Programtervező informatikus MSC

Mérték, integrál, valószínűség

vizsgatematika

2024-25. év 1. félév

1. Függvények lokális oszcillációjának és a folytonosságnak a kapcsolata. A *Riemann*-integrál kritikájával kapcsolatos példák: határátmenet és integrál; $R[0,1]$ nem teljes az integrál (fél)metrikára nézve.

$\boxed{2.}$ A nulla-mértékű halmaz fogalma, a majdnem mindenütt terminológia. A *Riemann*-integrálhatóság *Lebesgue*-féle kritériuma.

3. A *Lebesgue*-integrál *Riesz*-féle felépítésének a vázlata: lépcsős függvények, A. Lemma, B. Lemma. A *Borel*-féle lefedési tétel. Az L_0, L_1, L függvényosztályok.

4. Félgyűrű, gyűrű, szigma-algebra. A generált gyűrű, ill. szigma-algebra. Példák. A félgyűrű által generált gyűrű szerkezete.

$\boxed{5.}$ Halmazfüggvények additivitása, szigma-additivitása. Az előmérték, kvázi-mérték, mérték fogalma. Az előmérték alaptulajdonságai. Félgyűrűn értelmezett speciális halmazfüggvény kiterjesztése előmértékké, ill. kvázimértékké.

$\boxed{6.}$ Az előmérték, ill. kvázimérték kapcsolatára vonatkozó szükséges, ill. elégséges feltételek. A *Lebesgue*-féle kvázimérték.

$\boxed{7.}$ A *Stieltjes*-féle kvázimérték.

$\boxed{8.}$ Gyűrűn értelmezett kvázimérték kiterjesztése mértékké. A külső mérték fogalma, *Caratheodory*-tétel.

9. A szigma-véges mérték fogalma, a kiterjesztés egyértelműsége (bizonyítás nélkül). Teljes mérték. *Lebesgue-Stieltjes*-mérték.

10. A *Borel*-halmazok jellemzése (nyílt; zárt; kompakt halmazokkal való kapcsolat).

11. Eltolás és tükrözés-invariancia. Példa nem mérhető halmazra.

12. A mérhető leképezés fogalma. A mérhető függvények jellemzése (nívóhalmazok). Mérhető függvényekkel végzett műveletek (alapműveletek, alsó-felső burkoló, lim sup, lim inf, lim). *Jegorov*-tétel.

13. Lépcsősfüggvények. Nem-negatív lépcsősfüggvények integrálja. Az integrál alaptulajdonságai.

$\boxed{14.}$ A nem-negatív mérhető függvények és a lépcsősfüggvények kapcsolata. Az integrál értelmezése és alaptulajdonságai.

$\boxed{15.}$ *Beppo-Levi*-tétel, *Fatou*-lemma.

16. Mérhető függvények integrálja. Az integrál jellemzése és alaptulajdonságai (linearitás, monotonitás, a majdnem mindenütt terminológia).

$\boxed{17.}$ Az L^p terek értelmezése, *Hölder* - és *Minkowski*-egyenlőtlenség. Az L^p-normák limesze, a mérték végességének a szerepe.

$\boxed{18.}$ *Lebesgue*-tétel. Az L^p terek teljessége.

$\boxed{19.}$ A *Riemann*-integrálhatóság és a *Lebesgue*-integrálhatóság kapcsolata.

20. A súlyfüggvénnyel generált mérték és integrál fogalma és alaptulajdonságai.

$\boxed{21.}$ Az abszolút folytonosság fogalma és jellemzése véges mérték esetén.

$\boxed{22.}$ *Radon-Nikodym*-tétel (a bizonyítás vázlata véges mértékekre).

23. A szorzatmérték fogalma, *Tonelli*-, ill. *Fubini*-tétel.

* *

A vizsgán minden hallgató a fentiekből két tételt kap. Saját döntése alapján az egyikről részletesen (bizonyításokkal), a másikról vázlatosan (bizonyítások nélkül) beszél. A két tételből az egyik a $\boxed{\ldots}$ jelzésűek közül kerül ki.

Irodalom:

- Simon P.: *Mérték és integrál.* Egyetemi jegyzet. ELTE Eötvös Kiadó, 2016, 1-597.