1. Lebesgue-tétel

1.1. Tétel: Lebesgue-tétel

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $p \in [1, +\infty]$, valamint az $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbb{N})$ egy olyan függvénysorozat, amelyre a következők igazak:

i) majdnem mindenhol létezik a $\lim(f_n)$ pontonkénti limesz;

ii) alkalmas $F \in L^+$, $\|F\|_p < +\infty$ függvénnyel minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\left|f_n(x)\right| \leq F(x) \qquad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor

a) van olyan $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{-m.m.};$$

b) minden a)-beli f függvényre $f \in L^p$, továbbá $p \in [1, +\infty)$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Bizonyítás. Az i) és ii) feltétel figyelembe vételével van olyan $A \in \Omega$, hogy

$$\mu(A) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}, \qquad \left|f_n(x)\right| \leq F(x) < +\infty$$

fennáll minden $x \in X \setminus A$ helyen és $n \in \mathbb{N}$ indexre. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{ha } x \in X \setminus A, \\ 0, & \text{ha } x \in A. \end{cases}$$

Ekkor az $f = \lim(f_n)$ majdnem mindenhol, és az f mérhető és véges, mert

$$\left|f(x)\right| \leq F(x) < +\infty \qquad (x \in X).$$

Tehát az f függvény nem más, mint a

$$g_n := f_n \cdot \chi_{X\setminus A} \quad (n \in \mathbb{N})$$

mérhető függvényekből álló sorozat

$$f = \lim(g_n)$$

határfüggvénye, ami szintén mérhető.

Ha az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény eleget tesz az a)-nak, akkor a ii) feltétel alapján

$$\left|f(x)\right| \leq F(x) \qquad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor az integrál monotonitása miatt

$$\|f\|_p \leq \|F\|_p < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f \in L^p.$$

Azt kell már csak megmutatnunk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Legyen ehhez

$$g_n := |f - f_n|^p \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel g_n nemnegatív és mérhető minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, ezért $g_n \in L^+$, és

$$g_n = |f - f_n|^p \leq \big(|f| + |f_n|\big)^p \leq 2^p \cdot F^p \qquad \mu\text{-m.m.}$$

Alkalmazva a Fatou-lemma második állítását

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Tehát

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Tétel (Fatou-lemma II.)**.** Ha egy

$$(h_n) : \mathbb{N} \to L^+$$

sorozathoz van olyan $G \in L^+$, hogy

$$\int G \,\mathrm{d}\mu < +\infty, \quad h_n \le G \ \mu\text{-m.m.},$$

akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \int h_n \,\mathrm{d}\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu$$

akkor

Megjegyzések:

i) Speciálisan $p = 1$ esetén a Lebesgue-tétel következménye, hogy

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Ugyanis figyelembe véve az

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f_n \,\mathrm{d}\mu \right| \le \int \left| f - f_n \right| \mathrm{d}\mu = \|f - f_n\|_1 \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

ii) Speciálisan tegyük fel, hogy a μ véges és az (f_n) függvénysorozat egyenletesen korlátos majdnem minden pontban, vagyis tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\left| f_n(x) \right| \le C \qquad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor teljesül a Lebesgue tétel második feltétele, ugyanis $F \equiv C$ mellett

$$\|F\|_p = \left(\int C^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = C \cdot \big(\mu(X)\big)^{1/p} < +\infty.$$

■

1.2. Tétel: Kis Lebesgue-tétel

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, μ véges, valamint az $f_n \in L$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan függvénysorozat, amelyre a következők igazak:

i) majdnem mindenhol létezik a $\lim(f_n)$ pontonkénti limesz;

ii) megadható olyan C konstans, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\left| f_n(x) \right| \le C \qquad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor van olyan $f \in L$ függvény, hogy majdnem mindenhol $f = \lim(f_n)$ és

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

2. Teljesség

2.1. Tétel: Az L^p teljessége

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $1 \leq p \leq +\infty$ esetén $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon \qquad (m, n > N).$$

Ekkor van olyan $f \in L^p$ függvény, hogy $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Bizonyítás. A Cauchy-kritérium miatt van olyan (n_k) indexsorozat, hogy

$(n_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő.

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < \frac{1}{2^k} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{$*$}$$

Ekkor a Beppo Levi-tétel alapján létezik az L^+-beli

$$g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad g := \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$$

összegfüggvény, amelyre

Lásd Minkowski-egyenlőtlenség és $(*)$.

$$\|g\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_p < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Következésképpen g majdnem mindenhol véges, így a $\sum(g_k)$ teleszkopikus összegfüggvény μ-m.m. abszolút konvergens. Ugyanakkor

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_\ell} - f_{n_0} \qquad (1 \leq \ell \in \mathbb{N}),$$

tehát az (f_{n_ℓ}) részsorozat majdnem mindenhol konvergens. Innen

$$\left|f_{n_\ell}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\ell-1} g_k + f_{n_0}\right| \leq g + |f_{n_0}| \qquad (1 \leq \ell \in \mathbb{N})$$

majdnem mindenhol igaz, továbbá a Minkowski-egyenlőtlenség miatt

$$\big\||f_{n_0}| + g\big\|_p \leq \|f_{n_0}\|_p + \|g\|_p < +\infty.$$

Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség)**.**

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$$

bármilyen $f, h \in L^p$ függvényre.

Teljesülnek a Lebesgue-tétel feltételei. Ekkor van olyan $f \in L^p$, hogy

$$f = \lim_{\ell\to\infty} f_{n_\ell} \quad \mu\text{-m.m.}$$

Jól ismert, hogy amennyiben egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor maga a teljes sorozat is konvergens, továbbá a határértékeik azonosak. Ennél fogva az (f_n) függvénysorozat is konvergens és

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{-m.m.}$$

Eddig a pontig p értéke tetszőleges lehetett.

1. Ha $p < +\infty$, akkor szintén a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

2. Ha $p = +\infty$, akkor $(*)$ alapján tetszőleges $m < k$ indexre

$$\left|f_{n_m} - f_{n_k}\right| = \left|\sum_{i=m}^{k-1} \left(f_{n_i} - f_{n_{i+1}}\right)\right| \leq \sum_{i=m}^{k-1} \left\|f_{n_i} - f_{n_{i+1}}\right\|_\infty \leq \sum_{i=m}^{k-1} \frac{1}{2^i}.$$

Ekkor a határérték és a rendezés kapcsolata miatt

$$\left|f_{n_m} - f\right| = \lim_{k\to\infty} \left|f_{n_m} - f_{n_k}\right| \leq \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2^{1-m} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Tehát a végtelen-norma definíciója, majd a közrefogási elv-miatt

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_{n_m}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

A Lebesgue-tétel nem alkalmazható!

Az itt szereplő mértani sorösszeg

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{2}{2^m}.$$

Hiszen $m \to \infty$ mellett

$$0 \leq \left|f_{n_m} - f\right| \leq \left\|f_{n_m} - f\right\|_\infty \longrightarrow 0.$$