1. Borel–mérhető leképezések

Emlékezzünk arra, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazt **Borel-halmaznak** nevezünk, ha

$$A \in \Omega_1 \coloneqq \Omega(\mathcal{I}) = \Omega(\mathbf{I}).$$

Az itt szereplő $\mathbf{I}$ halmazrendszer az üres halmazt, valamint az $\mathbb{R}$ balról zárt, jobbról nyílt intervallumait tartalmazza, tehát

$$\mathbf{I} \coloneqq \Big\{ \emptyset, [a,b) \subseteq \mathbb{R} \;\Big|\; a,b \in \mathbb{R},\ a < b \Big\}.$$

Továbbá $\mathcal{I}$ pedig az $\mathbf{I}$ félgyűrű által generált gyűrű, vagyis

$$\mathcal{I} \coloneqq \mathcal{G}(\mathbf{I}) = \left\{ \bigcup_{k=0}^{n} I_k \;\middle|\; I_0, \ldots, I_n \in \mathbf{I} \text{ páronként diszjunktak } (n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

Vezessük be a **kibővített valós számok** halmazát

$$\overline{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

1.1. Definíció: Borel–mérhető halmaz

Egy $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ halmaz kibővített értelemben **Borel–mérhető**, ha

$$A \cap \mathbb{R} \in \Omega_1.$$

Legyen az ilyen tulajdonságú halmazoknak a rendszere $\overline{\Omega}_1$.

Megjegyzés. Világos, hogy minden $A \subseteq \mathbb{R}$ Borel-mérhető halmaz egyben kibővített értelemben is Borel-mérhető. Továbbá valóban az említett fogalom kibővítéséről beszélhetünk, ugyanis az

$$\{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$$

halmazok minden . Egy $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ halmaz pontosan akkor Borel–mérhető, ha

$$A = B \cup C$$

módon bontható fel, ahol $B \in \Omega_1$ és $C \in \big\{\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\big\}$.

1.2. Definíció: Borel–mérhető függvény

Legyen (X, Ω) mérhető tér, valamint $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy függvény.

Azt mondjuk, hogy az f függvény **mérhető** (vagy **Borel–mérhető**), ha

$$f^{-1}[A] \coloneqq \big\{ x \in X \;\big|\; f(x) \in A \big\} \in \Omega \qquad \big(A \in \overline{\Omega}_1\big).$$

Példa. Legyen (X, Ω) mérhető tér, $A \subseteq X$ egy halmaz. Ekkor

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A, \end{cases}$$

az A halmaz **karakterisztikus függvénye**. Ekkor χ_A mérhető $\iff$ $A \in \Omega$. ■

1.3. Tétel: Mérhető függvények tulajdonságai

Legyen (X, Ω) egy mérhető tér, valamint $f, f_n, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

1. Ha $* \in \{\geq, >, \leq, <\}$, akkor f mérhető $\iff$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}\colon \{f * \alpha\} \in \Omega$.
2. Ha f, g mérhető és $* \in \{\geq, >, \leq, <, =, \neq\}$, akkor $\{f * g\} \in \Omega$.
3. Ha f, g mérhető, akkor $(f \cdot g)$ és $|f|$ is mérhető függvény.
4. Ha f, g mérhető és létezik az $(f \pm g)$ függvény, akkor az is mérhető.
5. Ha (f_n) mérhető függvényeknek a sorozata, akkor a
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n), \quad \inf_{n\in\mathbb{N}}(f_n), \quad \limsup(f_n), \quad \liminf(f_n)$$
függvények is mérhetőek.
6. Ha (f_n) mérhető függvényeknek a sorozata pontonként konvergál az
$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X)$$
határfüggvényhez, akkor az f is mérhető.

Innentől: $0 \cdot (\pm\infty) \coloneqq (\pm\infty) \cdot 0 \coloneqq 0$.

Például, ha f, g véges, akkor ez teljesül.

Az itt szereplő függvények:

$$\limsup(f_n) \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} f_k\right),$$
$$\liminf(f_n) \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right).$$

1.4. Tétel: Jegorov–tétel

Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér, ahol μ véges mérték, $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha az (f_n) mérhető függvényeknek a sorozata pontonként konvergál az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \qquad (x \in X)$$

határfüggvényhez, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $X_\varepsilon \in \Omega$, hogy

a) az (f_n) sorozat az X_ε halmazon egyenletesen konvergál az f-hez;

b) $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Tekintsük egy $1 \le k \in \mathbb{N}$ index esetén az

$$X_{n,k} := \bigcup_{i=n}^{\infty} \Big\{ |f_i - f| \ge 1/k \Big\} \quad \Longrightarrow \quad X_{n,k} \in \Omega \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatot. Mivel az (f_n) függvénysorozat f-hez tart, ezért az említett halmazok monoton szűkülő módon tartanak az üres halmazhoz, azaz

$$X_{n+1,k} \subseteq X_{n,k} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \emptyset = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{n,k}.$$

Ugyanis, indirekt tegyük fel, hogy

$$\exists x \in X : \quad x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{n,k}.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha

$$\big|f_i(x) - f(x)\big| \ge \frac{1}{k}$$

végtelen sok $i \in \mathbb{N}$ indexre igaz, tehát

$$\big|f_i(x) - f(x)\big| \not\to 0.$$

Mivel feltettük, hogy μ véges mérték, ezért $\mu(X_{n,k}) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Vagyis

$$\exists n_k \in \mathbb{N}: \quad \mu(X_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Ez alapján tekintsük a következő halmazat:

$$X_\varepsilon := X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{n_k,k} \right).$$

Mivel Ω szigma-algebra, ezért $X_\varepsilon \in \Omega$. Továbbá minden $x \in X_\varepsilon$ helyen

$$\big|f_i(x) - f(x)\big| < \frac{1}{k} \qquad (n_k \le i \in \mathbb{N}).$$

Tehát az (f_n) sorozat egyenletesen konvergens X_ε-on. Végül

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_{n_k,k}) < \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Hiszen az itt szereplő mértani sorösszeg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$