1. Kiterjesztési tételek

1.1. Tétel: Kvázimérték kiterjesztése mértékké

Legyen X egy halmaz, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrű, $\widetilde{\mu} : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ kvázimérték. Ekkor van olyan $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra és $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ mérték, hogy $\widetilde{\mu} = \mu|_{\mathcal{G}}$.

Bizonyítás. Legyen tetszőleges $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz esetén

$$\Sigma_A \coloneqq \left\{ (\sigma_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{G} \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_n \right\}$$

valamint az $\inf \emptyset \coloneqq +\infty$ megállapodás mellett

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \mu^*(A) \coloneqq \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_n) \;\middle|\; (\sigma_n) \in \Sigma_A \right\}$$

Lemma. Az így definiált μ^* halmazfüggvényre a következők igazak.

1. **Nemnegatív**, azaz $\mu^* \geq 0$.
2. **Eltűnik $\boldsymbol{\emptyset}$-ban**, azaz $\mu^*(\emptyset) = 0$.
3. **Monoton**, azaz minden $B \subseteq A$ esetén $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$.
4. **Szubadditív**, azaz minden A_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Bizonyítás.

1. Nyilvánvalóan igaz, hiszen $\widetilde{\mu}$ nemnegatív.
2. Mivel $\mu^*(\emptyset) \geq 0$, és a konstans üres halmazból képzett $(\emptyset) \in \Sigma_\emptyset$, ezért

$$\mu^*(\emptyset) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\emptyset) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(\emptyset) = 0.$$

3. A feltétel miatt $\Sigma_A \subseteq \Sigma_B$, plusz az infimum tulajdonságaiból adódik.
4. Két esetet különböztetünk meg.
   (a) Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ indexre $\mu^*(A_n) = +\infty$, akkor igaz.
   (b) Ha minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén $\mu^*(A_n)$ véges, akkor az infimum tulajdonság szerint

$$\forall \varepsilon_n > 0\text{-hoz}, \; \exists (\sigma_{nk}) \in \Sigma_{A_n} \; : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_{nk}) < \mu^*(A_n) + \varepsilon_n.$$

Ugyanakkor

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} \sigma_{nk} (\sigma_{nk}) \in \Sigma_{\cup A_n}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(\sigma_{nk}) < \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Definíció. Egy $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz $\boldsymbol{\mu^*}$**-mérhető**, amennyiben

$$\forall B \in \mathcal{P}(X): \quad \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Lemma. Egy $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz pontosan akkor μ^*-mérhető, ha

$$\forall B \in \mathcal{P}(X): \quad \mu^*(B) \ge \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Bizonyítás. Ugyanis μ^* szubadditív tulajdonsága miatt a

$$\mu^*(B) = \mu^*\big((B \cap A) \cup (B \setminus A)\big) \le \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

fordított irányú egyenlőtlenség minden $B \in \mathcal{P}(X)$ halmazra fennáll. ■

Vezessük be a következő halmazrendszert

$$\Omega := \left\{ A \in \mathcal{P}(X) \;\middle|\; A \ \mu^*\text{-mérhető} \right\}.$$

Ekkor $\mathcal{G} \subseteq \Omega$, valamint $\mu^*(G) = \widetilde{\mu}(G)$ minden $G \in \mathcal{G}$ esetén.
Ehhez azt kell belátni, hogy minden $G \in \mathcal{G},\ B \in \mathcal{P}(X)$ halmazra

$$\mu^*(B) \ge \mu^*(B \cap G) + \mu^*(B \setminus G).$$

Ha $\mu^*(B) = +\infty$, akkor az állítás teljesül, különben $\Sigma_B \neq \emptyset$ miatt

$$\exists (\sigma_n) \in \Sigma_B: \ \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_n) < \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Ugyanakkor $\widetilde{\mu}$ additív, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_n \cap G) + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_n \setminus G).$$

Kihasználjuk, hogy

$$\sigma_n = (\sigma_n \cap G) \cup (\sigma_n \setminus G) \quad (n \in \mathbb{N})$$

diszjunkt felbontás.

Világos, hogy

$$(\sigma_n \cap G) \in \Sigma_{B \cap G} \quad \text{és} \quad (\sigma_n \setminus G) \in \Sigma_{B \setminus G}.$$

Innen μ^* definíciója alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_n \cap G) \ge \mu^*(B \cap G), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_n \setminus G) \ge \mu^*(B \setminus G).$$

Összefoglalva

$$\mu^*(B) + \varepsilon > \mu^*(B \cap G) + \mu^*(B \setminus G).$$

Tekintsük a „kvázi-konstans” halmazsorozatot

$$(G, \emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots) \in \Sigma_G \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(G) \le \widetilde{\mu}(G).$$

Továbbá minden $(\sigma)_n \in \Sigma_B$ halmazsorozat esetén

$$G \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n) \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\mu}(G) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}(\sigma_n) \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\mu}(G) \leq \mu^*(G).$$

Összefoglalva $\mu^*(G) = \widetilde{\mu}(G)$.

Már csak azt kéne bebizonyítani, hogy egy Ω szigma-algebra.

1. Az $X \in \Omega$ tartalmazás teljesül. ✓
2. A komplementerképzésre való zártság is teljesül. ✓
3. Azt kell igazolni, hogy Ω zárt a megszámlálható unióra, vagyis

$$A_n \in \Omega \ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega.$$

Először megmutatjuk, hogy bármely $A_0, A_1 \in \Omega$ esetén $A_0 \cup A_1 \in \Omega$. Ugyanis

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &\geq \mu^*(B \cap A_0) + \mu^*(B \setminus A_0) \\ &\geq \mu^*\big((B \cap A_0) \cap A_1\big) + \mu^*\big((B \cap A_0) \setminus A_1\big) + \mu^*\big((B \setminus A_0) \cap A_1\big) \\ &+ \mu^*\big((B \setminus A_0) \setminus A_1\big)\end{aligned}$$

Ugyanis vegyük észre, hogy $(B \setminus A_0) \setminus A_1 = B \cap (A_0 \cup A_1)$, valamint

$$\begin{aligned}B \cap (A_0 \cup A_1) &= \big((B \cap A_0) \cap A_1\big) \cup \big((B \cap A_0) \setminus A_1\big) \cup \big((B \cap A_1) \setminus A_0\big) \\ &= \big((B \cap A_0) \cap A_1\big) \cup \big((B \cap A_0) \setminus A_1\big) \cup \big((B \setminus A_0) \cap A_1\big).\end{aligned}$$

Alkalmazva a μ^* szubadditív tulajdonságát kapjuk, hogy

$$\mu^*(B) \geq \mu^*\big(B \cap (A_0 \cap A_1)\big) + \mu^*\big(B \setminus (A_0 \cap A_1)\big)$$

azaz Ω valóban zárt a kételemű unióra. Ugyanakkor (lásd μ^*-mérhető lemma)

$$\mu^*(B) = \mu^*\big(B \cap (A_0 \cap A_1)\big) + \mu^*\big(B \setminus (A_0 \cap A_1)\big)$$

Speciálisan $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, valamint a $B \leftrightarrow B \cap (A_0 \cup A_1)$ szerepcsere után

$$\mu^*\big(B \cap (A_0 \cup A_1)\big) = \mu^*(B \cap A_0) + \mu^*(B \cap A_1).$$

Innen teljes indukcióval adódik, hogy

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \Omega$$

valamint ha az A_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazok páronként diszjunktak, akkor

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(B \cap A_k).$$

Ugyanis minden $B \in \mathcal{P}(X)$ esetén

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap X) + \mu^*(B \setminus X) \\ &= \mu^*(B) + \mu^*(\emptyset) \\ &= \mu^*(B).\end{aligned}$$

Amennyiben $A \in \Omega$, akkor

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A^c) + \mu^*(B \setminus A^c) \\ &= \mu^*(B \setminus A) + \mu^*(B \cap A).\end{aligned}$$

Legyenek tehát az A_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazok páronként diszjunktak. Ekkor

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &\geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\\ &\geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\end{aligned}$$

Véve az $n \to \infty$ határátmenetet, majd kihasználva μ^* szubadditivitását

$$\mu^*(B) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right)$$

Innen rögtön következik, hogy Ω zárt a megszámlálható unióra, vagyis

Ez akkor is igaz, amikor az A_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazok nem páronként diszjunktak.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Omega.$$

Tehát Ω valóban szigma-algebra, továbbá speciális választásként

$$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Vagyis $\mu^*|_\Omega$ szigma-additív, ezért minden eddigi alapján $\mu^*|_\Omega$ egy mérték.

1.2. Definíció: Külső mérték

Legyen X egy halmaz, valamint $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan halmazfüggvény, ami

1. **nemnegatív**, azaz $\mu^* \geq 0$;
2. **eltűnik $\emptyset$-ban**, azaz $\mu^*(\emptyset) = 0$;
3. **monoton**, azaz minden $B \subseteq A$ esetén $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$;
4. **szubadditív**, azaz minden A_n $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy μ^* egy **külső mérték**.

1.3. Tétel: Caratheodory-tétel

Legyen X egy halmaz, $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ külső mérték, valamint

$$\Omega := \left\{ A \in \mathcal{P}(X) \;\middle|\; A\ \mu^*\text{-mérhető} \right\}.$$

Ekkor Ω szigma-algebra és $\mu := \mu^*|_\Omega$ mérték.