1. Halmazstruktúrák

A továbbiakban X egy tetszőleges halmazt jelöl, aminek a **hatványhalmaza**

$$\mathcal{P}(X) := \{\, A \text{ halmaz} \mid A \subseteq X \,\}.$$

1.1. Definíció: Szigma-algebra

Azt mondjuk, hogy $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy **szigma-algebra** (**σ-algebra**), ha

(Σ1) $X \in \Omega$,

(Σ2) $A \in \Omega \implies A^c \in \Omega$,

(Σ3) $A_n \in \Omega \quad (n \in \mathbb{N}) \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega$.

Itt $A^c = X \setminus A$ jelöli a komplementert.

Példa. Amennyiben $A \in \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges halmaz, akkor az

$$\{\emptyset, X\}, \qquad \{\emptyset, A, A^c, X\}, \qquad \mathcal{P}(X)$$

halmazrendszerek nyilván mind σ-algebrák.

1.2. Állítás: Szigma-algebra tulajdonságok

Amennyiben $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy σ-algebra, akkor igazak az alábbiak.

(Σ4) $\emptyset \in \Omega$.

(Σ5) $A, B \in \Omega \implies A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \in \Omega$.

(Σ6) Tetszőleges $A_0, \dots, A_n \in \Omega$, illetve $B_n \in \Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok esetén

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \Omega, \qquad \bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \Omega, \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \Omega.$$

Bizonyítás.

(Σ4) A Σ1. és Σ2. axióma alapján $\emptyset = X \setminus X = X^c \in \Omega$.

(Σ5) Az unióra való zártság bizonyításához alkalmazzuk a Σ3. axiómát az

$$A_1 := A,\ A_2 := B,\ A_n := \emptyset \qquad (2 \le n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozaton. Ezt, valamint a De Morgan-azonosságot alkalmazva

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \in \Omega \overset{\Sigma 2.}{\implies} A \cap B \in \Omega.$$

Végül a különbség képzést a komplementerrel és metszettel kifejezve

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \Omega.$$

Ugyanis

$$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \Omega.$$

Tétel (Metszet De Morgan-azonosság)**.** Bármely $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz esetén

$$\Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

teljesül, ahol minden A_γ egy halmaz.

(Σ6) A véges metszetképzésre, illetve unióképzésre vonatkozó állítást a Σ5. alapesetekből kiindulva teljes indukcióval igazolhatjuk.
Végül a metszet De Morgan-azonosság felhasználásával

$$\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right)^c = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n^c \in \Omega \overset{\Sigma 2.}{\implies} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \Omega.$$

A szigma-algebra ugyan nagyon egyszerűnek tűnik, ezzel együtt azonban esetenként egyszerre mégis „túl sokat” akaró előírás. Ezért – enyhítve a kívánalmakat – egyelőre kevesebb megszorításnak eleget tevő halmazrendszereket vezetünk be. Az ilyen rendszereket illetően elsőként a gyűrű fogalmával ismerkedünk meg.

1.3. Definíció: Halmazgyűrű

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy **halmazgyűrű** (röviden **gyűrű**), ha

($\mathcal{G}1$) $\mathcal{G} \neq \emptyset$,

($\mathcal{G}2$) $A, B \in \mathcal{G} \implies A \cup B \in \mathcal{G}$,

($\mathcal{G}3$) $A, B \in \mathcal{G} \implies A \setminus B \in \mathcal{G}$.

Megjegyzés. Nyilván minden szigma-algebra egyben gyűrű, de ez fordítva nem igaz.

1.4. Állítás: Halmazgyűrű tulajdonságok

Amennyiben $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy halmazgyűrű, akkor igazak az alábbiak.

($\mathcal{G}4$) $\emptyset \in \mathcal{G}$.

($\mathcal{G}5$) Tetszőleges $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{G}$ véges halmazsorozat esetén

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{G} \qquad \text{és} \qquad \bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{G}.$$

Bizonyítás.

1. Mivel a $\mathcal{G}1.$ axióma alapján $\mathcal{G}$ nem üres, ezért

$$A \in \mathcal{G} \xRightarrow{\mathcal{G}3.} \emptyset = A \setminus A \in \mathcal{G}.$$

2. Elég azt igazolni, hogy $\mathcal{G}$ zárt a metszetképzésre, ami valóban így van

$$A, B \in \mathcal{G} \xRightarrow{\mathcal{G}3.} A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{G}.$$

Innen teljes indukcióval könnyen belátható mindkét állítás.

1.5. Definíció: Félgyűrű

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy **félgyűrű**, ha

($\mathcal{H}1$) $\mathcal{H} \neq \emptyset$,

($\mathcal{H}2$) $A, B \in \mathcal{H} \implies A \cap B \in \mathcal{H}$,

($\mathcal{H}3$) $A, B \in \mathcal{H} \implies A \setminus B = \bigcup_{k=0}^{n} H_k$, ahol $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ diszjunktak.

Példa. Legyen $X := \mathbb{R}$. Ekkor $\mathcal{H} := \{\, \emptyset, I \subseteq \mathbb{R} \mid I \text{ intervallum} \,\}$ félgyűrű.

1.6. Állítás: Félgyűrű tulajdonságok

Amennyiben $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy félgyűrű, akkor igazak az alábbiak.

($\mathcal{H}4$) $\emptyset \in \mathcal{G}$.

($\mathcal{H}5$) Tetszőleges $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{G}$ véges halmazsorozat esetén $\bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás.

($\mathcal{H}4$) Mivel a $\mathcal{H}1.$ axióma alapján $\mathcal{H}$ nem üres, ezért

$$A \in \mathcal{H} \quad \xRightarrow{\mathcal{H}2.} \quad \emptyset = A \setminus A = \bigcup_{k=0}^{n} H_k$$

valamilyen $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazokkal, ezért

$$H_0 = \cdots = H_n = \emptyset \in \mathcal{H}.$$

($\mathcal{H}5$) Az állítás teljes indukcióval bizonyítható, ahol az alapeset $\mathcal{H}2.$

2. Generált halmazstruktúrák

Könnyen igazolható, hogy tetszőlegesen sok szigma-algebrának a metszete szintén szigma-algebra. Hasonló módon igaz, hogy tetszőlegesen sok halmazgyűrű metszete is halmazgyűrű marad. Ennél fogva van értelme a soron következő fogalmaknak.

2.1. Definíció: Generált szigma-algebra

Legyen $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy halmazrendszer, és tekintsük az

$$\Sigma := \Sigma_Y := \left\{ \Omega \subseteq \mathcal{P}(X) \;\middle|\; \Omega \text{ szigma-algebra}, Y \subseteq \Omega \right\}$$

rendszert. Ekkor az Y halmazrendszer által **generált szigma-algebra**

$$\Omega(Y) := \bigcap_{\Omega \in \Sigma} \Omega.$$

Belátható, hogy $\Omega(Y)$ a legszűkebb olyan szigma-algebra, ami tartalmazza az Y halmazrendszer minden elemét. Vagyis bármely $\Omega \in \Sigma_Y$ esetén $\Omega(Y) \subseteq \Omega$.

2.2. Definíció: Generált halmazgyűrű

Legyen $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy halmazrendszer, és tekintsük a

$$G := G_Y := \left\{ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X) \;\middle|\; \mathcal{G} \text{ gyűrű}, Y \subseteq \mathcal{G} \right\}$$

rendszert. Ekkor az Y halmazrendszer által **generált halmazgyűrű**

$$\mathcal{G}(Y) := \bigcap_{\mathcal{G} \in G} \mathcal{G}.$$

Könnyen belátható, hogy $\mathcal{G}(Y)$ valóban gyűrű. Továbbá ez a legszűkebb olyan gyűrű, ami tartalmazza az Y halmazrendszer minden elemét, azaz

$$\Omega \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ szigma-algebra} \quad \Longrightarrow \quad \Omega(Y) \subseteq \Omega.$$

A korábbi halmazstruktúrákkal ellentétben félgyűrűk metszet már nem feltétlenül lesz félgyűrű. Ennél fogva nem értelmezhetőjük az előbbiekhez hasonlóan a generált félgyűrű fogalmát.

2.3. Lemma: Félgyűrűvel generált halmazgyűrű szerkezete

Legyen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy félgyűrű. Ekkor fennáll az

$$A \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \bigcup_{k=0}^{n} H_k$$

ekvivalencia, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazok.

Bizonyítás. Tekintsük a következő halmazrendszert

$$\mathcal{G} := \left\{ \bigcup_{k=0}^{n} H_k \;\middle|\; H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H} \text{ diszjunktak } (n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{H})$.

Először belátjuk, hogy $\mathcal{G}$ gyűrű. Legyenek $A, B \in \mathcal{G}$ tetszőleges halmazok,

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} H_k \quad \text{és} \quad B = \bigcup_{\ell=0}^{m} \widetilde{H}_\ell \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Tehát az itt szereplő

$$H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H}, \quad \widetilde{H}_0, \ldots, \widetilde{H}_m \in \mathcal{H}$$

halmazok (a saját csoportjukon belül) páronként diszjunktak.

Ekkor $\mathcal{G}$ zárt a metszetképzésre, ugyanis

$$A \cap B = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{\ell=0}^{m} (H_k \cap \widetilde{H}_\ell) \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap B \in \mathcal{G}.$$

Hiszen az itt szereplő metszethalmazok $\mathcal{H}$-beliek és páronként diszjunktak. Ennek segítségével belátjuk, hogy $\mathcal{G}$ zárt a különbség képzésre, mert

$$A \setminus B = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcap_{\ell=0}^{m} (H_k \setminus \widetilde{H}_\ell) =: \bigcup_{k=0}^{n} X_k.$$

Ekkor a félgyűrűkre vonatkozó axióma, valamint $\mathcal{G}$ miatt az X_k halmazok mind páronként diszjunktak. Következésképpen $A \setminus B \in \mathcal{G}$. Továbbá

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \in \mathcal{G}$$

is teljesül. Tehát $\mathcal{G}$ valóban gyűrű.

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. Mivel a $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ gyűrű zárt az unió képzésre, ezért

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{H}).$$

Továbbá a $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ generált gyűrű a legszűkebb $\mathcal{H}$-t tartalmazó gyűrű, ezért

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{G}.$$

Összefoglalva $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{H})$.