# 1. Halmazfüggvények

Az (absztrakt) halmazok mérését (a mértéküknek az értelmezését) egy

$$\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

függvény segítségével végezzük majd, ahol az $X$ adott alaphalmaz.

**1.1. Definíció: Véges- és szigma-additív halmazfüggvény**

Azt mondjuk, hogy a $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény

1. **(véges) additív**, ha
$$\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(A_k)$$
minden olyan $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ páronként diszjunkt halmazrendszerre fennáll, amelynek az egyesítésére $A_0 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ teljesül;

2. **szigma-additív** ($\sigma$-additív), ha
$$\varphi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A_n)$$
minden olyan $A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt halmazsorozatra fennáll, amelynek az egyesítésére $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ teljesül.

**Állítás.** Legyen $\varphi$ egy additív halmazfüggvény, amire $\emptyset \in \mathcal{D}_\varphi$ fennáll.

1. Ha $\varphi$ additív és $\varphi(\emptyset)$ véges, akkor $\varphi(\emptyset) = 0$.
2. Ha $\varphi$ szigma-additív és $\varphi(\emptyset)$ véges, akkor $\varphi(\emptyset) = 0$ és $\varphi$ additív is.

**Bizonyítás.**

1. Mivel $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \cap \emptyset$, ezért alkalmazhatjuk a $\varphi$ additív tulajdonságát
$$\varphi(\emptyset) = \varphi(\emptyset) + \varphi(\emptyset) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(\emptyset) = 0.$$

2. Amennyiben $\varphi$ szigma-additív, akkor a
$$\varphi(\emptyset) = \varphi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\emptyset)$$
sorösszeg pontosan akkor lesz véges, ha $\varphi(\emptyset) = 0$. Továbbá, amennyiben az
$$A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{D}_\varphi \quad (n \in \mathbb{N})$$
páronként diszjunkt halmazrendszert, akkor az $A_k \coloneqq \emptyset$ $(k > n)$ választással
$$\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \varphi\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A_k) = \sum_{n=0}^{n} \varphi(A_k).$$
Ezt pedig azt jelenti, hogy $\varphi$ véges additív. ■

### 1.2. Definíció: Mérték, kvázimérték, előmérték

Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény egy

1. **mérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ szigma-algebra, $\mu(\emptyset) = 0$, és a $\mu$ szigma-additív;
2. **kvázimérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ halmazgyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a $\mu$ szigma-additív;
3. **előmérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ halmazgyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a $\mu$ additív.

### 1.3. Tétel: Az előmérték tulajdonságai

Legyen $\mu$ előmérték a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, továbbá $A, B, A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Tehát $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ egy előmérték.

1. Ha $B \subseteq A$, akkor $\mu(B) \leq \mu(A)$.
2. Ha $B \subseteq A$ és $\mu(B)$ véges, akkor $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
3. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
4. Minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$.
5. Ha az $(A_n)$ tagjai páronként diszjunktak és $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

1. tulajdonság: **$\mu$ monoton növő**.

2. tulajdonság: **$\mu$ szubtraktív**.

3. tulajdonság: **szita-formula**.

4. tulajdonság: **$\mu$ szubadditív**.

*Bizonyítás.*

1. Mivel $A = B \cup (A \setminus B)$ diszjunkt felbontás és $\mu$ nemnegatív, ezért
$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \geq \mu(B). \qquad (*)$$
2. Ha $\mu(B)$ véges, akkor $(*)$ átrendezésével adódik a belátandó állítás.
3. Két esetet különböztetünk meg.
   (a) Amennyiben $\mu(A \cap B) = +\infty$, akkor a $\mu$ monotonitása miatt
   $$\mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) = \mu(A) = \mu(B) = +\infty. \checkmark$$
   Hiszen elmondható, hogy
   $$A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B.$$
   (b) Ha most $\mu(A \cap B)$ véges, akkor az $A \cup B = A \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$ diszjunkt felbontás és $\mu$ additivitása miatt
   $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu\big(B \setminus (A \cap B)\big) \overset{2.}{=} \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \checkmark$$
4. Az állítás teljes indukcióval igazolható, lásd szita-formula.
5. Mivel $A_0, \ldots, A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunktak és $\mu$ additív, ezért
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right).$$
Ugyanakkor az $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ tartalmazás és $\mu$ monotonitása miatt
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

## 2. Kiterjesztések

A későbbiek során megmutatjuk, hogy minden gyűrűn értelmezett előmértéket ki lehet kiterjeszteni kvázimértékké, majd azt követően mértékké. Először is belátjuk, hogy tetszőleges félgyűrűn értelmezett nemnegatív, additív és az üres halmazhoz nullát rendelő halmazfüggvényt ki tudjuk terjeszteni előmértékké.

**2.1. Lemma**

Legyen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, továbbá $m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény és

i) az $m$ additív és $m(\emptyset) = 0$;

ii) $n \in \mathbb{N}$, $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak;

iii) $s \in \mathbb{N}$, $Q_0, \ldots, Q_s \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak.

Ekkor

$$\bigcup_{k=0}^{n} H_k = \bigcup_{\ell=0}^{s} Q_\ell \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{\ell=0}^{s} m(Q_\ell).$$

*Bizonyítás.* Mivel a metszetképzés disztributív az unióra, ezért

$$H_k = H_k \cap \left( \bigcup_{\ell=0}^{s} Q_\ell \right) = \bigcup_{\ell=0}^{s} (H_k \cap Q_\ell) \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

$$Q_\ell = Q_\ell \cap \left( \bigcup_{k=0}^{n} H_k \right) = \bigcup_{k=0}^{n} (Q_\ell \cap H_k) \qquad (\ell = 0, \ldots, s)$$

páronként diszjunkt halmazrendszerek, ezért az $m$ additivitása miatt

$$\sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{s} m\big(H_k \cap Q_\ell\big) = \sum_{\ell=0}^{s} \sum_{k=0}^{n} m\big(Q_\ell \cap H_k\big) = \sum_{\ell=0}^{s} m(Q_\ell).$$

A 2.1. lemma jogalapjául az alábbi lemma szolgál.

**2.2. Lemma: Félgyűrűvel generált halmazgyűrű szerkezete**

Amennyiben a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy félgyűrű, akkor az általa generált gyűrű

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \left\{ \bigcup_{k=0}^{n} H_k \;\middle|\; H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H} \text{ páronként diszjunktak } (n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

A 2.2. lemma értelmében a továbbiakban feltesszük, hogy

$$A \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \bigcup_{k=0}^{n} Q_k$$

fennáll valamilyen $n \in \mathbb{N}$ és $Q_0, \ldots, Q_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazok esetén.

**2.3. Tétel**

Legyen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, továbbá $m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ additív és $m(\emptyset) = 0$. Definiáljuk az alábbi halmazfüggvényt:

$$\mu : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty], \qquad \mu(A) := \sum_{k=0}^{n} m(Q_k).$$

Ekkor

1. $\mu$ előmérték, valamint $\mu|_{\mathcal{H}} = m$;
2. ha $\lambda$ előmérték $\mathcal{G}(\mathcal{H})$-n és $\lambda|_{\mathcal{H}} = m$, akkor $\lambda = \mu$;
3. ha $m$ szigma-additív, akkor $\mu$ kvázi-mérték.

Tehát $\lambda : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty]$ alakú.

*Bizonyítás.*

1. Az állítás nyilvánvalóan igaz, lásd 2.1. lemma.
2. Az lemma felhasználásával
3. Legyenek $B_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ páronként diszjunkt halmazok ($n \in \mathbb{N}$) és

   Igazolni kell, hogy $\mu$ szigma-additív.

$$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H}).$$

Ekkor alkalmas $H_0, \ldots, H_s \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazokkal

Lásd félgyűrűvel generált gyűrű.

$$B = \bigcup_{k=0}^{s} H_k$$

Ugyan ez elmondható a $B_n$ halmazokra is, vagyis

$$B_n = \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj} \quad (n \in \mathbb{N})$$

valamilyen $H_{n0}, \ldots, H_{np_n} \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazokkal. Így

$$\mu(B) = \sum_{k=0}^{s} m(H_k) = \sum_{k=0}^{s} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj} \cap H_k)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} \sum_{k=0}^{s} m(H_{nj} \cap H_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n).$$

Az eddigieket összevetve kapjuk, hogy

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj}.$$

Ugyanis minden $k = 0, \ldots, s$ indexre

$$H_k = H_k \cap B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{p_n} (H_{nj} \cap H_k).$$

Ez pedig páronként diszjunkt felbontás.