Az (absztrakt) halmazok mérését (a mértéküknek az értelmezését) egy

$$\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

függvény segítségével végezzük majd, ahol az X adott alaphalmaz. Il

0.1. Definíció: Véges- és szigma-additív halmazfüggvény

Azt mondjuk, hogy a $\varphi \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény

1. **(véges) additív**, ha

$$\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(A_k)$$

minden olyan $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ páronként diszjunkt halmazrendszerre fennáll, amelynek az egyesítésére $A_0 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ teljesül;

2. **szigma-additív** (σ-additív), ha

$$\varphi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A_n)$$

minden olyan $A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt halmazsorozatra fennáll, amelynek az egyesítésére $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ teljesül.

Állítás. Legyen φ egy additív halmazfüggvény, amire $\emptyset \in \mathcal{D}_\varphi$ fennáll.

1. Ha φ additív és $\varphi(\emptyset)$ véges, akkor $\varphi(\emptyset) = 0$.
2. Ha φ szigma-additív és $\varphi(\emptyset)$ véges, akkor $\varphi(\emptyset) = 0$ és φ additív is.

Bizonyítás.

1. Mivel $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \cap \emptyset$, ezért alkalmazhatjuk a φ additív tulajdonságát

$$\varphi(\emptyset) = \varphi(\emptyset) + \varphi(\emptyset) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(\emptyset) = 0.$$

2. Amennyiben φ szigma-additív, akkor a

$$\varphi(\emptyset) = \varphi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\emptyset)$$

sorösszeg pontosan akkor lesz véges, ha $\varphi(\emptyset) = 0$. Ezért bárhogyan véve egy véges $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{D}_\varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ és páronként diszjunkt halmazrendszert, akkor az $A_k \coloneqq \emptyset$ $(k > n)$ választás mellett

$$\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \varphi\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(A_k) = \sum_{n=0}^{n} \varphi(A_k).$$

Ezt pedig azt jelenti, hogy φ additív.

0.2. Definíció: Mérték, kvázimérték, előmérték

Azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény egy

1. **mérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ szigma-algebra, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív;
2. **kvázimérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ halmazgyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ szigma-additív;
3. **előmérték**, ha $\mathcal{D}_\mu$ halmazgyűrű, $\mu(\emptyset) = 0$, és a μ additív.

0.3. Tétel: Az előmérték tulajdonságai

Legyen μ előmérték a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, továbbá $A, B, A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$.

1. μ monoton, azaz $B \subseteq A$ esetén $\mu(B) \le \mu(A)$.
2. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Ha $\mu(B)$ véges és $B \subseteq A$, akkor $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
4. Minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$.
5. Ha az (A_n) tagjai páronként diszjunktak és $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$, akkor
$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Tehát $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ egy előmérték.

Bizonyítás.

1. Mivel $A = B \cup (A \setminus B)$ diszjunkt felbontás és μ nemnegatív, ezért
$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \ge \mu(B). \tag{$*$}$$
2. Ha $\mu(B)$ véges, akkor $(*)$ átrendezésével adódik a belátandó állítás.
3. Két esetet különböztetünk meg.
   (a) Amennyiben $\mu(A \cap B) = +\infty$, akkor az $A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B$ tartalmazások, valamint a μ monotonitása alapján
   $$\mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) = \mu(A) = \mu(B) = +\infty. \checkmark$$
   (b) Ha most $\mu(A \cap B)$ véges, akkor az $A \cup B = A \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$ diszjunkt felbontás és μ additivitása miatt
   $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu\big(B \setminus (A \cap B)\big) \overset{3}{=} \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \checkmark$$
4. Az állítás teljes indukcióval igazolható, felhasználva 2-t.
5. Mivel $A_0, \dots, A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ páronként diszjunktak és μ additív, ezért
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right).$$
Ugyanakkor az $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ tartalmazás és μ monotonitása miatt
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \le \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

0.4. Tétel: Kvázimértékek ekvivalens jellemzése

Legyen μ egy előmérték a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrűn, és vegyük az alábbi állításokat.

a) A μ kvázimérték.

b) Minden $\mathcal{G}$-beli $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ monoton bővülő halmazsorozatra

$$A \coloneqq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

c) Minden $\mathcal{G}$-beli $B_{n+1} \subseteq B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozatra, ha $\mu(B_n) < +\infty$

$$B \coloneqq \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

d) Minden $\mathcal{G}$-beli $C_{n+1} \subseteq C_n$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazsorozatra, ha $\mu(C_n) < +\infty$

$$\emptyset = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0.$$

Ekkor

1. a) $\Longleftrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) $\Longleftrightarrow$ d);
2. ha μ véges, akkor még b) $\Longleftrightarrow$ c) is fennáll.

Tehát $\mu(Z) < +\infty$ $(Z \in \mathcal{G})$.

Bizonyítás.

$\boxed{\text{a)} \Longrightarrow \text{b)}}$ Tekintsük az A „határhalmaznak” az

$$A = A_0 \cup (A_1 \setminus A_0) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots$$

páronként diszjunkt halmazokból álló felbontását. Mivel μ szigma-additív, ezért

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_0) + \mu(A_1 \setminus A_0) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} \big(\mu(A_0) + \mu(A_1 \setminus A_0) + \cdots + \mu(A_n \setminus A_{n-1})\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\big(A_0 \cup (A_1 \setminus A_0) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1})\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

0.5. Tétel

Legyen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, továbbá $m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ halmazfüggvény és

1. az m additív és $m(\emptyset) = 0$;
2. $n \in \mathbb{N}$, $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak;
3. $s \in \mathbb{N}$, $Q_0, \ldots, Q_s \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak.

Ekkor

$$\bigcup_{k=0}^{n} H_k = \bigcup_{\ell=0}^{s} Q_\ell \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{\ell=0}^{s} m(Q_\ell).$$

Bizonyítás. Mivel a metszetképzés disztributív az unióra, ezért

$$H_k = H_k \cap \left(\bigcup_{\ell=0}^{s} Q_\ell \right) = \bigcup_{\ell=0}^{s} (H_k \cap Q_\ell) \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

$$Q_\ell = Q_\ell \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} H_k \right) = \bigcup_{k=0}^{n} (Q_\ell \cap H_k) \qquad (\ell = 0, \ldots, s)$$

páronként diszjunkt halmazrendszerek, ezért az m additivitása miatt

$$\sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{s} m\big(H_k \cap Q_\ell\big) = \sum_{\ell=0}^{s} \sum_{k=0}^{n} m\big(Q_\ell \cap H_k\big) = \sum_{\ell=0}^{s} m(Q_\ell).$$

0.6. Tétel

Legyen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, továbbá $m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ additív és $m(\emptyset) = 0$. Definiáljuk az

$$\mu : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty], \qquad \mu(A) := \sum_{k=0}^{n} m(H_k).$$

Ekkor

1. μ előmérték, valamint $\mu|_{\mathcal{H}} = m$;
2. ha λ előmérték $\mathcal{G}(\mathcal{H})$-n és $\lambda|_{\mathcal{H}} = m$, akkor $\lambda = \mu$;
3. ha m szigma-additív, akkor μ kvázi-mérték.

Tehát $\lambda : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty]$ alakú.

Bizonyítás.

1. Az állítás nyilvánvalóan igaz.
2. Az lemma felhasználásával
3. Legyenek $A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ páronként diszjunkt halmazok ($n \in \mathbb{N}$) és

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H}).$$

Ekkor vannak olyan $H_0, \ldots, H_s \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazok, hogy

$$A = \bigcup_{k=0}^{s} H_k \in \mathcal{G}(\mathcal{H}).$$

Ugyan ez elmondható az A_n halmazokra is, vagyis

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{p_n} H_{nj} \quad (n \in \mathbb{N})$$

valamilyen $H_{n0}, \ldots, H_{np_n} \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazokkal.

$$\begin{aligned}\mu(A) = \sum_{k=0}^{s} m(H_k) &= \sum_{k=0}^{s} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} m(H_{nj} \cap H_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p_n} \sum_{k=0}^{s} m(H_{nj} \cap H_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$