1. Függvények lokális oszcillációja

1.1. Definíció: Oszcilláció halmazon, lokális oszcilláció

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy $A \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Ekkor

$$\mathcal{O}(f, A) := \sup\Big\{ \big|f(x) - f(y)\big| \ : \ x, y \in A \cap \mathcal{D}_f \Big\}$$

az f függvény **oszcillációja** az A halmazon. Továbbá egy $z \in \mathcal{D}_f$ helyen

$$o_z(f) := \inf\Big\{ \mathcal{O}(f, I) \ : \ I \subset \mathbb{R} \text{ intervallum}, \ z \in \operatorname{int}(I) \Big\}$$

az f függvény **lokális oszcillációja** a z pontban.

1.2. Lemma: Lokális oszcilláció és a folytonosság kapcsolata

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, valamint $z \in \mathcal{D}_f$ egy adott pont. Ekkor

$$f \in \mathfrak{C}\{z\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad o_z(f) = 0.$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ha az f függvény folytonos z-ben, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz

$$\exists \delta > 0: \quad \big|f(x) - f(z)\big| < \varepsilon \quad \big(x \in \mathcal{D}_f, \ |x - z| < \delta\big).$$

Legyen $I := (z - \delta, z + \delta)$. Ekkor minden $x, t \in I \cap \mathcal{D}_f$ esetén igaz, hogy

$$\big|f(x) - f(t)\big| \leq \big|f(x) - f(z)\big| + \big|f(t) - f(z)\big| < 2\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \underline{\mathcal{O}(f, I) < 2\varepsilon}.$$

Ebből következik, hogy $0 \leq o_z(f) < 2\varepsilon$, ahonnan $o_z(f) = 0$ adódik.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $o_z(f) = 0$, vagyis definíció szerint

$$o_z(f) = \inf\Big\{ \mathcal{O}(f, I) \ : \ I \subset \mathbb{R} \text{ intervallum}, \ z \in \operatorname{int}(I) \Big\} = 0.$$

Ekkor bármilyen $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, hogy

$$z \in \operatorname{int}(I) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{O}(f, I) < \varepsilon.$$

Mivel z belső pontja az I-nek, ezért létezik olyan $\delta > 0$ sugár, amivel

$$K_\delta(z) := (z - \delta, z + \delta) \subset I.$$

Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f \cap K_\delta(z)$ pontban

$$\big|f(x) - f(z)\big| \leq \mathcal{O}(f, I) < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{f \in \mathfrak{C}\{z\}}.$$

2. Konvergencia

A továbbiakban legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy korlátos és zárt intervallum.

2.1. Definíció: Függvénysorozat, pontonkénti konvergencia

Azt mondjuk, hogy az (f_n) egy **függvénysorozat**, ha

$$f_n : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az (f_n) függvénysorozat **pontonként konvergens**, ha minden $x \in [a, b]$ helyen az $\big(f_n(x)\big)$ számsorozat konvergens. Ekkor az f **határfüggvénye**

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \big(x \in [a, b]\big).$$

Megjegyzések:

i) Az általunk vizsgált függvénysorozatok nagyon speciálisak, tudniillik

$$\mathcal{D}_{f_n} = [a, b] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

ii) Az (f_n) függvénysorozat $x \in [a, b]$ pontbeli konvergenciája azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ és } \ n > N : \qquad \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

■

Legyen adott az $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényeknek a konvergens sorozata.

Kérdések:

1. Konvergens-e az integrálokból képzett $\left(\int_a^b f_n\right)$ számsorozat?
2. Igaz-e, hogy az f határfüggvény Riemann-integrálható?
3. Ha az előbbi két kérdésre igen a válasz, akkor fennáll-e az

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség?

Másképp fogalmazva teljesül-e az

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

felcserélhetőség?

Válaszok: Minden további feltétel nélkül ezek nem teljesülnek.

Megmutatjuk, hogy egy Riemann-integrálható tagokból álló (f_n) függvénysorozat pontonkénti konvergenciája nem elégséges a határfüggvény Riemann-integrálhatóságához.

Legyen (r_n) a $[0, 1]$ intervallumbeli racionális számoknak egy sorozata megszámlálhatóan végtelen [0,1]-beli racionális szám van, ezért sorozatba rendezhetőek), továbbá legyen

Ismert megszámlálhatóan végtelen $[0, 1]$-beli racionális szám van, ezért ezek sorozatba rendezhetőek.

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \{r_0, \dots, r_n\} \\ 0, & \text{ha } x \notin \{r_0, \dots, r_n\} \end{cases} \qquad \big(x \in [0, 1], \ n \in \mathbb{N}\big).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén az f_n függvény csak véges sok pontban nem nulla, ezért $f_n \in \mathfrak{R}[0, 1]$. Továbbá az (f_n) pontonként konvergens és a határfüggvénye

$$D(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \big(x \in [0, 1]\big).$$

Ez pedig a híres **Dirichlet-függvény** és ismeretes, hogy $D \notin \mathfrak{R}[0, 1]$.

Megmutatjuk, hogy egy Riemann-integrálható tagokból álló (f_n) függvénysorozat pontonkénti konvergenciája nem elégséges a határátmenet és az integrálás operátornak a felcserélhetőségéhez.

Jelöljön $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy számsorozatot, és tekintsük a következő függvénysorozatot.

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} a_n, & \text{ha } 0 \le x < 1/n \\ 0, & \text{ha } 1/n \le x < 1 \end{cases} \qquad (1 \le n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor (f_n) pontonként konvergens és a határfüggvénye $f \equiv 0$. Nyilvánvaló, hogy

$$f \in \mathfrak{R}[0,1] \qquad \text{és} \qquad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mivel f_n szakaszonként folytonos minden $1 \le n \in \mathbb{N}$ indexre, ezért

$$f_n \in \mathfrak{R}[0,1] \qquad \text{és} \qquad \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} a_n\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^1 0\,\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n}.$$

Ennek az integrálsorozatnak a határértéke pedig függ az (a_n) megválasztásától:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \begin{cases} c \in \mathbb{R}, & \text{ha } a_n \coloneqq c \cdot n \\ +\infty, & \text{ha } a_n \coloneqq n^2 \\ \nexists, & \text{ha } a_n \coloneqq (-1)^n \cdot n. \end{cases}$$

2.2. Definíció: Egyenletes konvergencia

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat **egyenletesen konvergál** az

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

határfüggvényhez, amennyiben

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N},\ n > N \text{ és } \forall x \in [a,b]: \qquad \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

2.3. Tétel

Legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy függvénysorozat ($n \in \mathbb{N}$). Tegyük fel, hogy

(i) minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$,

(ii) az (f_n) egyenletesen konvergál az $f := \lim(f_n)$ határfüggvényhez.

Ekkor $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ és az integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata konvergens, valamint

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Másképp fogalmazva teljesjül, hogy

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás.

$\boxed{1.}$ Legyen $I \subseteq [a, b]$ egy intervallum és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\big|f(x) - f(y)\big| \le \big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - f_n(y)\big| + \big|f_n(y) - f(y)\big|$$

bármely $x, y \in I$ esetén fennáll. Mivel az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens, ezért minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$\big|f_n(t) - f(t)\big| < \varepsilon \qquad (t \in I,\ N < n \in \mathbb{N}).$$

Ebből következik, hogy

$$\big|f(x) - f(y)\big| < 2\varepsilon + \big|f_n(x) - f_n(y)\big| \qquad (x, y \in I,\ N < n \in \mathbb{N}). \qquad (*)$$

$\boxed{2.}$ Vegyünk egy $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_s = b\}$ felosztást és vizsgáljuk az

$$\omega(f, \tau) = \sum_{k=0}^{s-1} O_k(f)\cdot|I_k|$$

oszcillációs összeget, ahol tetszőleges $k = 0, 1, \ldots, s-1$ mellett legyen

$$I_k := [x_k, x_{k+1}], \qquad O_k(f) := \sup\Big\{\big|f(x) - f(y)\big| \ :\ x, y \in I_k\Big\}.$$

Ha most veszünk egy rögzített $N < n \in \mathbb{N}$ indexet, akkor $(*)$ alapján

$$O_k(f) < 2\varepsilon + O_k(f_n) \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Ennél fogva teljesül az alábbi becslés:

$$\omega(f, \tau) \le \sum_{k=0}^{s-1} \big(2\varepsilon + O_k(f_n)\big)\cdot|I_k| = 2\varepsilon(b-a) + \omega(f_n, \tau).$$

$$\omega(f, \tau) \le \sum_{k=0}^{s-1} \big(2\varepsilon + O_k(f_n)\big)\cdot|I_k| = 2\varepsilon \sum_{k=0}^{s-1} |I_k| + \sum_{k=0}^{s-1} O_k(f_n)\cdot|I_k| = 2\varepsilon(b-a) + \omega(f_n, \tau).$$

és itt

$$\sum_{k=0}^{s-1} |I_k| = \sum_{k=0}^{s-1} (x_{k+1} - x_k) = b - a.$$

Mivel az f_n integrálható, ezért megadható olyan $\mu \subset [a, b]$ felosztás, hogy

$$\omega(f_n, \mu) < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\omega(f, \mu) \le \varepsilon\big(2(b-a) + 1\big)}.$$

Következésképpen $f \in \mathfrak{R}[a, b]$.

$\boxed{3.}$ Amennyiben $N < n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges index, akkor

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(b-a).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\left(\int_a^b f_n\right)$ integrálsorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

3. A teljesség kérdése

Legyen $f, g \in \mathfrak{R}[a,b]$ és értelmezzük az f és g függvények „távolságát” a

$$\varrho(f,g) := \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,\mathrm{d}x.$$

leképezés segítségével.

Legyen

$$f_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{ha } 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ha } \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Indirekt tegyük fel, hogy az (f_n) függvénysorozat konvergens és legyen

$$\int_0^1 \big|f_n - f\big| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ekkor minden olyan $0 < x < 1$ helyen, ahol az f folytonos, szükségképpen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Különben tegyük fel, hogy valamilyen $\xi \in (0,1)$ folytonossági helyen

$$f(\xi) \ne \frac{1}{\sqrt{\xi}} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|f(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right| > 0.$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}\{\xi\}$, ezért bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$ Ekkor a folytonosság alapján elmondható, valamilyen $\delta > 0$ sugárral $[\xi - \delta, \xi + \delta] \subset$

$$\left|f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right| \ge \varepsilon \qquad \big(t \in [\xi - \delta,\, \xi + \delta]\big).$$

Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy

$$\int\limits_0^1 \big|f_n - f\big| \ge \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \big|f_n(t) - f(t)\big|\,\mathrm{d}t \ge \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varepsilon\,\mathrm{d}t = 2\delta\cdot\varepsilon > 0.$$

vagyis

$$\int_0^1 \big|f_n - f\big| \nrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$