

1. Stieltjes-féle kvázimérték

A továbbiakban legyen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, valamint

$$m(\emptyset) := 0, \quad m([x, y)) := \varphi(y) - \varphi(x) \quad (x, y \in \mathbb{R}, x < y).$$

Az itt szereplő \mathbf{I} halmazrendszer az üres halmazt, valamint az \mathbb{R} balról zárt, jobbról nyílt intervallumait tartalmazza, \mathcal{I} pedig az \mathbf{I} félgyűrű által generált gyűrű, azaz

$$\mathbf{I} := \left\{ \emptyset, [a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}, \quad \mathcal{I} := \mathcal{G}(\mathbf{I}).$$

Mivel az m egy félgyűrűn értelmezett nemnegatív, additív és az üres halmazhoz nullát rendelő halmazfüggvény, ezért érvényes rá az alábbi kiterjesztési tétel.

1.1. Tétel

Definiáljuk az alábbi (**Stieltjes-féle kvázimérték**) halmazfüggvényt:

$$\tilde{\mu}_\varphi : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty), \quad \mu(I) := \sum_{k=0}^n m(I_k),$$

ahol az $I \in \mathcal{I}$ esetén vannak olyan páronként diszjunkt $I_0, \dots, I_n \in \mathbf{I}$, hogy

$$I = \bigcup_{k=0}^n I_k.$$

Ekkor $\tilde{\mu}_\varphi$ előmérték, és ez az egyetlen olyan előmérték \mathcal{I} -n, amire $\tilde{\mu}_\varphi|_{\mathbf{I}} = m$.

Bizonyos feltétel mellett $\tilde{\mu}_\varphi$ nemcsak előmérték, hanem valóban kvázimérték.

1.2. Tétel

A most bevezetett $\tilde{\mu}_\varphi$ kvázimérték $\iff \varphi$ balról folytonos.

Bizonyítás.

\implies Indirekt tegyük fel, hogy a φ nem folytonos balról egy $x \in \mathbb{R}$ helyen.

Legyen az $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő, $\lim(x_n) = x$. Ekkor

$$[x_0, x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1})$$

egy páronként diszjunkt felbontás, ezért a $\tilde{\mu}_\varphi$ szigma-additivitása miatt

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_\varphi([x_0, x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}_\varphi([x_n, x_{n+1})) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(x_n) - \varphi(x_0)) \\ &\stackrel{*}{=} \lim_{t \rightarrow x-0} (\varphi(t) - \varphi(x_0)) \end{aligned}$$

Ugyanakkor az m halmazfüggvény definíciójából adódóan

$$\tilde{\mu}_\varphi([x, x_0)) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \lim_{t \rightarrow x-0} (\varphi(t) - \varphi(x_0)).$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a φ balról folytonos az x -ben.

Tehát az itt szereplő halmazfüggvény

$$m : \mathbf{I} \rightarrow [0, +\infty)$$

Ami most azzal ekvivalens, hogy

$$\lim_{t \rightarrow x-0} \varphi(t) \neq \varphi(x).$$

Itt kihasználjuk, hogy mivel léteznek a

$$\lim_{t \rightarrow x-0} f(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

határértékek, ezért az átviteli-elv miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t). \quad (*)$$

Vagyis az alábbi ellentmondást kapjuk:

$$\lim_{t \rightarrow x-0} \varphi(t) = \varphi(x).$$

⊞ Azt kell megmutatni, hogy a $\tilde{\mu}_\varphi$ szigma-additív. Ehhez elég lenne azt belátni, hogy az m szigma-additív. Mivel az m előmérték, ezért tetszőleges

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n < b_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \mathbf{I} \ni [a, b] = \bigcup_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]$$

páronként diszjunkt felbontás esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} m([a_n, b_n]) \leq m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]\right) = m([a, b]).$$

Most megmutatjuk, hogy fennáll a fordított irányú egyenlőtlenség is, azaz

$$m([a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)).$$

Válasszunk egy tetszőleges $c \in (a, b)$ számot, lásd 1. ábra. Mivel a φ balról folytonos és monoton nő, ezért bármely $\varepsilon > 0$ -hoz és $n \in \mathbb{N}$ indexhez

$$\exists \tilde{a}_n < a_n : \quad \varphi(a_n) - \varphi(\tilde{a}_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (**)$$

fennáll, lásd 2. ábra. Ez alapján világos, hogy

$$[a, c] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (\tilde{a}_n, b_n).$$

Ekkor a Borel-lemma alapján feltehető, hogy alkalmas $N \in \mathbb{N}$ mellett

$$[a, c] \subset [a, c] \subseteq \bigcup_{n=0}^N (\tilde{a}_n, b_n) \subseteq \bigcup_{n=0}^N [\tilde{a}_n, b_n].$$

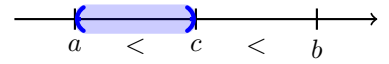
Mivel az m előmérték monoton és véges szubadditív, ezért

$$\begin{aligned} \varphi(c) - \varphi(a) &\leq \sum_{n=0}^N (\varphi(b_n) - \varphi(\tilde{a}_n)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(b_n) - \varphi(\tilde{a}_n)) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) + \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(a_n) - \varphi(\tilde{a}_n)) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

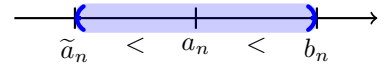
Innen a baloldali $c \rightarrow b-0$, valamint az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenet következtében

$$\varphi(b) - \varphi(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)).$$

Lásd előmértékek tulajdonságai.



1. ábra



2. ábra

Itt kihasználjuk, hogy $(**)$ miatt a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(a_n) - \varphi(\tilde{a}_n))$$

sorösszegzés felső becslése

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{1 - 1/2} = 2\varepsilon.$$

Megjegyzés. Nyilván az identitásfüggvény eleget tesz a kívánalmaknak, és

$$\varphi(x) := x \quad (x \in \mathbb{R})$$

esetén visszakapjuk az úgynevezett **Borel–Lebesgue-kvázimértéket**, azaz

$$\tilde{\mu}_\varphi = \tilde{\mu}_1.$$