1. Emlékeztető

Emlékezzünk arra, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazt **Borel-halmaznak** nevezünk, ha

$$A \in \Omega_1 \coloneqq \Omega(\mathcal{I}) = \Omega(\mathbf{I}).$$

Az itt szereplő **I** halmazrendszer az üres halmazt, valamint az $\mathbb{R}$ balról zárt, jobbról nyílt intervallumait tartalmazza, $\mathcal{I}$ pedig az **I** félgyűrű által generált gyűrű, azaz

$$\mathbf{I} \coloneqq \left\{ \emptyset, [a,b) \subseteq \mathbb{R} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R},\ a < b \right\}, \qquad \mathcal{I} \coloneqq \mathcal{G}(\mathbf{I}).$$

1.1. Definíció: Borel–mérhető halmaz

Egy $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ halmaz kibővített értelemben **Borel–mérhető**, ha

$$A \cap \mathbb{R} \in \Omega_1.$$

Legyen az ilyen tulajdonságú halmazoknak a rendszere $\overline{\Omega}_1$.

Megjegyzés. Tehát egy $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ halmaz pontosan akkor Borel–mérhető, ha

$$A = B \cup C$$

módon bontható fel, ahol $B \in \Omega_1$ és $C \in \big\{\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\big\}$.

1.2. Definíció: Borel–mérhető függvény

Legyen (X, Ω) mérhető tér, valamint $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy függvény.

Azt mondjuk, hogy az f függvény **mérhető** (vagy **Borel–mérhető**), ha

$$f^{-1}[A] \coloneqq \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \in A \right\} \in \Omega \qquad \big(A \in \overline{\Omega}_1\big).$$

Példa. Legyen (X, Ω) mérhető tér, $A \subseteq X$ egy halmaz. Ekkor

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A, \end{cases}$$

az A halmaz **karakterisztikus függvénye**. Ekkor χ_A mérhető $\iff$ $A \in \Omega$. ■

2. Lépcsősfüggvények

2.1. Definíció: Lépcsősfüggvény

Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér, valamint $f : X \to \mathbb{R}$ egy függvény.

Azt mondjuk, hogy f egy **lépcsősfüggvény**, ha mérhető és $\mathcal{R}_f$ véges.

Egy f leképezés pontosan akkor lépcsősfüggvény, ha felírható

$$f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

módon, valamilyen $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ és $A_0, \ldots, A_n \in \Omega$ esetén. Speciálisan az

$$f = \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \chi_{\{f=y\}}$$

alakot **kanonikus előállításnak** nevezzük. Továbbá legyen

$$L_0 := \{\, f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ lépcsős} \,\}, \qquad L_0^+ := \{\, f \in L_0 \mid f \geq 0 \,\}.$$

2.2. Állítás: Lépcsősfüggvények alaptulajdonságai

Legyenek $f, g \in L_0$ lépcsősfüggvények, valamint $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor az

$$f + g,\ \ \alpha \cdot g,\ \ f \cdot g,\ \ \max\{f, g\},\ \ \min\{f, g\}$$

függvények valamennyien az L_0 osztályban vannak.

A továbbiakban nemnegatív lépcsősfüggvényeket fogunk tekinteni.

2.3. Definíció: Nemnegatív lépcsősfüggvény integrálja

Egy $f \in L_0^+$ függvény (μ mérték szerinti) **integrálja** alatt az

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \mu(\{f = y\})$$

nemnegatív számot (vagy a $+\infty$-t) értjük.

2.4. Tétel: Az integrál alaptulajdonságai

Tekintsük az $f, g \in L_0^+$ függvényeket és az $\alpha \geq 0$ számot. Ekkor

1. $\displaystyle\int (\alpha \cdot f) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu;$
2. $\displaystyle\int (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu;$
3. $\displaystyle f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu;$