1. Emlékeztető

Emlékezzünk arra, hogy egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazt **Borel-halmaznak** nevezünk, ha

$$A \in \Omega_1 := \Omega(\mathcal{I}) = \Omega(\mathbf{I}).$$

Az itt szereplő **I** halmazrendszer az üres halmazt, valamint az $\mathbb{R}$ balról zárt, jobbról nyílt intervallumait tartalmazza, $\mathcal{I}$ pedig az **I** félgyűrű által generált gyűrű, azaz

$$\mathbf{I} := \left\{ \emptyset, [a,b) \subseteq \mathbb{R} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a < b \right\}, \qquad \mathcal{I} := \mathcal{G}(\mathbf{I}).$$

1.1. Definíció: Borel–mérhető függvény

Legyen (X, Ω) mérhető tér, valamint $f : X \to \mathbb{R}$ egy függvény.
Azt mondjuk, hogy az f függvény **mérhető** (vagy **Borel–mérhető**), ha

$$f^{-1}[A] := \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \in A \right\} \in \Omega \qquad \big(A \in \Omega_1\big).$$

1.2. Definíció: Lépcsősfüggvény

Legyen (X, Ω) egy mérhető tér, valamint $f : X \to \mathbb{R}$ egy függvény.
Azt mondjuk, hogy f egy **lépcsősfüggvény**, ha mérhető és $\mathcal{R}_f$ véges.

Egy f leképezés pontosan akkor lépcsősfüggvény, ha kifejezhető az

$$f = \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \chi_{\{f=y\}}$$

úgynevezett **kanonikus alakban**. Továbbá bevezettük az alábbi osztályokat

$$L_0 := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ lépcsős} \right\}, \qquad L_0^+ := \left\{ f \in L_0 \;\middle|\; f \geq 0 \right\}.$$

1.3. Definíció: Nemnegatív lépcsősfüggvény integrálja

Egy $f \in L_0^+$ függvény (μ mérték szerinti) **integrálja** alatt az

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \mu(\{f = y\})$$

nemnegatív számot (vagy a $+\infty$-t) értjük.

1.4. Tétel: Az integrál alaptulajdonságai

Tekintsük az $f, g \in L_0^+$ függvényeket és az $\alpha \geq 0$ számot. Ekkor

1. $\displaystyle\int (\alpha \cdot f) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu;$
2. $\displaystyle\int (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu;$
3. $\displaystyle f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu;$

Állítás. Az tételben foglalt jelölésekkel

$$f + g \quad \text{és} \quad \alpha \cdot f$$

szintén L_0^+-beli függvény.

2. Az integrál kiterjesztése

2.1. Tétel

Legyen adott egy L_0^+-beli, monoton növekedő függvénysorozat:

$$f_n \in L_0^+, \quad f_n \leq f_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha valamilyen $g \in L_0^+$ függvény esetén $g \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Ekkor

$$\int g \, \mathrm{d}\mu \leq \sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Amennyiben $0 \leq c < 1$ egy rögzített konstans, akkor az

$$A_n := \{f_n \geq c \cdot g\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

nívóhalmazok Ω-ban vannak, és monoton növekvő módon tartanak X-hez.

Ezen halmazsorozatra az igaz, hogy

$$A_n \in \Omega, \quad (A_n) \nearrow X.$$

1. Mivel az (f_n) sorozat monoton nő, ezért az (A_n) monoton bővül. ✓
2. Ha $x \in X$ tetszőleges, akkor

   Itt lehet, hogy $g(x) = 0$ vagy $g(x) > 0$.

   $$c \cdot g(x) \leq g(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

   Ebből kifolyólag, valamint az (f_n) sorozat monoton növekedés miatt

   $$\exists n \in \mathbb{N}: \quad c \cdot g(x) \leq f_n(x) \quad \Longrightarrow \quad x \in A_n.$$

   Tehát az (A_n) halmazsorozat valóban X-hez tart. ✓

Mivel μ mérték, valamint bármely $Z \in \Omega$ esetén az $(A_n \cap Z) \nearrow Z$, ezért

$$\mu(A_n \cap Z) \longrightarrow \mu(Z) \quad (n \to \infty).$$

Tekintsük az soron következő L_0^+-beli függvényeket

$$f_n \geq c \cdot g \cdot \chi_{A_n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\alpha := \sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int f_n \, \mathrm{d}\mu \geq c \cdot \int g \cdot \chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = c \cdot \sum_{y \in \mathcal{R}_g} y \cdot \mu\big(\{y = g\} \cap A_n\big).$$

Ugyanis

$$\int g \cdot \chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \int \sum_{y\in\mathcal{R}_g} y \cdot \chi_{\{g=y\}} \cdot \chi_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{y\in\mathcal{R}_g} \int y \cdot \chi_{\{g=y\} \cap A_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{y\in\mathcal{R}_g} y \cdot \mu\big(\{g = y\} \cap A_n\big)$$

Ekkor az $n \to \infty$ határátmenet után

$$\alpha \geq c \cdot \sum_{y\in\mathcal{R}_g} y \cdot \mu\big(\{y = g\}\big) = c \cdot \int g \, \mathrm{d}\mu. \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \geq \int g \, \mathrm{d}\mu.$$