1. Integrálható függvények

1.1. Definíció: Pozitív rész, negatív rész

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy függvény. Ekkor

$$f^+ := f \cdot \chi_{\{f>0\}}$$

az f függvény **pozitív része**, valamint

$$f^- := -f \cdot \chi_{\{f<0\}}$$

az f függvény **negatív része**.

Tehát a pozitív rész függvény röviden

$$f^+ = f \cdot \chi_{\{f>0\}}.$$

Világon, hogy a pozitív és negatív rész függvények nemnegatívok, valamint

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{és} \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Továbbá az is nyilvánvaló, hogyha az f mérhető függvény, akkor $f^+, f^- \in L^+$. Következésképpen léteznek a nemnegatív

$$\int f^+ \, \mathrm{d}\mu, \quad \int f^- \, \mathrm{d}\mu$$

integrálok, amelyek lehetnek akár $+\infty$ is.

1.2. Definíció: Mérhető függvény integrálja

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy mérhető függvény. Azt mondjuk, hogy létezik az f függvény **integrálja**, amennyiben az

$$\int f^+ \, \mathrm{d}\mu, \int f^- \, \mathrm{d}\mu$$

integrálok közül legalább az egyik véges. Ekkor az

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu$$

érték az f függvény μ mérték szerinti **integrálja**.

Amennyiben az $f \in L^+$, akkor az $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy nemnegatív mérhető függvény. Ennél fogva a negatív része azonosan nulla, ahonnan $\int f^- \, \mathrm{d}\mu = 0$ adódik. Tehát az f integrálja megegyezik az L^+-beli integráljával.

A későbbiekben azok a függvények lesznek fontosak a számunkra, amelyeknek van integrálja, és az véges. Minden ilyen leképezést **integrálható függvénynek** nevezünk. Vezessük be ezzel kapcsolatban a következő jelölést:

$$L := L(\mu) := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; f \text{ mérhető és } \int f \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.3. Tétel: A Lebesgue-integrál alaptulajdonságai

Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, valamint $f, g \in L$ és $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $(\alpha \cdot f) \in L \quad$ és $\quad \displaystyle\int (\alpha \cdot f) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu.$