Mérték, integrál, ...

4. Előadás

1. Emlékeztető.

Adott X (alap)halmaz esetén a $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ leképezés

i) *additív,* ha a

$$\varphi\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(A_k)$$

egyenlőség teljesül minden olyan $A_k \in \mathcal{D}_\varphi \quad (n \in \mathbf{N}, k = 0, ..., n)$ választással, amelyre az $A_0, ..., A_n$ halmazok páronként diszjunktak, és $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{D}_\varphi$;

ii) *szigma-additív* (σ-additív), ha

$$\varphi\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(A_k)$$

minden olyan esetben, amikor az $A_k \in \mathcal{D}_\varphi \quad (k \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak, és $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}_\varphi$.

2. Mértékek.

Minden készen áll ahhoz, hogy a halmazrendszerekre, ill. a halmazfüggvényekre megfogalmazott speciális tulajdonságok együttesével definiálhassuk a mérték (ill. az „enyhébb" változatainak) a fogalmát.

1. Definíció. Legyen X halmaz, $\mu \in \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$. Azt mondjuk, hogy a μ halmazfüggvény

i) *előmérték,* ha a $\mathcal{D}_\mu$ értelmezési tartomány gyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ additív;

ii) *kvázimérték,* ha a $\mathcal{D}_\mu$ értelmezési tartomány gyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív;

iii) *mérték,* ha a $\mathcal{D}_\mu$ értelmezési tartomány szigma-algebra, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív.

Világos, hogy minden kvázimérték egyúttal előmérték is, ill. minden mérték kvázimérték is. Az alábbi példa azt mutatja, hogy nem minden előmértékről mondható el, hogy az egyúttal kvázimérték lenne. Legyen ui. valamilyen X megszámlálható halmaz esetén

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ vagy } X \setminus A \text{ véges}\}.$$

Ekkor a $\mathcal{G}$ gyűrű, a

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A \text{ véges}) \\ \\ +\infty & (X \setminus A \text{ véges}) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{G})$$

leképezés pedig egy olyan előmérték, amelyik nem kvázimérték. Ha ui. az X halmaz elemeit x_k-val $(k \in \mathbf{N})$ jelöljük, akkor

$$X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x_k\}$$

egy páronként diszjunkt, $\mathcal{G}$-beli halmazokból álló felbontása az $X \in \mathcal{G}$ halmaznak, de

$$\mu(X) = +\infty \neq 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\{x_k\}).$$

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a μ leképezés előmérték a $\mathcal{G}$ gyűrűn. Ekkor minden $A, B, A_i \in \mathcal{G}$ $(i \in \mathbf{N})$ mellett*

1^o $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$;

2^o *a μ monoton, azaz $A \subset B$ esetén $\mu(A) \leq \mu(B)$;*

3^o *ha $A \subset B$ és $\mu(A) < +\infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;*

4^o $\mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) \leq \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i)$ $(n \in \mathbf{N})$;

5^o *ha az A_i $(i \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak és $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$, akkor*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big).$$

Bizonyítás. Legyen $A \subset B$. Mivel $B = A \cup (B \setminus A)$ egy diszjunkt felbontása a B-nek és $\mu \geq 0$, ezért

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Innen $\mu(A) < +\infty$ esetén az is következik, hogy $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$. Ezzel a második és a harmadik állítást beláttuk.

Az első igazolásához legyen először $\mu(A \cap B) = +\infty$. Ekkor a 2^o-ből rögtön adódik az, hogy

$$\mu(A) = \mu(B) = +\infty,$$

azaz ekkor az 1^o állítás triviális. Ha viszont $\mu(A\cap B)<+\infty$, akkor

$$\mu(A\cup B)=\mu((A\setminus(A\cap B))\cup B)=$$

$$\mu(A\setminus(A\cap B))+\mu(B)=\mu(A)-\mu(A\cap B)+\mu(B),$$

amiből az 1^o egyenlőség átrendezéssel következik.

A 4^o állítást a teljes indukcióra való hivatkozással elegendő $n=1$-re belátni, amikor is 1^o alapján a dolog nyilvánvaló.

Az 5^o igazolásához legyen $A:=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ és $n\in\mathbf{N}$. Ekkor

$$\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i)=\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{n}A_i\Big)\leq\mu(A).$$

(Az utolsó becslésben $\bigcup_{i=0}^{n}A_i\subset A$-ra hivatkozva a már bebizonyított 2^o egyenlőtlenséget használtuk fel.) Így

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mu(A_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\mu(A_i)\leq\mu(A).$$

■

A továbbiakban egy előmértéket illetően adunk szükséges, ill. elégséges feltételeket arra nézve, hogy ez az előmérték kvázimérték legyen.

2. Tétel. *Legyen a μ előmérték a $\mathcal{G}$ gyűrűn, és tekintsük a következő tulajdonságokat:*

a) *a μ kvázimérték;*

b) *bármilyen $A_n\in\mathcal{G},A_n\subset A_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N})$ halmazsorozatra az $A:=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$ feltételből $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$ következik;*

c) *tetszőleges $B_n\in\mathcal{G},B_{n+1}\subset B_n$, $\mu(B_n)<+\infty$ $(n\in\mathbf{N})$ halmazsorozat mellett a $B:=\bigcap_{n=0}^{\infty}B_n\in\mathcal{G}$ tartalmazás esetén $\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\mu(B)$;*

d) *minden $C_n\in\mathcal{G},C_{n+1}\subset C_n$, $\mu(C_n)<+\infty$ $(n\in\mathbf{N})$ halmazsorozatra igaz, hogy a $\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n=\emptyset$ egyenlőségből $\lim_{n\to\infty}\mu(C_n)=0$ következik.*

Ekkor

1^o a) $\Longleftrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) $\Longleftrightarrow$ d);

2^o *ha a μ véges*[1], *akkor* a) $\Longleftrightarrow$ b) $\Longleftrightarrow$ c) $\Longleftrightarrow$ d).

[1] Tehát $\mu(A)<+\infty$ $(A\in\mathcal{G})$.

Bizonyítás. Az 1^o állításban az a) $\Longrightarrow$ b) következtetéshez legyen

$$A_{-1} := \emptyset,\ D_n := A_n \setminus A_{n-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az így definiált D_n halmazok $\mathcal{G}$-ben vannak, páronként diszjunktak, továbbá $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} D_k \quad (n \in \mathbf{N})$ és $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$. Ezért (most a μ feltételezett kvázimérték volta miatt)

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(D_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mu(D_k) \right) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=0}^{n} D_k \Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

A b) $\Longrightarrow$ a) bizonyításához csak a μ szigma-additivitását kell igazolni. Legyen ehhez az $Y_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ egy páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat, és tegyük fel, hogy

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n \in \mathcal{G}.$$

Mivel az $A_n := \bigcup_{k=0}^{n} Y_k$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat monoton nőve tart az A halmazhoz,[2] ezért a b)-beli feltételt alkalmazva

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mu(Y_k) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(Y_k).$$

A b) $\Longrightarrow$ c) irányban a következőt mondhatjuk: az

$$A_n := B_0 \setminus B_n \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazsorozat monoton nőve tart a $B_0 \setminus B \in \mathcal{G}$ halmazhoz, ezért a b) és az 1. Tétel szerint

$$\mu(B_0 \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_0 \setminus B_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\mu(B_0) - \mu(B_n) \Big) = \mu(B_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Mivel $B \subset B_0$ és $\mu(B_0) < +\infty$ miatt (ld. 1. Tétel) $\mu(B) < +\infty$, így (az előző egyenlőséget is figyelembe véve)

$$\mu(B_0 \setminus B) = \mu(B_0) - \mu(B) = \mu(B_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Tehát ($\mu(B_0)$-val egyszerűsítve) valóban igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B).$$

[2] $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ és $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

A c) $\Longrightarrow$ d) állítás triviális, a fordított irányú d) $\Longrightarrow$ c) következtetéshez pedig vegyük észre, hogy a

$$C_n := B_n \setminus B \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

halmazsorozat monoton fogyva tart az üres halmazhoz.[3] Innen viszont a d) feltételezés miatt

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) - \mu(B),$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B).$$

A 2^o igazolásához nyilván elegendő belátni azt, hogy d) $\Longrightarrow$ b) . Ez az előzőekhez hasonló gondolatmenettel adódik abból, hogy a $\mathcal{G}$-beli

$$C_n := A \setminus A_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat monoton fogyólag tart az $\emptyset$-hoz, tehát a d) és az 1. Tétel szerint

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(\mu(A) - \mu(A_n)\Big) = \mu(A) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

$\blacksquare$

A c) tulajdonságot másképp úgy mondjuk, hogy a μ *felülről félig folytonos*, a b)-t pedig úgy, hogy a μ *alulról félig folytonos.*

3. Kiterjesztések.

Most megmutatjuk, hogy egy gyűrűn értelmezett előmértéket hogyan lehet kiterjeszteni kvázimértékké. Legyen ehhez a $\mathcal{H}$ halmazrendszer egy X-beli félgyűrű. Tegyük fel továbbá, hogy adott az

$$m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$$

additív leképezés. Emlékeztetünk arra, hogy $\emptyset \in \mathcal{H}$. Feltesszük még, hogy $m(\emptyset) = 0$. Az m halmazfüggvény monoton is, azaz $A, B \in \mathcal{H}$, $B \subset A$ esetén igaz az $m(B) \leq m(A)$ egyenlőtlenség. Ugyanis

$$A = (A \setminus B) \cup B = \left(\bigcup_{k=0}^{n} Q_n\right) \bigcup B,$$

[3] $C_{n+1} \subset C_n \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \emptyset$.

ahol $\bigcup_{k=0}^{n} Q_n$ a (félgyűrű) definíció(ja) szerinti felbontása az $A \setminus B$-nek. Az m additivitásából tehát

$$m(A) = m(B) + \sum_{k=0}^{n} m(Q_k) \geq m(B)$$

valóban következik.

1. Lemma. *Ha* $H_0, ..., H_n \in \mathcal{H}$, *valamint* $Q_0, ..., Q_p \in \mathcal{H}$ *(ahol* $n, p \in \mathbf{N}$*), a* $H_0, ..., H_n$ *halmazok is és a* $Q_0, ..., Q_p$ *halmazok is páronként diszjunktak,*

$$\bigcup_{k=0}^{n} H_k = \bigcup_{j=0}^{p} Q_j,$$

akkor

$$\sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{j=0}^{p} m(Q_j).$$

Bizonyítás. Mindegyik $H_k \quad (k = 0, ..., n)$, valamint $Q_i \quad (i = 0, ..., p)$ halmazra

$$H_k = H_k \bigcap \Big(\bigcup_{j=0}^{p} Q_j \Big) = \bigcup_{j=0}^{p} \Big(H_k \cap Q_j \Big),$$

$$Q_i = Q_i \bigcap \Big(\bigcup_{s=0}^{n} H_s \Big) = \bigcup_{s=0}^{n} \Big(H_s \cap Q_i \Big)$$

páronként diszjunkt, $\mathcal{H}$-beli halmazokból álló felbontások, ezért

$$\sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} m(H_k \cap Q_j) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} m(H_k \cap Q_j) = \sum_{j=0}^{p} m(Q_j).$$

■

Az előbbi lemma szerint értelmezhetünk egy

$$\mu : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty]$$

leképezést az alábbi utasítással: legyen $Y \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$, ekkor alkalmas $H_0, ..., H_n \in \mathcal{H} \quad (n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazokkal $Y = \bigcup_{k=0}^{n} H_k$. Definiáljuk ezek után a $\mu(Y)$-t a következőképpen:

$$(*) \qquad \mu(Y) := \sum_{k=0}^{n} m(H_k).$$

3. Tétel. *A fentiekben definiált μ olyan előmérték, amelynek a $\mathcal{H}$-ra vett leszűkítése egyenlő az m-mel. Ha a*

$$\lambda : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty]$$

előmértéknek a $\mathcal{H}$-ra való leszűkítése megegyezik az m-mel, akkor $\lambda = \mu$. Amennyiben az m szigma-additív, akkor a μ leképezés kvázimérték.

Bizonyítás. A μ definíciója és az 1. Lemma alapján a tételünk első két állítása nyilvánvaló.

Tegyük most fel, hogy az m halmazfüggvény σ-additív. Azt kell megmutatni, hogy a μ is σ-additív. Ha viszont az $A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak és

$$Y := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H}),$$

akkor alkalmasan választott, páronként diszjunkt $H_0, ..., H_p \in \mathcal{H}$ halmazokkal (ahol $p \in \mathbf{N}$)

$$Y = \bigcup_{k=0}^{p} H_k.$$

Ugyanez igaz minden $n \in \mathbf{N}$ mellett az Y helyett az A_n halmazra:

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj},$$

ahol $p_n \in \mathbf{N}$, és a $H_{n0}, ..., H_{np_n} \in \mathcal{H}$ halmazok páronként diszjunktak. Mindezt egybevetve adódik az

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj}$$

előállítás. Nyilván minden $H_k \quad (k = 0, ..., p)$ halmazra a

$$H_k = H_k \cap Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{p_n} (H_{nj} \cap H_k)$$

egy páronként diszjunkt, $\mathcal{H}$-beli halmazokból álló felbontása a H_k-nak. Az m függvény σ-additivitása alapján tehát

$$m(H_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj} \cap H_k),$$

így

$$\mu(Y)=\sum_{k=0}^{p} m(H_k)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj}\cap H_k)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p_n}\sum_{k=0}^{p} m(H_{nj}\cap H_k)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj})=\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n).$$

■

4. Megjegyzések

i) Tegyük fel, hogy valamilyen $X\neq\emptyset$ halmaz esetén az $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ halmazrendszer gyűrű (szigma-algebra), és egy adott $a\in X$ pont segítségével tekintsük a következő

$$\mu:\mathcal{A}\to\mathbf{R}$$

függvényt:

$$\mu_a(A):=\begin{cases}1 & (a\in A)\\ \\ 0 & (a\notin A)\end{cases}\qquad (A\in\mathcal{A}).$$

Ekkor a μ (az a pontban „koncentrált") kvázimérték (mérték[4]). Ui. a σ-additivitástól eltekintve a kvázimérték (mérték) minden axiómája nyilván teljesül a μ-re. Ha az $A_n\in\mathcal{A}\quad(n\in\mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak és

$$A=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\in\mathcal{A},$$

akkor két eset lehetséges:

$$a\notin A_n \text{ és } \mu(A_n)=0\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

így

$$\mu(A)=0=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n).$$

Ha viszont $a\in A$, akkor pontosan egy $N\in\mathbf{N}$ esetén $a\in A_N$, ezért $\mu(A)=\mu(A_N)=1$ és

$$\mu(A_n)=0\qquad(N\neq n\in\mathbf{N}).$$

[4]Dirac-mérték. (Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984).)

Tehát újfent csak

$$\mu(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n).$$

ii) Legyen most az X halmaz legalább kontinuum számosságú, és jelöljük Ω-val az X azon A részhalmazai által alkotott halmazrendszert, amelyekre vagy az A, vagy pedig az $X\setminus A$ halmaz legfeljebb megszámlálható. Ekkor az Ω egy X-beli σ-algebra, a

$$\mu(A):=\begin{cases}0 & (A \text{ legfeljebb megszámlálható})\\ \\ +\infty & (X\setminus A \text{ legfeljebb megszámlálható})\end{cases}\qquad (A\in\Omega)$$

módon definiált $\mu:\Omega\to\mathbf{R}$ függvény pedig mérték. Valóban, a mérték axiómái közül nyilván csak a μ szigma-additivitása „kérdéses". Ehhez legyenek az $A_n\in\Omega\quad(n\in\mathbf{N})$ halmazok páronként diszjunktak, és

$$A:=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n.$$

Ha itt minden $A_n\quad(n\in\mathbf{N})$ legfeljebb megszámlálható, akkor az A halmaz is legfeljebb megszámlálható, így $\mu(A_n)=0\ \ (n\in\mathbf{N})$ miatt

$$\mu(A)=0=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n).$$

Ha viszont valamilyen $N\in\mathbf{N}$ esetén az $X\setminus A_N$ halmaz legfeljebb megszámlálható, akkor

$$X\setminus A\subset X\setminus A_N$$

miatt ugyanez igaz az A halmazra is, tehát az $X\setminus A$ is legfeljebb megszámlálható. Ezért $\mu(A)=+\infty$. Ugyanakkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n)\geq\mu(A_N)=+\infty$$

becslést figyelembe véve $\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n)=+\infty$, és így megint csak

$$\mu(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n).$$

iii) Ha $\Omega := \mathcal{P}(\mathbf{N})$, és az $\alpha_k \geq 0 \quad (k \in \mathbf{N})$ számokkal

$$\mu(A) := \sum_{k \in A} \alpha_k \qquad (A \in \Omega),$$

akkor világos, hogy a μ mérték. Az $\alpha_k := 1 \quad (k \in \mathbf{N})$ esetben a $\mu(A)$ nem más, mint az $A \subset \mathbf{N}$ halmaz számossága. Az i) megjegyzésben szereplő μ_a mértékekkel most nyilván igaz a

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \mu_n$$

előállítás.

iv) Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz és X-beli Ω szigma-algebra mellett legyen

$$\mu(A) := \begin{cases} +\infty & (A \text{ nem véges}) \\ & \\ [A] & (A \text{ véges}) \end{cases} \qquad (A \in \Omega).$$

($[A]$ jelöli az A halmaz számosságát.) Könnyű belátni, hogy a μ mérték (*számosságmérték*).

v) Legyen az X egy halmaz, az $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ pedig szigma-algebra. Az (X, Ω) rendezett párt *mérhető térnek* nevezzük. Az $A \subset X$ halmaz *mérhető,* ha $A \in \Omega$. Tegyük fel, hogy a

$$\mu : \Omega \to [0, +\infty]$$

leképezés mérték. Ekkor az (X, Ω, μ) rendezett hármas egy *mértéktér,* $\mu(A) \ (A \in \Omega)$ az A halmaz *mértéke.*

Tekintsük az

$$\Omega_0 := \{A \in \Omega : \mu(A) = 0\}$$

halmazrendszert (a μ-nulla-mértékű halmazok rendszerét). A μ mérték (az (X, Ω, μ) mértéktér) *teljes*, ha

$$\mathcal{P}(A) \subset \Omega_0. \qquad (A \in \Omega_0).$$

Más szóval a szóban forgó μ mérték akkor és csak akkor teljes, ha bármilyen $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmaz tetszőleges $B \subset A$ részhalmazára egyúttal a B is mérhető, azaz $B \in \Omega$. Ekkor (a μ monotonitása miatt) persze

$$0 \leq \mu(B) \leq \mu(A) \Longrightarrow \mu(B) = 0.$$

vi) Adott $X \neq \emptyset$ halmaz és $\omega \in X$ mellett legyen az Ω olyan X-beli σ-algebra, hogy $\{\omega\} \in \Omega$, valamint $A \in \Omega$ esetén legyen

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (\omega \notin A) \\ \\ 1 & (\omega \in A). \end{cases}$$

Ekkor a μ (Dirac-)mérték pontosan akkor teljes, ha $\Omega = \mathcal{P}(X)$.

Valóban, ha a mérhető halmazok rendszere megegyezik $\mathcal{P}(X)$-szel, akkor a rajta értelmezett bármilyen mérték nyilván teljes. Fordítva, a mondott példában

$$X \setminus \{\omega\} \in \Omega \text{ és } \mu(X \setminus \{\omega\}) = 0,$$

ezért a μ teljessége esetén tetszőleges $A \subset X \setminus \{\omega\}$ halmazra $A \in \Omega$. Mivel $\{\omega\} \in \Omega$, így az előbbi A halmazra $A \cup \{\omega\} \in \Omega$ is igaz. Nyilván bármilyen $\omega \in B \subset X$ halmaz előállítható ilyen alakban. Tehát tényleg minden $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz Ω-ban van.

vii) Ha a μ halmazfüggvény kvázimérték a $\mathcal{G}$ gyűrűn, és az $A, A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazokkal

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

akkor

$$\mu(A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ui. a μ monotonitása és $A = \bigcup_{n=0}^{\infty}(A \cap A_n)$ miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Legyen továbbá

$$B_0 := A_0,\ B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ekkor a B_n-ek páronként diszjunkt $\mathcal{G}$-beli halmazok, és

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}.$$

Így

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

azaz a μ *szigma-szubadditív.*

viii) Nem nehéz belátni, hogy a szigma-szubadditivitási tulajdonság jellemzi is a kvázimértékeket a következő értelemben: ha a $\mathcal{G}$ gyűrűn értelmezett μ előmérték szigma-szubadditív, akkor σ-additív is, azaz kvázimérték.

Legyenek ui. ekkor az $A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazok olyanok, hogy $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$. A szigma-szubadditivitás miatt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

az 1. Tétel 5^o állítása alapján pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big).$$

Tehát

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$