1. Emlékeztető

Alkalmazni fogjuk az alábbi tételt.

1.1. Tétel: Kis Lebesgue-tétel

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, μ véges, valamint az $f_n \in L$ $(n \in \mathbb{N})$ egy olyan függvénysorozat, amelyre a következők igazak:

i) majdnem mindenhol létezik a $\lim(f_n)$ pontonkénti limesz;

ii) megadható olyan C konstans, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\big|f_n(x)\big| \leq C \qquad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Ekkor van olyan $f \in L$ függvény, hogy majdnem mindenhol $f = \lim(f_n)$ és

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

2. Riemann–Lebesgue-tétel

A továbbiakban feltesszük, hogy adottak az $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számok. Ekkor

$$\Omega := \big\{A \subseteq [a,b] \ : \ A \in \widehat{\Omega}_1\big\}$$

a *Lebesgue-mérhető halmazok* szigma-algebrája, valamint legyen

$$\mu : \Omega \to [0, +\infty), \quad \mu(A) := \widehat{\mu}_1(A) \quad (A \in \Omega)$$

a *Lebesgue-mérték*. Mivel μ véges, ezért bármely $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ mellett

$$L^\infty[a,b] \subset L^q[a,b] \subset L^p[a,b] \subset L^1[a,b].$$

a szigorú értelemben vett tartalmazások.

2.1. Tétel: Riemann–Lebesgue-tétel

Bármely $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvényre $f \in L^\infty[a,b]$, és

$$\text{Riemann-integrál} \ \longrightarrow \ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int f \, \mathrm{d}\mu \ \longleftarrow \ \text{Lebesgue-integrál}.$$

Bizonyítás. Vegyünk egy $\tau := \{x_0, \ldots, x_s\} \subseteq [a,b]$ felosztást és legyen

$$\delta_\tau := \max\big\{\, x_{i+1} - x_i \ \big| \ i = 0, \ldots, s-1 \,\big\}$$

az felosztás úgynevezett **finomsága**. Továbbá legyen

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\big\{\, f(x) \ \big| \ x_i \leq x \leq x_{i+1} \,\big\} \\ M_i &:= \sup\big\{\, f(x) \ \big| \ x_i \leq x \leq x_{i+1} \,\big\} \end{aligned} \qquad (i = 0, \ldots, s-1).$$

Vezessük be az alábbi függvényeket

$$\varphi := \sum_{i=0}^{s-2} m_i \cdot \chi_{[x_i, x_{i+1})} + m_{s-1} \cdot \chi_{[x_{s-1}, x_s]}$$

$$\Phi := \sum_{i=0}^{s-2} M_i \cdot \chi_{[x_i, x_{i+1})} + M_{s-1} \cdot \chi_{[x_{s-1}, x_s]}.$$

Nyilvánvaló, hogy fennállnak az alábbi állítások

$$\varphi, \Phi \in L_0, \quad \varphi \le f \le \Phi, \quad \int \varphi \, \mathrm{d}\mu = s(f, \tau), \quad \int \Phi \, \mathrm{d}\mu = S(f, \tau).$$

Továbbá az L_0-beli integrál definíció miatt világos, hogy

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu = s(f, \tau) = \sum_{i=0}^{s-1} m_i \cdot \big(x_{i+1} - x_i\big),$$

$$\int \Phi \, \mathrm{d}\mu = S(f, \tau) = \sum_{i=0}^{s-1} M_i \cdot \big(x_{i+1} - x_i\big).$$

Vegyünk egy minden határon túl finomodó felosztássorozat, azaz legyen

$$\tau_n \subset [a, b] \text{ felosztás}, \quad \tau_n \subset \tau_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n \to \infty} \delta_{\tau_n} = 0.$$

A Riemann-integrálról tanultak alapján elmondható, hogy

$$s(f, \tau_n),\ S(f, \tau_n) \longrightarrow \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \qquad (n \to \infty).$$

Következésképpen a megfelelő Lebesgue-integrálsorozatok is

$$\int \varphi_n \, \mathrm{d}\mu,\ \int \Phi_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \qquad (n \to \infty).$$

Az itt szereplő (φ_n) függvénysorozat monoton növekedő, míg a (Φ_n) sorozat monoton csökken, továbbá

$$\varphi_n \le f \le \Phi_n \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{$*$}$$

Mivel két lépcsősfüggvény különbsége továbbra is lépcsősfüggvény, ezért a $(\Phi_n - \varphi_n)$ sorozat L_0^+-beli függvényekből álló monoton csökkenő sorozat.

$$\Psi := \lim_{n \to \infty} (\Phi_n - \varphi_n) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n - \lim_{n \to \infty} \varphi_n$$

függvény nemnegatív és mérhető, tehát $\Psi \in L^+$. Illetve adott $C \in \mathbb{R}$ esetén

Mivel $\Phi_0 \in L_0$, ezért korlátos is.

$$\Phi_n - \varphi_n \le \Phi_0 \le C \qquad (n \in \mathbb{N})$$

is fennáll, ezért az $n \to \infty$ határátmenetet véve $\Psi \le C$.
Ekkor a kis Lebesgue-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int \Psi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int (\Phi_n - \varphi_n) \, \mathrm{d}\mu = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Innen kapjuk, hogy $\Psi = 0$ m.m. Ugyanakkor a ($*$) becslés alapján

$$f = g \coloneqq \lim(\varphi_n) \quad \mu\text{-m.m.} \tag{$**$}$$

Igazoljuk, hogy $f \in L^\infty[a,b]$. Ehhez azt kell megmutatni, hogy az f korlátos és mérhető. Nyilván az előbbi fennáll, hiszen csakis a korlátos függvények Riemann-integrálhatóak. Utóbbihoz megmutatjuk, hogy minden $A \subseteq \mathbb{R}$ Borel-halmazra

$$f^{-1}[A] \in \Omega.$$

Ugyanis

$$f^{-1}[A] = \big(f^{-1}[A] \cap \{f = g\}\big) \cup \big(f^{-1}[A] \cap \{f \neq g\}\big).$$

Ekkor ($**$) szerint van olyan $B \in \Omega$ nullamértékű halmaz, hogy $\{f \neq g\} \subseteq B$. Felhasználva a μ mérték teljességét

$$\underbrace{f^{-1}[A] \cap \{f = g\}}_{\in\Omega} = \underbrace{g^{-1}[A]}_{\in\Omega} \cap \underbrace{\{f = g\}}_{\in\Omega} \quad \text{és} \quad \underbrace{f^{-1}[A] \cap \{f \neq g\}}_{\in\Omega} \subseteq B.$$

Tehát $f^{-1}[A] \in \Omega$ valóban fennáll, vagyis az f mérhető.

Már csak az integrálok egyenlőségét kell megmutatni. Ehhez ismételten a kis Lebesgue-tétel alkalmazzuk, most viszont az (φ_n) függvénysorozatra.

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \,\mathrm{d}\mu = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Megjegyzések:

i) Megmutatjuk, hogy nem minden Lebesgue-integrálható függvény Riemann-integrálható, tehát a Lebesgue-integrál valóban kiterjesztése a Riemann-féle megközelítésnek.

Ugyanis jól ismert, hogy a Dirichlet-féle

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény nem Riemann-integrálható. Ugyanakkor ha vesszük a $[0,1]$-beli racionális számoknak egy (r_n) sorozatát, akkor az

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_0, \dots, r_n\} \\ 0, & x \notin \{r_0, \dots, r_n\} \end{cases} \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}).$$

függvénysorozatról nyilvánvaló, hogy

$$f_n \in L^+, \quad f_n \le f_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \lim(f_n).$$

Ezért az f függvény Lebesgue-integrálja

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

■