1. Szorzatmérték

Legyen adott az (X_i, Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ mértéktér, majd tekintsük az

$$X \coloneqq X_1 \times X_2$$

kétdimenziós teret. A cél egy olyan $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra és $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték megkonstruálása, amely rendelkezik a

$$\mu(U \times V) = \mu_1(U) \cdot \mu_2(V) \qquad (U \in \Omega_1,\ V \in \Omega_2)$$

alábbi műveletartási tulajdonsággal. Kézenfekvőnek tűnik, hogy legyen

$$\Omega \coloneqq \Omega_1 \otimes \Omega_2 \coloneqq \Omega\big(\{\, U \times V \mid U \in \Omega_1,\ V \in \Omega_2 \,\}\big).$$

1.1. Állítás

Tetszőleges $A \in \Omega$ halmaz és $x \in X_1, y \in X_2$ elemek esetén

a) $A_x \coloneqq \left\{\, z \in X_2 \;\middle|\; (x, z) \in A \,\right\} \in \Omega_2$.

b) $A^y \coloneqq \left\{\, v \in X_1 \;\middle|\; (v, y) \in A \,\right\} \in \Omega_1$.

Értelmezzünk most minden $A \in \Omega$ halmaz mellett két újabb leképezést az

$$f_A : X_1 \to [0, +\infty], \quad f_A(x) \coloneqq \mu_2(A_x) \qquad (x \in X_1)$$
$$f^A : X_2 \to [0, +\infty], \quad f^A(y) \coloneqq \mu_1(A^y) \qquad (y \in X_2)$$

módon.

1.2. Állítás

Legyenek (X_i, Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ szigma-véges mértékterek.

Ekkor tetszőleges $A \in \Omega$ halmaz esetén $f_A \in L^+(\mu_1)$ és $f^A \in L^+(\mu_2)$,

$$\int f_A \, \mathrm{d}\mu_1 = \int f^A \, \mathrm{d}\mu_2.$$

1.3. Definíció: Szorzatmérték

Legyenek (X_i, Ω_i, μ_i) $(i = 1, 2)$ szigma-véges mértékterek.

Ekkor a μ_1, μ_2 által meghatározott **szorzatmérték**

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) \coloneqq \int f_A \, \mathrm{d}\mu_1 = \int f^A \, \mathrm{d}\mu_2 \qquad (A \in \Omega).$$

Megjegyzések:

i) A $\mu \coloneqq (\mu_1 \otimes \mu_2)$ szorzatmérték szintén szigma-véges mérték.

ii) Az előbbi szorzatmértékre teljesül az alábbi „műveletartási” tulajdonság

$$\mu(U \times V) = \mu_1(U) \cdot \mu_2(V) \qquad (U \in \Omega_1,\ V \in \Omega_2).$$

■

2. Fubini-tétel

Legyen a korábbi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ kétváltozós függvény és $x \in X_1, y \in X_2$ esetén

$$f_x : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f_x(z) := f(x,z) \qquad (z \in X_2)$$
$$f^y : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f^y(v) := f(v,y) \qquad (v \in X_1).$$

parciális függvényeket.

2.1. Állítás

Ha az f mérhető, akkor az f_x, f^y parciális függvények is mérhetőek.

Legyen az előbbi parciális függvények esetén

$$\phi_f : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi_f(x) := \int f_x \, \mathrm{d}\mu_2 \qquad (x \in X_1),$$
$$\phi^f : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi^f(y) := \int f^y \, \mathrm{d}\mu_1 \qquad (y \in X_2).$$

2.2. Tétel: Tonelli-tétel

Ekkor

a) $\phi_f \in L^+(\mu_1), \ \phi^f \in L^+(\mu_2)$.

b)
$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int \phi_f \, \mathrm{d}\mu_1 = \int \phi^f \, \mathrm{d}\mu_2.$$

Amennyiben alkalmazzuk a hagyományos

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

jelölést, akkor a Tonelli-tétel értelmében

$$\int \left(\int f(x,y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int \left(\int f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

2.3. Tétel: Fubini-tétel

Legyen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy Lebesgue-integrálható függvény, azaz $f \in L(\mu)$.

Ekkor az alábbiak igazak.

a) μ_1-m.m. $x \in X_1$ elemre $f_x \in L(\mu_2)$.

b) μ_2-m.m. $y \in X_2$ elemre $f^y \in L(\mu_1)$.

c) Fennállnak a Tonelli-tételben mondott állítások.