Mérték, integrál, ...

13. Előadás

1. Emlékeztető. Az $X, Y \neq \emptyset$ halmazok esetén tekintsük a szigma-véges (X, Ω, μ), (Y, Θ, ν) mértéktereket, és vegyük az

$$(X \times Y, \Omega \otimes \Theta, \mu \otimes \nu)$$

szorzatukat. Itt

$$\Omega \otimes \Theta := \Omega(\{U \times V \in \mathcal{P}(X \times Y) : U \in \Omega, V \in \Theta\}),$$

míg

$$\mu \otimes \nu(A) := \int f_A \, d\mu = \int f^A \, d\nu \qquad (A \in \Omega \otimes \Theta)$$

az

$$f_A(x) := \nu(A_x) \quad (x \in X), \; f^A(y) := \mu(A^y) \quad (y \in Y)$$

függvényekkel és az

$$A_x := \{z \in Y : (x, z) \in A\} \in \Theta, \; A^y := \{v \in X : (v, y) \in A\} \in \Omega$$

(metszet)halmazokkal.

Ekkor tetszőleges $f \in L(\mu \otimes \nu)$ függvényre (Fubini-tétel)

$$\int f(x, y) \, d\mu \otimes \nu(x, y) = \int \left(\int f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) =$$

$$\int \left(\int f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Az itt szereplő „belső" integrálok m.m. (x, ill. y) értelemben léteznek, míg speciálisan $f \in L^+(\mu \otimes \nu)$ esetén minden pontban (Tonelli-tétel).[1]

2. Borel[2] – Cantelli[3]-lemma.

Ezen a néven ismert (pl. a valószínűségszámításban) az alábbi, két részből álló állítás. Legyen ehhez adott az (X, Ω, μ) mértéktér, $A_n \in \Omega \quad (n \in \mathbf{N})$ és

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

[1] Szorgalmi feladat: ha a fentiekben mindkét szigma-algebra a számegyenes Borel-mérhető halmazainak a rendszere, akkor mit mondhatunk az $\Omega \otimes \Theta$ szorzatuk és a síkbeli Borel-mérhető halmazok rendszerének a viszonyáról? Mi a helyzet akkor, ha ebben a kérdésben a „Borel-mérhető" kitételt „Lebesgue-mérhető"-re cseréljük?

[2] Félix Edouard Justin Émile Borel (1871 – 1956).

[3] Francesco Paolo Cantelli (1875 – 1966).

Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty \implies \mu(A) = 0.$$

Valóban, mivel minden $n \in \mathbf{N}$ mellett $A \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, ezért

$$\mu(A) \le \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Azt mondjuk továbbá, hogy a fenti $A_n \;\; (n \in \mathbf{N})$ halmazok *függetlenek*, ha bármilyen $\emptyset \ne \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ véges halmaz esetén

$$\mu\Big(\bigcap_{k\in\mathcal{N}} A_k\Big) = \prod_{k\in\mathcal{N}} \mu(A_k).$$

Független halmazokra – az előbbi állítás mintegy ellenpontjaként – igaz a következő: ha $\mu(X) = 1$ és[4]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = +\infty,$$

akkor $\mu(A) = 1$.

Ugyanis $\mu(A) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\mu(X \setminus A) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k)\Big) = 0,$$

ami nyilván következik a

$$\mu\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k)\Big) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

állításból. Ez utóbbi igazolásaként elegendő hivatkoznunk a minden $m \ge n$ $(m, n \in \mathbf{N})$ esetén fennálló

[4]Könnyű meggyőződni arról, hogy ekkor tetszőleges $A_k \;\; (k \in \mathbf{N})$ halmazt az $(X \setminus A_k)$ komplementerére kicserélve, az így kapott halmazok is függetlenek. Mindez adódik az alábbi meggondolásból: legyen $A, B \in \Omega$ és $\mu(A\cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Ekkor $\mu(A\cap(X\setminus B)) = \mu(A\setminus B) = \mu(A\setminus(A\cap B)) = \mu(A) - \mu(A\cap B) = \mu(A)(1-\mu(B)) = \mu(A)\mu(X\setminus B)$. Speciálisan, az $X \setminus A_k \;\; (k \in \mathbf{N})$ halmazok is függetlenek.

$$\mu\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty}(X\setminus A_k)\Big)\le\mu\Big(\bigcap_{k=n}^{m}(X\setminus A_k)\Big)=\prod_{k=n}^{m}\Big(1-\mu(A_k)\Big)<$$

$$< e^{-\sum_{k=n}^{m}\mu(A_k)}\to 0 \qquad (m\to\infty)$$

becslésre.[5]

A valószínűségszámítás nyelvén megfogalmazva tehát a Borel–Cantelli-lemma jelentése a következő: legyen $\mu(X)=1,$ azaz az (X,Ω,μ) egy *valószínűségi mértéktér* (vagy más néven *Kolmogorov-mező*), az $A_n\in\Omega\ \ (n\in\mathbf{N})$ pedig független *események* sorozata. Az A_n esemény *bekövetkezésének a valószínűsége* a $\mu(A_n)$ nemnegatív szám. Ezzel a terminológiával élve a

$$\mu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Big)$$

annak a valószínűsége, hogy az A_n-ek közül végtelen sok bekövetkezik. Ez a valószínűség tehát vagy nulla, vagy pedig egy, pontosan akkor, ha a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu(A_k)$$

összeg véges vagy sem.

3. Markov[6] – Csebisev[7]-egyenlőtlenség.

Legyen $X\neq\emptyset,$ ekkor tetszőleges (X,Ω,μ) mértéktér és

$$f:X\to\overline{\mathbf{R}}$$

mérhető függvény esetén

$$\mu\Big(\{|f|\ge y\}\Big)\le\frac{1}{y^p}\cdot\int|f|^p\,d\mu \qquad (p,\,y>0).$$

Ez az ún. *Markov-egyenlőtlenség* egyszerűen következik az

$$y^{-p}\cdot|f|^p\ge\chi_{\{|f|\ge y\}}$$

[5] $1-x\le e^{-x}\quad (x\in\mathbf{R}).$

[6] Andrej Andrejevics Markov (1856 – 1922).

[7] Pafnutyij Lvovics Csebisev(1821 – 1894).

becslésből. Ha itt valamilyen $0 < p < +\infty$ „kitevővel" $\|f\|_p < +\infty$, akkor minden $y > 0$ esetén nyilván

$$\mu(\{|f| > y\}) < +\infty.$$

A Markov-egyenlőtlenség egyik fontos következménye a *Csebisev-egyenlőtlenség*. Legyen ehhez az eddigi (X, Ω, μ) mértéktér esetén $f \in L(\mu)$, és tegyük fel, hogy az

$$F(x) := f(x) - \int f\,d\mu \qquad (x \in X)$$

függvényre

$$0 < \|F\|_2 < +\infty$$

teljesül. Ekkor bármilyen $\lambda > 0$ számmal a $p = 2$-re felírt

$$\mu\Big(\{|f| \geq y\}\Big) \leq \frac{1}{y^2}\cdot \int |f|^2\,d\mu = \frac{\|f\|_2^2}{y^2} \qquad (y > 0)$$

Markov-egyenlőtlenségből az f helyett F-et, az y helyett pedig $\lambda\cdot\|F\|_2$-t írva

$$\mu\Big(\{|F| \geq \lambda\cdot\|F\|_2\}\Big) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ha $\mu(X) = 1$, azaz az (X, Ω, μ) Kolmogorov-mező, akkor valószínűségszámítási terminológiával élve az f egy ún. *valószínűségi változó*, $\int f\,d\mu$ az f *várható értéke*, $\|F\|_2$ pedig az f *szórása*, ahol tehát

$$\|F\|_2 = \sqrt{\int \Big|f - \int f\,d\mu\Big|^2\,d\mu}.$$

4. Martingálok.

a) Emlékeztető: legyen az (X, Ω, μ) egy valószínűségi mértéktér (Kolmogorov-mező), azaz $\mu(X) = 1$, az $\Omega_0 \subset \Omega$ pedig egy rész-szigma-algebra. Ha $f \in L^1$, akkor (ld. Radon–Nikodym-tétel) egyértelműen létezik olyan, az Ω_0 szigma-algebrára nézve mérhető $f_0 \in L^1$ függvény[8], hogy tetszőleges $A \in \Omega_0$ halmazra igaz a következő egyenlőség:

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f_0\,d\mu.$$

[8]Azaz bármely $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmazra $f_0^{-1}[A] \in \Omega_0$.

Az

$$E_{\Omega_0} f := f_0$$

függvényt az f-nek az Ω_0-ra vonatkozó *feltételes várható értékének,* az E_{Ω_0} leképezést pedig az Ω_0-ra vonatkozó *feltételes várható érték operátornak* nevezzük.

Speciálisan, ha $\Omega_0 = \Omega$, akkor $f_0 = f$ μ-m.m., ha pedig $\Omega_0 := \{\emptyset, X\}$, akkor az f_0 konstansfüggvény és

$$f_0 = \int f_0 \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

b) Legyen az a)-beli valószínűségi mértéktér esetén az

$$\mathcal{A}_n \subset \Omega \qquad (n \in \mathbf{N})$$

szigma algebráknak egy olyan sorozata, amelyre

$$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

teljesül. Jelöljük E_n-nel $(n \in \mathbf{N})$ az $\mathcal{A}_n$ szigma algebrára vonatkozó feltételes várható érték operátort:

$$E_n := E_{\mathcal{A}_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az

$$f_n \in L^1 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló f sorozat egy *martingál,* ha az f_n mérhető az $\mathcal{A}_n$-re nézve[9] és

$$E_n(f_{n+1}) = f_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\mathbf{M}(f) := \sup_n |f_n|$$

(az (f_n) martingál *maximálfüggvénye*) és

$$\|f\|_p := \sup_n \|f_n\|_p \qquad (1 \leq p \leq +\infty).$$

---

[9]Más szóval bármely $B \subset \overline{\mathbf{R}}$ Borel-halmazra $f_n^{-1}[B] \in \mathcal{A}_n$.

Ekkor alkalmas $C > 0$ és (csak a p-től függő) $C_p > 0$ konstansokkal igaz a *Doob*[10]*-egyenlőtlenség*:

$$\mu\left(\{\mathbf{M}(f) > y\}\right) \le \frac{C}{y} \cdot \|f\|_1 \qquad (y > 0),$$

ill.

$$\|\mathbf{M}(f)\|_p \le C_p \cdot \|f\|_p \qquad (1 < p \le +\infty).$$

Belátható, hogy ha $1 < p < +\infty$ és $\|f\|_p < +\infty$, akkor (a μ mérték szerinti értelemben) m.m. is és $\|.\|_p$-normában is az $(f_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens, az

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (\text{m.m. } x \in X)$$

határértékre pedig $F \in L^p$, továbbá

$$f_n = E_n(F) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

igaz.[11]

Világos, hogy tetszőleges $f \in L^1$ esetén az

$$f_n := E_n(f) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

módon értelmezett f_n-ek martingált alkotnak.

c) A diadikus analízis alapjai: legyen az

$$r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

a következő, 1 szerint periodikus függvény:

$$r(x) := \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1/2) \\ -1 & (1/2 \le x < 1), \end{cases}$$

az r_n $(n \in \mathbf{N})$ függvények pedig:

$$r_n(x) := r(2^n x) \qquad (x \in [0,1]).$$

Ha

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k \qquad (n_k \in \{0,1\}, k \in \mathbf{N})$$

[10] Joseph Leo Doob (1910 – 2004).

[11] Ha $p = 1$, akkor az előbbiekből a m.m. értelemben vett konvergencia megmarad.

és

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1} \qquad (x_k \in \{0,1\}, k \in \mathbf{N})$$

az $x \in [0,1)$ szám diadikus kifejtése, akkor legyen

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (-1)^{n_k x_k} = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} n_k x_k}.$$

Az így értelmezett (r_n) függvényrendszert *Rademacher*[12]*-rendszernek,* a (w_n) rendszert pedig *Walsh*[13]*–Paley*[14]*-rendszernek* nevezzük.

A $[0,1]$-beli Lebesgue-mértékre nézve a Walsh–Paley-rendszer ortonormált:

$$\int_0^1 w_n(x) \cdot w_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \\ 1 & (n = m) \end{cases} \qquad (n, m \in \mathbf{N}).$$

Ha $f \in L^1[0,1]$, akkor az

$$\widehat{f}(k) := \int_0^1 f(x) w_k(x)\, dx \qquad (k \in \mathbf{N})$$

számok az f *Walsh–Fourier-együtthatói,* az

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) w_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

összegek pedig az f *Walsh–Fourier-részletösszegei.*

Tekintsük az alábbi intervallumokat:

$$I_{nk} := [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \qquad (n \in \mathbf{N},\ k = 0, ..., 2^n - 1),$$

és adott $n \in \mathbf{N}$ mellett legyen az Ω_n az I_{nk}-k által generált legszűkebb szigma-algebra (a $[0,1]$ intervallum Lebesgue-mérhető halmazainak a szigma-algebrájára vonatkozóan). Ekkor $f \in L^1[0,1]$ esetén az f-nek az Ω_n-re vonatkozó feltételes várható értéke az

$$S_{2^n}(f) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \widehat{f}(k) w_k$$

[12] Hans Rademacher (1892 – 1969).
[13] Joseph Leonard Walsh (1895 – 1973).
[14] Raymond Edward Alan Christopher Paley (1907 – 1933).

Walsh–Fourier-részletösszeg. Továbbá

$$S_{2^n}(f)(x) = 2^n \cdot \int_{I_{nk}} f(t)\,dt \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in I_{nk}\ (k = 0, ..., 2^n - 1)).$$

A valószínűségszámítás nyelvén megfogalmazva az $(S_{2^n}(f))$ sorozat egy (diadikus) *martingál,* azaz fennáll az

$$E_{\Omega_n} = S_{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőség.

Ha tehát

$$\mathbf{M}_d(f) := \sup_n |S_{2^n}(f)| \qquad (f \in L^1[0,1]),$$

akkor alkalmas $C > 0$ és (csak a p-től függő) $C_p > 0$ konstansokkal igaz a

$$\widehat{\mu}_1\left(\{\mathbf{M}_d(f) > y\}\right) \le \frac{C}{y} \cdot \|f\|_1 \qquad (f \in L^1[0,1],\, y > 0),$$

ill. a

$$\|\mathbf{M}_d(f)\|_p \le C_p \cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p[0,1],\, 1 < p \le +\infty)$$

becslés.

d) Legyen egy $[a, b]$ kompakt intervallummal

$$\mathcal{I} := \{I \subset [a,b] : \text{ az } I \text{ nyílt intervallum}\},$$

és egy Lebesgue-mérhető

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

függvény esetén

$$M(f)(x) := \sup\left\{\frac{1}{|I|}\int_I |f|\,d\widehat{\mu}_1 : x \in I \in \mathcal{I}\right\} \qquad (x \in (a,b))$$

(*Hardy*[15]–*Littlewood*[16]*-maximálfüggvény*). Nyilván

$$\mathbf{M}_d(f) \le M(f) \qquad (f \in L^1[0,1]).$$

Az M leképezésre (maximáloperátorra) igaz, hogy $0 < p \le +\infty$ esetén van olyan, csak a p-től függő $C_p > 0$ konstans, hogy minden Lebesgue-mérhető

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

---

[15] Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947).
[16] John Edensor Littlewood (1885 – 1977).

függvényre

$$\widehat{\mu}_1(\{Mf > q\}) \le \frac{C_1}{q} \cdot \|f\|_1 \qquad (q > 0)$$

és

$$\|Mf\|_p \le C_p \cdot \|f\|_p \qquad (1 < p \le +\infty),$$

valamint

$$\int_a^b M(f)\, d\widehat{\mu}_1 \le 2(b-a) + C_1 \int_a^b |f| \log^+ \circ |f| \, d\widehat{\mu}_1,$$

továbbá

$$\left(\int_a^b (M(f))^p \, d\widehat{\mu}_1\right)^{1/p} \le (b - a + C_p)^{1/p} \cdot \|f\|_1 \qquad (0 < p < 1).$$

e) A XX. századi matematika egyik legnagyobb hatású eredménye a *Carleson*[17]*–Hunt*[18]*-tétel* (ami egy akkor mintegy 50 éves nyitott problémára, az ún. *Luzin*[19]*-sejtésre* adott választ). Ennek a megfogalmazásához legyen a T_n $(n \in \mathbf{N})$ az n-edik trigonometrikus Fourier-részletösszeg-operátor.[20] Ekkor van olyan $C > 0$ abszolút konstans, hogy minden $1 < p < +\infty$ „kitevőre" és $f \in L^p[0, 2\pi]$ függvényre[21]

$$\| \sup_n |T_n(f)| \|_p \le \frac{Cp^4}{(p-1)^3} \cdot \|f\|_p,$$

ill. (ebből következően) tetszőleges

$$f \in L^q[0, 2\pi] \qquad (1 < q \le +\infty)$$

mellett fennáll a

$$\lim_{n \to \infty} T_n(f)(x) = f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0, 2\pi])$$

pontonkénti konvergencia.

Megjegyezzük, hogy mintegy ellenpontként jóval a Carleson-tétel előtt már híressé vált a *Kolmogorov-tétel,* miszerint *van olyan* $f \in L^1[0, 2\pi]$ *függvény, hogy* λ*–m.m.* $x \in [0, 2\pi]$ *esetén az* $(T_n f(x))$ *sorozat* (*azaz az* f

[17] Lennart Axel Edvard Carleson (1928 –).

[18] Richard Allen Hunt (1937 – 2009).

[19] Nyikolaj Nyikolajevics Luzin (1883 – 1950).

[20] Más szóval $T_n(f)(x) := a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$ $(x \in \mathbf{R})$, amikor is $a_0 := 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$, $a_k := 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx$, $b_k := 1/\pi \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx$ $(f \in L^1[0, 2\pi])$.

[21] L. Carleson (1966), ha $p = 2$ és R. Hunt (1967), ha $p > 1$.

trigonometrikus Fourier-sora az x pontban) divergens (1923), sőt, hogy *a* $(T_n f(x))$ *sorozat minden egyes* $x \in [0, 2\pi]$ *helyen divergens* (1926). Máig nyitott az a kérdés, hogy az

$$\bigcup_{p>1} L^p[0, 2\pi]$$

függvényosztály és (a nála bővebb) $L^1[0, 2\pi]$ tér között hol húzódik az a „határ", ami az $L^1[0, 2\pi]$-ben elválasztja egymástól azokat a függvényeket, amelyeknek a trigonometrikus Fourier-sora m.m. konvergens, ill. nem.

f) A Walsh–Fourier-sorokra a fentiek analogonjai: minden $1 < p < +\infty$ esetén egy csak a p-től függő C_p konstanssal[22]

$$\| \sup_n |S_n(f)| \|_p \leq C_p \cdot \|f\|_p \qquad (f \in L^p[0, 1]),$$

valamint bármely $1 < q \leq +\infty$ kitevőre és $f \in L^q[0, 1]$ függvényre igaz, hogy

$$\lim_{n \to \infty} S_n(f)(x) = f(x) \qquad (\text{m.m. } x \in [0, 1]).$$

Ugyanakkor *megadható olyan* $f \in L^1[0, 1]$ *függvény, amellyel az* $(S_n f(x))$ *sorozat* (*azaz az* f *Walsh–Fourier-sora az* x *pontban*) *minden egyes* $x \in [0, 1]$ *helyen divergens.*[23]

[22] P. Billard (1966-67), ha $p = 2$, és P. Sjölin (1969), ha $p > 1$.

[23] A részleteket illetően ld. pl. az F. Schipp–W. R. Wade–P. Simon: *Walsh series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis.* Akadémiai Kiadó, Budapest – Adam Hilger, Bristol and New York, 1990. monográfiát.