

1. Függvények lokális oszcillációja

1.1. Definíció: Oszcilláció halmazon, lokális oszcilláció

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy $A \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Ekkor

$$\mathcal{O}(f, A) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in A \cap \mathcal{D}_f \right\}$$

az f függvény **oszcillációja** az A halmazon. Továbbá egy $z \in \mathcal{D}_f$ helyen

$$o_z(f) := \inf \left\{ \mathcal{O}(f, I) : I \subset \mathbb{R} \text{ intervallum, } z \in \text{int}(I) \right\}$$

az f függvény **lokális oszcillációja** a z pontban.

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény,

$$\tau := \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$$

egy felosztás. Ekkor

$$\omega(f, \tau) := \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(f, I) \cdot |I|$$

az f függvény **oszcillációs összege**.

1.2. Lemma: Lokális oszcilláció és a folytonosság kapcsolata

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, valamint $z \in \mathcal{D}_f$ egy adott pont. Ekkor

$$f \in \mathcal{C}\{z\} \iff o_z(f) = 0.$$

Bizonyítás.

\Rightarrow Ha az f függvény folytonos z -ben, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz

$$\exists \delta > 0 : |f(x) - f(z)| < \varepsilon \quad (x \in \mathcal{D}_f, |x - z| < \delta).$$

Legyen $I := (z - \delta, z + \delta)$. Ekkor minden $x, t \in I \cap \mathcal{D}_f$ esetén igaz, hogy

$$|f(x) - f(t)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(t) - f(z)| < 2\varepsilon \implies \mathcal{O}(f, I) < 2\varepsilon.$$

Ebből következik, hogy $0 \leq o_z(f) < 2\varepsilon$, ahonnan $o_z(f) = 0$ adódik.

\Leftarrow Most tegyük fel, hogy $o_z(f) = 0$, vagyis definíció szerint

$$o_z(f) = \inf \left\{ \mathcal{O}(f, I) : I \subset \mathbb{R} \text{ intervallum, } z \in \text{int}(I) \right\} = 0.$$

Ekkor bármilyen $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, hogy

$$z \in \text{int}(I) \quad \text{és} \quad \mathcal{O}(f, I) < \varepsilon.$$

Mivel z belső pontja az I -nek, ezért létezik olyan $\delta > 0$ sugár, amivel

$$K_\delta(z) := (z - \delta, z + \delta) \subset I.$$

Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f \cap K_\delta(z)$ pontban

$$|f(x) - f(z)| \leq \mathcal{O}(f, I) < \varepsilon \implies f \in \mathcal{C}\{z\}.$$

2. Konvergencia

2.1. Definíció: Függvénysorozat, pontonkénti konvergencia

Azt mondjuk, hogy az (f_n) egy **függvénysorozat**, ha egy $\mathcal{D} \neq \emptyset$ halmazzal

$$f_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az (f_n) függvénysorozat **pontonként konvergens**, ha az $(f_n(x))$ sorozat minden $x \in \mathcal{D}$ esetén konvergens. Ekkor az f **határfüggvénye** legyen

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \mathcal{D}).$$

Legyen adott az $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$) függvényeknek a konvergens sorozata.

Kérdések:

1. Konvergens-e az integrálokból képzett $\left(\int_a^b f_n\right)$ számsorozat?
2. Igaz-e, hogy az f határfüggvény Riemann-integrálható?
3. Ha az előbbi két kérdésre igen a válasz, akkor fennáll-e az

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség?

Másképp fogalmazva teljesül-e az

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

felcserélhetőség?

Válaszok: Minden további feltétel nélkül ezek nem teljesülnek. Ellenpéldák.

- a) Legyen (r_n) a $[0, 1]$ intervallumbeli racionális számoknak egy sorozata, és

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \{r_0, \dots, r_n\} \\ 0, & \text{ha } x \notin \{r_0, \dots, r_n\} \end{cases} \quad (x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}).$$

Ezek a függvények mind Riemann-integrálhatóak, továbbá

$$D(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (x \in [0, 1]).$$

Ez pedig a híres **Dirichlet-függvény**, amiről ismeretes, hogy $D \notin \mathfrak{R}[0, 1]$.

Vagyis a 2. kérdésre nem a válasz!

- b) Jelöljön $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ egy számsorozatot, és tekintsük a következőket

$$f_n(x) := \begin{cases} a_n & (0 \leq x < 1/n) \\ 0 & (1/n \leq x < 1) \end{cases} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor (f_n) pontonként konvergens és a határfüggvénye $f \equiv 0$. Nyilván

$$f \in \mathfrak{R}[0, 1] \quad \text{és} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Mivel f_n szakaszonként folytonos minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ indexre, ezért

$$f_n \in \mathfrak{R}[0, 1] \quad \text{és} \quad \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} a_n dx + \int_{1/n}^1 0 dx = \frac{a_n}{n}.$$

Vagyis az (a_n) sorozattól függően nem biztos 1. és 3. teljesülni fog.

2.2. Definíció: Egyenletes konvergencia

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat **egyenletesen konvergál** az

$$f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényhez, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N \text{ és } \forall x \in \mathcal{D}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2.3. Tétel

Legyen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvénysorozat $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy

- i) minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$,
- ii) az (f_n) egyenletesen konvergál az $f := \lim(f_n)$ határfüggvényhez.

Ekkor $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ és az integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata konvergens, valamint

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Másképp fogalmazva teljesül, hogy

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás.

1. Legyen $I \subseteq [a, b]$ egy intervallum és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $x, y \in I$ -re

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Továbbá a ii) feltétel miatt minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex:

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad (t \in I, N < n \in \mathbb{N}).$$

Ebből következik, hogy

$$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(y)| \quad (x, y \in I, N < n \in \mathbb{N}).$$

Innen szuprémumot véve kapjuk, hogy

$$\mathcal{O}(f, I) < 2\varepsilon + \mathcal{O}(f_n, I) \quad (N < n \in \mathbb{N}). \quad (*)$$

2. Ekkor a (*) becslés felhasználásával bármilyen $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén

$$\omega(f, \tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(f, I) \cdot |I| < 2\varepsilon(b-a) + \omega(f_n, \tau) \quad (N < n \in \mathbb{N}).$$

Mivel az f_n integrálható, ezért megadható olyan $\tau \subset [a, b]$ felosztás, hogy

$$\omega(f_n, \tau) < \varepsilon \quad \implies \quad \omega(f, \tau) < \varepsilon(2(b-a) + 1).$$

Következésképpen $f \in \mathfrak{R}[a, b]$.

3. Amennyiben $N < n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges index, akkor

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(b-a).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\left(\int_a^b f_n\right)$ integrálsorozat konvergens.

Az alkalmazott becslések részletesen:

$$\begin{aligned} \omega(f, \tau) &< \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} (2\varepsilon + \mathcal{O}(f_n, I)) \cdot |I| \\ &= 2\varepsilon \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} |I| + \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(f_n, I) \cdot |I| \\ &= 2\varepsilon(b-a) + \omega(f_n, \tau) \\ &< 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Teljesség

Legyen $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ és értelmezzük az f és g függvények „távolságát” a

$$\varrho(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

leképezés segítségével. Megjegyezzük, hogy ϱ egy úgynevezett félmetrika.

Kérdés: Amennyiben az $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$) függvénysorozatra igaz, hogy

$$\int_a^b |f_n - f_m| \longrightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty),$$

akkor van olyan $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ függvény, amelyre

$$\int_a^b |f_n - f| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

teljesül? Ezt nevezzük **Cauchy-kritériumnak**.

Válasz: Nem, mert megmutatható az alábbi ellenpélda. Legyen (lásd 1. ábra)

$$f_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n} & (0 \leq x \leq 1/n) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & (1/n \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor szakaszonkénti integrálással adódik, hogy

$$\int_a^b |f_n - f_m| \longrightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

Indirekt tegyük fel, hogy az (f_n) függvénysorozat konvergens és legyen

$$f \in \mathfrak{R}[0, 1], \quad \int_0^1 |f_n - f| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (**)$$

Ekkor minden olyan $0 < x < 1$ helyen, ahol az f folytonos, szükségképpen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ugyanis indirekt tegyük fel, hogy valamilyen $\xi \in (0, 1)$ folytonossági helyen

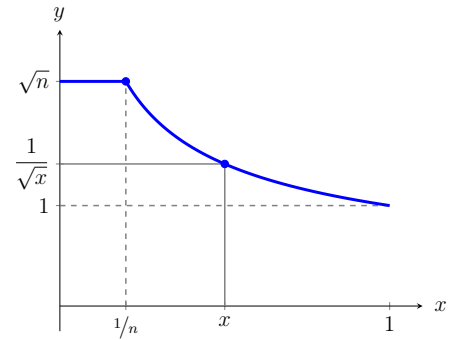
$$f(\xi) \neq \frac{1}{\sqrt{\xi}} \quad \implies \quad 3\varepsilon := \left| f(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right| > 0.$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}\{\xi\}$, ezért megadható olyan $\delta > 0$ sugár, amivel (lásd 2. ábra)

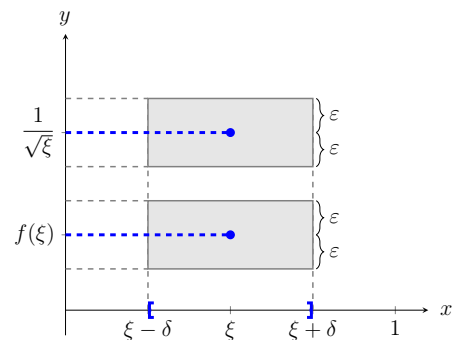
$$t \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [0, 1] \quad \implies \quad \left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| \geq \varepsilon.$$

Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy $1/N < \delta - \xi$. Ekkor minden $n > N$ indexre

$$\int_0^1 |f_n - f| \geq \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| dt \geq \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varepsilon dt = 2\delta \cdot \varepsilon > 0.$$



1. ábra. Az (f_n) sorozat egyik tagja.



2. ábra. Az $f(\xi)$ érték környezete.

Vagyis az alábbi ellentmondásra jutunk

$$\int_0^1 |f_n - f| \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Térjünk vissza a **(**)** ponthoz. A **Lebesgue-kritérium** miatt az $f \in \mathfrak{R}[0, 1]$ függvény szakadási helyeinek a halmaza nullamértékű. Mivel tetszőleges $r \in (0, 1)$ esetén a $(0, r)$ intervallum nem nullamértékű, ezért ez tartalmaz folytonossági pontot. Azaz van olyan $\xi_r \in (0, r)$ pont, hogy

$$f \in \mathfrak{C}\{\xi_r\} \quad \implies \quad f(\xi_r) = \frac{1}{\sqrt{\xi_r}} > \frac{1}{\sqrt{r}} \longrightarrow +\infty \quad (r \rightarrow 0).$$

Ebből következik, hogy az f függvény nem korlátos, ezért $f \notin \mathfrak{R}[0, 1]$.

Tétel (Lebesgue-kritérium). A

$$g \in \mathfrak{R}[a, b]$$

feltétel azzal ekvivalens, hogy az

$$\mathcal{A}_g := \{ x \in [a, b] \mid g \notin \mathfrak{C}\{x\} \}$$

szakadási helyek halmaza nullamértékű.