

1. Lebesgue-tétel

1.1. Tétel: Lebesgue-tétel

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $p \in [1, +\infty]$, valamint az $f_n \in L^p$ ($n \in \mathbb{N}$) egy olyan függvénysorozat, amelyre a következők igazak:

- i) majdnem mindenhol létezik a $\lim(f_n)$ pontonkénti limesz;
- ii) alkalmas $F \in L^+$, $\|F\|_p < +\infty$ függvénnyel minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$|f_n(x)| \leq F(x) \quad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor

- a) van olyan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \mu\text{-m.m.};$$

- b) minden a)-beli f függvényre $f \in L^p$, továbbá $p \in [1, +\infty)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Bizonyítás. Az i) és ii) feltétel figyelembe vételével van olyan $A \in \Omega$, hogy

$$\mu(A) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq F(x) < +\infty$$

fennáll minden $x \in X \setminus A$ helyen és $n \in \mathbb{N}$ indexre. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), & \text{ha } x \in X \setminus A, \\ 0, & \text{ha } x \in A. \end{cases}$$

Ekkor az $f = \lim(f_n)$ majdnem mindenhol, és az f mérhető és véges, mert

$$|f(x)| \leq F(x) < +\infty \quad (x \in X).$$

Ha az $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény eleget tesz az a)-nak, akkor a ii) feltétel alapján

$$|f(x)| \leq F(x) \quad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor az integrál monotonitása miatt

$$\|f\|_p \leq \|F\|_p < +\infty \quad \implies \quad f \in L^p.$$

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Legyen ehhez

$$g_n := |f - f_n|^p \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel g_n nemnegatív és mérhető minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, ezért $g_n \in L^+$, és

$$g_n = |f - f_n|^p \leq (|f| + |f_n|)^p \leq 2^p \cdot F^p \quad \mu\text{-m.m.}$$

Tehát az f függvény nem más, mint a

$$g_n := f_n \cdot \chi_{X \setminus A} \quad (n \in \mathbb{N})$$

mérhető függvényekből álló sorozat

$$f = \lim(g_n)$$

határfüggvénye, ami szintén mérhető.

Alkalmazva a Fatou-lemma második állítását

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \, d\mu = 0.$$

Tehát

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Megjegyzések:

i) Speciálisan $p = 1$ esetén a Lebesgue-tétel következménye, hogy

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Ugyanis figyelembe véve az

$$\left| \int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu \right| \leq \int |f - f_n| \, d\mu = \|f - f_n\|_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ii) Speciálisan tegyük fel, hogy a μ véges és az (f_n) függvénysorozat egyenletesen korlátos majdnem minden pontban, vagyis tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$|f_n(x)| \leq C \quad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor teljesül a Lebesgue tétel második feltétele, ugyanis $F \equiv C$ mellett

$$\|F\|_p = \left(\int C^p \, d\mu \right)^{1/p} = C \cdot (\mu(X))^{1/p} < +\infty.$$

■

1.2. Tétel: Kis Lebesgue-tétel

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, μ véges, valamint az $f_n \in L$ ($n \in \mathbb{N}$) olyan függvénysorozat, amelyre a következők igazak:

- i) majdnem mindenhol létezik a $\lim(f_n)$ pontonkénti limesz;
- ii) megadható olyan C konstans, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$|f_n(x)| \leq C \quad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor van olyan $f \in L$ függvény, hogy majdnem mindenhol $f = \lim(f_n)$ és

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Tétel (Fatou-lemma II.). Ha egy

$$(h_n) : \mathbb{N} \rightarrow L^+$$

sorozathoz van olyan $G \in L^+$, hogy

$$\int G \, d\mu < +\infty, \quad h_n \leq G \quad \mu\text{-m.m.},$$

akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int h_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} h_n \, d\mu$$

akkor

2. Teljesség

2.1. Tétel: Az L^p teljessége

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $1 \leq p \leq +\infty$ esetén $f_n \in L^p$ ($n \in \mathbb{N}$).

Tegyük fel, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, amivel

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

Ekkor van olyan $f \in L^p$ függvény, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Bizonyítás. A Cauchy-kritérium miatt van olyan (n_k) indexsorozat, hogy

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (*)$$

Ekkor a Beppo Levi-tétel alapján létezik az L^+ -beli

$$g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad g := \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$$

összegfüggvény, amelyre

$$\|g\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_p < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Következésképpen g majdnem mindenhol véges, így a $\sum (g_k)$ teleszkopikus összegfüggvény μ -m.m. abszolút konvergens. Ugyanakkor

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_\ell} - f_{n_0} \quad (1 \leq \ell \in \mathbb{N}),$$

tehát az (f_{n_ℓ}) részsorozat majdnem mindenhol konvergens. Innen

$$|f_{n_\ell}| = \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} g_k + f_{n_0} \right| \leq g + |f_{n_0}| \quad (1 \leq \ell \in \mathbb{N})$$

majdnem mindenhol igaz, továbbá a **Minkowski-egyenlőtlenség** miatt

$$\| |f_{n_0}| + g \|_p \leq \|f_{n_0}\|_p + \|g\|_p < +\infty.$$

Teljesülnek a **Lebesgue-tétel** feltételei. Ekkor van olyan $f \in L^p$, hogy

$$f = \lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{n_\ell} \quad \mu\text{-m.m.}$$

Jól ismert, hogy amennyiben egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor maga a teljes sorozat is konvergens, továbbá a határértékeik azonosak. Ennél fogva az (f_n) függvénytársorozat is konvergens és

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \mu\text{-m.m.}$$

Eddig a pontig p értéke tetszőleges lehetett.

1. Ha $p < +\infty$, akkor szintén a **Lebesgue-tétel** alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

$(n_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő.

Lásd **Minkowski-egyenlőtlenség** és $(*)$.

Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség).

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$$

bármilyen $f, h \in L^p$ függvényre.

2. Ha $p = +\infty$, akkor $(*)$ alapján tetszőleges $m < k$ indexre

$$|f_{n_m} - f_{n_k}| = \left| \sum_{i=m}^{k-1} (f_{n_i} - f_{n_{i+1}}) \right| \leq \sum_{i=m}^{k-1} \|f_{n_i} - f_{n_{i+1}}\|_{\infty} \leq \sum_{i=m}^{k-1} \frac{1}{2^i}.$$

Ekkor a határérték és a rendezés kapcsolata miatt

$$|f_{n_m} - f| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_m} - f_{n_k}| \leq \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2^{1-m} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Tehát a végtelen-norma definíciója, majd a közrefogási elv-miatt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - f_{n_m}\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0.$$

A **Lebesgue-tétel** nem alkalmazható!

Az itt szereplő mértani sorösszeg

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{2}{2^m}.$$

Hiszen $m \rightarrow \infty$ mellett

$$0 \leq |f_{n_m} - f| \leq \|f_{n_m} - f\|_{\infty} \rightarrow 0.$$