Mérték, integrál, ...

9. Előadás

1. Integrálható függvények.

Legyen adott az $X \neq \emptyset$ halmaz, az (X, Ω, μ) mértéktér, és tekintsünk egy

$$f : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

függvényt. Ha

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases} \qquad (x \in X)$$

(az f függvény *pozitív része*),

$$f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & (f(x) \leq 0) \\ \\ 0 & (f(x) > 0) \end{cases} \qquad (x \in X),$$

(az f függvény *negatív része*), akkor

$$f = f^+ - f^- \text{ és } |f| = f^+ + f^-.$$

Világos, hogy f^+, $f^- \geq 0$, továbbá

$$f^+ := \max\{f, 0\} \text{ és } f^- := -\min\{f, 0\} = (-f)^+.$$

Ha az f függvény mérhető, akkor az f^+, f^- függvények is mérhetők, következésképpen f^+, $f^- \in L^+$.

Mindezek alapján kézenfekvő az integrálfogalom alábbi kiterjesztése:

1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvénynek *van integrálja*, ha az $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu$ integrálok közül legalább az egyik véges $(< +\infty)$. Ez utóbbi esetben legyen

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

az f függvénynek a μ mérték szerinti *integrálja.*

Az így definiált integrált illetően azt mondhatjuk, hogy

$$\int f\,d\mu \in \mathbf{R},\ \text{ha}\ \int f^+\,d\mu,\ \int f^-\,d\mu < +\infty,$$

$$\int f\,d\mu = +\infty,\ \text{ha}\ \int f^+\,d\mu = +\infty\ \text{ és}\ \int f^-\,d\mu < +\infty,$$

$$\int f\,d\mu = -\infty,\ \text{ha}\ \int f^+\,d\mu < +\infty\ \text{ és}\ \int f^-\,d\mu = +\infty.$$

Ha $f \in L^+$, akkor $f^- \equiv 0$ miatt $\int f^-\,d\mu = 0$, ezért az f integrálja az L^+-beli definíció szerint ugyanaz, mint a fenti definíció szerint. Más szóval tehát minden L^+-beli függvénynek van integrálja a most mondott értelemben is.

A későbbiekben azok a függvények lesznek különösen fontosak a számunkra, amelyeknek van integrálja, és az véges. Minden ilyen függvényt *integrálható függvénynek* nevezünk. Vezessük be ezzel kapcsolatban a következő jelölést:

$$L := L(\mu) := \left\{ f : X \to \overline{\mathbf{R}} : \int f\,d\mu \in \mathbf{R} \right\}.$$

Az előbbiek szerint tehát egy $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvény pontosan akkor eleme az L-nek, ha az f mérhető, és

$$\int f^+\,d\mu,\ \int f^-\,d\mu < +\infty.$$

Az L függvényosztály is rendelkezik az integrál legfontosabb tulajdonságaival:

1. Tétel. *Legyen* $f, g \in L$, $\alpha \in \mathbf{R}$. *Ekkor*

a) $\alpha f \in L$ *és* $\int (\alpha f)\,d\mu = \alpha \cdot \int f\,d\mu$;

b) *ha* $f + g : X \to \overline{\mathbf{R}}$, *akkor* $f + g \in L$ *és*

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu;$$

c) $\max\{f, g\},\ \min\{f, g\} \in L$;

d) *ha* $f \le g$, *akkor* $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$;

e) $\left| \int f\,d\mu \right| \le \int |f|\,d\mu$.

2. Tétel. *Ha* $f,\, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *mérhető függvények, valamint*

a) $f = g$ μ-m.m., *akkor* $f \in L$ *esetén* $g \in L$ *és* $\displaystyle\int g\, d\mu = \int f\, d\mu$;

b) $f \le g$ μ-m.m. *és* $f,\, g \in L$, *akkor* $\displaystyle\int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$;

c) *minden* L*-beli* f *függvényre igaz, hogy* $|f| < +\infty$ μ-m.m.

Azt mondjuk, hogy a mérhető $f,\, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények *ekvivalensek,* ha $f = g$ μ-m.m. Jelöljük ezt a tényt a következőképpen: $f \sim g$. Világos, hogy a $\sim$ reláció egy ekvivalencia a mérhető $X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények $\mathcal{M}$ halmazában. Legyen az $f \in \mathcal{M}$ függvényre

$$\widehat{f} := \{g \in \mathcal{M} : g \sim f\}$$

az f által meghatározott ekvivalenciaosztály. Ha itt $f \in L$, akkor tetszőleges $g \in \widehat{f}$ függvényre $g \in L$ és $\displaystyle\int g\, d\mu = \int f\, d\mu$. Ezért van értelme az alábbi megállapodásnak:

$$\int \widehat{f}\, d\mu := \int g\, d\mu,$$

ahol a $g \in \widehat{f}$ tetszőlegesen választott függvény.

Bármilyen $f \in L$ függvényt is véve könnyen adódik olyan $F_f \in \widehat{f}$, amelyik „véges értékű", azaz $\mathcal{R}_{F_f} \subset \mathbf{R}$. Valóban,[1] $|f| < +\infty$ μ-m.m., azaz egy $A \in \Omega$ halmazzal $\mu(A) = 0$ és

$$|f(x)| < +\infty \qquad (x \in X \setminus A).$$

Legyen $F_f := f \cdot \chi_{X \setminus A}$, ekkor

$$F_f(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbf{R} & (x \in X \setminus A) \\ \\ 0 & (x \in A). \end{cases}$$

Világos, hogy az F_f függvény mérhető, és $f = F_f$ μ-m.m., tehát $F_f \sim f$.

Ha $g \in L$, akkor bármilyen $\lambda \in \mathbf{R}$ együtthatóval létezik az

$$F_f + \lambda G_g : X \to \mathbf{R}$$

mérhető függvény, $F_f + \lambda G_g \in L$ és

$$\int (F_f + \lambda G_g)\, d\mu = \int F_f\, d\mu + \lambda \cdot \int G_g\, d\mu = \int f\, d\mu + \lambda \cdot \int g\, d\mu.$$

[1] Ekkor $f^{\pm} \in L^{+}$ és $\int f^{\pm}\, d\mu < +\infty$ miatt $f^{\pm} < +\infty$ μ-m.m.

Ezért állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban az $f+\lambda g$ lineáris kombináción az $F_f+\lambda G_g$ függvényt (ill. a vele ekvivalens bármelyik függvényt) fogjuk érteni. Más szóval a

$$\Phi := F_f + \lambda G_g$$

jelöléssel legyen

$$\widehat{f} + \lambda\widehat{g} := \widehat{\Phi}.$$

Ezzel a művelettel az $\widehat{f}$ $(f \in L)$ ekvivalenciaosztályok $\widehat{L}$ halmaza vektortér az $\mathbf{R}$ felett, az

$$\widehat{L} \ni \widehat{f} \mapsto \int \widehat{f}\, d\mu$$

hozzárendelés pedig lineáris. Így az eddig mondottak szerint azt írhatjuk, hogy minden $f, g \in L$ és $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén

$$\int (f+\lambda g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \lambda \cdot \int g\, d\mu.$$

2. ***L^p*-terek.**

Tetszőleges $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvény és $0 < p < +\infty$ „kitevő" esetén az

$$|f|^p : X \to [0, +\infty]$$

függvény is mérhető.[2] Tehát $|f|^p \in L^+$, legyen

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

(ahol $(+\infty)^{1/p} := +\infty$) az f ún. *p-normája.*

A korábbi tételeink alapján már világos, hogy

- $0 \le \|f\|_p \le +\infty$;
- $\|f\|_p < +\infty \implies |f| < +\infty$ μ-m.m.;
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ μ-m.m.;
- $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$ $(c \in \mathbf{R})$.

[2] Ha $\alpha > 0$, akkor $\{|f|^p > \alpha\} = \{|f| > \alpha^{1/p}\}$.

Az $\|f\|_p$ értelmezését terjesszük ki a $p := +\infty$ esetre is az alábbiak szerint: egy $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvényre legyen[3]

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : |f| \leq \alpha \ \ \mu\text{-m.m.}\}.$$

Így azt mondhatjuk, hogy

$$0 \leq \|f\|_\infty \leq +\infty.$$

Az nyilvánvaló, hogy

$$\|cf\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty \qquad (c \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy $\|f\|_\infty < +\infty$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $\alpha \geq 0$ szám, amivel $|f| \leq \alpha$ μ-m.m. Az is igaz továbbá, hogy

$$|f| \leq \|f\|_\infty \ \ \mu\text{-m.m.}$$

és

$$\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0 \ \ \mu\text{-m.m.}$$

3. Tétel (Hölder[4]-egyenlőtlenség). *Tegyük fel, hogy az $1 \leq p,\, q \leq +\infty$ kitevőkre*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ekkor tetszőleges $f,\, h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ mérhető függvényekre

$$\|fh\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_q.$$

Bizonyítás. Ha $\|f\|_p \cdot \|h\|_q = 0$, azaz $\|f\|_p = 0$ vagy $\|h\|_q = 0$, akkor az előzőleg mondottak szerint $f = 0$ μ-m.m. vagy $h = 0$ μ-m.m., tehát egyúttal $|fh| = |f| \cdot |h| = 0$ μ-m.m. Innen

$$\|fh\|_1 = \int |fh| \, d\mu = 0$$

következik. Ekkor tehát a tétel állítása triviális. Ez utóbbi mondható nyilván akkor is, ha $\|f\|_p \cdot \|h\|_q = +\infty$.

Ezért feltehető a továbbiakban, hogy

$$0 < \|f\|_p,\ \|h\|_q < +\infty.$$

---

[3] Állapodjunk meg abban, hogy $\inf \emptyset := +\infty$.

[4] Ludwig Otto Hölder (1859 – 1937).

Ekkor $|f|, |h| < +\infty$ μ-m.m., azaz egy $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmazzal

$$|f(x)|, |h(x)| < +\infty \qquad (x \in X \setminus A).$$

Tegyük fel először, hogy $p = 1$, amikor is $q = +\infty$. Mivel

$$|fh| \leq \|h\|_\infty \cdot |f| \quad \mu\text{-m.m.},$$

ezért

$$\|fh\|_1 = \int |fh|\, d\mu \leq \|h\|_\infty \cdot \Big(\int |f|\, d\mu \Big) = \|f\|_1 \cdot \|h\|_\infty .$$

A továbbiakban $1 < p, q < +\infty$. Ekkor minden $a, b \in [0, +\infty)$ esetén

$$(*) \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ezt elegendő $a, b > 0$ mellett igazolni. Tekintsük ehhez a

$$\varphi(t) := \frac{t^p}{p} - bt + \frac{b^q}{q} \qquad (t > 0)$$

függvényt. Mivel a φ differenciálható és a

$$\varphi'(t) = t^{p-1} - b \qquad (t > 0)$$

deriváltfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért a $c := b^{\frac{1}{p-1}}$ jelöléssel $\varphi'(c) = 0$ miatt a φ-nek a c-ben abszolút minimuma van. Tekintve, hogy $\varphi(c) = 0$, ezért $\varphi \geq 0$, amit igazolni kellett.

Alkalmazzuk a most bebizonyított elemi egyenlőtlenséget minden egyes $x \in X \setminus A$ mellett az

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b := \frac{|h(x)|}{\|h\|_q}$$

szereposztással. Ekkor (a $(*)$ becslésre tekintettel) az

$$\frac{|fh|}{\|f\|_p \cdot \|h\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p \cdot \|f\|_p^p} + \frac{|h|^q}{q \cdot \|h\|_q^q} \quad \mu\text{-m.m.}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Innen az integrál monotonitása alapján

$$\frac{\|fh\|_1}{\|f\|_p \cdot \|h\|_q} = \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|h\|_q} \cdot \int |fh|\, d\mu \leq$$

$$\frac{1}{p \cdot \|f\|_p^p} \cdot \int |f|^p\, d\mu + \frac{1}{q \cdot \|h\|_q^q} \cdot \int |h|^q\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

adódik, amit bizonyítani kellett. ∎

4. Tétel. *Legyen az* $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *függvény mérhető. Ekkor:*

a) $\|f\|_\infty = +\infty$ *esetén* $\lim\limits_{q\to+\infty} \|f\|_q = +\infty$;

b) *ha van olyan* $0 < p < +\infty$ *kitevő, amivel* $\|f\|_p < +\infty$, *akkor*

$$\lim_{q\to+\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\|f\|_\infty = +\infty$. Ekkor bármilyen $K > 0$ mellett $\mu(\{|f| > K\}) > 0$. Ezért a $0 < q < +\infty$ kitevőkre az

$$|f|^q \geq |f|^q \cdot \chi_{\{|f|>K\}} \geq K^q \cdot \chi_{\{|f|>K\}}$$

becslés miatt (a $(+\infty)^{1/q} := +\infty$ megállapodással)

$$\|f\|_q = \left(\int |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \geq \left(\int |f|^q \cdot \chi_{\{|f|>K\}} \, d\mu\right)^{1/q} \geq$$

$$\left(\int K^q \cdot \chi_{\{|f|>K\}} \, d\mu\right)^{1/q} = K \cdot \Big(\mu(\{|f| > K\})\Big)^{1/q},$$

amiből

$$\liminf_{q\to+\infty} \|f\|_q \geq K$$

következik. Mivel itt a $K > 0$ tetszőleges volt, ezért

$$\liminf_{q\to+\infty} \|f\|_q = +\infty.$$

Egyúttal tehát

$$\limsup_{q\to+\infty} \|f\|_q = +\infty$$

is igaz, azaz valóban létezik a

$$\lim_{q\to+\infty} \|f\|_q = \liminf_{q\to+\infty} \|f\|_q = +\infty$$

határérték. Ezzel az a) állítást beláttuk.

Ha $\|f\|_\infty = 0$, akkor $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-m.m. miatt $f = 0$ μ-m.m., így egyúttal $\|f\|_q = 0$ is igaz minden $(0, +\infty) \ni q$-ra. Ebben az esetben tehát a b) állítás triviális.

Legyen a továbbiakban $0 < \|f\|_\infty < +\infty$ és $\|f\|_p > 0$, valamint egy $\alpha \in (0, 1)$ szám mellett tekintsük az

$$A_\alpha := \{|f| > \alpha \cdot \|f\|_\infty\}$$

halmazt. Ekkor az A_α mérhető, és a $\|\cdot\|_\infty$ definíciója szerint $\mu(A_\alpha) > 0$. Mivel

$$|f|^p \geq |f|^p \cdot \chi_{A_\alpha} \geq (\alpha \cdot \|f\|_\infty)^p \cdot \chi_{A_\alpha},$$

ezért

$$+\infty > \|f\|_p^p = \int |f|^p \, d\mu \geq \int |f|^p \cdot \chi_{A_\alpha} \, d\mu \geq$$

$$\int (\alpha \cdot \|f\|_\infty)^p \cdot \chi_{A_\alpha} \, d\mu = (\alpha \cdot \|f\|_\infty)^p \cdot \mu(A_\alpha),$$

tehát $\mu(A_\alpha) < +\infty$. Innen minden $q > 0$ mellett (az $\|f\|_\infty = +\infty$ esetben követett gondolatmenetet a p helyett a q-ra megismételve) azt kapjuk, hogy

$$\|f\|_q \geq \alpha \cdot \|f\|_\infty \cdot \left(\mu(A_\alpha)\right)^{1/q}.$$

Ebből

$$\liminf_{q \to +\infty} \|f\|_q \geq \alpha \cdot \|f\|_\infty \cdot \lim_{q \to +\infty} \left(\mu(A_\alpha)\right)^{1/q} = \alpha \cdot \|f\|_\infty,$$

azaz – lévén az $\alpha \in (0,1)$ tetszőleges –

$$\liminf_{q \to +\infty} \|f\|_q \geq \|f\|_\infty$$

következik.

Ha viszont $p < q < +\infty$, akkor

$$|f|^q = |f|^{q-p} \cdot |f|^p \leq \|f\|_\infty^{q-p} \cdot |f|^p \quad \mu\text{-m.m.}$$

miatt ismét az integrál monotonitását felhasználva

$$\|f\|_q = \left(\int |f|^q \, d\mu \right)^{1/q} = \left(\int |f|^{q-p} \cdot |f|^p \, d\mu \right)^{1/q} \leq \|f\|_\infty^{1-p/q} \cdot \|f\|_p^{p/q}.$$

Ezért

$$\limsup_{q \to +\infty} \|f\|_\infty^{1-p/q} = \lim_{q \to +\infty} \|f\|_\infty^{1-p/q} = \|f\|_\infty$$

és

$$\limsup_{q \to +\infty} \|f\|_p^{p/q} = \lim_{q \to +\infty} \|f\|_p^{p/q} = 1$$

alapján

$$\limsup_{q \to +\infty} \|f\|_q \leq \|f\|_\infty$$

adódik, ami az előző becsléssel együtt a bizonyítandó állítást jelenti. ■

5. Tétel (Minkowski[5]-egyenlőtlenség). *Az eddigi* (X, Ω, μ) *mértéktér mellett a mérhető* $f,\, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *függvényekről tegyük fel, hogy létezik az*

$$f + g : X \to \overline{\mathbf{R}}$$

összegük. Ekkor tetszőleges $1 \le p \le +\infty$ *esetén*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. A tétel állítása nyilván igaz azokban az esetekben, amikor az $\|f\|_p,\ \|g\|_p$ közül legalább az egyik $+\infty$, vagy $\|f+g\|_p = 0$. Ugyanez mondható akkor is, ha $p = 1$, vagy $p = +\infty$. Ha ui. $p = 1$, akkor

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g|\, d\mu \le \int (|f| + |g|)\, d\mu =$$

$$\int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Hasonlóan, ha $p = +\infty$, akkor

$$|f + g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \mu\text{-m.m.}$$

miatt (a $\|\cdot\|_\infty$ értelmezése alapján)

$$\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Mindez azt jelenti, hogy a továbbiakban

$$1 < p < +\infty,\ \|f + g\|_p > 0,\ \|f\|_p,\ \|g\|_p < +\infty$$

feltehető. Mutassuk meg először is azt, hogy ekkor $\|f+g\|_p < +\infty$. Ehhez felhasználjuk az

$$(a + b)^p \le 2^{p-1} \cdot (a^p + b^p) \qquad (a, b \ge 0)$$

elemi egyenlőtlenséget, ami a $0 \le t \mapsto t^p$ függvény konvexitásából azonnal adódik. Tehát

$$|f + g|^p \le (|f| + |g|)^p \le 2^{p-1} \cdot (|f|^p + |g|^p),$$

így integrálással azt kapjuk, hogy

$$\|f + g\|_p^p \le 2^{p-1} \cdot (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < +\infty.$$

[5] Hermann Minkowski (1864 – 1909).

A Hölder-egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni. Ui. az

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \le |f+g|^{p-1} \cdot |f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g|$$

becslésből integrálás után egyrészt

$$\|f+g\|_p^p \le \||f+g|^{p-1} \cdot |f|\|_1 + \||f+g|^{p-1} \cdot |g|\|_1,$$

másrészt a p, valamint a $q := p/(p-1)$ számokkal értelemszerűen alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget $(p-1) \cdot q = p$ miatt

$$\|f+g\|_p^p \le \||f+g|^{p-1}\|_q \cdot (\|f\|_p + \|g\|_p) =$$

$$\left(\int |f+g|^{(p-1)\cdot q}\, d\mu\right)^{1/q} \cdot (\|f\|_p + \|g\|_p) =$$

$$\left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/q} \cdot (\|f\|_p + \|g\|_p) =$$

$$(\|f+g\|_p)^{p/q} \cdot (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

következik. Innen már az $(\|f+g\|_p)^{p/q}$-val egyszerűen osztva (és figyelembe véve, hogy $p - p/q = 1$) kapjuk a Minkowski-egyenlőtlenséget. ■

3. Megjegyzések

i) Az

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (0 \le a, b \in \mathbf{R},\ 1 < p,\ q < +\infty,\ 1/p + 1/q = 1)$$

egyenlőtlenség az ln logaritmusfüggvény konkávitását felhasználva is belátható. Ha ui. $a, b > 0$ (ami nyilván feltehető), akkor

$$\ln(a^p/p + b^q/q) \ge \frac{1}{p} \cdot \ln a^p + \frac{1}{q} \cdot \ln b^q = \ln(ab),$$

így

$$e^{\ln(a^p/p + b^q/q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ge e^{\ln(ab)} = ab.$$

Speciálisan a $p = q = 2$ esetben az elemi $2ab \le a^2 + b^2$ egyenlőtlenséget kapjuk.

ii) Írjuk fel az
$$\|fh\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|h\|_q$$
Hölder-egyenlőtlenséget a normák értelmezését szem előtt tartva:
$$\int |fh|\, d\mu \le \begin{cases} \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int |h|^q\, d\mu\Big)^{1/q} & (1 < p, q < +\infty) \\ \|h\|_\infty \cdot \int |f|\, d\mu & (p = 1), \end{cases}$$
ahol – emlékeztetőül – $\|h\|_\infty = \inf\{\alpha \ge 0 : |h| \le \alpha \ \ \mu\text{-m.m.}\}$.

iii) Érdemes kiemelni az előző megjegyzésben a $p = q = 2$ esetet, amikor is
$$\|fh\|_1 \le \|f\|_2 \cdot \|h\|_2,$$
vagy ugyanez „részletesen" kiírva
$$\int |fh|\, d\mu \le \sqrt{\int f^2\, d\mu} \cdot \sqrt{\int h^2\, d\mu}.$$
Ez a *Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.*

Ha
$$\langle f, h\rangle := \int fh\, d\mu$$
az f és a h *skaláris szorzata,* akkor nyilván
$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle},$$
és az euklideszi terek elméletéből jól ismert (általános) Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint
$$|\langle f, h\rangle| \le \|f\|_2 \cdot \|h\|_2.$$