Mérték, integrál, ...

8. Előadás

1. Emlékeztető.

Ha továbbra is (valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz mellett) az (X, Ω, μ) hármas egy mértéktér, akkor igaz az

1. Tétel. *Adott az L_0^+-beli függvényekből álló, monoton növekedő függvénysorozat:*

$$f_n \in L_0^+, \ f_n \leq f_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tegyük fel, hogy a $g \in L_0^+$ függvényre $g \leq \sup_n f_n$ teljesül. Ekkor

$$\int g \, d\mu \leq \sup_n \int f_n \, d\mu.$$[1]

2. Az L^+ függvényosztály.

Legyen az $f_n, g_n \in L_0^+$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekre

$$f_n \leq f_{n+1} \text{ és } g_n \leq g_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

valamint

$$\sup_n f_n = \sup_n g_n$$

igaz. Ekkor

$$\sup_n \int f_n \, d\mu = \sup_n \int g_n \, d\mu.$$

Valóban, alkalmazzuk a fenti 1. Tételt minden $m \in \mathbf{N}$ mellett a $g := g_m$ szereposztással. Ekkor a nyilvánvaló

$$g_m \leq \sup_n g_n$$

becslésből a $\sup_n f_n = \sup_n g_n$ feltétel alapján egyúttal

$$g_m \leq \sup_n f_n$$

[1]Valamilyen $h = \sum_{A \in \Omega_0} \alpha_A \cdot \chi_A \in L_0^+$ függvény esetén (amikor is az $\emptyset \neq \Omega_0 \subset \Omega$ véges halmaz, $0 \leq \alpha_A \in \mathbf{R}$ $(A \in \Omega_0)$) a h *integrálja*: $\int h \, d\mu = \sum_{A \in \Omega_0} \alpha_A \cdot \mu(A) = \sum_{y \in \mathcal{R}_h} y \cdot \mu(\{h = y\})$.

is következik. Ezért az 1. Tétel miatt

$$\int g_m \, d\mu \le \sup_n \int f_n \, d\mu,$$

és így

$$\sup_m \int g_m \, d\mu \le \sup_n \int f_n \, d\mu.$$

A fordított irányú egyenlőtlenség analóg módon adódik.

Azt is írhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n \implies \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Legyen $L^+ := L^+(\mu)$ azoknak az

$$f : X \to [0, +\infty]$$

függvényeknek a halmaza, amelyekhez megadható olyan $f_n \in L_0^+ \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló monoton növekedő sorozat, hogy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Ekkor minden $f \in L^+$ függvény mérhető, a

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

határérték pedig az előbbiek szerint független az f-et az L^+ definíciója szerint előállító (f_n) sorozattól. Ez az észrevétel ad értelmet az alábbi definíciónak:

1. Definíció. Ha $f \in L^+$ és egy alkalmas $(f_n) : \mathbf{N} \to L_0^+$ monoton növekedő sorozattal $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, azaz

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X),$$

akkor legyen

$$\int f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

az f függvénynek a μ mérték szerinti *integrálja.*

A most mondott definíciónk szerint tehát

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu=\int\lim_{n\to\infty}f_n\,d\mu,$$

ami az integrálás és a határátmenet felcserélhetőségét jelenti a szóban forgó (f_n) sorozatra.

Nyilvánvaló, hogy $L_0^+\subset L^+$, és $f\in L_0^+$ esetén az $\int f\,d\mu$ integrál mind a fenti, mind pedig az L_0^+-beli definíció szerint ugyanazt jelenti. Ui. az f függvényhez választhatjuk az L^+ definíciójában szereplő „előállító" (f_n) függvénysorozatot az $f_n:=f\quad(n\in\mathbf{N})$ utasításnak megfelelően, amikor is

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f\,d\mu=\int f\,d\mu=\int f\,d\mu$$

(ahol az első három "$\int\ldots d\mu$" integrál az L_0^+-beli definíció szerint, az utolsó pedig az L^+-beli definíció szerint értendő).

Az L^+ függvényhalmaz „kimeríti" a nemnegatív, mérhető függvények osztályát:

2. Tétel. *Az $f:X\to[0,+\infty]$ függvény akkor és csak akkor eleme az L^+-nak, ha az f mérhető.*

Bizonyítás. Nyilván már csak a tétel elégségesség részét kell igazolni. Tegyük fel ehhez, hogy a szóban forgó

$$f:X\to[0,+\infty]$$

függvény mérhető. Legyen ekkor

$$A_{in}:=$$

$$\begin{cases}\{i\cdot 2^{-n}\le f<(i+1)\cdot 2^{-n}\} & (i=0,...,n\cdot 2^n-1)\\ \{f\ge n\} & (i=n\cdot 2^n)\end{cases}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

Az $A_{in}\quad(i=0,...,n\cdot 2^n)$ halmazok minden $\mathbf{N}\ni n$-re az Ω-ban vannak, páronként diszjunktak:

$$A_{in}\cap A_{jn}=\emptyset\qquad(i\ne j=0,...,n\cdot 2^n),$$

és $\bigcup_{i=0}^{n\cdot 2^n}A_{in}=X$. Ha

$$f_n:=\sum_{i=0}^{n\cdot 2^n}i\cdot 2^{-n}\cdot\chi_{A_{in}}\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

akkor az f_n-ek nyilván valamennyien L_0^+-beliek. Gondoljuk meg, hogy

$$f_n \le f_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, az $x \in A_{in}$ $(i < n \cdot 2^n)$ elemekre $f_n(x) = i \cdot 2^{-n}$, valamint

$$A_{in} = A_{2i\,n+1} \bigcup A_{2i+1\,n+1}$$

miatt

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} 2i \cdot 2^{-n-1} & (x \in A_{2i\,n+1}) \\ \\ (2i+1) \cdot 2^{-n-1} & (x \in A_{2i+1\,n+1}) \end{cases} \ge i \cdot 2^{-n} = f_n(x).$$

Ha viszont $x \in A_{n \cdot 2^n n}$, akkor $f(x) \ge n$ és $f_n(x) = n$. Így $f(x) \ge n+1$ esetén

$$f_{n+1}(x) = n+1 > f_n(x),$$

az $f(x) < n+1$ esetben pedig valamilyen $j = n \cdot 2^{n+1}, ..., (n+1) \cdot 2^{n+1} - 1$ mellett

$$j \cdot 2^{-n-1} \le f(x) < (j+1) \cdot 2^{-n-1},$$

tehát $f_n(x) = n \le j \cdot 2^{-n-1} = f_{n+1}(x)$.

Azt kell már csak belátnunk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f.$$

Ui. $f_n(x) = n$ $(n \in \mathbf{N})$, ha az $x \in X$ pntban $f(x) = +\infty$, azaz ekkor

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} n = +\infty = f(x).$$

Ha pedig $f(x) < +\infty$, akkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett az $N < n \in \mathbf{N}$ indexekre $f(x) < n$, azaz egy $i = 0, ..., n \cdot 2^n - 1$ mellett $x \in A_{in}$, amikor

$$i \cdot 2^{-n} = f_n(x) \le f(x) < (i+1) \cdot 2^{-n} = f_n(x) + 2^{-n}.$$

Így a közrefogási elv miatt $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. ■

Az L^+ függvényosztály elemeire is fennállnak az integrálható függvényekkel szemben „elvárt" alapvető tulajdonságok:

3. Tétel. *Tetszőleges* $f, g \in L^+$ *függvények és* $0 \le \alpha \in \mathbf{R}$ *szám esetén*

a) $f + \alpha g,\ fg,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\} \in L^+$;

b) $\int (f + \alpha g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \alpha \cdot \int g\, d\mu$;

c) $f \le g \implies \int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$.

Amennyiben

$$f, g \in L^+,\ f \le g,\ \int f\, d\mu < +\infty$$

és létezik a

$$g - f : X \to [0, +\infty]$$

függvény, akkor $g - f \in L^+$ és

$$\int (g - f)\, d\mu = \int g\, d\mu - \int f\, d\mu.$$

Ui. a $g - f$ függvény mérhető, így $g - f \in L^+$. Következésképpen a nyilvánvaló $g = (g - f) + f$ egyenlőség és a 3. Tétel b) állítása alapján

$$\int g\, d\mu = \int (g - f)\, d\mu + \int f\, d\mu.$$

A következő tétel azt mutatja, hogy az L^+ függvényosztály azon az úton, ahogyan az L_0^+-ból eljutottunk az L^+-hoz, tovább már nem bővíthető.

4. Tétel (Beppo Levi[2]). *Minden monoton növekedő* $(f_n) : \mathbf{N} \to L^+$ *függvénysorozatra*

$$f := \lim_{n \to \infty} f_n = \sup_n f_n \in L^+$$

és

$$\int f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n\, d\mu = \sup_n \int f_n\, d\mu.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén egy-egy alkalmas monoton növő $v_{nm} \in L_0^+$ $(m \in \mathbf{N})$ sorozattal[3]

$$f_n = \lim_{m \to \infty} v_{nm} \quad \text{és} \quad \int f_n\, d\mu = \lim_{m \to \infty} \int v_{nm}\, d\mu.$$

Legyen

$$v_n := \max\{v_{ik} : i, k = 0, ..., n\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

[2]Beppo Levi (1875 – 1961).

[3]Tehát $v_{nm} \le v_{nm+1}$ $(m \in \mathbf{N})$.

Ekkor
$$v_n \in L_0^+,\, v_n \le v_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$
és
$$v_n \le f_n \le f \qquad (n \in \mathbf{N}).$$
Ezért
$$g := \lim_{n\to\infty} v_n = \sup_n v_n \le f.$$
Továbbá $n, i, k \in \mathbf{N}$, $i, k \le n$ mellett
$$v_{ik} \le v_n \le g,$$
így
$$f_i = \lim_{k\to\infty} v_{ik} \le g \qquad (i \in \mathbf{N}),$$
tehát
$$f = \lim_{i\to\infty} f_i \le g.$$
Következésképpen
$$f = g = \lim_{n\to\infty} v_n,$$
amiből $f \in L^+$, és a fenti 1. Definícióra tekintettel
$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n\,d\mu$$
következik.[4]

Ugyanakkor minden $n \in \mathbf{N}$ természetes számra $f_n \le f$ és (az integrál monotonitása (ld. 3. Tétel) miatt)
$$\int f_n\,d\mu \le \int f\,d\mu,$$
tehát
$$\sup_n \int f_n\,d\mu \le \int f\,d\mu.$$
Továbbá a $v_n \le f_n$ egyenlőtlenség alapján
$$\int v_n\,d\mu \le \int f_n\,d\mu \qquad (n \in \mathbf{N}),$$
és ezzel
$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n\,d\mu \le \sup_n \int f_n\,d\mu.$$

[4] Az $f \in L^+$ tartalmazás az $0 \le f$ mérhetősége miatt már a 2. Tételből is adódik.

Mindez (az előző becsléssel együtt) a 4. Tétel állításának a második részét igazolja. ■

Tehát tetszőleges monoton növő $(f_n) : \mathbf{N} \to L^+$ sorozatra

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu,$$

ami megint csak (most már az L^+-ban) az integrálás és a határátmenet felcserélhetőségét jelenti (monoton sorozatokra).

Vezessük be az alábbi fogalmat: tegyük fel, hogy adott az X halmaz elemeire vonatkozó valamilyen T tulajdonság. Ez azt jelenti, hogy bármelyik $x \in X$ esetén el tudjuk dönteni, hogy a T tulajdonság az x-re igaz vagy sem. Például: az

$$f,\, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

függvények esetén $T(x)$ jelentse azt, hogy az $x \in X$ pontban $f(x) = g(x)$.

2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a T tulajdonság *μ-majdnem mindenütt igaz*, ha van olyan $A \in \Omega$ halmaz, hogy $\mu(A) = 0$, és tetszőleges $x \in X \setminus A$ esetén a T teljesül az x-re.

Röviden a „majdnem mindenütt" kifejezést fogjuk használni: T μ-m.m. (esetenként T m.m.). Például az

$$f = g \quad \mu\text{-m.m.}$$

szimbólumsor azt jelenti, hogy egy alkalmas $A \in \Omega$ halmazzal $\mu(A) = 0$, és az $f(x) = g(x)$ egyenlőség minden $x \in X \setminus A$ esetén igaz.

5. Tétel. *A fenti (X, Ω, μ) mértéktér esetén*

a) *minden $f \in L^+$ függvényre fennáll, hogy*

$$\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \;\; \mu\text{-m.m.};$$

b) *ha $f, g \in L^+$ és*

- $f = g$ μ-m.m., *akkor* $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$;
- $f \le g$ μ-m.m., *akkor* $\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$;

c) *ha $f \in L^+$ és $\int f \, d\mu < +\infty$, akkor $|f| < +\infty$* μ-m.m.

Bizonyítás. Az a) állítás bizonyításához legyen

$$A := \{f \neq 0\}, \quad A_n := \{f \geq 1/n\} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Az f függvény mérhetősége miatt a most definiált halmazok valamennyien az Ω-ban vannak,

$$A_n \subset A_{n+1} \quad (0 < n \in \mathbf{N}) \ \text{ és } \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

ezért

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Az A_n halmaz értelmezését figyelembe véve bármelyik $0 < n \in \mathbf{N}$ indexre

$$f \geq \frac{1}{n} \cdot \chi_{A_n},$$

így

$$0 = \int f \, d\mu \geq \int \frac{1}{n} \cdot \chi_{A_n} \, d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu(A_n) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Innen $\mu(A) \geq 0$ miatt már nyilvánvaló, hogy

$$\mu(A_n) = 0 \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

amiből $\mu(A) = 0$ az előbbiek alapján rögtön adódik.

Fordítva, ha $\mu(A) = 0$ és

$$f_n := n \cdot \chi_A \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $f_n \in L_0^+$ és

$$\int f_n \, d\mu = n \cdot \mu(A) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A Beppo Levi-tétel alapján tehát a $g := \sup_n f_n$ függvényre $g \in L^+$ és

$$\int g \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu = 0$$

igaz. Mivel $f \leq g$, ezért $0 \leq \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu = 0$, így $\int f \, d\mu = 0$.

A b) állításhoz legyen most

$$A := \{f \neq g\},$$

ekkor $A \in \Omega,$ ezért a feltételek alapján $\mu(A) = 0,$ és a

$$B := X \setminus A = \{f = g\}$$

jelöléssel

$$f = f\cdot \chi_A + f\cdot \chi_B, \quad g = g\cdot \chi_A + g\cdot \chi_B.$$

Továbbá

$$f\cdot \chi_A, \ f\cdot \chi_B, \ g\cdot \chi_A, \ g\cdot \chi_B \in L^+.$$

Mivel

$$f\cdot \chi_A = 0, \ g\cdot \chi_A = 0 \quad \mu\text{−m.m.}$$

és $f\cdot \chi_B = g\cdot \chi_B,$ ezért (részben az a) állítás miatt)

$$\int f\cdot \chi_A \, d\mu = \int g\cdot \chi_A \, d\mu = 0,$$

$$\int f\cdot \chi_B \, d\mu = \int g\cdot \chi_B \, d\mu.$$

Következésképpen

$$\int f \, d\mu = \int f\cdot \chi_A \, d\mu + \int f\cdot \chi_B \, d\mu =$$

$$\int g\cdot \chi_A \, d\mu + \int g\cdot \chi_B \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Ha $f \le g$ μ-m.m., akkor egy alkalmas $A \in \Omega,$ $\mu(A) = 0$ halmazzal

$$f(x) \le g(x) \qquad (x \in X \setminus A).$$

Legyen

$$F := f\cdot \chi_{X\setminus A}, \ G := g\cdot \chi_{X\setminus A},$$

ekkor $F, G \in L^+,$ $f = F$ μ-m.m., $g = G$ μ-m.m. és $F \le G.$ Ezért a b) állítás előbb belátott első része szerint

$$\int f \, d\mu = \int F \, d\mu \le \int G \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Lássuk be végül a c)-t. Ha

$$A := \{|f| = +\infty\},$$

akkor a fentiekhez hasonlóan $A \in \Omega,$ és tetszőleges nemnegatív α számmal $\alpha\cdot \chi_A \le |f|,$ tehát

$$\alpha\cdot \mu(A) \le \int |f| \, d\mu =: q < +\infty.$$

Speciálisan

$$\mu(A) \le \frac{q}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

amiből $\mu(A) \ge 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}(q/n) = 0$ miatt $\mu(A) = 0$ már nyilván következik.

■

6. Tétel (Fatou[5]-lemma). *Tekintsük az* (X, Ω, μ) *mértékteret. Ekkor:*

a) *tetszőleges* $(f_n) : \mathbf{N} \to L^+$ *függvénysorozatra*[6]

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu;$$

b) *ha az* a)*-ban szereplő* (f_n) *sorozathoz van olyan* $F \in L^+$ *függvény, amelyikre* $\int F \, d\mu < +\infty$ *és* $f_n \leq F$ μ*-m.m.* $(n \in \mathbf{N})$, *akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Bizonyítás. Az a) állítás igazolásához legyen

$$f := \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Tudjuk, hogy $f \in L^+$. Ha

$$g_n := \inf_{m\geq n} f_m \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $g_n \in L^+$ $(n \in \mathbf{N})$, és a (g_n) sorozat nyilván monoton növekedő módon konvergál az f-hez. Ezért alkalmazható a Beppo Levi-tétel, miszerint

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Az itt szereplő függvények értelmezése miatt triviális

$$g_n \leq f_m \qquad (n \leq m \in \mathbf{N})$$

becslés alapján $\int g_n \, d\mu \leq \int f_m \, d\mu$ is igaz az előbbi m, n indexekre. Tehát tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$\int g_n \, d\mu \leq \inf_{m\geq n} \int f_m \, d\mu,$$

---

[5]Pierre Joseph Louis Fatou (1878 – 1929).

[6]A $g := \liminf_{n\to\infty} f_n$ függvényre $g(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$, ahol egy $c_n \in \overline{\mathbf{R}}$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatra $\liminf_{n\to\infty} c_n := \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} c_k)$. Analóg módon, a $h := \limsup_{n\to\infty} f_n$ függvényt a $h(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$ előírással definiáljuk, ahol $\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} c_k)$. A szóban forgó (c_n) sorozatnak akkor és csak akkor van határértéke, ha $\liminf_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty} c_n$, amikor is $\lim_{n\to\infty} c_n = \liminf_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty} c_n$.

amiből

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\inf_{m\ge n}\int f_m\,d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu,$$

azaz a kívánt egyenlőtlenség adódik.

A Fatou-lemma b) része egyszerűen következik az a)-ből. A b)-beli feltételek miatt ui. minden $n\in\mathbf{N}$ esetén egy alkalmas $A_n\in\Omega$ halmazzal $\mu(A_n)=0$ és

$$f_n(x)\le F(x) \qquad (x\in X\setminus A_n).$$

Továbbá (ld. 5. Tétel c)) valamilyen $B\in\Omega$ mellett $\mu(B)=0$ és

$$F(x)<+\infty \qquad (x\in X\setminus B).$$

Ha tehát

$$A:=B\bigcup\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\Big),$$

akkor $A\in\Omega$, $\mu(A)=0$ és

$$f_n(x)\le F(x)<+\infty \qquad (n\in\mathbf{N},\ x\in X\setminus A).$$

Legyen ezek után a $C:=X\setminus A$ halmazzal

$$F_n:=F-f_n\cdot\chi_C \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

Itt $F_n\in L^+$ $(n\in\mathbf{N})$. Alkalmazzuk az a) állítást az (F_n) sorozatra:

$$\int\liminf_{n\to\infty}F_n\,d\mu=\int\liminf_{n\to\infty}(F-f_n\cdot\chi_C)\,d\mu=\int(F-\limsup_{n\to\infty}f_n\cdot\chi_C)\,d\mu=$$

$$\int F\,d\mu-\int\limsup_{n\to\infty}f_n\cdot\chi_C\,d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int(F-f_n\cdot\chi_C)\,d\mu=$$

$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\int F\,d\mu-\int f_n\cdot\chi_C\,d\mu\Big)=\int F\,d\mu-\limsup_{n\to\infty}\int f_n\cdot\chi_C\,d\mu.$$

Innen – figyelembe véve, hogy $0\le\int F\,d\mu<+\infty$ teljesül –

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n\cdot\chi_C\,d\mu\le\int\limsup_{n\to\infty}f_n\cdot\chi_C\,d\mu$$

következik. Ugyanakkor nyilván

$$f_n\cdot\chi_C=f_n\ \ \mu\text{–m.m.} \quad (n\in\mathbf{N})$$

és

$$\limsup_{n\to\infty} f_n\cdot \chi_C = \limsup_{n\to\infty} f_n \quad \mu\text{−m.m.},$$

ezért

$$\int f_n\cdot \chi_C \, d\mu = \int f_n \, d\mu \quad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n\cdot \chi_C \, d\mu = \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu,$$

és ezzel a b)-ben jelzett egyenlőtlenségeket kapjuk. ■

3. Megjegyzések

i) A „majdnem mindenütt" terminológiával kapcsolatban külön is felhívjuk a figyelmet a következőkre: a „T μ-m.m." állítás

nem azt jelenti,

hogy (μ-)nullamértékű az a halmaz, amelyik azokból a pontokból áll (ezeknek a halmaza legyen Y), amelyekre a T nem teljesül, azaz, hogy

$$\mu(Y) = 0.$$

Előfordulhat ui., hogy

$$Y \notin \Omega.$$

Csupán annyit mondhatunk, hogy valamilyen

$$A \in \Omega, \; \mu(A) = 0$$

halmaz lefedi az Y halmazt: $Y \subset A$. Ha a μ mérték teljes, és a T tulajdonság μ-m.m. igaz, akkor persze $Y \in \Omega$ (lévén az Y egy (μ-)nullamértékű halmaznak a részhalmaza) és $\mu(Y) = 0$.

ii) A Beppo Levi-tételnek a függvénysorokra vonatkozó alakja a következő: ha $g_n \in L^+ \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n \in L^+$ és

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} g_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Ui. legyen

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor az (f_n) sorozatra alkalmazható a Beppo Levi-tétel, és így

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int \sum_{n=0}^{\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int g_k \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int g_n \, d\mu.$$

iii) Ha $X := \mathbf{N}$, $\Omega := \mathcal{P}(X)$, a μ pedig egy tetszőleges mérték az Ω-n, akkor legyen

$$\alpha_n := \mu(\{n\}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Könnyű meggondolni, hogy most

$$L^+ = [0, +\infty]^{\mathbf{N}},$$

azaz az L^+ a nemnegatítv sorozatok által alkotott halmaz. Továbbá tetszőleges $f : \mathbf{N} \to [0, +\infty]$ sorozatra

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot \alpha_n.$$