1. Borel–halmazok

1.1. Definíció: Borel–halmaz, Lebesgue–halmaz

Az $\mathbb{R}^p$-beli **Borel–halmazok** rendszere az alábbi szigma-algebra:

$$\Omega_p := \Omega(\mathcal{I}^p) = \Omega(\mathbf{I}^p).$$

Az $\mathbb{R}^p$-beli **Lebesgue–halmazok** rendszere az alábbi szigma-algebra:

$$\Omega_p := \Omega(\mathcal{I}^p) = \Omega(\mathbf{I}^p).$$

Vezessük be a soron következő $\mathbb{R}^p$-beli halmazrendszereket:

$$\mathcal{T}_p := \{\, A \subseteq \mathbb{R}^p \mid A \text{ nyílt} \,\}, \quad \mathcal{C}_p := \{\, B \subseteq \mathbb{R}^p \mid B \text{ zárt} \,\}, \quad \mathcal{K}_p := \{\, K \subseteq \mathbb{R}^p \mid K \text{ kompakt} \,\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_p &:= \Big\{A \subseteq \mathbb{R}^p \,:\, A \text{ nyílt}\Big\}, \\ \mathcal{C}_p &:= \Big\{B \subseteq \mathbb{R}^p \,:\, B \text{ zárt}\Big\}, \\ \mathcal{K}_p &:= \Big\{K \subseteq \mathbb{R}^p \,:\, K \text{ kompakt}\Big\}. \end{aligned}$$

1.2. Állítás

A p-dimenziós Borel–halmazok rendszerére az alábbi egyenlőségek igazak:

$$\Omega_p = \Omega(\mathcal{T}_p) = \Omega(\mathcal{C}_p) = \Omega(\mathcal{K}_p).$$

Bizonyítás. Mivel minden $\mathbb{R}^p$-beli kompakt halmaz korlátos és zárt, ezért

$A \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt $\iff$ A korlátos és zárt.

$$\mathcal{K}_p \subset \mathcal{C}_p \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p) \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega(\mathcal{K}_p) \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p).$$

Ha $B \in \mathcal{C}_p$ zárt halmaz, akkor alk (B_n) kompakt halmazokból képzett

Hiszen $A_n \subset A$ $(n \in \mathbb{N})$ korlátos és zárt.

$$B_n := \{\, \mathbf{x} \in B \mid \|\mathbf{x}\| \leq n \,\} \quad (n \in \mathbb{N}) B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \qquad \Longrightarrow \qquad B \in \Omega(\mathcal{K}_p)$$

Mivel minden szigma-algebra zárt a megszámlálható unióra, ezért

$$B \in \Omega(\mathcal{K}_p) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}_p \subseteq \Omega(\mathcal{K}_p) \quad \Longrightarrow \quad \Omega(\mathcal{C}_p) \subseteq \Omega(\mathcal{K}_p).$$

Ha $A \in \mathcal{T}_p$ nyílt halmaz, akkor a komplementere zárt. Tehát

Itt az $\mathbb{R}^p$-re vonatkozó komplementer

$$A^c \in \mathcal{C}_p \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p).$$

$$A^c = \mathbb{R}^p \setminus A.$$

Mivel minden szigma-algebra zárt a komplementer képzésre, ezért

$$A \in \Omega(\mathcal{C}_p) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T}_p \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p) \quad \Longrightarrow \quad \Omega(\mathcal{T}_p) \subseteq \Omega(\mathcal{C}_p).$$

Fordítva hasonló gondolatmenettel látható be, hogy

Ha $B \in \mathcal{C}_p$ zárt, akkor $B^c \in \mathcal{T}_p$ nyílt.

$$\Omega(\mathcal{C}_p) \subseteq \Omega(\mathcal{T}_p) \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega(\mathcal{C}_p) = \Omega(\mathcal{T}_p).$$