

1. Halmazfüggvények

Az (absztrakt) halmazok mérését (a mértéküknek az értelmezését) egy

$$\varphi \in \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

függvény segítségével végezzük majd, ahol az X adott alaphalmaz.

1.1. Definíció: Véges- és szigma-additív halmazfüggvény

Azt mondjuk, hogy a $\varphi \in \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ halmazfüggvény

1. **(véges) additív**, ha

$$\varphi\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n \varphi(A_k)$$

minden olyan $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ páronként diszjunkt halmazrendszerre fennáll, amelynek az egyesítésére $A_0 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ teljesül;

2. **szigma-additív** (σ -additív), ha

$$\varphi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A_n)$$

minden olyan $A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) páronként diszjunkt halmazsorozatra fennáll, amelynek az egyesítésére $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ teljesül.

Állítás. Legyen φ egy additív halmazfüggvény, amire $\emptyset \in \mathcal{D}_\varphi$ fennáll.

1. Ha φ additív és $\varphi(\emptyset)$ véges, akkor $\varphi(\emptyset) = 0$.
2. Ha φ szigma-additív és $\varphi(\emptyset)$ véges, akkor $\varphi(\emptyset) = 0$ és φ additív is.

Bizonyítás.

1. Mivel $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \cap \emptyset$, ezért alkalmazhatjuk a φ additív tulajdonságát

$$\varphi(\emptyset) = \varphi(\emptyset) + \varphi(\emptyset) \implies \varphi(\emptyset) = 0.$$

2. Amennyiben φ szigma-additív, akkor a

$$\varphi(\emptyset) = \varphi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\emptyset)$$

sorösszeg pontosan akkor lesz véges, ha $\varphi(\emptyset) = 0$. Továbbá, amennyiben az

$$A_0, \dots, A_n \in \mathcal{D}_\varphi \quad (n \in \mathbb{N})$$

páronként diszjunkt halmazrendszert, akkor az $A_k := \emptyset$ ($k > n$) választással

$$\varphi\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \varphi\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A_k) = \sum_{n=0}^n \varphi(A_k).$$

Ezt pedig azt jelenti, hogy φ véges additív. ■

1.2. Definíció: Mérték, kvázimérték, előmérték

Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ halmazfüggvény egy

1. **mérték**, ha \mathcal{D}_μ szigma-algebra, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív;
2. **kvázimérték**, ha \mathcal{D}_μ halmazgyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív;
3. **előmérték**, ha \mathcal{D}_μ halmazgyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ additív.

1.3. Tétel: Az előmérték tulajdonságai

Legyen μ előmérték a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, továbbá $A, B, A_n \in \mathcal{G}$ ($n \in \mathbb{N}$).

1. Ha $B \subseteq A$, akkor $\mu(B) \leq \mu(A)$.
2. Ha $B \subseteq A$ és $\mu(B)$ véges, akkor $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
3. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
4. Minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $\mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mu(A_k)$.
5. Ha az (A_n) tagjai páronként diszjunktak és $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

Bizonyítás.

1. Mivel $A = B \cup (A \setminus B)$ diszjunkt felbontás és μ nemnegatív, ezért

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \geq \mu(B). \quad (*)$$
2. Ha $\mu(B)$ véges, akkor $(*)$ átrendezésével adódik a belátandó állítás.
3. Két esetet különböztetünk meg.

- (a) Amennyiben $\mu(A \cap B) = +\infty$, akkor a **μ monotonitása** miatt

$$\mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) = \mu(A) = \mu(B) = +\infty. \checkmark$$

- (b) Ha most $\mu(A \cap B)$ véges, akkor az $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ diszjunkt felbontás és μ additivitása miatt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) \stackrel{2.}{=} \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \checkmark$$

4. Az állítás teljes indukcióval igazolható, lásd **szita-formula**.
5. Mivel A_0, \dots, A_n ($n \in \mathbb{N}$) páronként diszjunktak és μ additív, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mu(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right).$$

Ugyanakkor az $\bigcup_{k=0}^n A_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ tartalmazás és **μ monotonitása** miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

Tehát $\mu : \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty]$ egy előmérték.

1. tulajdonság: **μ monoton növekvő.**
2. tulajdonság: **μ szubtraktív.**
3. tulajdonság: **szita-formula.**
4. tulajdonság: **μ szubadditív.**

Hiszen elmondható, hogy

$$A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B.$$

2. Kiterjesztések

A későbbiek során megmutatjuk, hogy minden gyűrűn értelmezett előmértéket ki lehet kiterjeszteni kvázimértékké, majd azt követően mértékké. Először is belátjuk, hogy tetszőleges félgyűrűn értelmezett nemnegatív, additív és az üres halmazhoz nullát rendelő halmazfüggvényt ki tudjuk terjeszteni előmértékké.

2.1. Lemma

Legyen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, továbbá $m : \mathcal{H} \rightarrow [0, +\infty]$ halmazfüggvény és

- i) az m additív és $m(\emptyset) = 0$;
- ii) $n \in \mathbb{N}$, $H_0, \dots, H_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak;
- iii) $s \in \mathbb{N}$, $Q_0, \dots, Q_s \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak.

Ekkor

$$\bigcup_{k=0}^n H_k = \bigcup_{\ell=0}^s Q_\ell \quad \implies \quad \sum_{k=0}^n m(H_k) = \sum_{\ell=0}^s m(Q_\ell).$$

Bizonyítás. Mivel a metszetképzés disztributív az unióra, ezért

$$H_k = H_k \cap \left(\bigcup_{\ell=0}^s Q_\ell \right) = \bigcup_{\ell=0}^s (H_k \cap Q_\ell) \quad (k = 0, \dots, n)$$

$$Q_\ell = Q_\ell \cap \left(\bigcup_{k=0}^n H_k \right) = \bigcup_{k=0}^n (Q_\ell \cap H_k) \quad (\ell = 0, \dots, s)$$

páronként diszjunkt halmazrendszerek, ezért az m additivitása miatt

$$\sum_{k=0}^n m(H_k) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^s m(H_k \cap Q_\ell) = \sum_{\ell=0}^s \sum_{k=0}^n m(Q_\ell \cap H_k) = \sum_{\ell=0}^s m(Q_\ell).$$

A 2.1. lemma jogalapjául az alábbi lemma szolgál.

2.2. Lemma: Félgyűrűvel generált halmazgyűrű szerkezete

Amennyiben a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy félgyűrű, akkor az általa generált gyűrű

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \left\{ \bigcup_{k=0}^n H_k \mid H_0, \dots, H_n \in \mathcal{H} \text{ páronként diszjunktak } (n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

A 2.2. lemma értelmében a továbbiakban feltesszük, hogy

$$A \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \quad \iff \quad A = \bigcup_{k=0}^n Q_k$$

fennáll valamilyen $n \in \mathbb{N}$ és $Q_0, \dots, Q_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazok esetén.

2.3. Tétel

Legyen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, továbbá $m : \mathcal{H} \rightarrow [0, +\infty]$ additív és $m(\emptyset) = 0$.

Definiáljuk az alábbi halmazfüggvényt:

$$\mu : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, +\infty], \quad \mu(A) := \sum_{k=0}^n m(Q_k).$$

Ekkor

1. μ előmérték, valamint $\mu|_{\mathcal{H}} = m$;
2. ha λ előmérték $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ -n és $\lambda|_{\mathcal{H}} = m$, akkor $\lambda = \mu$;
3. ha m szigma-additív, akkor μ kvázi-mérték.

Tehát $\lambda : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, +\infty]$ alakú.

Bizonyítás.

1. Az állítás nyilvánvalóan igaz, lásd 2.1. lemma.
2. Az lemma felhasználásával
3. Legyenek $B_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ páronként diszjunkt halmazok ($n \in \mathbb{N}$) és

$$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H}).$$

Ekkor alkalmas $H_0, \dots, H_s \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazokkal

$$B = \bigcup_{k=0}^s H_k$$

Ugyan ez elmondható a B_n halmazokra is, vagyis

$$B_n = \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj} \quad (n \in \mathbb{N})$$

valamilyen $H_{n0}, \dots, H_{np_n} \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazokkal. Így

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sum_{k=0}^s m(H_k) = \sum_{k=0}^s \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj} \cap H_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} \sum_{k=0}^s m(H_{nj} \cap H_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n). \end{aligned}$$

Igazolni kell, hogy μ szigma-additív.

Lásd félgyűrűvel generált gyűrű.

Az eddigieket összevetve kapjuk, hogy

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj}.$$

Ugyanis minden $k = 0, \dots, s$ indexre

$$H_k = H_k \cap B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{p_n} (H_{nj} \cap H_k).$$

Ez pedig páronként diszjunkt felbontás.