Mérték, integrál, ...

5. Előadás

1. Emlékeztető.

Legyen a $\mathcal{H}$ az X alaphalmazbeli félgyűrű, $m : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ additív, $m(\emptyset) = 0$. Ha $H_0, ..., H_n \in \mathcal{H}$ és $Q_0, ..., Q_p \in \mathcal{H}$ (ahol $n, p \in \mathbf{N}$), a $H_0, ..., H_n$ halmazok is és a $Q_0, ..., Q_p$ halmazok is páronként diszjunktak, $\bigcup_{k=0}^{n} H_k = \bigcup_{j=0}^{p} Q_j$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} m(H_k) = \sum_{j=0}^{p} m(Q_j).$$

Értelmezzük a $\mu : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty]$ leképezést az alábbiak szerint:

$$\mu(Y) := \sum_{k=0}^{n} m(H_k),$$

ahol $Y \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$, amikor is alkalmas $H_0, ..., H_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbf{N})$ páronként diszjunkt halmazokkal $Y = \bigcup_{k=0}^{n} H_k$.

Ekkor a μ olyan előmérték, amelynek a $\mathcal{H}$-ra vett leszűkítése egyenlő az m-mel. Ha a

$$\lambda : \mathcal{G}(\mathcal{H}) \to [0, +\infty]$$

előmértéknek a $\mathcal{H}$-ra való leszűkítése megegyezik az m-mel, akkor $\lambda = \mu$. Amennyiben az m szigma-additív, akkor a μ leképezés kvázimérték.

2. A Lebesgue-féle kvázimérték.

Legyen $1 \le p \in \mathbf{N}$ rögzített természetes szám és

$$x = (x_1, ..., x_p),\ y = (y_1, ..., y_p) \in \mathbf{R}^p$$

esetén $x \le y$ jelentse azt, hogy

$$x_i \le y_i \qquad (i = 1, ..., p).$$

Hasonlóan, ha

$$x_i < y_i \qquad (i = 1, ..., p),$$

akkor röviden azt írjuk, hogy $x < y$.

Ha $x, y \in \mathbf{R}^p$ és $x < y$, akkor

$$[x, y) := \{z \in \mathbf{R}^p : x \leq z < y\} = [x_1, y_1) \times ... \times [x_p, y_p)$$

az x, y végpontú, balról zárt és jobbról nyílt (p-dimenziós) *intervallum.* Könnyű meggondolni, hogy az

$$\mathbf{I}^p := \{\emptyset,\ [a, b) \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^p) : a, b \in \mathbf{R}^p,\ a < b\}$$

halmaz félgyűrű. Ezért az általa generált $\mathcal{I}^p$ gyűrű a következő:

$$\mathcal{I}^p := \mathcal{G}(\mathbf{I}^p) = \{\textstyle\bigcup_{I \in \mathcal{T}} I : \mathcal{T} \subset \mathbf{I}^p,\ \mathcal{T}\ \text{ véges}\}$$

(ahol – ha szükséges – az is feltehető, hogy a fenti $\mathcal{T}$-ben lévő intervallumok páronként diszjunktak). Az $\mathcal{I}^p$ gyűrű elemeire szokásos az *elemi halmazok* elnevezés.

Definiáljuk az

$$m_p : \mathbf{I}^p \to [0, +\infty)$$

halmazfüggvényt a következőképpen:

$$m_p(\emptyset) := 0,\ m_p([x, y)) := \prod_{i=1}^{p}(y_i - x_i) \qquad (x, y \in \mathbf{R}^p,\ x < y).$$

Egyszerű belátni azt a ($p \leq 3$ esetén igen szemléletes) tényt, hogy az m_p leképezés additív. Jelöljük $\widetilde{\mu}_p$-vel az m_p által generált halmazfüggvényt, ekkor a $\widetilde{\mu}_p$ olyan előmérték az $\mathcal{I}^p$ gyűrűn, ami az egyetlen ilyen kiterjesztése az m_p-nek.

Megmutatjuk, hogy a $\widetilde{\mu}_p$ szigma-additív is.

1. Tétel. *Az előbb definiált $\widetilde{\mu}_p : \mathcal{I}^p \to [0, +\infty)$ függvény kvázimérték.*

Bizonyítás. Mivel a $\widetilde{\mu}_p$ véges, ezért elegendő azt belátni, hogy minden olyan $A_n \in \mathcal{I}^p \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazsorozat esetén, amelyre

$$A_{n+1} \subset A_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ teljesül, egyúttal az is igaz, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{\mu}_p(A_n) = 0.$$

Tegyük fel indirekt módon azt, hogy valamilyen, az előbbi kikötéseknek eleget tevő (A_n) halmazsorozatra

$$\delta := \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}_p(A_n) = \inf\{\widetilde{\mu}_p(A_n) : n \in \mathbf{N}\} > 0.$$

(A $(\widetilde{\mu}_p(A_n)$ sorozat monoton fogyó.) Az $\mathcal{I}^p$ „szerkezetét" leíró tételből minden $n \in \mathbf{N}$ mellett könnyen adódik olyan $B_n \in \mathcal{I}^p$ halmaz, amelyre $\overline{B}_n \subset A_n$, és

$$\widetilde{\mu}_p(A_n) - \widetilde{\mu}_p(B_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

(Itt $\overline{B}_n$ a B_n halmaz lezárását jelöli az $\mathbf{R}^p$ tér „szokásos" topológiája szerint.)[1] Ha

$$C_n := \bigcap_{i=0}^{n} B_i \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor ezek a halmazok is nyilván egy monoton fogyó sorozatot alkotnak az $\mathcal{I}^p$-ben, továbbá

$$\overline{C}_{n+1} \subset \overline{C}_n \subset \overline{B}_n \subset A_n \subset A_0 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

is igaz. Következésképpen a $\overline{C}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok mindegyike kompakt, és

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset \Longrightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n = \emptyset.$$

Elég tehát azt belátni, hogy egyetlen $\overline{C}_n$ halmaz sem üres. Innen már (az egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszetére vonatkozó jól ismert „Cantor-szerű" tétel miatt)

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n \neq \emptyset$$

adódik, ami az A_n-ekre tett előbbi feltétel miatt nem lehet.) Azt látjuk be, hogy

$$(*) \qquad C_n \neq \emptyset \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ehhez először is bebizonyítjuk, hogy

$$(**) \qquad \widetilde{\mu}_p(C_n) \geq \widetilde{\mu}_p(A_n) - \delta \cdot (1 - 2^{-n-1}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

---

[1]A most mondottak különösen egyszerűek akkor, ha $p = 1$ és $A_n = [a, b)$ valamilyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ számokkal. Ekkor ui. legyen $B_n := [a, c)$ – amikor is $\overline{B}_n = [a, c]$, –ahol $a < c < b$ és $b - c \leq \delta \cdot 2^{-n-1}$.)

Valóban, teljes indukcióval egyrészt

$$\widetilde{\mu}_p(C_0) = \widetilde{\mu}_p(B_0) \geq \widetilde{\mu}_p(A_0) - \delta/2,$$

azaz a $(**)$ becslés igaz $n = 0$ esetén. Ha viszont valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett a $(**)$ fennáll, akkor[2]

$$\widetilde{\mu}_p(C_{n+1}) = \widetilde{\mu}_p(C_n \cap B_{n+1}) = \widetilde{\mu}_p(C_n) + \widetilde{\mu}_p(B_{n+1}) - \widetilde{\mu}_p(C_n \cup B_{n+1}) \geq$$

$$\widetilde{\mu}_p(A_n) - \delta\cdot(1 - 2^{-n-1}) + \widetilde{\mu}_p(A_{n+1}) - \delta\cdot 2^{-n-2} - \widetilde{\mu}_p(A_n) =$$

$$\widetilde{\mu}_p(A_{n+1}) - \delta\cdot(1 - 2^{-n-2}),$$

így a $(**)$ egyenlőtlenség igaz $(n+1)$-re is. Ezzel a $(**)$-ot beláttuk, amiből már egyúttal

$$\widetilde{\mu}_p(C_n) \geq \delta - \delta\cdot(1 - 2^{-n-1}) = \delta\cdot 2^{-n-1} > 0 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és ezért a $(*)$ állítás is következik. ∎

3. Megjegyzések.

i) A fenti $\widetilde{\mu}_p$-t *Lebesgue*[3]*-féle kvázimértéknek* nevezzük. Ez nem mérték, ui. az $\mathcal{I}^p$ halmazrendszer nem σ-algebra.

ii) Az 1. Tétel bizonyításában szereplő halmazokkal

$$\widetilde{\mu}_p(C_{n+1}) = \widetilde{\mu}_p(C_n \cap B_{n+1}) =$$

$$\widetilde{\mu}_p(C_n) + \widetilde{\mu}_p(B_{n+1}) - \widetilde{\mu}_p(C_n \cup B_{n+1}) \geq$$

$$\widetilde{\mu}_p(C_n) + \widetilde{\mu}_p(A_{n+1}) - \frac{\delta}{2^{n+2}} - \widetilde{\mu}_p(A_n)$$

Tehát

$$\widetilde{\mu}_p(C_{n+1}) - \widetilde{\mu}_p(A_{n+1}) \geq \widetilde{\mu}_p(C_n) - \widetilde{\mu}_p(A_n) - \frac{\delta}{2^{n+2}} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ebből a rekurzív egyenlőtlenségből (annak az egymás utáni alkalmazásával) kapjuk a

[2]Emlékeztető: tetszőleges μ előmérték és A, B mérhető halmazok esetén $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.

[3]Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941).

$$\widetilde{\mu}_p(C_n) - \widetilde{\mu}_p(A_n) \geq \widetilde{\mu}_p(C_0) - \widetilde{\mu}_p(A_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{2^{k+1}} =$$

$$\widetilde{\mu}_p(B_0) - \widetilde{\mu}_p(A_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{2^{k+1}} \geq$$

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{\delta}{2^{k+1}} > -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta}{2^{k+1}} = -\delta \qquad (n \in \mathbf{N})$$

becslést. Ezért

$$\widetilde{\mu}_p(C_n) > \widetilde{\mu}_p(A_n) - \delta \geq 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

iii) Ha az előbbi B_n-ek konstrukciójában valamilyen pozitív (egyelőre tetszőleges) $\varepsilon_n \quad (n \in \mathbf{N})$ számokkal azt írjuk elő, hogy

$$\widetilde{\mu}_p(A_n) - \widetilde{\mu}_p(B_n) \leq \varepsilon_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor (az eddigi halmazokkal, ill. jelölésekkel)

$$\widetilde{\mu}_p(C_{k+1}) = \widetilde{\mu}_p(C_k \cap B_{k+1}) =$$

$$\widetilde{\mu}_p(C_k) + \widetilde{\mu}_p(B_{k+1}) - \widetilde{\mu}_p(C_k \cup B_{k+1}) \geq$$

$$\widetilde{\mu}_p(C_k) + \widetilde{\mu}_p(A_{k+1}) - \varepsilon_{k+1} - \widetilde{\mu}_p(A_k).$$

Tehát

$$\widetilde{\mu}_p(C_{k+1}) - \widetilde{\mu}_p(C_k) \geq \widetilde{\mu}_p(A_{k+1}) - \widetilde{\mu}_p(A_k) - \varepsilon_{k+1} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Innen minden $n \in \mathbf{N}$ mellett az adódik, hogy

$$\widetilde{\mu}_p(C_{n+1}) - \widetilde{\mu}_p(C_0) = \sum_{k=0}^{n} (\widetilde{\mu}_p(C_{k+1}) - \widetilde{\mu}_p(C_k)) \geq$$

$$\sum_{k=0}^{n} (\widetilde{\mu}_p(A_{k+1}) - \widetilde{\mu}_p(A_k)) - \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1} = \widetilde{\mu}_p(A_{n+1}) - \widetilde{\mu}_p(A_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k.$$

Ezért – figyelembe véve, hogy $C_0 = B_0$ – azt kapjuk, hogy

$$\widetilde{\mu}_p(C_{n+1}) \geq \widetilde{\mu}_p(A_{n+1}) + \widetilde{\mu}_p(B_0) - \widetilde{\mu}_p(A_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k \geq$$

$$\widetilde{\mu}_p(A_{n+1}) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \geq \delta - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \geq \frac{\delta}{2} > 0 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

hacsak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \leq \frac{\delta}{2}.$$

4. A Stieltjes-féle kvázimérték.

Legyen $\mathbf{I} := \mathbf{I}^1$, $\mathcal{I} := \mathcal{I}^1$ és $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton növő függvény. A φ segítségével értelmezzük az

$$m_\varphi : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$$

leképezést az alábbiak szerint:

$$m_\varphi(\emptyset) := 0, \;\; m_\varphi([a,b)) := \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (a, b \in \mathbf{R},\, a < b).$$

Az így definiált m_φ halmazfüggvény nyilván nemnegatív és additív, ezért egyértelműen kiterjeszthető az $\mathcal{I}$-n értelmezett $\widetilde{\mu}_\varphi$ előmértékké.

Pl. a

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

speciális esetben a $\widetilde{\mu}_\varphi$ nem más, mint a $\widetilde{\mu}_1$ Lebesgue-féle kvázimérték.

Igaz-e vajon tetszőleges φ mellett, hogy a $\widetilde{\mu}_\varphi$ kvázimérték (vagy ami ezzel ekvivalens, hogy a $\widetilde{\mu}_\varphi$ szigma-additív)? A következő példa azt mutatja, hogy a fenti kérdésre nem mindig lehet igennel válaszolni. Legyen ui.

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Ekkor minden $[a,b] \subset (-\infty, 0)$ intervallumra $\widetilde{\mu}_\varphi([a,b)) = 0$, de ugyanakkor pl. $\widetilde{\mu}_\varphi([-1,0)) = 1$. Mivel az

$$I_n := [-2^{-n}, -2^{-n-1}) \in \mathbf{I} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

intervallumok páronként diszjunktak és

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n = [-1, 0),$$

ezért a $\widetilde{\mu}_\varphi$ szigma-additivitása esetén fenn kellene állnia a

$$\widetilde{\mu}_\varphi([-1,0)) = \widetilde{\mu}_\varphi\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}_\varphi(I_n)$$

egyenlőségnek. Ez viszont az előbbiek szerint nem igaz, lévén a bal oldala 1, a jobb oldala pedig $\widetilde{\mu}_\varphi(I_n) = 0 \;\; (n \in \mathbf{N})$ miatt 0.

A következő tételben azt vizsgáljuk meg, hogy a φ-ről mit kellene feltenni ahhoz, hogy a $\widetilde{\mu}_\varphi$ kvázimérték legyen.

2. Tétel. *A* $\widetilde{\mu}_\varphi$ *akkor és csak akkor kvázimérték, ha a* φ *függvény minden pontban balról folytonos, azaz*

$$\lim_{t\to x-0}\varphi(t)=\varphi(x)\qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Bizonyítás. A bal oldali folytonosság szükségességéhez tegyük fel indirekt módon, hogy valamilyen $x\in\mathbf{R}$ pontban

$$\lim_{t\to x-0}\varphi(t)\neq\varphi(x),$$

és legyen az

$$x_n\in(-\infty,x)\qquad (n\in\mathbf{N})$$

olyan szigorúan monoton növekedő sorozat, amire

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

Az indirekt feltevés (és a határértékre vonatkozó átviteli elv) miatt

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\lim_{t\to x-0}\varphi(t)\neq\varphi(x).$$

Ugyanakkor

$$[x_0,x)=\bigcup_{n=0}^{\infty}[x_n,x_{n+1})$$

egy páronként diszjunkt intervallumokból álló felbontása az $[x_0,x)$-nek, ezért (a $\widetilde{\mu}_\varphi$ feltételezett kvázimérték voltára tekintettel)

$$\widetilde{\mu}_\varphi([x_0,x))=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\mu}_\varphi([x_n,x_{n+1}))=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)\Big)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)-\varphi(x_0),$$

ami nyilván ellentmond az előbbieknek.

Az elégségesség igazolásához azt kell csak belátni, hogy a szóban forgó, a $\widetilde{\mu}_\varphi$-t „generáló" m_φ függvény σ-additív. Legyen ehhez $I_n\in\mathbf{I}\quad(n\in\mathbf{N})$ páronként diszjunkt intervallumoknak egy olyan sorozata, amelyre

$$I:=\bigcup_{n=0}^{\infty}I_n\in\mathbf{I}.$$

Ekkor (egy korábbi tétel szerint)

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_\varphi(I_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mu}_\varphi(I_n) \le \widetilde{\mu}_\varphi(I) = m_\varphi(I).$$

Megmutatjuk, hogy az előbbi egyenlőtlenségben egyenlőség van, azaz, ha

$$I = [a,b),\ I_n = [a_n, b_n) \qquad (n \in \mathbf{N},\ a, b, a_n, b_n \in \mathbf{R},\ a < b,\ a_n < b_n),$$

akkor

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big).$$

Itt elegendő (ld. fent) már csak azt igazolni, hogy

$$m_\varphi(I) \le \sum_{n=0}^{\infty} m_\varphi(I_n),$$

azaz

$$\varphi(b) - \varphi(a) \le \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big).$$

Válasszunk ehhez egy tetszőleges $c \in (a,b)$ számot. A φ függvény monotonitása és a bal oldali folytonossága miatt bármilyen $\varepsilon > 0$, ill. $n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $\widetilde{a}_n < a_n$, hogy

$$\varphi(a_n) - \varphi(\widetilde{a}_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n-1}.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\varphi(b_n) - \varphi(\widetilde{a}_n) = \varphi(b_n) - \varphi(a_n) + \varphi(a_n) - \varphi(\widetilde{a}_n) <$$

$$\varphi(b_n) - \varphi(a_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n-1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az $(\widetilde{a}_n, b_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ nyílt intervallumokból álló rendszer nyilván lefedi a kompakt $[a,c]$ intervallumot, ezért (ld. Borel-tétel) egy alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ véges halmazzal

$$[a,c] \subset \bigcup_{n \in \mathcal{N}} (\widetilde{a}_n, b_n).$$

Egyúttal nyilván az is igaz, hogy

$$[a,c) \subset \bigcup_{n \in \mathcal{N}} [\widetilde{a}_n, b_n).$$

Így (a fentebb említett „korábbi" tétel miatt)

$$\varphi(c) - \varphi(a) = \widetilde{\mu}_\varphi([a,c)) \le \widetilde{\mu}_\varphi\Big(\bigcup_{n\in\mathcal{N}} [\widetilde{a}_n, b_n)\Big) \le$$

$$\sum_{n\in\mathcal{N}} \widetilde{\mu}_\varphi([\widetilde{a}_n, b_n)) = \sum_{n\in\mathcal{N}} m_\varphi([\widetilde{a}_n, b_n)) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(\widetilde{a}_n)\Big).$$

Ebből a becslésből az előbbiek szerint

$$\varphi(c) - \varphi(a) \le \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(\widetilde{a}_n)\Big) \le$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big) + \varepsilon$$

következik, ahonnan – figyelembe véve, hogy az $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt –

$$\varphi(c) - \varphi(a) \le \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\Big)$$

adódik. Ha ebben a becslésben elvégezzük a $c \to b$ határátmenetet, akkor (a φ bal oldali folytonossága alapján)

$$\lim_{t \to b-0} \varphi(t) = \varphi(b)$$

miatt a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. ∎

5. Megjegyzések.

i) Az előbbi tételben szereplő $\widetilde{\mu}_\varphi$ a φ függvény által meghatározott ún. *Stieltjes*[4]*-féle kváziмérték.*

ii) Minden monoton növő, folytonos

$$\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvényre a $\widetilde{\mu}_\varphi$ kvázimérték az $\mathcal{I}$ gyűrűn (az $\mathbf{R}$-beli elemi halmazok gyűrűjén). Speciálisan, ha a φ differenciálható, akkor $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ esetén

$$\lim_{b\to a} \frac{\widetilde{\mu}_\varphi([a,b))}{\widetilde{\mu}_1([a,b))} = \lim_{b\to a} \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a} = \varphi'(a).$$

Ezért a φ'-t szokás a $\widetilde{\mu}_\varphi$ „deriváltjának" nevezni.

[4]Thomas Jan Stieltjes (1856 – 1894).

iii) A monoton φ függvény által meghatározott (ld. **4.**) m_φ halmazfüggvény és a φ közötti kapcsolat abban az értelemben is igen „szoros", hogy minden, az $\mathbf{I}$-n értelmezett, véges és additív halmazfüggvény egy alkalmas
$$\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
leképezés segítségével így állítható elő. Nevezetesen, ha az m egy ilyen halmazfüggvény, akkor van olyan fenti φ leképezés, amellyel
$$m([a, b)) = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (a, b \in \mathbf{R}, a < b).$$
Valóban, legyen pl.
$$\varphi(0) := 0, \;\; \varphi(x) := \begin{cases} m([0, x)) & (x > 0) \\ \\ -m([x, 0)) & (x < 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$
Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a most definiált φ függvény eleget tesz a mondottaknak. Például $a < 0 < b \quad (a, b \in \mathbf{R})$ esetén ez az
$$[a, b) = [a, 0) \cup [0, b)$$
diszjunkt felbontást és az m additivitását figyelembe véve az
$$m([a, b)) = m([a, 0)) + m([0, b)) = -\varphi(a) + \varphi(b)$$
egyenlőség szerint triviális. A többi eset hasonlóan kezelhető. Ha az m nemnegatív, akkor a fenti φ függvény nyilván monoton növekedő.

iv) Röviden vázoljuk a Stieltjes-féle konstrukció kiterjesztését magasabb dimenzióban, a részleteket csupán $\mathbf{R}^2$-ben megfogalmazva. Az első probléma rögtön az, hogy mi lehet a megfelelője „2 dimenzióban" a monoton növekedő $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénynek? Tegyük fel egy pillanatra, hogy már megtaláltuk a megfelelő függvényt, és az m az általa meghatározott
$$m : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{R}$$
additív leképezés az $\mathbf{I}^2$ félgyűrűn. Ha $a, b \in \mathbf{R}$ és az
$$a < x \in \mathbf{R},\, b < y \in \mathbf{R}$$
számokkal
$$I_{xy} := \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : a \le u < x;\, b \le v < y\},$$

akkor minden

$$I := [u, z) \times [v, w) \subset I_{xy}$$

téglalap esetén

$$m(I) = m(I_{zw}) - m(I_{zv}) + m(I_{uv}) - m(I_{uw}) =$$

$$\Phi(z, w) - \Phi(z, v) + \Phi(u, v) - \Phi(u, w) \geq 0,$$

ahol $\Phi(x, y) := m(I_{xy})$.

Legyen általában a

$$\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

olyan függvény, amelyre

$$u, v, z, w \in \mathbf{R};\ u < z, v < w$$

mellett

$$\Phi(z, w) - \Phi(z, v) + \Phi(u, v) - \Phi(u, w) \geq 0.$$

Az előbbiek szerint ez a feltétel veszi át a monotonitás szerepét, azaz legyen

$$I := [u, z) \times [v, w) \in \mathbf{I}^2$$

esetén most már

$$m(I) := \Phi(z, w) - \Phi(z, v) + \Phi(u, v) - \Phi(u, w).$$

Az így definiált

$$m : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{R}$$

leképezés tehát nemnegatív, és (könnyen megmutatható, hogy) additív. Például, ha

$$\varphi, \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

monoton növekedő függvények és

$$\Phi(x, y) := \varphi(x) \cdot \psi(y) \qquad \Big((x, y) \in \mathbf{R}^2\Big),$$

akkor

$$m(I) = \Big(\varphi(z) - \varphi(u)\Big) \cdot \Big(\psi(w) - \psi(v)\Big).$$

A

$$\varphi(x) := \psi(x) := x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

esetben $m(I)$ nem más, mint az I téglalap területe.

Jelöljük most μ-vel az m függvény kiterjesztését az $\mathcal{I}^2$-re. Megmutatható, hogy a μ pontosan akkor kvázimérték (ez az $\mathbf{R}^2$-beli *Stieltjes-féle kvázimérték*), ha tetszőleges

$$(a,b),\ (\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2,\ (\alpha,\beta) < (a,b)$$

választással

$$\lim_{x\to a-0, y\to b-0} m([\alpha,x)\times[\beta,y)) = m([\alpha,a)\times[\beta,b)).$$

v) Tekintsük a μ_φ Stieltjes-féle kvázimértéket. Nyilván minden $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\mu_{\varphi+c} = \mu_\varphi.$$

Továbbá nem nehéz belátni ez utóbbinak a megfordítását, nevezetesen: ha a φ-n kívül adott egy ugyancsak monoton növő, minden pontban balról folytonos

$$\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

függvény is, és $\mu_\varphi = \mu_\psi$, akkor van olyan $c \in \mathbf{R}$ konstans, amellyel

$$\varphi = \psi + c.$$

Valóban, legyen $a \in \mathbf{R}$, ekkor tetszőleges $a < x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\mu_\varphi([a,x)) = \varphi(x) - \varphi(a) = \mu_\psi([a,x)) = \psi(x) - \psi(a),$$

ezért

$$\varphi(x) - \psi(x) = \varphi(a) - \psi(a).$$

Hasonlóan kapjuk $x < a$ esetén, hogy

$$\mu_\varphi([x,a)) = \varphi(a) - \varphi(x) = \psi(a) - \psi(x),$$

amiből

$$\varphi - \psi \equiv c := \varphi(a) - \psi(a)$$

már következik.