1. Emlékeztető

1.1. Definíció: Oszcilláció halmazon, lokális oszcilláció

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy $A \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Ekkor

$$\mathcal{O}(f, A) := \sup\Big\{\big|f(x) - f(y)\big| \ : \ x, y \in A \cap \mathcal{D}_f\Big\}$$

az f függvény **oszcillációja** az A halmazon. Továbbá egy $z \in \mathcal{D}_f$ helyen

$$o_z(f) := \inf\Big\{\mathcal{O}(f, I) \ : \ I \subset \mathbb{R} \text{ intervallum, } z \in \operatorname{int}(I)\Big\}$$

az f függvény **lokális oszcillációja** a z pontban.

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény,

$$\tau := \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$$

egy felosztás. Ekkor

$$\omega(f, \tau) := \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(f, I) \cdot |I|$$

az f függvény **oszcillációs összege**.

1.2. Lemma: Lokális oszcilláció és a folytonosság kapcsolata

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, valamint $z \in \mathcal{D}_f$ egy adott pont. Ekkor

$$f \in \mathfrak{C}\{z\} \quad \Longleftrightarrow \quad o_z(f) = 0.$$

1.3. Lemma: Borel-féle lefedési lemma

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy korlátos és zárt intervallum, vagyis $a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$.
Ha van olyan $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz, hogy az I_γ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt intervallumokra

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$$

teljesül, akkor kiválasztható olyan $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ véges indexhalmaz, amellyel

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} I_\gamma.$$

2. Lebesgue-kritérium

2.1. Definíció: Nullamértékű számhalmaz

Azt mondjuk, hogy az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz **nullamértékű**, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik intervallumoknak egy olyan $I_n \subseteq \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozata, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Az előbbi definíció alapján könnyen meggondolhatóak az alábbi állítások.

Tétel. Legyenek $A, A_n \subseteq \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ adott halmazok, $I \subseteq \mathbb{R}$ pedig egy intervallum.

1. Ha A véges, akkor A nullamértékű.
2. Ha A megszámlálható, akkor A nullamértékű.
3. Ha A nullamértékű, akkor minden $B \subseteq A$ halmaz nullamértékű.
4. Ha minden A_n $(n \in \mathbb{N})$ halmaz nullamértékű, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ nullamértékű.
5. Ha $|I| > 0$, akkor I nem nullamértékű.

Ha egy bizonyos tulajdonság egy nullamértékű halmaz pontjainak a kivételével igaz valamilyen halmaz pontjaiban, akkor a szóban forgó tulajdonság (az illető halmaz pontjaira nézve) *majdnem mindenütt* (vagy másképp fogalmazva *majdnem minden pontban*) igaz (röviden: *m.m.*).

2.2. Tétel: Lebesgue-kritérium

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, valamint

$$\mathcal{A}_f := \Big\{ x \in [a,b] \;\Big|\; f \notin \mathfrak{C}\{x\} \Big\}.$$

Ekkor $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű.

$f \in \mathfrak{R}[a,b] \iff$ az f m. m. folytonos.

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy $f \in \mathfrak{R}[a,b]$. Ekkor az 1.2. lemma alapján

$$\mathcal{A}_f = \Big\{ z \in [a,b] \;\Big|\; o_z(f) > 0 \Big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ z \in [a,b] \;\Big|\; o_z(f) > \frac{1}{n} \Big\} =: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Elegendő lenne azt belátni, hogy A_n nullamértékű[1]. Sőt azt igazoljuk, hogy

$$A_\delta := \Big\{ z \in [a,b] \;\Big|\; o_z(f) > \delta \Big\} \qquad (\delta > 0)$$

nullamértékű. A továbbiak szempontjából legyen $\delta > 0$ egy tetszőlegesen rögzített érték. Mivel az f Riemann-integrálható, ezért bármely $\varepsilon > 0$-hoz

$$\exists \tau \subset [a,b] \text{ felosztás:} \quad \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Legyen $\mathcal{I}$ azon τ felosztás szerinti osztásintervallumoknak a halmaza, amik a belsejükben tartalmaznak A_δ-beli pontot (lásd 1. ábra), azaz

$$\mathcal{I} := \Big\{ J \in \mathcal{F}(\tau) \;\Big|\; \operatorname{int}(J) \cap A_\delta \neq \emptyset \Big\}.$$

Világos, hogy ekkor $\tau \cup \mathcal{I}$ lefedi az A_δ halmazat. Továbbá[2]

$$\varepsilon > \omega(f,\tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(f,I)\cdot|I| \geq \sum_{J \in \mathcal{I}} \mathcal{O}(f,J)\cdot|J| \geq \sum_{J \in \mathcal{I}} \delta\cdot|J|.$$

Következésképpen az $\mathcal{I}$-beli intervallumok hosszösszege így becsülhető:

$$\sum_{J \in \mathcal{I}} |J| < \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Mivel τ véges halmaz, ezért nullamértékű. Következésképpen minden $z \in \tau$ osztóponthoz hozzárendelhető egy olyan $J_z \subset \mathbb{R}$ intervallum, amellyel

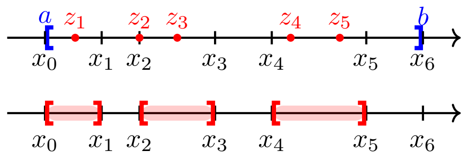
$$\tau \subset \bigcup_{z \in \tau} J_z \qquad \text{és} \qquad \sum_{z \in \tau} |J_z| < \varepsilon.$$

Összességében elmondható, hogy

$$A_\delta \subseteq \mathcal{I} \cup \bigcup_{z \in \tau} J_z \qquad \text{és} \qquad \sum_{z \in \tau} |J_z| + \sum_{J \in \mathcal{I}} |J| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\delta}\right).$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az A_δ halmaz nullamértékű.

[1] Megszámlálhatóan sok nullamértékű halmaz uniója szintén nullamértékű.



1. ábra. Az $\mathcal{I}$ halmaz szemléltetése.

- A felosztás: $\tau = \{x_0, \dots, x_6\}$.
- A szakadások: $A_\delta = \{z_1, \dots, z_5\}$.
- $\mathcal{I} = \big\{[x_0,x_1],\ [x_2,x_3],\ [x_4,x_5]\big\}$.

[2] Mivel adott $J \in \mathcal{I}$ intervallumhoz van olyan $z \in A_\delta$ szakadási pont, hogy

$$z \in \operatorname{int}(J) \quad \text{és} \quad o_z(f) > \delta,$$

ezért elmondható az alábbi becslés:

$$\mathcal{O}(f,J) \geq o_z(f) > \delta.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Most legyen az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $I_n \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallumsorozat $(n \in \mathbb{N})$, amellyel[3]

$$\mathcal{A}_f \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{int}(I_n) \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

[3] Emlékeztetés gyanánt, ha $x \in [a,b]$:

$$x \in \mathcal{A}_f \quad \Longleftrightarrow \quad f \notin \mathfrak{C}\{x\}.$$

Ha pedig $x \in [a,b]$ folytonossági pontja f-nek, akkor az 1.2. lemma alapján

$$f \in \mathfrak{C}\{x\} \quad \Longleftrightarrow \quad o_x(f) = 0.$$

Így a lokális oszcilláció jelentése miatt van olyan $J_x \subset \mathbb{R}$ intervallum, hogy

$$x \in \operatorname{int}(J_x), \quad \mathcal{O}(J_x, f) = \sup\Big\{\big|f(u) - f(v)\big| : u, v \in J_x \cap [a,b]\Big\} < \varepsilon. \quad (*)$$

Ezek alapján könnyen megadhatunk egy lefedését az $[a,b]$ intervallumra[4]

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{int} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathcal{A}_f^c} \operatorname{int} J_x\right).$$

[4] Tehát az f-nek minden szakadási és nem szakadási pontját lefedjük a fenti halmazok segítségével. Itt

$$\mathcal{A}_f^c = [a,b] \setminus \mathcal{A}_f.$$

Ugyanakkor a Borel-lemma alapján az előbbi nyílt lefedésből kiválasztatunk olyan véges $A \subset \mathbb{N}$ és $B \subset \mathcal{A}_f^c$ halmazokat, amelyekkel szintén lefedhetjük az $[a,b]$ intervallumot az alábbi módon:

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{n \in A} \operatorname{int} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{x \in B} \operatorname{int} J_x\right).$$

Most vezessük be azt a $\tau \subset [a,b]$ felosztást, ami az I_n, J_x $(n \in A,\ x \in B)$ intervallumok végpontjait és az a, b számokat tartalmazza. Ekkor az

$$U := \Big\{ I \in \mathcal{F}(\tau) \;\Big|\; I \subseteq I_n \quad (n \in A)\Big\}$$
$$V := \Big\{ J \in \mathcal{F}(\tau) \;\Big|\; J \subseteq J_x \quad (x \in B)\Big\}$$

osztásintervallumoknak (a nem feltétlenül diszjunkt) szétosztását tekintve

$$\omega(f,\tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \mathcal{O}(I,f)\cdot|I| \leq \sum_{I \in U} \mathcal{O}(I,f)\cdot|I| + \sum_{J \in V} \mathcal{O}(J,f)\cdot|J|.$$

Mivel feltettük, hogy az f korlátos, ezért egy alkalmas $C \geq 0$ számmal[5]

$$\big|f(x)\big| \leq C \quad (x \in [a,b]) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{O}(I,f) \leq 2C \quad (I \in U).$$

[5] A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(I,f) &= \sup\Big\{\big|f(x) - f(y)\big| : x, y \in I\Big\} \\ &\leq \sup\Big\{\big|f(x)\big| + \big|f(y)\big| : x, y \in I\Big\} \\ &\leq 2C.\end{aligned}$$

Ennek és a $(*)$-os becslésnek a felhasználásával kapjuk, hogy

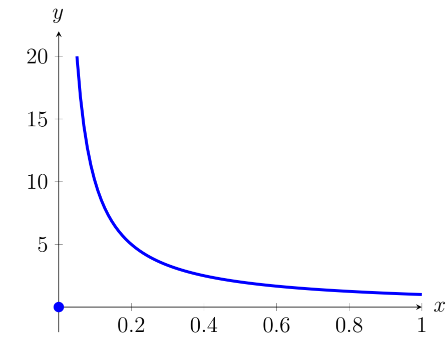
$$\begin{aligned}\omega(f,\tau) &\leq \sum_{I \in U} 2C\cdot|I| + \sum_{J \in V} \varepsilon\cdot|J| \leq 2C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| + \varepsilon \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J| \\ &< 2C\varepsilon + \varepsilon(b-a) = \varepsilon(2C + b - a).\end{aligned}$$

Következésképpen $f \in \mathfrak{R}[a,b]$.

Megjegyzés. A Lebesgue-kritérium csak korlátos függvényre alkalmazható, hiszen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1/x, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

egyedül a nullában nem folytonos, de f nem Riemann-integrálható (lásd 2. ábra).



2. ábra. Az f függvény grafikonja.