1. Emlékeztető

Emlékezzünk arra, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazt **Borel-halmaznak** nevezünk, ha

$$A \in \Omega_1 \coloneqq \Omega(\mathcal{I}) = \Omega(\mathbf{I}).$$

Az itt szereplő $\mathbf{I}$ halmazrendszer az üres halmazt, valamint az $\mathbb{R}$ balról zárt, jobbról nyílt intervallumait tartalmazza, $\mathcal{I}$ pedig az $\mathbf{I}$ félgyűrű által generált gyűrű, azaz

$$\mathbf{I} \coloneqq \Big\{ \emptyset, [a,b) \subseteq \mathbb{R} \;\Big|\; a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Big\}, \qquad \mathcal{I} \coloneqq \mathcal{G}(\mathbf{I}).$$

1.1. Definíció: Mérhető függvény

Legyen (X, Ω) mérhető tér, valamint $f : X \to \mathbb{R}$ egy függvény.

Azt mondjuk, hogy az f függvény **mérhető** (vagy **Borel–mérhető**), ha

$$f^{-1}[A] \coloneqq \{ x \in X \mid f(x) \in A \} \in \Omega \qquad (A \in \Omega_1).$$

1.2. Definíció: Lépcsősfüggvény

Legyen (X, Ω) mérhető tér, valamint $f : X \to \mathbb{R}$ egy függvény.

Azt mondjuk, hogy f egy **lépcsősfüggvény**, ha mérhető és $\mathcal{R}_f$ véges.

Egy f leképezés pontosan akkor lépcsősfüggvény, ha kifejezhető az

$$f = \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \chi_{\{f=y\}}$$

úgynevezett **kanonikus alakban**. Továbbá bevezettük az alábbi osztályokat

$$L_0 \coloneqq \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ lépcsős} \}, \qquad L_0^+ \coloneqq \{ f \in L_0 \mid f \geq 0 \}.$$

1.3. Definíció: Nemnegatív lépcsősfüggvény integrálja

Egy $f \in L_0^+$ függvény (μ mérték szerinti) **integrálja** alatt az

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \mu\big(\{f = y\}\big)$$

nemnegatív számot (vagy a $+\infty$-t) értjük.

1.4. Tétel: Az integrál alaptulajdonságai

Tekintsük az $f, g \in L_0^+$ függvényeket és az $\alpha \geq 0$ számot. Ekkor

1. $\displaystyle\int (\alpha \cdot f) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu;$
2. $\displaystyle\int (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu;$
3. $\displaystyle f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu;$

Állítás. Az tételben foglalt jelölésekkel

$$f + g \quad \text{és} \quad \alpha \cdot f$$

szintén L_0^+-beli függvény.

2. Az integrál kiterjesztése

2.1. Tétel

Legyen adott egy L_0^+-beli, monoton növekedő függvénysorozat:

$$f_n \in L_0^+, \quad f_n \le f_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha valamilyen $g \in L_0^+$ függvény esetén $g \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, akkor

$$\int g \, \mathrm{d}\mu \le \sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Amennyiben $0 \le c < 1$ egy rögzített konstans, akkor az

$$A_n := \{f_n \ge c \cdot g\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

nívóhalmazok Ω-ban vannak, és monoton növekvő módon tartanak X-hez.

1. Mivel az f_n, g $(n \in \mathbb{N})$ függvények mind mérhetőek, ezért $A_n \in \Omega$. ✓
2. Mivel az (f_n) sorozat monoton nő, ezért az (A_n) monoton bővül. ✓
3. Ha $x \in X$ tetszőleges, akkor

   $$c \cdot g(x) \le g(x) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

   Ebből kifolyólag, valamint az (f_n) sorozat monoton növekedés miatt

   $$\exists n \in \mathbb{N}: \quad c \cdot g(x) \le f_n(x) \quad \Longrightarrow \quad x \in A_n.$$

   Tehát az (A_n) halmazsorozat valóban X-hez tart. ✓

Mivel μ mérték, valamint bármely $Z \in \Omega$ esetén az $(A_n \cap Z) \nearrow Z$, ezért

$$\mu(A_n \cap Z) \longrightarrow \mu(Z) \quad (n \to \infty). \qquad (*)$$

Ezen halmazsorozatra az igaz, hogy

$$A_n \in \Omega, \quad (A_n) \nearrow X.$$

Az utóbbi jelölés a következőt jelenti:

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \quad X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Vegyük észre, hogy a korábbiak értelmében fennáll az alábbi becslés:

$$f_n \ge c \cdot g \cdot \chi_{A_n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Felhasználva a g karakterisztikus alapját, valamint az integrál additivitását

$$\sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int f_n \, \mathrm{d}\mu \ge c \cdot \int g \cdot \chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = c \cdot \sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \mu\big(\{y = g\} \cap A_n\big).$$

Végül $(*)$ alapján elmondható, hogy az $n \to \infty$ határátmenet után

$$\sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu \ge c \cdot \sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \mu\big(\{y = g\}\big) = c \cdot \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

Véve g karakterisztikus alapját

$$g \cdot \chi_{A_n} = \sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \chi_{\{g=y\}} \cdot \chi_{A_n} = \sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \chi_{\{g=y\} \cap A_n}$$

adódik. Továbbá elmondható, hogy

$$\int \chi_B \, \mathrm{d}\mu = \mu(B) \quad (B \in \Omega).$$

Megjegyzés. Mivel a fenti tételben szereplő (f_n) függvénysorozat monoton nő, így

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Továbbá az integrál monotonitás miatt elmondható, hogy az $\left(\int f_n \,\mathrm{d}\mu\right)$ sorozat is monoton nő, ezért létezik a soron következő határérték

$$\sup_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Tehát valójában az integrálsorozat határértékére adtunk egy alsó becslést. ■

Tétel. Vegyünk két tetszőleges

$$f_n, g_n \in L_0^+, \quad f_n \le f_{n+1}, \quad g_n \le g_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot, amelyek határértéke azonos, azaz

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n.$$

Ekkor a hozzájuk tartozó integrálsorozatok határértékei is megegyeznek, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Ugyanezt szuprémummal kifejezve

$$\sup_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_n \int g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Ugyanis egy rögzített $m \in \mathbb{N}$ index esetén

$$g_m \le \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n.$$

Ezért a 2.1. tétel felhasználásával

$$\int g_m \,\mathrm{d}\mu \le \sup_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_m \int g_m \,\mathrm{d}\mu \le \sup_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Ugyanezen oknál fogva (lásd $g_m \longleftrightarrow f_n$ szerepcsere) adódik, hogy

$$\sup_m \int g_m \,\mathrm{d}\mu \ge \sup_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\sup_m \int g_m \,\mathrm{d}\mu = \sup_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu}.$$

■

Mindez azt jelenti, hogy egy monoton növekedő L_0^+-beli függvényekhez tartozó integrálsorozat határértéke független magától a függvénysorozat megválasztásától. Egyedül az számít, hogy milyen határfüggvényhez konvergál a sorozat. Ezért érdemes kitüntetett szereppel felruházni az előbb határfüggvényeket.

2.2. Definíció: L^+-függvények integrálja

Legyen

$$L^+ := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; f = \lim(f_n), \text{ ahol } (f_n) \nearrow, \ L_0^+\text{-beli} \right\}.$$

Ha $f \in L^+$ és egy $(f_n) : \mathbb{N} \to L_0^+$ sorozattal, $f = \lim(f_n)$, akkor legyen

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

az f függvény μ mérték szerinti **integrálja**.

Megjegyzések:

i) Nyilvánvaló, hogy $L_0^+ \subset L^+$, valamint az L_0^+-beli függvények integrálja megegyezik az L^+-beli függvények integráljával.

Ugyanis, ha $f \in L_0^+$, akkor az $f_n := f$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat monoton nő, valamint a határfüggvénye

$$\lim(f_n) = f \in L_0^+ \qquad \Longrightarrow \qquad L_0^+ \subset L^+.$$

Következésképpen az integrálja

$$\underset{\substack{\uparrow \\ L^+\text{-beli}}}{\int f \, \mathrm{d}\mu} = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f \, \mathrm{d}\mu = \underset{\substack{\uparrow \\ L_0^+\text{-beli}}}{\int f \, \mathrm{d}\mu}.$$

■

2.3. Tétel: Az L^+ szerkezete

Az $f : X \to [0, +\infty]$ függvény pontosan akkor eleme L^+-nak, ha mérhető:

$$L^+ = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; \text{az } f \geq 0 \text{ mérhető} \right\}$$

2.4. Tétel: Az L^+-beli integrál alaptulajdonságai

Tekintsük az $f, g \in L^+$ függvényeket és az $\alpha \geq 0$ számot. Ekkor

1. $\displaystyle\int (\alpha \cdot f) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu;$
2. $\displaystyle\int (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu;$
3. $\displaystyle f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu;$

Állítás. Az tételben foglalt jelölésekkel

$$f + g \quad \text{és} \quad \alpha \cdot f$$

szintén L^+-beli függvény.