1. Abszolút folytonosság

1.1. Definíció: Súlyfüggvény

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $f \in L^+$ egy adott függvény. Ekkor a

$$\mu_f : \Omega \to [0, +\infty], \qquad \mu_f(A) := \int_A f \, d\mu := \int f \cdot \chi_A \, d\mu$$

leképezést **súlyfüggvénynek** nevezzük.

1.2. Állítás

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $f \in L^+$. Ekkor a μ_f súlyfüggvény mérték.

1.3. Definíció

Legyen (X, Ω) mérhető tér, valamint $\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty]$ két mérték.

Azt mondjuk, hogy ν **abszolút folytonos** μ-re nézve (jelben $\nu \ll \mu$), ha

$$\mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0 \qquad (A \in \Omega).$$

1.4. Lemma

Legyen (X, Ω) mérhető tér, $\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty]$ két mérték, ahol ν véges.

Ekkor $\nu \ll \mu$ azzal ekvivalens, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$:

$$\mu(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) < \varepsilon \qquad (A \in \Omega).$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Indirekt tegyük fel, hogy megadható olyan $\varepsilon > 0$ szám, amellyel

$$X_n \in \Omega, \quad \mu(X_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{de} \quad \nu(X_n) \geq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Definiáljuk a soron következő halmazokat:

$$A_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} X_k \qquad \text{és} \qquad A := \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Ekkor az (A_n) halmazsorozat monoton szűkülve tart az A-hoz, ezért

$$\mu(A) \leq \mu(A_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(X_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Tehát $\mu(A) = 0$, vagyis az abszolút folytonosság miatt $\nu(A) = 0$. Viszont a ν véges mérték és az (A_n) sorozat monoton szűkülve tart az A-hoz. Ezért

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \lim_{n\to\infty} \nu(X_n) \geq \varepsilon > 0.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Triviális, ha ugyanis egy $A \in \Omega$ halmazra $\mu(A) = 0$, akkor a feltevés szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $\delta > 0$, amivel

$$\mu(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \nu(A) < \varepsilon.$$

Mivel itt az ε tetszőleges lehet, ezért $\nu(A) = 0$.