1. Függvények lokális oszcillációja

1.1. Definíció: Oszcilláció halmazon, lokális oszcilláció

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy $A \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Ekkor

$$\mathcal{O}(f, A) := \sup\Big\{\big|f(x) - f(y)\big| \;:\; x, y \in A \cap \mathcal{D}_f\Big\}$$

az f függvény **oszcillációja** az A halmazon. Továbbá egy $z \in \mathcal{D}_f$ helyen

$$o_z(f) := \inf\Big\{\mathcal{O}(f, I) \;:\; I \subset \mathbb{R} \text{ intervallum}, \, z \in \operatorname{int}(I)\Big\}$$

az f függvény **lokális oszcillációja** a z pontban.

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény,

$$\tau := \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$$

egy felosztás. Ekkor

$$\omega(f, \tau) := \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(f, I) \cdot |I|$$

az f függvény **oszcillációs összege**.

1.2. Lemma: Lokális oszcilláció és a folytonosság kapcsolata

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, valamint $z \in \mathcal{D}_f$ egy adott pont. Ekkor

$$f \in \mathfrak{C}\{z\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad o_z(f) = 0.$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ha az f függvény folytonos z-ben, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz

$$\exists \delta > 0: \quad \big|f(x) - f(z)\big| < \varepsilon \quad \big(x \in \mathcal{D}_f, \; |x - z| < \delta\big).$$

Legyen $I := (z - \delta, z + \delta)$. Ekkor minden $x, t \in I \cap \mathcal{D}_f$ esetén igaz, hogy

$$\big|f(x) - f(t)\big| \le \big|f(x) - f(z)\big| + \big|f(t) - f(z)\big| < 2\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}(f, I) < 2\varepsilon.$$

Ebből következik, hogy $0 \le o_z(f) < 2\varepsilon$, ahonnan $o_z(f) = 0$ adódik.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $o_z(f) = 0$, vagyis definíció szerint

$$o_z(f) = \inf\Big\{\mathcal{O}(f, I) \;:\; I \subset \mathbb{R} \text{ intervallum}, \, z \in \operatorname{int}(I)\Big\} = 0.$$

Ekkor bármilyen $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, hogy

$$z \in \operatorname{int}(I) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{O}(f, I) < \varepsilon.$$

Mivel z belső pontja az I-nek, ezért létezik olyan $\delta > 0$ sugár, amivel

$$K_\delta(z) := (z - \delta, z + \delta) \subset I.$$

Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f \cap K_\delta(z)$ pontban

$$\big|f(x) - f(z)\big| \le \mathcal{O}(f, I) < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathfrak{C}\{z\}.$$

2. Konvergencia

2.1. Definíció: Függvénysorozat, pontonkénti konvergencia

Azt mondjuk, hogy az (f_n) egy **függvénysorozat**, ha egy $\mathcal{D} \neq \emptyset$ halmazzal

$$f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az (f_n) függvénysorozat **pontonként konvergens**, ha az $\big(f_n(x)\big)$ sorozat minden $x \in \mathcal{D}$ esetén konvergens. Ekkor az f **határfüggvénye** legyen

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

Legyen adott az $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényeknek a konvergens sorozata.

Kérdések:

1. Konvergens-e az integrálokból képzett $\left(\int_a^b f_n\right)$ számsorozat?
2. Igaz-e, hogy az f határfüggvény Riemann-integrálható?
3. Ha az előbbi két kérdésre igen a válasz, akkor fennáll-e az

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

egyenlőség?

Másképp fogalmazva teljesül-e az

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

felcserélhetőség?

Válaszok: Minden további feltétel nélkül ezek nem teljesülnek. Ellenpéldák.

a) Legyen (r_n) a $[0, 1]$ intervallumbeli racionális számoknak egy sorozata, és

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \{r_0, \ldots, r_n\} \\ 0, & \text{ha } x \notin \{r_0, \ldots, r_n\} \end{cases} \qquad \big(x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}\big).$$

Ezek a függvények mind Riemann-integrálhatóak, továbbá

$$D(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \big(x \in [0, 1]\big).$$

Ez pedig a híres **Dirichlet-függvény**, amiről ismeretes, hogy $D \notin \mathfrak{R}[0, 1]$. Vagyis a 2. kérdésre nem a válasz!

b) Jelöljön $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy számsorozatot, és tekintsük a következőket

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} a_n & (0 \le x < 1/n) \\ 0 & (1/n \le x < 1) \end{cases} \qquad (1 \le n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor (f_n) pontonként konvergens és a határfüggvénye $f \equiv 0$. Nyilván

$$f \in \mathfrak{R}[0, 1] \qquad \text{és} \qquad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mivel f_n szakaszonként folytonos minden $1 \le n \in \mathbb{N}$ indexre, ezért

$$f_n \in \mathfrak{R}[0, 1] \qquad \text{és} \qquad \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} a_n\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^1 0\,\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n}.$$

Vagyis az (a_n) sorozattól függően nem biztos 1. és 3. teljesülni fog.

2.2. Definíció: Egyenletes konvergencia

Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat **egyenletesen konvergál** az

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

függvényhez, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \text{ és } \forall x \in \mathcal{D}: \qquad \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

2.3. Tétel

Legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy függvénysorozat $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy

i) minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$,

ii) az (f_n) egyenletesen konvergál az $f := \lim(f_n)$ határfüggvényhez.

Ekkor $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ és az integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata konvergens, valamint

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Másképp fogalmazva teljesjül, hogy

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás.

$\boxed{1.}$ Legyen $I \subseteq [a, b]$ egy intervallum és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $x, y \in I$-re

$$\big|f(x) - f(y)\big| \le \big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - f_n(y)\big| + \big|f_n(y) - f(y)\big|.$$

Továbbá a ii) feltétel miatt minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex:

$$\big|f_n(t) - f(t)\big| < \varepsilon \qquad (t \in I,\ N < n \in \mathbb{N}).$$

Ebből következik, hogy

$$\big|f(x) - f(y)\big| < 2\varepsilon + \big|f_n(x) - f_n(y)\big| \qquad (x, y \in I,\ N < n \in \mathbb{N}).$$

Innen szuprémumot véve kapjuk, hogy

$$\mathcal{O}(f, I) < 2\varepsilon + \mathcal{O}(f_n, I) \qquad (N < n \in \mathbb{N}). \qquad (*)$$

$\boxed{2.}$ Ekkor a $(*)$ becslés felhasználásával bármilyen $\tau \subset [a, b]$ felosztás esetén

$$\omega(f, \tau) = \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(f, I)\cdot|I| < 2\varepsilon(b - a) + \omega(f_n, \tau) \qquad (N < n \in \mathbb{N}).$$

Az alkalmazott becslések részleseten:

$$\begin{aligned}\omega(f,\tau) &\overset{*}{<} \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \big(2\varepsilon + \mathcal{O}(f_n, I)\big)\cdot|I| \\ &= 2\varepsilon \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} |I| + \sum_{I\in\mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(f_n, I)\cdot|I| \\ &= 2\varepsilon(b - a) + \omega(f_n, \tau) \\ &< 2\varepsilon(b - a) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Mivel az f_n integrálható, ezért megadható olyan $\tau \subset [a, b]$ felosztás, hogy

$$\omega(f_n, \tau) < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\omega(f, \tau) < \varepsilon\big(2(b - a) + 1\big)}.$$

Következésképpen $f \in \mathfrak{R}[a, b]$.

$\boxed{3.}$ Amennyiben $N < n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges index, akkor

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(b - a).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\left(\int_a^b f_n\right)$ integrálsorozat konvergens.

3. Teljesség

Legyen $f, g \in \mathfrak{R}[a,b]$ és értelmezzük az f és g függvények „távolságát” a

$$\varrho(f,g) := \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big| \,\mathrm{d}x.$$

leképezés segítségével. Megjegyezzük, hogy ϱ egy úgynevezett félmetrika.

Kérdés: Amennyiben az $f_n \in \mathfrak{R}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatra igaz, hogy

$$\int_a^b |f_n - f_m| \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

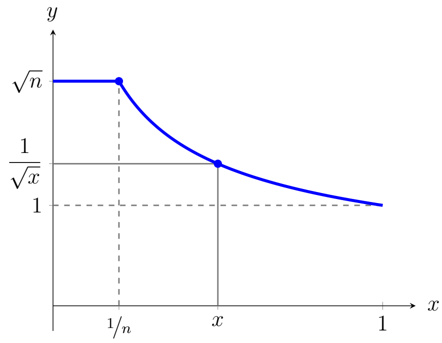
akkor van olyan $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ függvény, amelyre

$$\int_a^b |f_n - f| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

teljesül? Ezt nevezzük **Cauchy-kritériumnak**.

Válasz: Nem, mert megmutatható az alábbi ellenpélda. Legyen (lásd 1. ábra)

$$f_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n} & (0 \le x \le 1/n) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & (1/n \le x \le 1) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$



1. ábra. Az (f_n) sorozat egyik tagja.

Ekkor szakaszonkénti integrálással adódik, hogy

$$\int_a^b \big|f_n - f_m\big| \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Indirekt tegyük fel, hogy az (f_n) függvénysorozat konvergens és legyen

$$f \in \mathfrak{R}[0,1], \qquad \int_0^1 \big|f_n - f\big| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty). \tag{$**$}$$

Ekkor minden olyan $0 < x < 1$ helyen, ahol az f folytonos, szükségképpen

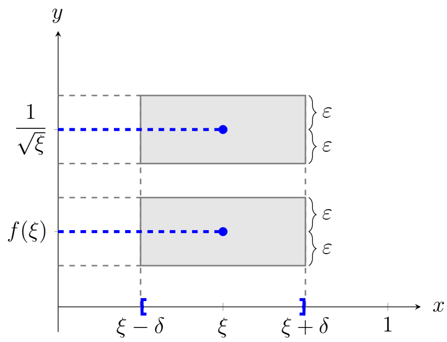
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ugyanis indirekt tegyük fel, hogy valamilyen $\xi \in (0,1)$ folytonossági helyen

$$f(\xi) \neq \frac{1}{\sqrt{\xi}} \qquad \Longrightarrow \qquad 3\varepsilon := \left| f(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right| > 0.$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}\{\xi\}$, ezért megadható olyan $\delta > 0$ sugár, amivel (lásd 2. ábra)

$$t \in [\xi - \delta,\, \xi + \delta] \subset [0,1] \qquad \Longrightarrow \qquad \left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| \ge \varepsilon.$$



2. ábra. Az $f(\xi)$ érték környezete.

Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy $1/N < \delta - \xi$. Ekkor minden $n > N$ indexre

$$\int_0^1 |f_n - f| \ge \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| \mathrm{d}t \ge \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varepsilon \,\mathrm{d}t = 2\delta \cdot \varepsilon > 0.$$

Vagyis az alábbi ellentmondásra jutunk

$$\int_0^1 \big|f_n - f\big| \not\to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Térjünk vissza a (∗∗) ponthoz. A Lebesgue-kritérium miatt az $f \in \mathfrak{R}[0,1]$ függvény szakadási helyeinek a halmaza nullamértékű. Mivel tetszőleges $r \in (0,1)$ esetén a $(0,r)$ intervallum nem nullamértékű, ezért ez tartalmaz folytonossági pontot. Azaz van olyan $\xi_r \in (0,r)$ pont, hogy

$$f \in \mathfrak{C}\{\xi_r\} \qquad \Longrightarrow \qquad f(\xi_r) = \frac{1}{\sqrt{\xi_r}} > \frac{1}{\sqrt{r}} \longrightarrow +\infty \qquad (r \to 0).$$

Ebből következik, hogy az f függvény nem korlátos, ezért $f \notin \mathfrak{R}[0,1]$.

Tétel (Lebesgue-kritérium)**.** A

$$g \in \mathfrak{R}[a,b]$$

feltétel azzal ekvivalens, hogy az

$$\mathcal{A}_g := \big\{\, x \in [a,b] \;\big|\; g \notin \mathfrak{C}\{x\} \,\big\}$$

szakadási helyek halmaza nullamértékű.