1. Borel–halmazok

Legyen $p \in \mathbb{N}^+$ egy rögzített kitevő. Ekkor az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ vektorok esetén az

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^p \;\middle|\; \mathbf{x} \le \mathbf{z} < \mathbf{y} \right\}$$

halmazt az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ végpontú, balról zárt és jobbról nyílt (p-dimenziós) intervallumnak nevezzük. Könnyen belátható ilyenkor, hogy az

$$\mathbf{I}^p := \left\{ \emptyset,\ [\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\middle|\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \text{ és } \mathbf{x} < \mathbf{y} \right\}$$

halmazrendszer egy félgyűrű. Tekintsük az $\mathbf{I}^p$ által generált gyűrűt, vagyis az

$$\mathcal{I}^p := \mathcal{G}(\mathbf{I}^p) = \left\{ \bigcup_{k=0}^{n} I_k \;\middle|\; I_0, \ldots, I_n \in \mathbf{I}^p \text{ páronként diszjunktak } (n \in \mathbb{N}) \right\}$$

halmazt.

1.1. Definíció: Borel–halmaz

Az $\mathbb{R}^p$-beli **Borel–halmazok** rendszere az alábbi szigma-algebra:

$$\Omega_p := \Omega(\mathcal{I}^p) = \Omega(\mathbf{I}^p).$$

Vezessük be a soron következő $\mathbb{R}^p$-beli halmazrendszereket:

$$\mathcal{T}_p := \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^p \;\middle|\; A \text{ nyílt} \right\}, \qquad \mathcal{C}_p := \left\{ B \subseteq \mathbb{R}^p \;\middle|\; B \text{ zárt} \right\},$$

$$\mathcal{K}_p := \left\{ K \subseteq \mathbb{R}^p \;\middle|\; K \text{ kompakt} \right\}.$$

1.2. Állítás

A p-dimenziós Borel–halmazok rendszerére az alábbi egyenlőségek igazak:

$$\Omega_p = \Omega(\mathcal{T}_p) = \Omega(\mathcal{C}_p) = \Omega(\mathcal{K}_p).$$

Bizonyítás. Mivel minden $\mathbb{R}^p$-beli kompakt halmaz korlátos és zárt, ezért

$$\mathcal{K}_p \subset \mathcal{C}_p \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p) \quad\Longrightarrow\quad \Omega(\mathcal{K}_p) \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p).$$

Ha $B \in \mathcal{C}_p$ zárt halmaz, akkor alkalmas (B_n) kompakt halmazokkal

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \quad\Longrightarrow\quad B \in \Omega(\mathcal{K}_p) \quad\Longrightarrow\quad \Omega(\mathcal{C}_p) \subseteq \Omega(\mathcal{K}_p).$$

Ha $A \in \mathcal{T}_p$ nyílt halmaz, akkor a komplementere zárt. Tehát

$$A^c \in \mathcal{C}_p \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p).$$

Mivel minden szigma-algebra zárt a komplementer képzésre, ezért

$$A \in \Omega(\mathcal{C}_p) \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{T}_p \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p) \quad\Longrightarrow\quad \Omega(\mathcal{T}_p) \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p).$$

Fordítva hasonló gondolatmenettel látható be, hogy

$$\Omega(\mathcal{C}_p) \subseteq \Omega(\mathcal{T}_p) \quad\Longrightarrow\quad \underline{\Omega(\mathcal{C}_p) = \Omega(\mathcal{T}_p)}.$$