1. L^p-tér normája

1.1. Definíció: L^p-térbeli normák

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy mérhető függvény.

Ekkor egy rögzített $0 < p < +\infty$ kitevő esetén

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

az f függvény ***p*-normája**. Továbbá $p = +\infty$ esetén

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 \; : \; |f| \leq \alpha \; \mu\text{-m.m.}\}$$

az f függvény **∞-normája**.

Szükség esetén legyen

$$(+\infty)^{\frac{1}{p}} := +\infty.$$

Megállapodás szerint legyen

$$\inf \emptyset := +\infty.$$

Állítás. Az 1.1. definícióban foglalt jelölésekkel az alábbiak igazak $\|\cdot\|_p$-re.

1. **Nemnegatív**, azaz $0 \leq \|f\|_p \leq +\infty$.
2. **Pozitív szemidefinit**, mert $\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \; \mu$-m.m.
3. **Abszolút homogén**, azaz $\|\lambda \cdot f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

1.2. Lemma: Young-egyenlőtlenség

Legyenek az $1 < p, q < +\infty$ számok konjugált kitevők, azaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ekkor tetszőleges $a, b \in [0, +\infty)$ választása mellett

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Bizonyítás. Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz.

Különben a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt

$$\ln(a \cdot b) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right)$$

ekvivalens a bizonyítandó állítással. Viszont az ln függvény konkáv, ezért

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q = \ln a + \ln b = \ln(a \cdot b). \; \checkmark$$

Ugyanis az alábbi egy konvex kombiácó:

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

1.3. Tétel: Normák határértéke

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény.

1. Ha $\|f\|_\infty = +\infty$, akkor $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = +\infty$.
2. Ha van olyan $0 < p < +\infty$ kitevő, amivel $\|f\|_p < +\infty$, akkor
$$\lim_{q\to\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty.$$

Bizonyítás. A feltétel alapján bármilyen $K > 0$ választása esetén
$$\mu\Big(\{|f| > K\}\Big) > 0.$$
Ezért tetszőleges $0 < p < +\infty$ kitevő mellett és majdnem minden pontban
$$|f| \geq K \cdot \chi_{\{|f|>K\}}.$$
Innen az integrál monotonitása alapján
$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \geq \int K^p \cdot \chi_{\{|f|>K\}} \,\mathrm{d}\mu = K^p \cdot \mu\Big(\{|f| > K\}\Big).$$
Mivel a K értéke tetszőlegesen nagy lehet, ezért
$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p = +\infty \quad\Longrightarrow\quad \limsup_{p\to\infty} \|f\|_p = +\infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{p\to\infty} \|f\|_p = +\infty.$$

Hiszen tetszőleges $A \in \Omega$ mellett
$$\int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A).$$
Azt mutattuk meg, hogy
$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq K.$$

Mivel az 1 állítást már igazoltuk, ezért a továbbiakban feltehető, hogy
$$0 < C < \|f\|_\infty < +\infty \qquad \text{és} \qquad 0 < \|f\|_p.$$
Ekkor a soron következő becslések teljesülnek:
$$|f| \geq C \cdot \chi_{\{|f|>C\}} \qquad \text{és} \qquad \mu\Big(\{|f| > C\}\Big) > 0.$$
Innen az 1 állítás bizonyításában használt becslés mintájára kapható, hogy
$$+\infty > \|f\|_q \geq C \cdot \left(\mu\Big(\{|f| > C\}\Big)\right)^{\frac{1}{q}} > 0.$$
Innen
$$\liminf_{q\to\infty} \|f\|_q \geq \|f\|_\infty.$$
Továbbá
$$\|f\|_q = \left(\int |f|^{q-p}|f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_\infty^{1-p/q} \cdot \|f\|_p^{p/q}.$$
Ekkor szintén véve a $q \to \infty$ határátmenetet
$$\limsup_{q\to\infty} \|f\|_q \leq \|f\|_\infty \qquad\Longrightarrow\qquad \lim_{q\to\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty.$$

Különben minden q kitevőre
$$\|f\|_q = 0 \iff f = 0 \ \mu\text{-m.m.}$$

Kihasználva, hogy minden $A > 0$ esetén
$$\lim_{q\to\infty} A^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Ammennyiben $q \to \infty$, akkor
$$\|f\|_\infty^{1-p/q} \longrightarrow \|f\|, \qquad \|f\|_p^{p/q} \longrightarrow 1.$$

2. Egyenlőtlenségek

2.1. Tétel: Hölder–egyenlőtlenség

Legyenek az $1 \leq p, q \leq +\infty$ számok konjugált kitevők, azaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ekkor minden $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény esetén

$$\|f \cdot h\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_q.$$

Bizonyítás. Válasszuk külön a lehetséges eseteket!

1. Ha $\|f\|_p = 0$ vagy $\|h\|_q = 0$, akkor igaz az állítás. ✓
2. Ha $\|f\|_p = +\infty$ vagy $\|h\|_q = +\infty$, akkor szintén igaz az állítás. ✓
3. Ha $p = 1$, akkor $q = +\infty$. Mivel ilyenkor

$$|f \cdot h| = |f| \cdot |h| \leq |f| \cdot \|h\|_\infty$$

μ-majdnem mindenhol igaz, ezért a monotonitás alapján

$$\|f \cdot h\|_1 = \int |f \cdot h| \, d\mu \leq \|h\|_\infty \cdot \int |f| \, d\mu = \|f\|_1 \cdot \|h\|_\infty.$$

4. Ha $q = 1$, akkor $p = +\infty$. Ez megegyezik az előző esettel. ✓
5. Ott tartunk, hogy $0 < \|f\|_p, \|h\|_q < +\infty$, valamint $1 < p, q < +\infty$. Mivel ilyenkor majdnem minden $x \in X$ esetén az

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \qquad \text{és} \qquad b := \frac{|h(x)|}{\|h\|_q}$$

értékek végesek, ezért a Young–egyenlőtlenség alkalmazásával

$$ab = \frac{|f(x) \cdot h(x)|}{\|f\|_p \cdot \|h\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \cdot \|f\|_p^p} + \frac{|h(x)|^q}{q \cdot \|h\|_q^q}$$

majdnem mindenhol igaz. Innen az integrál monotonitása alapján

$$\frac{\|f \cdot h\|_1}{\|f\|_p \cdot \|h\|_q} \leq \frac{1}{p \cdot \|f\|_p^p} \int |f|^p \, d\mu + \frac{1}{q \cdot \|h\|_q^q} \int |h|^q \, d\mu$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ebből átrendezéssel adódik a bizonyítandó állítás. ✓

2.2. Tétel: Minkowski-egyenlőtlenség

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $1 \leq p \leq +\infty$ egy adott kitevő.
Ha $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető, és létezik az $(f+g) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ összeg, akkor

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. Három esetet különböztetünk meg.

1. Legyen $p = 1$. Mivel a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|f+g| \leq |f| + |g|,$$

ezért a monotonitás kihasználva

$$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1. \checkmark$$

2. Legyen $p = +\infty$. Ekkor a végtelen-norma értelmezése miatt

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty$$

majdnem mindenhol igaz, ahonnan a definíció szerint

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty. \checkmark$$

3. Különben feltehetjük, hogy

$$\|f\|_p + \|g\|_p < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \|f+g\|_p < +\infty.$$

Mivel a $0 \leq t \mapsto t^p$ függvény konvex:

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq \big(|f| + |g|\big)^p \\ &= 2^p \cdot \left(\frac{|f|+|g|}{2}\right)^p \\ &\leq 2^{p-1} \cdot \big(|f|^p + |g|^p\big). \end{aligned}$$

Innen az integrál monotonitása alapján

$$\|f+g\|_p^p \leq 2^{p-1}\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big).$$

Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \leq |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|.$$

adódik, ahonnan az integrál monotonitása miatt

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &\leq \int |f+g|^{p-1} \cdot |f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1} \cdot |g| \, d\mu \\ &= \big\||f+g|^{p-1} \cdot |f|\big\|_1 + \big\||f+g|^{p-1} \cdot |g|\big\|_1. \end{aligned}$$

Válasszuk meg az r-et a p konjugált kitevőjének, vagyis legyen

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{r} = \frac{p-1}{p} \quad \text{és} \quad (p-1) \cdot r = p.$$

Ekkor a Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &\leq \big\||f+g|^{p-1}\big\|_r \cdot \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \\ &= \left(\int |f+g|^{(p-1) \cdot r} \, d\mu\right)^{1/r} \cdot \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \\ &= \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/r} \cdot \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \\ &= \|f+g\|_p^{p/r} \cdot \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big). \end{aligned}$$

Innen átrendezés, majd egyszerűsítés után adódik az állítás. $\checkmark$

3. L^p terek

3.1. Definíció: Az L^p tér

Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér, valamint $1 \le p \le +\infty$. Ekkor

$$L^p := L^p(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ mérhető és } \|f\|_p < +\infty \right\}.$$

3.2. Tétel: L^p terek alaptulajdonságai

Legyenek $1 \le p \le q \le +\infty$.

1. Az $(L^p, \|\cdot\|_p)$ egy félnormált tér $\mathbb{R}$ felett.
2. Amennyiben μ véges mérték, akkor $L^\infty \subseteq L^q \subseteq L^p \subseteq L^1$.

Bizonyítás.

1. Nyilvánvaló, hogy L^p lineáris tér (más néven vektortér) az $\mathbb{R}$ felett. Továbbá elmondható, hogy az L^p terek definíciója miatt a

$$\|\cdot\|_p : L^p \to \mathbb{R}$$

függvény pozitív szemidefinit és abszolút homogén, továbbá

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (f, g \in L^p)$$

is fennáll a Minkowski-egyenlőtlenség alapján.

2. Nyilván feltehető, hogy $1 < p < q < +\infty$. Legyen $f \in L^\infty$. Ekkor

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_\infty^q \cdot \int 1 \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty^q \cdot \mu(X).$$

Tehát $f \in L^q$. A többi hasonlóan igazolható.

Megjegyzés. Ha a μ nem véges, akkor lehet példát mutatni olyan terekre, ahol

$$L^1 \subseteq L^p \subseteq L^q \subseteq L^\infty.$$

■