $1 \le r < s \le +\infty$ kitevőre is $L^r(\mu) \supset L^s(\mu)$ teljesül.

iii) Az $1 < p < +\infty$, $\|f\|_p$, $\|g\|_p < +\infty$ esetben fennálló

$$\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \iff f = cg \text{ vagy } g = cf \;\; \mu\text{-m.m.}$$

(egy alkalmas $c \ge 0$ együtthatóval) állításra hivatkozva funkcionálanalízisbeli terminológiával élve azt mondjuk, hogy a $\|.\|_p$ $(1 < p < +\infty)$

---

[8]Ebben az esetben könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az L^p-t alkotó $f := (x_k)$ számsorozatokra az $1 \le p < +\infty$ esetben $\int |f|^p d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$, valamint $f \in L^\infty$ azzal ekvivalens, hogy az előbbi (x_k) sorozat korlátos: $\sup_k |x_k| < +\infty$.

norma *szigorú norma,* vagy másképp fogalmazva: az $(L^p, \|.\|_p)$ *szigorúan normált tér.* Ebből a szempontból az $1 < p < +\infty$ feltétel lényeges: az

$$(L^1, \|.\|_1), \ (L^\infty, \|.\|_\infty)$$

terek általában nem szigorúan normáltak.[9]

iv) Az (l_n) számsorozat *lépcső,* ha szigorúan monoton növő, $l_0 = 0$, továbbá $l_n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$ és $\delta := \sup_n (l_n - l_{n-1}) < +\infty$. Tekintsük a kompakt $[a, b]$ intervallumon a Lebesgue-féle (X, Ω, μ) mértékstruktúrát.[10] Legyen $f \in L^+ \cap L^1$ és tegyük fel, hogy valamilyen fenti (l_n) lépcső esetén az

$$E_n := \{x \in [a, b] : l_{n-1} \leq f(x) < l_n\} \in \Omega \qquad (n = 1, 2, ...)$$

halmazokkal a $\sum_{n=1}^\infty l_n \mu(E_n)$ sor konvergens. Megmutatható, hogy ekkor bármely más $(\widetilde{l}_n)$ lépcsőre is az analóg $\sum_{n=1}^\infty \widetilde{l}_n \mu(\widetilde{E}_n)$ sor konvergens.

Véve az összes lehetséges lépcsőkre vonatkozó $L_\star(f)$ szuprémumát a $\sum_{n=1}^\infty \widetilde{l}_{n-1} \mu(\widetilde{E}_n)$ (Lebesgue-féle) *alsó összegeknek,* valamint az $L^\star(f)$ infimumát a $\sum_{n=1}^\infty l_n \mu(E_n)$ *felső összegeknek,* akkor

$$L_\star(f) = \int f \, d\mu = L^\star(f).$$

[9]Házi feladat: pl. az $(\ell_1, \|.\|_1)$, $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ terek ilyenek.

[10]Ahol tehát $X := [a, b]$, Ω az $[a, b]$ intervallum Lebesgue-mérhető részhalmazainak a szigma-algebrája, $\mu(A)$ pedig az $A \in \Omega$ halmaz Lebesgue-mértéke.