Mérték, integrál, ...

2. Előadás

1. Konvergencia-határátmenet.

Tegyük fel, hogy adottak az $f_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények, és az (f_n) sorozat *pontonként konvergens*, azaz minden $x \in [a,b]$ mellett az $\big(f_n(x)\big)$ számsorozat konvergens. Legyen

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b])$$

az (f_n) sorozat *határfüggvénye*. Természetes módon vetődnek fel az alábbi kérdések:

1^o konvergens-e az integrálok $\Big(\int_a^b f_n\Big)$ sorozata;

2^o igaz-e, hogy az f határfüggvény Riemann-integrálható;

3^o ha az előbbi két kérdésre „igen" a válasz, akkor teljesül-e az

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség?

Röviden „összefoglalva"

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,?$$

(Ami a határátmenet és az integrálás felcserélhetőségét jelentené.)

A következő példák azt mutatják, hogy a fenti kérdésekre minden további nélkül nem lehet igennel felelni. Legyen ui. valamilyen $a_n \in \mathbf{R}$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ számsorozat mellett

$$f_n(x) := \begin{cases} a_n & (0 < x < 1/n) \\ 0 & \big(x \in [0,1] \setminus (0,1/n)\big) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$f_n \in R[0,1],\ \int_0^1 f_n = \frac{a_n}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

továbbá minden $x \in [0,1]$ helyen könnyen beláthatóan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tehát az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens, és az f határfüggvénye az $f \equiv 0$ függvény. Így $f \in R[0,1]$, és $\int_0^1 f = 0$. Ugyanakkor az

$$a_n := n \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

esetben az integrálok $\left(\int_0^1 f_n\right)$ sorozata konvergens, de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \lim(1) = 1 \neq 0 = \int_0^1 f = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Az

$$a_n := (-1)^n \cdot n \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

választással az $\left(\int_0^1 f_n\right) = \left((-1)^n\right)$ sorozat nem konvergens.

Az f határfüggvényre az sem teljesül „automatikusan", hogy integrálható. Legyen ui. az (r_k) sorozat a $[0,1]$-beli racionális számok sorozata, és

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, ..., r_n\}) \\ 0 & (x \notin \{r_0, ..., r_n\}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in R[0,1]$ és $\int_0^1 f_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, tehát létezik az integrálsorozat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$ határértéke, azonban az

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1])$$

határfüggvény (a jól ismert Dirichlet-függvény) nem Riemann-integrálható.

A határérték az analízis egyik központi fogalma, ezért az előbbi hiányosságok meglehetősen súlyosak. Csak „erős" kiegészítő feltételek mellett biztosítható a fenti kérdésekre az igenlő válasz. Ilyen feltétel a szóban forgó függvénysorozat egyenletes konvergenciája: az $X \neq \emptyset$ halmazon értelmezett

$$g_n : X \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló (g_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ index, hogy

$$|g_n(t) - g_m(t)| < \varepsilon \qquad (t \in X, N < n, m \in \mathbf{N}).$$[1]

Ekkor bármilyen $t \in X$ helyen létezik a $\lim_{n\to\infty} g_n(t) \in \mathbf{R}$ határérték[2], azaz a (g_n) sorozat pontonként is konvergál a

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} g_n(t) \qquad (t \in X)$$

határfüggvényhez. Továbbá

$$|g_n(t) - g(t)| = \lim_{m\to\infty} |g_n(t) - g_m(t)| \leq \varepsilon \qquad (t \in X, N < n \in \mathbf{N}).$$

Innen az is rögtön következik, hogy ha az egyenletesen konvergens (g_n) függvénysorozatban szereplő valamennyi $g_n \quad (n \in \mathbf{N})$ függvény korlátos:

$$C_n := \sup\{|g_n(t)| \in \mathbf{R} : t \in X\} < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a (g_n) sorozat *egyenletesen korlátos,* azaz egy alkalmas (az n-től független) $C \geq 0$ számmal

$$|g_n(t)| \leq C \qquad (t \in X, n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, legyen az előbbiekben pl. $\varepsilon := 1$, ekkor az $N < n \in \mathbf{N}$ indexekre

$$|g_n(t)| \leq |g_n(t) - g_{N+1}(t)| + |g_{N+1}(t)| <$$

$$1 + |g_{N+1}(t)| \leq 1 + C_{N+1} \quad (t \in X),$$

így pl. a

$$C := \max\{C_0, ..., C_N, 1 + C_{N+1}\}$$

választás megfelelő.

A fenti példáink azt mutatják, hogy az egyenletes konvergencia „erősebb" feltétel a pontonkénti konvergenciánál: ha egy függvénysorozat pontonként konvergens, abból minden további nélkül nem következik, hogy egyenletesen is konvergens.

[1] *Egyenletes Cauchy-kritérium.*

[2] Ui. nyilvánvaló, hogy bármely $t \in X$ mellett a $(g_n(t))$ számsorozatra teljesül a Cauchy-kritérium.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ *függvényekből álló* (f_n) *függvénysorozat egyenletesen konvergens, legyen* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *a határfüggvénye:*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Ekkor $f \in R[a,b]$, *és*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ és $N \in \mathbf{N}$ olyan index, amellyel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [a,b], N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen tetszőleges $I \subset [a,b]$ intervallummal

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| <$$

$$2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(y)| \qquad (x, y \in I, N < n \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$O_I(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| \in \mathbf{R} : x, y \in I\} \leq 2\varepsilon + O_I(f_n) \quad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát a $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ egy tetszőleges felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, akkor

$$\omega(f,\tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} O_I(f)\cdot |I| \leq \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \Big(2\varepsilon + O_I(f_n)\Big)\cdot |I| =$$

$$2(b-a)\cdot\varepsilon + \omega(f_n,\tau) \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel az itt szereplő f_n függvény Riemann-integrálható: $f_n \in R[a,b]$, ezért a τ felosztás megválasztható úgy, hogy $\omega(f_n,\tau) < \varepsilon$ teljesüljön, amikor is

$$\omega(f,\tau) < (2(b-a)+1)\cdot\varepsilon.$$

Ezért $f \in R[a,b]$, valamint

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \int_a^b \varepsilon = (b-a)\cdot\varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N})$$

miatt az

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség is világos. ■

Az előbbi tételben szereplő valamennyi $f_n \quad (n \in \mathbf{N})$ függvény korlátos. Ezért az (f_n) függvénysorozat egyenletesen korlátos.

Ha az egyenletes konvergenciát megpróbáljuk a jóval „gyengébb" pontonkénti konvergenciával helyettesíteni, akkor „legfeljebb" a határátmenet és az integrálás felcserélhetőségét tudjuk elérni, de ehhez – jobb híján – fel kell téteteleznünk a határfüggvény Riemann-integrálhatóságát. Nevezetesen, az ún. *Arzelà*[3]*–Osgood*[4]*-tétel* a következőt állítja:

2. Tétel. *Ha az $f_n \in R[a,b]$ sorozat egyenletesen korlátos, azaz egy alkalmas $C \geq 0$ korláttal*

$$|f_n(x)| \leq C \qquad (x \in [a,b], n \in \mathbf{N})$$

teljesül, továbbá létezik az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbf{R} \qquad (x \in [a,b])$$

határfüggvény, akkor $f \in R[a,b]$ esetén igaz az

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

egyenlőség.[5]

3. Teljesség.

Tekintsük az $[a,b]$-n Riemann-integrálható függvények $R[a,b]$ halmazát, és legyen

$$\rho(f,g) := \int_a^b |f-g| \qquad (f,g \in R[a,b]).$$

Ekkor a

$$\rho : R[a,b] \times R[a,b] \to [0,+\infty)$$

leképezés félmetrika az $R[a,b]$-n, de az $(R[a,b],\rho)$ félmetrikus tér nem teljes. Más szóval van olyan $f_n \in R[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat, amelyik a ρ értelmében Cauchy-sorozat:

$$\rho(f_n,f_m) = \int_a^b |f_n - f_m| \to 0 \qquad (n,m \to \infty),$$

[3]Cesare Arzelà (1847 – 1912).

[4]William Fogg Osgood (1864 – 1943).

[5]Arzelà ezt a tételét 1885-ben közölte, azonban mindez elkerülte az akkori matematikus közvélemény figyelmét. Annyira, hogy Osgood 1897-ben újra „fölfedezte" a tételt, de csak abban a speciális esetben, amikor a szóban forgó függvénysorozat minden tagja és a határfüggvény is folytonos.

de (ugyancsak a ρ értelmében) nem konvergens: nincs olyan $f \in R[a,b]$ függvény, amellyel

$$\rho(f_n, f) = \int_a^b |f_n - f| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Legyen ui. az egyszerűség kedvéért $[a,b] := [0,1]$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n} & (0 \le x \le 1/n) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & (1/n \le x \le 1) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor tetszőleges $n, m \in \mathbf{N}, 0 < n < m$ indexekre

$$\int_0^1 |f_n - f_m| = \int_0^{1/m} (\sqrt{m} - \sqrt{n}) + \int_{1/m}^{1/n} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{n} \right) dx =$$

$$\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{m} + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{m}} - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

azaz az (f_n) sorozat Cauchy-sorozat.

Ugyanakkor nem konvergens (a ρ félmetrika értelmében). Tegyük fel ui., hogy van olyan $f \in R[0,1]$ függvény, amelyre

$$\int_0^1 |f_n - f| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ekkor minden olyan $0 < x < 1$ helyen, ahol az f folytonos, szükségképpen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Különben az f egy $\xi \in (0,1)$ folytonossági pontjában

$$\left| f(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right| > 0.$$

Tehát valamilyen $\delta > 0$ szám mellett $[\xi - \delta, \xi + \delta] \subset (0,1)$ és

$$\left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| > \varepsilon := \frac{|f(\xi) - 1/\sqrt{\xi}|}{3} \ (> 0) \qquad (\xi - \delta \le t \le \xi + \delta).^6$$

[6] $3\varepsilon = |f(\xi) - 1/\sqrt{\xi}| \le |f(\xi) - f(t)| + |f(t) - 1/\sqrt{t}| + |1/\sqrt{t} - 1/\sqrt{\xi}| < |f(t) - 1/\sqrt{t}| + 2\varepsilon$. (Figyelembe véve a $0 < z \mapsto 1/\sqrt{z}$ függvény folytonosságát is.)

Ezért tetszőleges $1 \le n \in \mathbf{N}, 1/n < \xi - \delta$ mellett[7]

$$\int_0^1 |f_n - f| \ge \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| dt \ge \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varepsilon \ge 2\delta \cdot \varepsilon \ (> 0).$$

Innen nyilvánvaló, hogy $\rho(f_n, f) \to 0 \ \ (n \to \infty)$ nem teljesülhet.

A Lebesgue-kritérium miatt $f \in R[0,1]$ esetén az f szakadási helyeinek a halmaza nullamértékű. Mivel minden $0 < r < 1$ számra a $(0, r)$ intervallum nem nullamértékű, ezért egy alkalmas $\xi_r \in (0, r)$ választással $f \in C\{\xi_r\}$, így az előbbiek szerint

$$f(\xi_r) = \frac{1}{\sqrt{\xi_r}} \to +\infty \qquad (r \to 0).$$

Ebből következően az f nem korlátos. Ekkor viszont $f \notin R[0,1]$, szemben a feltételezéssel.

4. A Riesz-féle felépítés.

Bizonyos szempontból a legsúlyosabb hiányossága a Riemann-integrálnak a határátmenettel szembeni „nehézkes" viselkedése. Ezt a szempontot helyezte a középpontba Riesz Frigyes[8], amikor – nem sokkal Lebesgue nevezetes eredményeinek a megjelenése után – a Lebesgue-féle gondolat egy új interpretálását fogalmazta meg. Az alábbiakban röviden vázoljuk a Riesz-féle felépítés alapgondolatát.[9]

Induljunk ki ehhez egy kompakt $[a, b]$ intervallumból. A

$$h : [a, b] \to \mathbf{R}$$

függvényt *lépcsősfüggvénynek* nevezzük, ha alkalmas

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

osztópontokkal és $c_0, ..., c_{n-1} \in \mathbf{R}$ konstansokkal (valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett) minden $k = 0, ..., n-1$ esetén

$$h(x) = c_k \qquad (x_k < x < x_{k+1}).$$

A $h(x_j) \in \mathbf{R} \ \ (j = 0, ..., n)$ helyettesítési értékek tetszőlegesek lehetnek. Legyen ekkor a h függvény *integrálja* a következő:

$$\int_a^b h := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

[7]Más szóval egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbbel minden $N < n \in \mathbf{N}$ indexre.

[8]Riesz Frigyes (1880 – 1956).

[9]Ld. Szőkefalvi-Nagy B.: *Valós függvények és függvénysorok* (egyetemi tankönyv).

(Világos, hogy $h \in R[a,b]$, és az előbbi $\int_a^b h$ nem más, mint a h függvény Riemann-integrálja.)

Az előbbiekben definiált lépcsősfüggvények halmazát C_0-val fogjuk jelölni. Alapvető fontosságú Riesz alábbi két lemmája, amelyeket ő A. Lemmának és B. Lemmának nevezett.

A. Lemma. *Tegyük fel, hogy a* $h_n \in C_0 \quad (n \in \mathbf{N})$ *lépcsősfüggvény-sorozatra a következők teljesülnek:*

1^o *minden* $x \in [a,b]$ *és* $n \in \mathbf{N}$ *mellett* $0 \le h_{n+1}(x) \le h_n(x)$;

2^o *valamilyen nullamértékű* $\mathcal{N} \subset [a,b]$ *halmazzal*

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0 \qquad (x \in [a,b] \setminus \mathcal{N}).$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = 0.$

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbf{N}$ indexre a h_n osztópontjai véges halmazt alkotnak, így ez utóbbiak egyesítése egy legfeljebb megszámlálható halmaz, következésképpen nullamértékű. Ha ezt a tételben szereplő $\mathcal{N}$ halmazzal egyesítjük, akkor „még mindig" egy $\mathcal{R} \subset [a,b]$ nullamértékű halmazt kapunk. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik nyílt intervallumoknak egy olyan (I_n) sorozata, amellyel

$$\mathcal{R} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \ \text{ és } \ \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Ha $x \in [a,b] \setminus \mathcal{R}$, akkor $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Így létezik olyan $N_x \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$h_m(x) < \varepsilon \qquad (N_x \le m \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan $h_{N_x}(x) < \varepsilon$. Mivel az x nem osztópontja a h_{N_x}-nek, ezért valamilyen $J_x \subset [a,b]$ nyílt intervallummal $x \in J_x$ és

$$h_{N_x}(t) = h_{N_x}(x) < \varepsilon \qquad (t \in J_x).$$

A (h_n) sorozat feltételezett monoton fogyása alapján egyúttal

$$h_m(t) < \varepsilon \qquad (t \in J_x, N_x \le m \in \mathbf{N})$$

is igaz. Világos, hogy

$$[a,b] \subset \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{x\in[a,b]\setminus\mathcal{R}} J_x\Big),$$

ezért a Borel-féle lefedési tételre tekintettel egy-egy véges

$$U \subset \mathbf{N},\ V \subset [a,b] \setminus \mathcal{R}$$

halmazzal is

$$[a,b] \subset \Big(\bigcup_{n\in U} I_n \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{x\in V} J_x \Big).$$

Az $[a,b]$ előbbi lefedésében szereplő intervallumok $[a,b]$-beli végpontjai (ha kell, az a, b pontok hozzávételével) egy

$$z_0 = a < \ldots < z_s = b$$

felosztást határoznak meg valamilyen $s \in \mathbf{N}$ mellett. Legyen

$$N := \max\{N_x : x \in V\},$$

ekkor minden $N < n \in \mathbf{N}$ indexre

$$0 \leq \int_a^b h_n = \sum_k^{(1)} \int_{z_k}^{z_{k+1}} h_n + \sum_k^{(2)} \int_{z_k}^{z_{k+1}} h_n,$$

ahol $\sum_k^{(1)}$ az olyan $k = 0, ..., s-1$ indexekre vonatkozó összegzést jelenti, amelyekre egy alkalmas $j \in U$ esetén

$$(z_k, z_{k+1}) \subset I_j,$$

a $\sum_k^{(2)}$ összegzés pedig a maradék $k = 0, ..., s-1$ indexekre vonatkozik. Minden utóbbi k-ra valamilyen $x \in V$ hellyel

$$(z_k, z_{k+1}) \subset J_x.$$

Azt mondhatjuk, hogy a h_0 függvény egy K felső korlátjával

$$0 \leq \int_a^b h_n \leq K\cdot \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| + \varepsilon\cdot \sum_{k=0}^{s-1} (z_{k+1} - z_k) < K\cdot \varepsilon + \varepsilon\cdot (b-a).$$

Mindez azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = 0.$ ■

B. Lemma. *Az előbbiekben szereplő* $h_n \in C_0 \quad (n \in \mathbf{N})$ *lépcsősfüggvény-sorozatról most azt tegyük fel, hogy*

1^o *minden* $x \in [a,b]$ *és* $n \in \mathbf{N}$ *mellett* $h_n(x) \le h_{n+1}(x)$;

2^o *az integrálok* $\left(\int_a^b h_n\right)$ *sorozata korlátos.*

Ekkor egy alkalmas nullamértékű $\mathcal{M} \subset [a,b]$ *halmazzal*

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) < +\infty \qquad (x \in [a,b] \setminus \mathcal{M}).$$

Bizonyítás. Nyugodtan feltehetjük, hogy a szóban forgó h_n-ek valamennyien nemnegatívok.[10] Legyen ekkor

$$A := \{x \in [a,b] : \sup_n h_n(x) = +\infty\}.$$

Megmutatjuk, hogy az A halmaz nullamértékű. Legyen ehhez $\delta > 0$ és

$$A_{n\delta} := \{x \in [a,b] : h_n(x) > \delta\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $A_{n\delta} \subset A_{n+1\delta} \quad (n \in \mathbf{N})$, és

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n\delta}.$$

Mivel minden h_n lépcsősfüggvény, ezért az $A_{n\delta}$ halmaz legfeljebb véges sok (egymásba nem nyúló) $I_{nk} \quad (k = 0, 1, ...)$ intervallum és (osztó)pont egyesítése $(n \in \mathbf{N})$. Ha

$$q := \sup_n \int_a^b h_n,$$

akkor

$$q \ge \int_a^b h_n \ge \sum_k \int_{I_{nk}} h_n \ge \delta \cdot \sum_k |I_{nk}| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Más szóval

$$(*) \qquad \sum_k |I_{nk}| \le \frac{q}{\delta} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen adott az $\varepsilon > 0$ szám, és fedjük le a h_n-ek osztópontjainak az egyesítését (ami egy legfeljebb megszámlálható, ezért nullamértékű halmaz)

[10] Ui. ellenkező esetben tekintsük a $(h_n - h_0)$ (már nyilván nemnegatív és C_0-beli) sorozatot. Ha pedig a nullamértékű $\mathcal{M} \subset [a,b]$ halmazzal $\lim_{n\to\infty}\Big(h_n(x) - h_0(x)\Big) < +\infty$ $(x \in [a,b] \setminus \mathcal{M})$ igaz, akkor ugyanez teljesül a (h_n) sorozatra is.

$J_n \quad (n \in \mathbf{N})$ intervallumoknak egy $\varepsilon/2$-nél kisebb összhosszúságú sorozatával. Ha $n \in \mathbf{N}$ és I_{nk} egy, az $A_{n\delta}$ halmazt „alkotó" intervallum, akkor a (h_n) sorozat monoton növekedése miatt $I_{nk} \subset A_{n+1\delta}$. Így vagy az I_{nk} lesz egy, az $A_{n+1\delta}$-ban szereplő intervallum, vagy esetleg az I_{nk} egy hosszabb intervallummá bővül az $A_{n+1\delta}$-ban. Ezért az $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n\delta}$ halmazt (az osztópontoktól eltekintve) legfeljebb megszámlálható sok olyan $I_n \quad (n = 0, 1, ...)$ intervallum alkotja, amelyeknek az összhosszára $(*)$ alapján

$$\sum_n |I_n| \leq \frac{q}{\delta}$$

teljesül. Ha itt a $\delta > 0$ számot úgy választjuk meg, hogy $q/\delta < \varepsilon/2$, akkor az $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n\delta}$ halmazt, és így az A-t lefedő $J_n, I_n \quad (n = 0, 1, ...)$ intervallumokra

$$\sum_n |J_n| + \sum_n |I_n| < \varepsilon.$$

Ezért az A halmaz valóban nullamértékű. ■

Jelöljük ezek után C_1-gyel azoknak az

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

függvényeknek a halmazát, amelyekre egy, a B. Lemmában szereplő $h_n \in C_0$ $(n \in \mathbf{N})$ lépcsősfüggvény-sorozattal (és az ottani $\mathcal{M} \subset [a, b]$ nullamértékű halmazzal)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) < +\infty \qquad (x \in [a, b] \setminus \mathcal{M}).$$

Mivel (a B. Lemma feltételei szerint) minden ilyen (h_n) sorozatra az integrálok $\left(\int_a^b h_n\right)$ sorozata korlátos (és monoton növő), ezért

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n \in \mathbf{R}.$$

Megmutatható, hogy ez utóbbi határérték független a (h_n) sorozattól, csak az f függvénytől függ. Ezért van értelme az alábbi integrál-definíciónak:

$$\int_a^b f := \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n.$$

Nyilvánvaló, hogy ha itt $f \in C_0$, akkor a $h_n := f \quad (n \in \mathbf{N})$ választással a (h_n) sorozat egy, a B. Lemma feltéleinek eleget tevő lépcsősfüggvény-sorozat. Ezért $f \in C_1$, és az f függvény „C_1-beli"

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f = \int_a^b f$$

integrálja ugyanaz, mint a „C_0-beli" integrálja. Röviden: a C_1 „tér" (az integrállal együtt) kiterjesztése a C_0-nak.

Legyen végül

$$C_2 := \{g - h : g, h \in C_1\}.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha valamilyen $g, h, G, H \in C_1$ függvényekkel $g - h = G - H$, akkor

$$\int_a^b g - \int_a^b h = \int_a^b G - \int_a^b H.$$

Más szóval az előbbi $\displaystyle\int_a^b g - \int_a^b h$ különbség valójában nem függ a g, h függvényektől, csak az $f := g - h$-tól. Ezért az ilyen f függvény integrálját definiálhatjuk az alábbiak szerint:

$$\int_a^b f := \int_a^b g - \int_a^b h.$$

A C_2 függvényosztály elemei a *Lebesgue-integrálható* függvények, $f \in C_2$ esetén pedig az előbbi $\displaystyle\int_a^b f$ szám az f *Lebesgue-integrálja.*

Pl. a már említett

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, ..., r_n\}) \\ \\ 0 & (x \notin \{r_0, ..., r_n\}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozatra (ahol az (r_k) sorozat a $[0,1]$-beli racionális számok sorozata) nyilván $f_n \in C_0$ és $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Mivel $\displaystyle\int_0^1 f_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért az (f_n) eleget tesz a B. Lemma feltételeinek. Továbbá az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1])$$

határfüggvény a (nem Riemann-integrálható) Dirichlet-függvény. Következésképpen $f \in C_1$, és (Lebesgue-értelemben)

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0.$$

5. Megjegyzések.

i) Ha adott egy $A \subset [a, b]$ halmaz, akkor a

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ \\ 0 & (x \in [a, b] \setminus A) \end{cases}$$

függvény az A *karakterisztikus függvénye.* Azt mondjuk, hogy az A halmaz *Lebesgue-mérhető,* ha $\chi_A \in C_2$. Ez utóbbi esetben

$$|A| := \int_a^b \chi_A$$

az A halmaz *Lebesgue-mértéke.*[11] Így bármilyen korlátos $A \subset \mathbf{R}$ halmaz esetén eldönthetjük, hogy az Lebesgue-mérhető-e, és ha igen, akkor értelmeztük az $|A|$ Lebesgue-mértékét. Ha az $A \subset \mathbf{R}$ nem korlátos, akkor az

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(A \cap [-n, n] \Big) =: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

felbontásra hivatkozva azt mondjuk, hogy az A *Lebesgue-mérhető,* ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az A_n Lebesgue-mérhető. Ebben az esetben

$$|A| := \lim_{n \to \infty} |A_n|$$

az A *Lebesgue-mértéke.* Pl. bármilyen $I \subset \mathbf{R}$ intervallum Lebesgue-mérhető, és az $|I|$ Lebesgue-mértéke a „megszokott" $|I|$ intervallumhossz.

ii) Legyen az

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

függvény Riemann-integrálható, a τ_n $(n \in \mathbf{N})$ az $[a, b]$ intervallumnak egy „minden határon túl finomodó" felosztás-sorozata: ha $n \in \mathbf{N}$, akkor $\tau_n \subset \tau_{n+1}$, továbbá a τ_n elemeit x_{in}-ekkel $(i = 0, ..., v_n \in \mathbf{N})$ jelölve

$$a = x_{0n} < x_{1n} < \ldots < x_{v_n n} = b$$

és

$$\lim_{n \to \infty} \max\{x_{in} - x_{i-1n} : i = 1, ..., v_n\} = 0.$$

[11] Könnyű meggondolni, hogy az így definiált $|A|$ mérték csak az A halmaztól függ, az őt „lefedő" $[a, b]$ intervallumtól nem.

Ha $i = 1, ..., v_n$ és

$$m_{in} := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1n}, x_{in}]\},$$

$$M_{in} := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1n}, x_{in}]\},$$

akkor legyen

$$\varphi_n := \sum_{i=1}^{v_n-1} m_{in} \cdot \chi_{[x_{i-1n}, x_{in})} + m_{s_n n} \cdot \chi_{[x_{v_n-1n}, x_{v_n n}]},$$

$$\Phi_n := \sum_{i=1}^{v_n-1} M_{in} \cdot \chi_{[x_{i-1n}, x_{in})} + M_{s_n n} \cdot \chi_{[x_{v_n-1n}, x_{v_n n}]} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A (φ_n) monoton növekedő, a (Φ_n) pedig monoton fogyó függvénysorozat, ezeket lépcsősfüggvények alkotják. Az

$$\int_a^b \varphi_n = \sum_{i=1}^{v_n} m_{in}(x_{in} - x_{i-1n}) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\int_a^b \Phi_n = \sum_{i=1}^{v_n} M_{in}(x_{in} - x_{i-1n}) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

Riemann-(alsó-felső) közelítő összegekből álló monoton számsorozatok az f függvény Riemann-integráljához konvergálnak:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n = \int_a^b f.$$

Később kiderül, hogy m.m. értelemben a szóban forgó lépcsősfüggvénysorozatok az f függvényhez konvergálnak.