1. Súlyfüggvények

1.1. Definíció: Súlyfüggvény

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $f \in L^+$ egy adott függvény. Ekkor a

$$\mu_f : \Omega \to [0, +\infty], \qquad \mu_f(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int f \cdot \chi_A \, \mathrm{d}\mu$$

leképezést **súlyfüggvénynek** nevezzük.

Megjegyzések:

i) Speciálisan az $A = X$ esetben

$$\mu_f(X) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int f \cdot \chi_X \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

ii) Amennyiben az $A \in \Omega$ halmaz nullamértékű, akkor

$$f \cdot \chi_A = 0 \ \mu\text{-m.m.} \quad \Longrightarrow \quad \mu_f(A) = \int f \cdot \chi_A \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

■

1.2. Állítás

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $f \in L^+$. Ekkor a μ_f súlyfüggvény mérték.

Bizonyítás. A μ_f függvényről az alábbiak mondhatóak el.

1. **Nemnegatív**, ugyanis az integrál monoton és $f \cdot \chi_A \in L_0^+$ $(A \in \Omega)$.
2. **Eltűnik $\emptyset$-ban**, hiszen

$$\mu_f(\emptyset) = \int f \cdot \chi_\emptyset \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_\emptyset \, \mathrm{d}\mu = \mu(\emptyset) = 0.$$

3. **Szigma-additív**, mert bármely $A_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt halmazsorozat esetén

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \qquad \Longrightarrow \qquad f \cdot \chi_A = \sum_{n=0}^{\infty} f \cdot \chi_{A_n}.$$

Innen a Beppo Levi-tétel sorokra vonatkozó alakjából

$$\mu_f(A) = \int \sum_{n=0}^{\infty} f \cdot \chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f \cdot \chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_f(A_n).$$

Továbbá μ_f az Ω szigma-algebrán van értelmezve, tehát μ_f valóban mérték.