

# Linjärt och kvadratiskt dämpade svängningar hos pendlar och harmoniska oscillatorer

Dennis Kristiansson (denkri), Nils Patriksson (panils)

Program: Teknisk Fysik.

Kurs: Experimentell fysik 1 - mätteknik, TIF082, del C.

## Sammandrag

Rapporten behandlar det omgivande mediets dämpande kraft på pendel och fjäder-oscillator vid harmoniska oscillationer. Denna kraft antas ha ett superpositionerat linjärt och kvadratiskt beroende av hastigheten. Teorin har testats för två oscillatorer i form av en kulpendedel upphängd i tråd och en vikt hängande i fjäder. Ett energiresonemang används för att beräkna det bromsande arbetet och därigenom den bromsande kraften. Genom detta kan det kvadratiska och linjära beroendet avgöras var för sig. Dessa beroenden är beräknade för olika massa, pendellängd, viktgeometrier, samt omgivande mediums densitet och viskositet. Resultatet talar för att pendelns bromsande kraft ges av  $F(v) = C_b\eta Rv + C_c\rho R^2v^2$  där  $C_b$  och  $C_c$  är konstanter,  $\eta$  mediets viskositet,  $\rho$  mediets densitet och  $R$  viktens radie. För fjäder-oscillatoren kan ett annat beroende gälla och en möjlig slutsats för det presenteras där påverkan från fjädern och beräkningsmetoden diskuteras.

Nyckelord: pendlar, oscillationer, dämpning, luftmotstånd

## Abstract

The report deals with the force of the surrounding medium on an object during harmonic oscillations. This force is assumed to have a superpositioned linear and quadratic dependence of speed. The theory has been tested for two oscillators in the form of a ball pendulum suspended in a wire and a weight hanging in a spring. The energy principle is used to calculate the braking work and thereby the braking force. Through this, the quadratic and linear dependence can be determined separately. These dependencies are calculated for different mass, pendulum length, weight geometries, density of the surrounding medium, and viscosity of the surrounding medium. The result indicates that the braking force of the pendulum is given by  $F(v) = C_b\eta Rv + C_c\rho R^2v^2$  where  $C_b$  and  $C_c$  are constants,  $\eta$  the viscosity of medium,  $\rho$  the density of medium and  $R$  the radius of the weight. For the spring another dependence may apply and a somewhat more uncertain conclusion is presented. The influence of the spring and the calculation method is discussed.

Keywords: pendulum, oscillations, damping, drag

## Innehåll

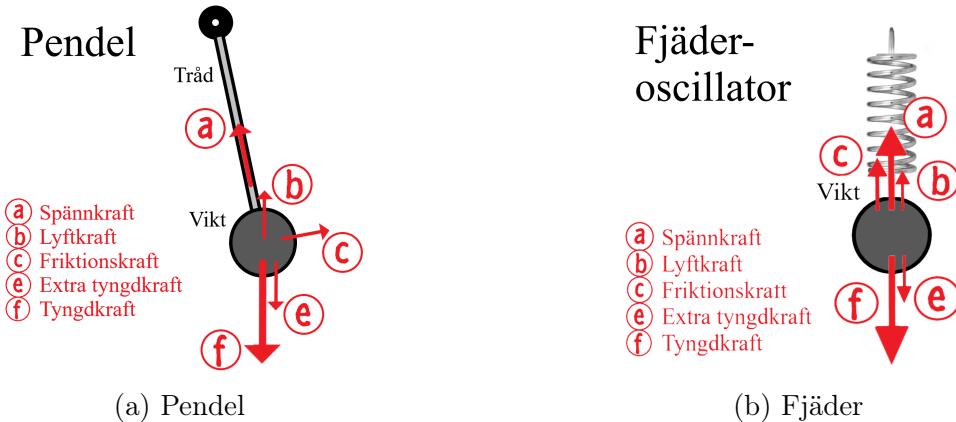
|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Inledning</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2 Teori</b>   | <b>1</b>  |
| <b>3 Metod</b>   | <b>3</b>  |
| 3.1 Uppställning . . . . .   | 3         |
| 3.2 Genomförande . . . . .   | 3         |
| <b>4 Resultat</b>  | <b>4</b>  |
| <b>5 Diskussion</b>  | <b>5</b>  |
| <b>6 Slutsatser</b>  | <b>8</b>  |
| Referenser   | 8         |
| Bilagor  | 9         |
| <b>A Ytterliggare beräkningar av amplitudförändring för fjäderuppställningen</b> | <b>9</b>  |
| <b>B Ytterligare grafer över resultaten</b>                                      | <b>10</b> |
| <b>C Labblogg 2019-04-12 till 2019-04-16</b>                                     | <b>13</b> |
| <b>D Matlabkod för analys av mätdata</b>   | <b>36</b> |
| <b>E Matlabkod för felanalys</b>   | <b>41</b> |

## 1 Inledning

Mekaniska oscillatorer så som pendlar kan verka enkla fysikaliskt men många fysikaliska fenomen påverkar i realiteten svängningarna. Mediet som föremålet färdas genom påverkar på flera sätt. Denna rapport fokuserar på det motstånd som uppstår vid oscillationer i luft och andra medier. Bland annat uppstår en dämpade kraft som dämpar oscillationers magnitud, kallad luftmotstånd om rörelsen sker i luft. Två exempel på oscillatorer är den matematiska pendeln och en fjäder med en vikt upphängd i. Rapportens syfte är att experimentellt bestämma mediets dämpande kraft på dessa rörelser och vilka parametrar som de beror på, i luft men även i andra medier.

## 2 Teori

En harmonisk oscillator som svänger i ett medium kommer att bete sig annorlunda mot en oscillator som svänger i vakuum. Lyftkraft och ökad massa [1] påverkar bland annat oscillatorns svängningstid och en bromskraft dämpar svängningen enligt figur 1. Bromskraften



Figur 1: De harmoniska oscillatorer som används i försöken.

kommer att bero på tyngdens tvärsnittsarea  $A$ , densiteten hos mediet  $\rho$ , hastigheten  $v$  och dämpningskoefficienten  $C_d$ , och ges av [2]

$$F(v) = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2. \quad (1)$$

Denna ekvation gäller egentligen bara för konstanta hastigheter  $v$ , men den kan användas som en approximation vid varierande hastigheter. Då är  $C_d$  inte konstant utan beror på en parameter som kallas reynoldstal  $Re$  som i sin tur beror av hastigheten. I intervallet  $Re \in [0, 2 \times 10^5]$  gäller

$$C_d \approx \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4 \text{ där } Re = \frac{\rho dv}{\eta}, \quad (2)$$

$d$  är föremålets längd och  $\eta$  är mediets viskositet [2].

Bromskraftens beroende av hastigheten kommer därmed bero av reynoldstalet för oscillatorn. För ett antal olika uppställningar är ett antal reynoldtal beräknade i tabell 1

Tabell 1: För några olika objekt i försöksuppställning med pendel respektive fjäder är maximala approximativa reynoldtal beräknade. Observera att detta ger en uppfattning av storleksordningen på reynoldtalen. Viskositetsdata är enligt J.B. Segur och H. Oberstad vid 20°C [3].

|                | Längd, $d$ | Maximal hastighet, $v$ | Maximalt $Re$ , luft | Maximalt $Re$ , vatten | Maximalt $Re$ , glycerol |
|----------------|------------|------------------------|----------------------|------------------------|--------------------------|
| Pendeltråd     | 1 mm       | 20 cm/s                | 10                   | 100                    | 0,1                      |
| Pendelkula     | 10 cm      | 20 cm/s                | 1000                 | 10 000                 | 18                       |
| Fjäder         | 5 mm       | 20 cm/s                | 50                   | 500                    | 0,5                      |
| Vikt på fjäder | 10 cm      | 20 cm/s                | 1000                 | 10 000                 | 18                       |

enligt ekvation 2. Observera att för stora värden på reynoldtalet kommer  $C_d \approx 0,4$  vilket gör att bromskraften enligt ekvation 1 blir  $F = c \cdot v^2$  där  $c$  är en konstant. Stora värden är exempelvis  $Re \in [10^3, 2 \times 10^5]$ . För små värden på reynoldtalet kommer  $C_d \propto 1/v$  vilket gör att kraften från ekvation 1 blir  $F = b \cdot v$  där  $b$  är en konstant. Små värden är exempelvis  $Re \in [0, 1]$ .

För båda oscillatorna med fjäder respektive pendel kommer reynoldtalet att variera från noll till det maximala värdet vilket gör att ett exakt uttryck inte är möjligt utan att använda andra numeriska metoder. Däremot kan en approximation fås med en superposition av en kvadratisk och linjär term.

$$F(v) = b \cdot v + c \cdot v^2 \quad (3)$$

I ekvation 3 är  $b$  och  $c$  konstanter med avseende på hastigheten. Med hjälp av denna ansatta bromskraft kan differentialekvationer för en matematisk pendel och oscillerande fjäder med vikt ställas upp. Med en friläggning av fjäderoscillatoren fås ekvation 4 där  $x$  är avståndet från jämviktsläget och  $k$  är fjäderkoefficienten. De krafter som betraktas är bromskraften från mediet och fjäderkraften. För pendeln används också en friläggning där tyngdkraften för vikten och bromskraften från mediet tas med. Tyngdkraften approximeras då pendelns rörelse begränsas till vinklar under 10° och därmed är  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Då ges pendelns differentialekvation av ekvation 5 där  $\theta$  är vinkeln mellan linan och symmetriaxeln och  $l$  är längden på linan.

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}sgn(\dot{x})\dot{x}^2 + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} + F(\dot{\theta}) + \frac{g}{l}\theta = \ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{cl}{m}sgn(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (5)$$

En fingervisning om hur konstanterna  $b$  och  $c$  beror av mediet och pendelgeometrin kan fås av Stokes formel som ger att  $F(v) = 6\pi\eta Rv$ , alltså  $b = 6\pi\eta R$  då beroendet endast är linjärt [2]. Om beroendet däremot är endast kvadratiskt fås  $F = 0,2 \cdot \rho\pi R^2 v^2$ , vilket ger  $c = 0,2 \cdot \rho\pi R^2$ .

### 3 Metod

#### 3.1 Uppställning

Huvudsakligen användes två uppställningar, en för pendel och en för fjäder. Pendeln utgjordes av vikt och lina eftersom detta gav minst friktion i upphängningen och approximerar en matematisk pendel. Reflextejp fästes på pendelvikterna för att Qualisys-kameror skulle registrera pendeln. Pendeln släpptes för hand från maximalt  $10^\circ$ :s utslag. Endast massan varierades med pingisbollar med olika mängd sand i. Linans längd kunde varieras.

Felkällor kunde även upptäckas och åtgärdas i viss mån. Upphängningen gjordes i form av en klämanordning för att minimera inverkan från kontaktytan mellan pendeltråd och stativ. Stativet med upphängningen stagades upp för att minimera vibrationer. Mängden reflextejp minimerades för att minimera Qualisys-kamerornas mätpunkter och ge rotationssymmetrisk mätpunkt.

Kulornas radier varierades genom användning av klot av olika storlek och massa, eftersom klot med olika radie men samma massa ej fanns att tillgå.

Den andra uppställningen bestod bland annat av en fjäder och vikt enligt figur 1b. Fjäder och vikt valdes så att oscillationerna inte avtog för snabbt och hade en amplitud på cirka 5 cm. Vikten var av cylindrisk form med höjd 50 mm och med massa på 500 g. Fjädern hade fjäderkonstant på 43,3 N/m efter uppmätning, se labbblockens blad 23. Tvärsnittsarean varierades genom att fästa lätt cirka 3 mm tjocka cirkulära kartongskivor på viktens undersida. Viktens längd ändrades genom att fästa en ihålig cylinder av lätt kartong på vikten och successivt klippa den kortare för att behålla viktens cylindriska geometri.

För ytterliggare undersökning av dämpningen testades andra medier. Pendeluppställningen enligt figur 1a nersänktes i ett bad av luft samt glycerol i en vattenlösning. Endast klotet och en del av pendelträden nersänktes i badet. En reflexmarkör (på 5 mm) fästes på träden ovan badet för att registrera vinkeln utan reflektioner från plasttanken. Kulans vikt valdes till 234 g då detta minimerade dämpningen och gav fler mätpunkter. Som tråd valdes sytråd i nylon för minimal fjädring i pendelträden. Densitet och viskositet ändrades genom variation av koncentration glycerol i vattenlösningen och försök i luft.

#### 3.2 Genomförande

Konstanterna  $b$  och  $c$  i ekvation 1 antogs kunna ha ett beroende av följande parametrar. Tvärsnittsarean  $A$  hos vikten, längden  $d$  av vikten, densiteten  $\rho$  hos mediet och viskositeten  $\eta$  hos mediet. För att bekräfta att massan  $m$  hos vikten och längden  $l$  på snöret inte påverkar  $b$  och  $c$  ansattes och testades även dessa. De första testerna genomfördes även för att identifiera och åtgärda felkällor i möjlig mån.

$$b = C_b \cdot A^\alpha d^\beta \rho^\gamma \eta^\delta m^\epsilon l^\zeta \text{ där } C_b \text{ är en konstant.} \quad (6)$$

$$c = C_c \cdot A^\alpha d^\beta \rho^\gamma \eta^\delta m^\epsilon l^\zeta \text{ där } C_c \text{ är en konstant.} \quad (7)$$

Notera att för pendeln gäller att radien på klotet,  $R = \sqrt{A/\pi} = d/2$ . För fjäderoscillatoren ansattes samma ekvationer men med  $\zeta = 0$ . Olika mätserier genomfördes där en storhet (eller två i fallet med densitet och viskositet) varierades åt gången. Värden på  $b$  och  $c$  från varje försök beräknades. En mätserie då en fysikalisk storhet i ekvation 6 och 7

varierats plottades. Daten logaritmerades på båda axlarna och linjär anpassning gjordes. Lutningen på den linjära anpassningen är potensen för det beroendet, till exempel  $\alpha$  för arean. MATLAB-koden för detta finns i bilaga D.

För att beräkna  $b$  och  $c$  i varje försök användes ett energiresonemang. Arbetet utfört av kraften kan integreras under varje halvperiod. Detta eftersom luftmotståndets arbete under en svängning är litet och lösningen till differentialekvation 5 under det antagandet är  $\theta(t) = A \cdot \cos(\omega_\theta t)$  med  $v \approx \dot{\theta} \cdot l$  och  $\omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Då fås

$$W = - \int_0^{\pi/\omega_\theta} (b \cdot v + c \cdot v^2) \cdot v \cdot dt = \frac{\pi \omega_\theta l^2 A_\theta^2}{2} \cdot b + \frac{4\omega_\theta^2 l^3 A_\theta^3}{3} \cdot c. \quad (8)$$

Enligt energiprincipen ska detta arbete vara samma som förändringen av lägesenergin i högsta läget under en halv period. Alltså ska

$$W = -mgl\Delta A_\theta \cdot \sin(A_\theta) \approx -mgl\Delta A_\theta \cdot A_\theta \quad (9)$$

vilket kan skrivas som en differentialekvation när det observeras att förändringen av amplituden  $\Delta A_\theta$  sker under en tidsperiod  $\Delta t$ .

$$\begin{aligned} \Delta A_\theta / \Delta t &= - \left( \frac{\pi \omega_\theta l^2 A_\theta^2}{2mglA_\theta} \cdot b + \frac{4\omega_\theta^2 l^3 A_\theta^3}{3mglA_\theta} \cdot c \right) / \Delta t = - \left( \frac{\pi \omega_\theta l A_\theta}{2mg} \cdot b + \frac{4\omega_\theta^2 l^2 A_\theta^2}{3mg} \cdot c \right) / \Delta t = \\ &= \left\{ \Delta t = \pi / \omega_\theta = \pi / \sqrt{\frac{g}{l}} \right\} \Rightarrow -\frac{dA_\theta}{dt} = \frac{b}{2m} \cdot A_\theta + \frac{c \cdot 4\omega_\theta l}{3\pi m} \cdot A_\theta^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Detta är lösbart med lösningen

$$A_\theta(t) = \frac{C_{\theta 1} A_{\theta 0} e^{-C_{\theta 1} t}}{C_{\theta 1} + C_{\theta 2} A_{\theta 0} (1 - e^{-C_{\theta 1} t})} \text{ där } C_{\theta 1} = \frac{b}{2m}, C_{\theta 2} = \frac{c 4\omega_\theta l}{3\pi m} \text{ och } A_{\theta 0} = A_\theta(0). \quad (11)$$

Genom att anpassa positionsdatan från ett försök till lösningen i ekvation 11 erhölls värden på  $b$  och  $c$ .

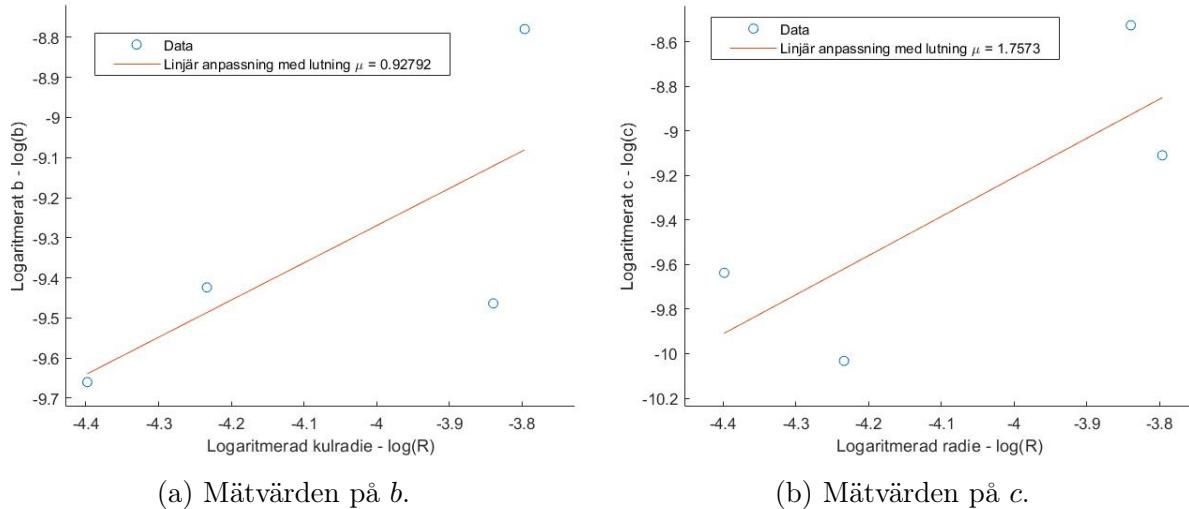
På liknande sätt bestämdes  $b$  och  $c$  för fjäderoscillatoren. Kraften integrerades för att ge arbetet men positionen kunde istället beskrivas med  $x(t) = A_x \cdot \cos(\omega_x t)$  och  $v = \dot{x}$  där  $\omega_x = \sqrt{k/m}$  under en kort tid  $\Delta t = \pi / \omega_x$ . Differentialekvationen i ekvation 5 löstes under antagandet att förändringen i amplitud  $\Delta A_x \ll 2 \cdot A_x$  för att förenkla differentialekvationen. Utförligare beräkningar finns i bilaga A. Lösningen blir då

$$A_x(t) = \frac{C_{x 1} A_{x 0} e^{-C_{x 1} t}}{C_{x 1} + C_{x 2} A_{x 0} (1 - e^{-C_{x 1} t})} \text{ där } C_{x 1} = \frac{b \omega_x^2}{2k}, C_{x 2} = \frac{c \omega_x^3 4}{3k\pi} \text{ och } A_{x 0} = A_x(0). \quad (12)$$

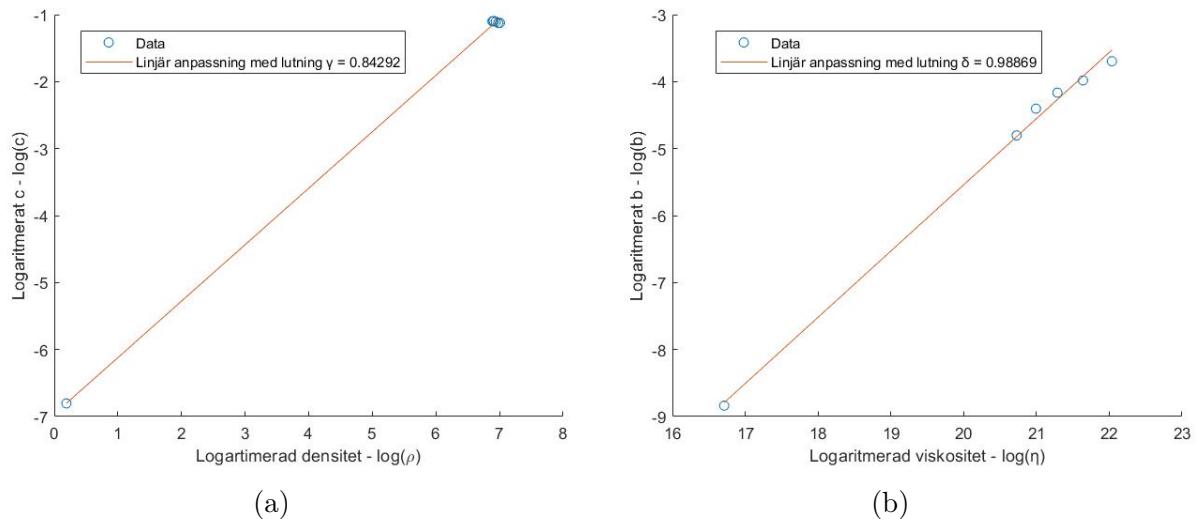
## 4 Resultat

Variation av radien hos pendeln ger med linjär kurvanpassning  $b \propto R$  och  $c \propto R^2$ , se figur 2. Med resultatet att parametrarna är oberoende av massa och längd, se bilaga B, ger dimensionsanalys att  $b = C_b \cdot \eta R$  och  $c = C_c \cdot \rho R^2$ . Resultatet bekräftas av figur 3. Detta ger uttrycket

$$F_{pendel}(v) = C_b \cdot R \eta v + C_c \cdot R^2 \rho v^2. \quad (13)$$



Figur 2: Log-log-plot med parametervärden för olika radier på pendelns klot.

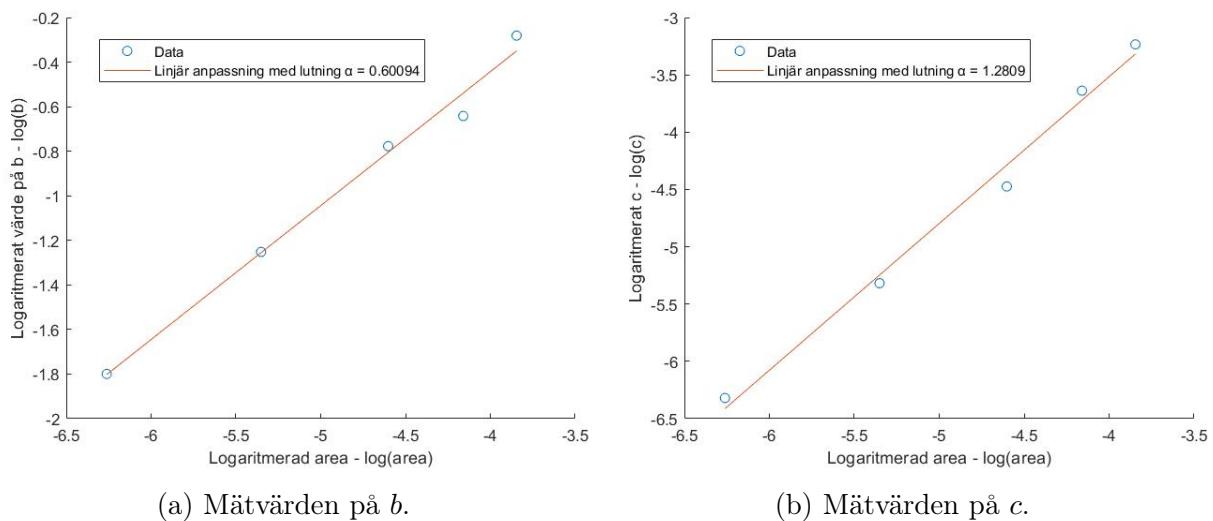
Figur 3: Log-log-plottar för (a) olika densiteter för mediet pendeln befinner sig i och i (b) olika viskositet på mediet som pendeln pendlar genom. Varierande densitet (a) endast för den linjära termen  $b$  och varierande viskositet endast för den kvadratiska termen  $c$ .

I försöken där radien varieras för pendeluppställningen i luft beräknades värden på konstanterna i ekvation 13. Medelvärdet för dessa är  $C_b = 293$  och  $C_c = 0,266$ . I försöken med vattenlösning blir  $C_b = 424$  och  $C_c = 0,8773$ .

För fjäder-oscillatoren är det mest troligt att  $b \propto A^{1/2}$  och  $c \propto A$ , se figur 4 samt tabell 2. Alternativt kan resultatet tolkas som  $c \propto A^{3/2}d^{-1}$ .

## 5 Diskussion

Ett antal antaganden har gjorts som kan påverka resultaten. För beräkning av differentialekvationen för pendeln antas pendeln vara en matematisk pendel som svänger med små



Figur 4: Log-log-plot med olika areor på en tillsatskartong fäst på vikten. Detta gjort för fjäderoscillatoren.

vinklar. Pendeln antas följa en ideal bana, det vill säga pendeln antas åka fram och tillbaka genom jämviktspunkten. Fel uppstår i arbetsintegralen i ekvation 8 då hastigheten och sträckan inte är densamma som i det ideala fallet. Differentialekvationen i ekvation 5 är löst i endast en dimension och därför har försök där pendeln får en elliptisk bana ej presenterats i resultaten.

Andra felkällor är till exempel påverkan från tråden som försummas. Fjäderoscillatoren är asymmetrisk geometriskt på grund av upphängningen i fjädern. Antagande görs att ovan- och undersida påverkas av samma luftmotstånd. Även här antas tyngden anta ideal bana genom jämviktspunkt precis som för pendeln. Parametrarna  $b$  och  $c$  antas vara oberoende av vinkelamplitud för perioden. Detta är en felkälla då  $Re$  minskar med mindre vinkelamplitud. Det leder till att  $b$  och  $c$  är approximativa medelvärden över alla testade perioder.

De observerade värdena kan jämföras med teorin som troligjorde att  $b = 6\pi\eta R \approx 18,85\eta R$  och  $c = 0,2\pi\rho R^2 \approx 0,6283\rho R^2$  enligt bland annat Stokes formel. Dimensionsmässigt stämmer  $b$  och  $c$  för pendeln men konstanterna  $C_b \approx 350$  och  $C_c \approx 0,6$  skiljer sig från de förväntade värdena.  $C_c$  verkar stämma bra men  $C_b$  skiljer sig en storleksordning. Detta beror förmodligen på beroendet är mer komplicerat än kvadratiskt och linjärt. När denna modell anpassas till mätdatan så kommer det linjära beroendet kompensera för andra beroenden då  $Re \in [1, 10^4]$ .

Antagandet om linjärt och kvadratiskt beroende i ekvation 1 är en stor felkälla. I annan litteratur underbyggs approximationen med ett linjärt och kvadratiskt beroende superpositionerat [1][2][4][5]. Dock kan en feluppskattning ges om ett explicit uttryck från teoriavsnittet för kraften integreras över en period. Detta görs numeriskt i MATLAB (bilaga E) och jämförs med modellen från resultatet integrerat över samma period. Modellen från resultatet ger exempelvis 14 % mindre arbete (från ekvation 8) i vatten över en period när utslagsvinkeln är  $10^\circ$ . Testas till exempel rent glycerol fås 84 % mer arbete än den framtagna modellen. Detta kan bero på glycerolens annorlunda viskositet som gör dämpningen per period högre. Därmed är den approximativa lösningen till differentialekvation

Tabell 2: Mätdatan som logaritmeras för variation av parametrarna radie, densitet, viskositet, massa, trådlängd, area och viktlängd är linjärt kurvanpassad. Lutningarna är givna som exakta resultat i tabellen under rubriken "Kurvanpassat" och efter dimensionsanalys under rubriken "Troligt". De tester som är utförda för pendel respektive fjäderoscillator är uppdelade i tabellen.

|                           | Pendel för konstanten $b$ |                           | Pendel för konstanten $c$ |            | Enhets                       |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|------------|------------------------------|
|                           | Kurvanpassat              | Troligt                   | Kurvanpassat              | Troligt    |                              |
| Radie, $\mu$              | 0,93                      | 1                         | 1,76                      | 2          | [m]                          |
| Densitet, $\gamma$        | -                         | 0                         | 0,84                      | 1          | [kg/m <sup>2</sup> ]         |
| Viskositet, $\delta$      | 0,99                      | 1                         | -                         | 0          | [Pa · s = N/m <sup>2</sup> ] |
| Massa, $\epsilon$         | 0,04                      | 0                         | -0,42                     | 0          | [kg]                         |
| Trådlängd, $\zeta$        | -0,19                     | 0                         | 0,17                      | 0          | [m]                          |
| Fjäder för konstanten $b$ |                           | Fjäder för konstanten $c$ |                           |            |                              |
|                           | Kurvanpassat              | Troligt                   | Kurvanpassat              | Troligt    | Enhets                       |
| Area, $\alpha$            | 0,60                      | 0,5                       | 1,28                      | 1 alt. 1,5 | [m <sup>2</sup> ]            |
| Viktlängd, $\beta$        | 0,04                      | 0                         | -0,34                     | 0 alt. -1  | [m]                          |

5 dålig i detta fall. Alltså borde uttrycket i resultatet endast gälla ungefärligt och under rätt förutsättningar. Resultatet är felaktigt för snabbt avtagande svängningar såsom en lätt vikt i medium med högre densitet och viskositet än vatten-glycerollösning med 30 % glycerolinblandning.

Felkällor från antagandet om endast kvadratiskt och linjärt beroende gör att  $C_b$  och  $C_c$  i ekvation 13 ändras i olika medier och uppställningar.  $C_b$  har spridning 40 % medan  $C_c$  har spridning med en faktor 4 under alla försök. Jämförs exempelvis luft  $C_b \approx 2.5$  och vatten  $C_b \approx 0.9$  färs stor skillnad i konstanterna vilket kan bero på brister i modellen alternativt fel under mätning.

För pendeln ger samtliga variationer av parametrar rimliga resultat förutom den kvadratiska  $c$ -termen för massan. Denna borde vara 0 då massa hos ett objekt rimligtvis inte kan påverka luftmotståndet från mediet. En felkälla är att tyngdpunkten ändras beroende på mängden sand i pingisbollen. Om detta ger fel tyngdpunkt på 1 cm kommer  $l$  bli cirka 1,5 % större. Detta påverkar endast  $c$  och med 1,5 % enligt ekvation 11. I en logaritmerad plot blir det en faktor 2 % vilket inte är anmärkningsvärt mycket. Även sandens möjliga rörelse i pingisbollen är en felkälla men förmodligen är det andra fel i försöket som ger det oförväntade resultatet.

För kraftens beroende av mediet behövs dimensionsanalys. Efter att kraftens beroende av pendelvikten radie  $R$  bestämts kan det antas att  $\delta = 0$  och  $\gamma = 0$  i ekvation 6 och 7 för att uttrycken ska vara dimensionsriktiga. Testerna av densitet och viskositet för  $c$  respektive  $b$  stödjer dimensionsanalysen, se figur 3.

I försöken för fjäderuppställningen är den dämpande kraften något större än för pendeln i luft. Detta kan förklaras med att både arean och längden hos objekten var större. Fjädern gav troligtvis upphov till betydligt mer luftmotstånd än syträden gjorde. I dessa försök domineras kraften av den linjära termen. Mätningarna då längden  $d$  varierades gav medelvärde  $b = 0,19$  och  $c = 0,0019$ , alltså är den linjära termen i detta fall ungefär 100 gånger större. Det skulle kunna förklaras med att fjäder-oscillatoren upplevde mindre

hastigheter relativt pendeln, då mindre hastighet ger mindre reynoldstal.

Det är inte helt klart hur resultaten för fjäder-uppställningens beroende av area och längd ska tolkas. Om fjäderoscillatorns bromskraft antas bero av densiteten och viskositeten som för pendeln stämmer enheterna för  $b \propto A^{1/2}$  och  $c \propto A^1$  eller  $c \propto A^{3/2}d^{-1}$ , där  $A$  är objektets area och  $d$  är längden. Detta är emellertid inte konsistent med teorin och mätdata kan peka på något utav dem.

Det annorlunda resultatet jämfört med pendeln kan bero på att när arean och längden varierades ändrades även geometrin för vikten. En platt kartongbit sattes på en cylindrisk vikt och därför liknar inte geometrin en sfär och kan ge ett icke-laminärt flöde.

## 6 Slutsatser

Luftmotståndet som verkar på en pendel med klotformad vikt går att approximera med ekvationen

$$F_{\text{pendel}}(v) = C_b \cdot R\eta v + C_c \cdot R^2 \rho v^2 \quad (14)$$

där  $C_b \approx 350$  och  $C_c \approx 0,6$  i luft och vatten/glycerol-lösning.  $C_c$  har stor spridning med maximalt en faktor 4 medan  $C_b$  har spridning  $\pm 150$  men gäller ungefärligt för pendlar av längd  $1 \pm 0,5\text{m}$  med klotformade vikter med tyngd  $150 \pm 130\text{g}$  i luft och vatten-glycerollösning (max 30 % glycerol).

Fjäder-oscillatorns dämpning är mer osäker men det kan gälla att  $F_{\text{fjäder}}(v) \approx D_b \cdot A^{1/2}v + D_c \cdot Av^2$ . Detta är dock tvivelaktigt då fjäderoscillatorns dämpning skulle vara oberoende av viktens längd  $d$ . Felkällan är inte fastställd men kan bero på geometriska faktorer eller en alltför allmän ansats.

Vidare undersökningar kan exempelvis behandla variation av arean hos fjäderoscillator utan att geometrin ändras så markant. Även en uppställning där precession minimeras alternativt en flerdimensionell beräkningsmetod används kan ge mer allmänna resultat. Vidare hade en numerisk dataanalys liknande den i felanalysen kunnat användas för att ge ett mer allmängiltigt resultat.

## Referenser

- [1] R. A. Nelson och M. G. Olsson, “The pendulum & Rich physics from a simple system”, *American Journal of Physics*, årg. 54, nr 2, s. 112–121, 1986. DOI: 10.1119/1.14703.
- [2] P. Timmerman och J. P. van der Weele, “On the rise and fall of a ball with linear or quadratic drag”, *American Journal of Physics*, årg. 67, nr 6, s. 538–546, 1999. DOI: 10.1119/1.19320. URL: <https://doi.org/10.1119/1.19320>.
- [3] J. B. Segur och H. E. Oberstar, “Viscosity of Glycerol and Its Aqueous Solutions”, *Industrial & Engineering Chemistry*, årg. 43, nr 9, s. 2117–2120, sept. 1951, ISSN: 0019-7866. DOI: 10.1021/ie50501a040.
- [4] C. E. Mungan och T. C. Lipscombe, “Oscillations of a quadratically damped pendulum”, *European Journal of Physics*, årg. 34, nr 5, s. 1243–1253, 2013, ISSN: 01430807. DOI: 10.1088/0143-0807/34/5/1243.
- [5] P. T. Squire, “Pendulum damping”, *American Journal of Physics*, årg. 54, nr 11, s. 984–991, 2005, ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.14838.

## A Ytterliggare beräkningar av amplitudförändring för fjäderuppställningen

$$\begin{aligned}
 W_{cykel} &= - \int_0^{\pi/\omega_x} (b \cdot v + c \cdot v^2) \cdot v \cdot dt = \\
 &= \int_0^{\pi/\omega_x} (b \cdot A_x \omega_x \sin(\omega_x t) + c \cdot (A_x \omega_x \sin(\omega_x t))^2) \cdot A_x \omega_x \sin(\omega_x t) \cdot dt = \\
 &= \frac{\pi \omega_x A_x^2}{2} \cdot b + \frac{4 \omega_x^2 A_x^3}{3} \cdot c.
 \end{aligned}$$

Enligt energiresonemanget ska detta arbete vara samma som förändringen av lägesenergin i högsta läget. Alltså ska

$$W = \frac{1}{2}k(A_x - \Delta A_x)^2 - \frac{1}{2}k(A_x)^2 = W_{cykel}.$$

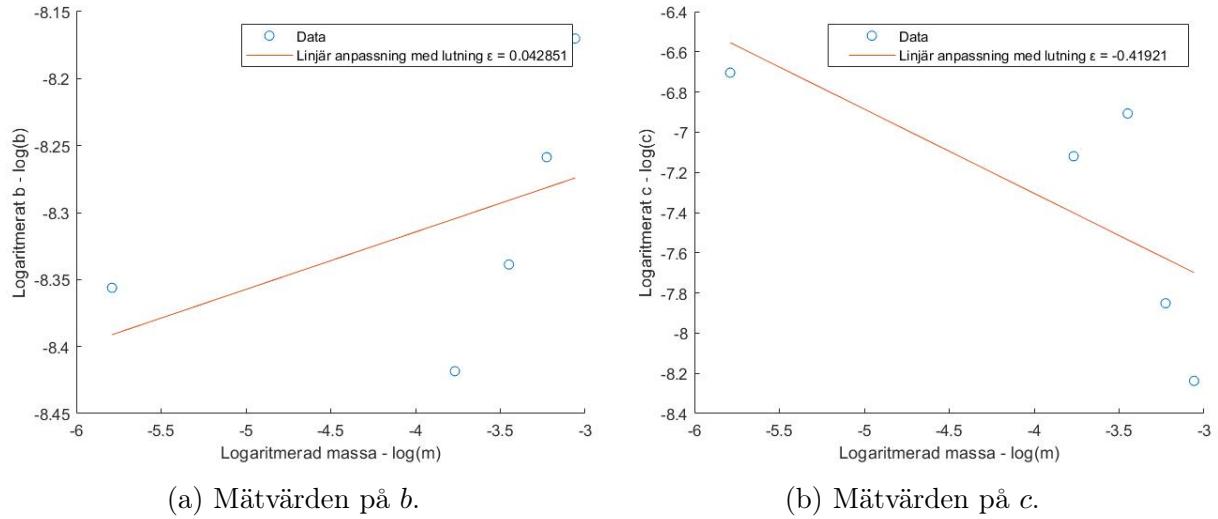
Om det gäller kan man förenkla uttrycket som

$$\begin{aligned}
 \frac{(\Delta A_x)^2}{2A_x \Delta t} - \frac{\Delta A_x}{\Delta t} &= \left( \frac{\pi \omega_x A_x}{2k} \cdot b + \frac{4 \omega_x^2 A_x^2}{3k} \cdot c \right) / \Delta t = \left\{ \Delta t = \pi / \omega_x = \frac{\pi}{\sqrt{k/m}} \right\} = \\
 &= \frac{\omega_x^2 A_x}{2k} \cdot b + \frac{4 \omega_x^3 A_x^2}{3k\pi} \cdot c.
 \end{aligned}$$

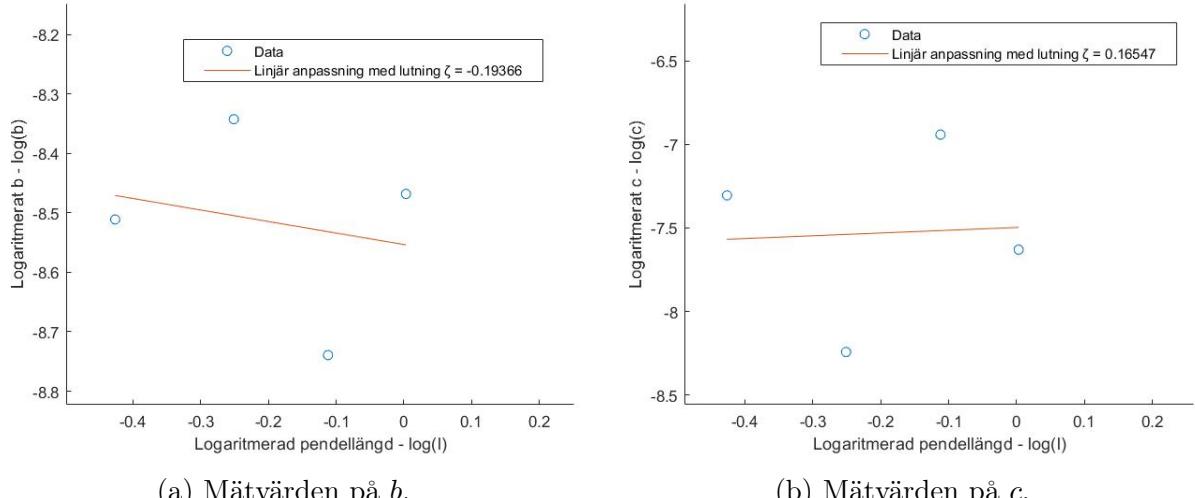
Betraktar man de två termerna i början av uttrycket så kommer de att skilja med en faktor  $\Delta A_x / 2A_x$  som behöver vara avsevärt mindre än 1. Det är alltså kvoten mellan förändringen i amplitud och nuvarande maxamplituden. Om det antas att den termen är mindre får man differentialekvation i ekvation 15.

$$-\frac{dA_x}{dt} = \frac{b \cdot \omega_x^2}{2k} \cdot A_x + \frac{c \cdot \omega_x^3}{3k\pi} \cdot A_x^2 \quad (15)$$

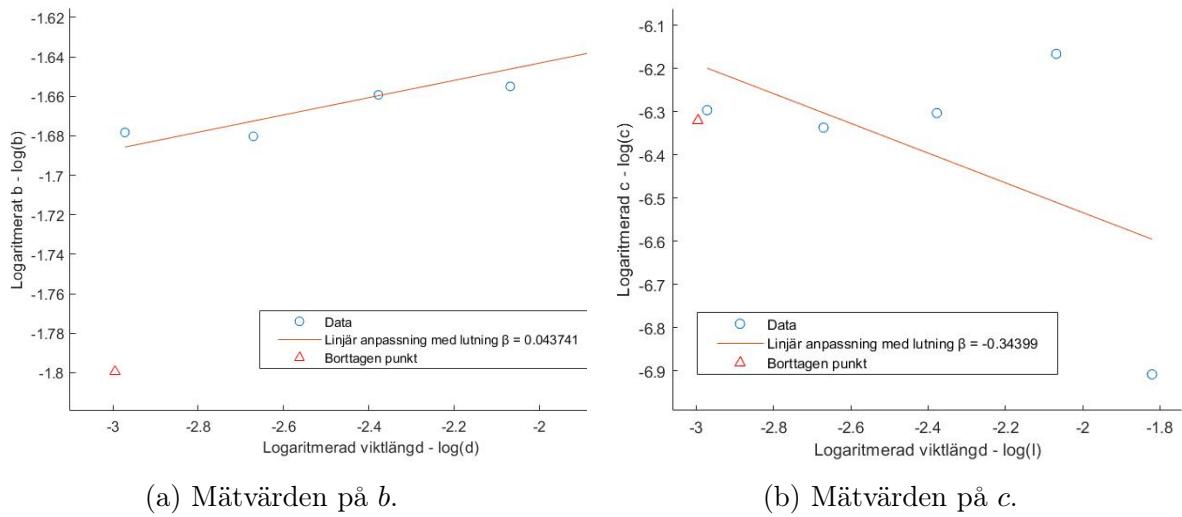
## B Ytterligare grafer över resultaten



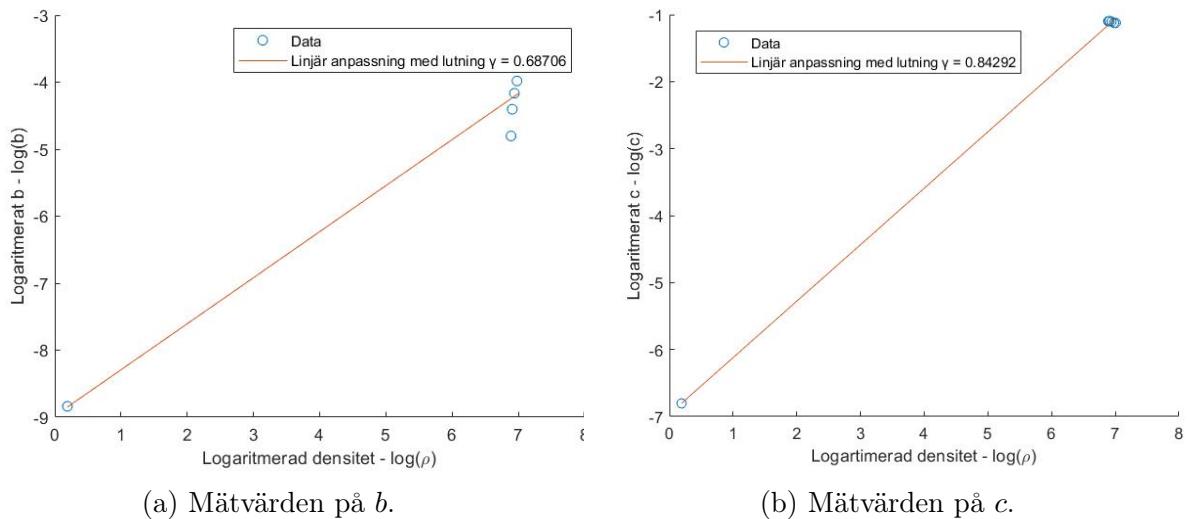
Figur 5: Log-log-plot med data då massan för en pendel ändrades. Värdet på  $\epsilon \approx 0$  för  $b$  och  $\epsilon \approx -0.4$  för  $c$ .



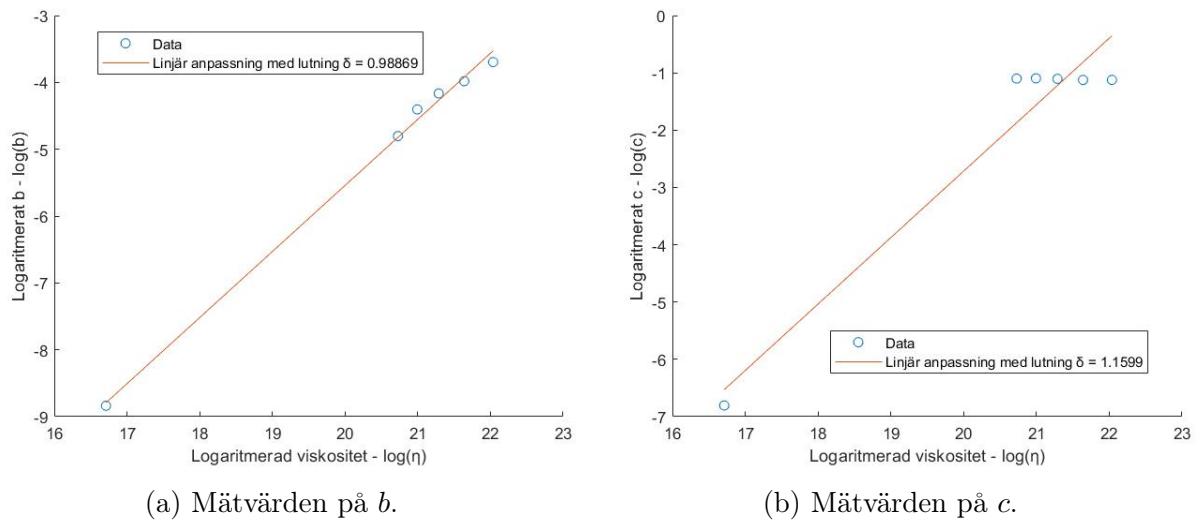
Figur 6: Log-log-plot med olika längder på pendelns lina.



Figur 7: Log-log-plot med olika längder på viktens längd för fjäderoscillatoren.



Figur 8: Log-log-plot med olika densiteter för mediet pendeln befinner sig i.



Figur 9: Log-log-plot med olika viskositet på mediet som pendeln pendlar genom.

## C Labblogg 2019-04-12 till 2019-04-16

Blad 1

$$\sin(\theta) \varphi \approx x$$

Kalibrering av hamrar har utförts.

Försök 1: Prövköll. Lina syträdel

$$l = 653 \text{ mm}$$

$$m = 3,06 \text{ g}$$

$$d = 3,875 \text{ cm}$$

$$\text{matning slutar: } 31 \text{ s}$$

$$\text{jämvikt tid: } 10 \text{ s}$$

Filnamn: Försök 1.tsv

## Blad 2

- Forsök 2: Pringsball med sand. Svarad  
 $t = 668 \text{ mm}$   
 $m = 46,941 \text{ g}$   
 $d = 3,755 \text{ cm}$   
 Slut: 24 s  
 Jämvt: 10 s

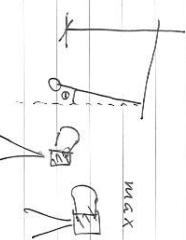
Filnamn: Forsok2.tsv

- förflykt 3:  
 $l = 666 \text{ mm}$  Träden fädrar  
 $m = 23,1 \text{ g}$  nagon runt upp & ner.  
 $d = 3,755 \text{ cm}$

- Slut: 21 s  
 Jämvt: ~10 s

## Blad 3

Tävling:  
 Ngon/han fjädrar upp och ner om man ger den vikt. Men fiskelmann är snarare att den drar ned ströre "fjäderkraft" + detta väts.



Rörelsen följs i kameraspråket.

Först rörelsen från 10 cm utslag till ca 3 cm utslag. Sen tas läget för jämvikt igen och släms sedan pehden.

Blad 4

Forsök 4:

$$m = 39.698$$

l = 66.2 cm

$$d = -11$$

Satz: 245

Järvik 6 : 105

d 5

2

$$m = 77, 172$$

$$mm \neq 99 = 2$$

Tid slut : 23 s

Jan. 1st : 1915

100

Kommunikation:

mycket snar  
av rikten.  
processera de  
med, konstru  
för grund av  
rotations

5

## Blad 6

|                  |  |
|------------------|--|
| <u>Försök b:</u> | Pingisboll förflyttning med sand, 6<br>variation av längd<br>på töd. |
| $m = 48,15$      |  |
| $t = 1003$ mm    | Koncentrar:  |
| $d = u$          |  |
| Slat: 25,5       |  |
| Jamn: 10,5       |  |

## Tanke:

Koncentrar:

Reflexplatser:ugen  
är över hela  
bollen, som ett  
"bälte". Detta  
kan göra att  
kamerorna har  
ett intetvärde  
och därmed  
sämre mätvärden

## Blad 7

|  |                          |
|--|--------------------------|
| <u>Försök b:</u>                                       | —                        |
| $m = 48,56$  | Koncentrar:              |
| $t = 778$ mm   | mera snarre<br>på dearna |
| $d = u$  |                          |
| Sträckor: ett slutföra detta<br>försök, går hem 19.10. |                          |

## Blad 8

Dag 2

8

08:45 Ny kalibrering shen. Residual blev

0,25 ungeter. Behörd rörla över

bakgrund som störde.

Bra att skjöna i hörnet också

så att det inte blir för bläsigt.

Reflektorer från igår är ok.

\* mina löjs blir, kan pröva om

innehållsgivarna blir rätta, kanske

han ut i boten av svängningen

så är bokantaget blir fel?

Älgänd: inästa närske ställ

fiskelåna användas

\* reflexkejpen som sitter på bollen

är som ett "bälte" runt.

\* kamarna blir detta en

elliptisk utstoppning, något slags

ungefärlig värde,

denna kamste ger stora ungtal!

Älgänd: gör en mindre reflexkejpe - punkt genom att fästa en reflexkott överan på pseudellulan

## Blad 9

Försök 7: ————— . —————9  
09:30

$m = 48,57 \text{ g}$

$l = 778 \text{ mm}$

$d = \underline{\hspace{2cm}}$

Tidmått på

om stativet

virkade/oscillerade

Jämvikt: 10 s

Slut: 29 s

Märkverk (eller bestyrning)

och den sig ur

att vara till

Försök 8: ————— . —————

$m = \underline{\hspace{2cm}}$

$l = 65,3 \text{ cm}$

Kommentar: ingen kommentar

$d = \underline{\hspace{2cm}}$

09:45

Slut: 29 s

Jämvikt: 10 s

## Blad 10

09:55

Försök 1:

$$m = \underline{\quad} - g$$

$$l = 894 \text{ mm}$$

$$d = \underline{\quad}$$

Slut:

$$30.5$$

Jämför:

$$10.5$$

Kommentar:

Magot vi

På

alla

värningar

in

så

kun

ge

att

beräkna

10° s

utslag och

maximalkt

slappa

den

driften

10

Beräknade b och c:

Försök 1:  $b = 2.3495 \cdot 10^{-4}$ 

$$c = 9.5779 \cdot 10^{-7}, 1.2263 \cdot 10^{-3}$$

Försök 2:  $b = 2.8299 \cdot 10^{-4}$ 

$$c = 2.6121 \cdot 10^{-7}, 2.6455 \cdot 10^{-4}$$

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

## Blad 11

11

Försök 1:  $b = 2.3495 \cdot 10^{-4}$ 

$$c = 8.2787 \cdot 10^{-7}, 8.0933 \cdot 10^{-4}$$

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

○

## Blad 12

I dessa försök varieras massa.

Logaritmering av massa och parameter ger:

$$b = C \cdot m^a, \quad c = C \cdot m^b$$

$$a = 0.0429 \approx 0$$

$$\beta = -0.3095, -0.4112 \text{ Dataan ses osäker ut här.}$$

12

Berechnung b och c förs.

13

$$\text{Försök 6:} \quad b = 2.1005 \cdot 10^{-4}$$

$$f = 1003 \text{ mm} \quad c = 4.8541 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Försök 7:} \quad b = 2.3818 \cdot 10^{-4}$$

$$f = 278 \text{ mm} \quad c = 2.6309 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Försök 8:} \quad b = 2.0121 \cdot 10^{-4}$$

$$f = 653 \text{ mm} \quad c = 6.2164 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Försök 9:} \quad b = 1.6018 \cdot 10^{-4}$$

$$f = 894 \text{ mm} \quad c = 9.6632 \cdot 10^{-4}$$

Den kvadratiska effekten varierar något med massan. Om det finns tid för ytterligare försök kan felaktig sättan:  
 x-förändring i position  
 x-förändring av periodtid

Här  $\beta$  blir sågass stort kanske visar på hur osäkert det är att värde är. Om periodtiden ändras så kanske ären också hastigheten gör det  
 $\Rightarrow$  mer kvadratisk effekt

## Blad 13

## Blad 14

Beräkning av  $I$ , påverkande param. s.g.

$$b = D \cdot t^{\alpha}, \quad c = D \cdot t^{\beta}$$

$$\alpha = -0.1920$$

, ser slumpmässigt ut  
ej berende, hög osäkerhet

$$\beta = 0.1655$$

, ser inte ut att ber  
pa  $t$ , sida-sida mönster.

14

## Blad 15

Förslag 10:ändring av area

$$m = 67,45 \text{ g}$$

$$f = 76,7 \text{ mm}$$

$$d = 16,3 \text{ mm}$$

Kommunikat:

Gick åt mycket  
kej för att fåsa  
sista som testas  
med denna "uppsättning"  
taffördet runt  
krum.

$$\text{Slut: } 33,5$$

Lite varit märken  
också.  
Nu används fiscer-  
linna istället.

Förslag 11:

ändring av area

$$m = 45,2 \text{ g}$$

$$f = 76,6 \text{ mm}$$

$$d = 4,1 \text{ cm}$$

Kommunikat:  
~~Förslag 10~~, isboll med  
sand i vilken  
fis söker hällas

Testar att mätta  
periodiken för  
periodiken har  
med d. Med lösningar  
under 100 perioder.  
2:53,75 blir  $\frac{1}{4}$  den  
 $\Rightarrow$  periodkid =  $1,7375 \pm 0,005$

$$\text{Slut: } 30,5$$

$$\text{Jämvikt: } 10,5$$

15

11,20

## Blad 16

Forsök 12:

$m = 66,07 \text{ g}$

$l = 782 \text{ mm}$

$d = 58,8 \text{ mm}$

Slut:  $32 \text{ s}$ Jamvikt:  $10 \text{ s}$ 

$b = 2,4924 \cdot 10^{-4}$

$c = 3,2627 \cdot 10^{-3}$

Forsök 13:

$m = 119,4 \text{ g}$

$l = 786 \text{ mm}$

$d = 6,8 \text{ cm}$

Slut:  $30 \text{ s}$ Jamvikt:  $10 \text{ s}$ 

$b = \sim 2,3106 \cdot 10^{-4}$

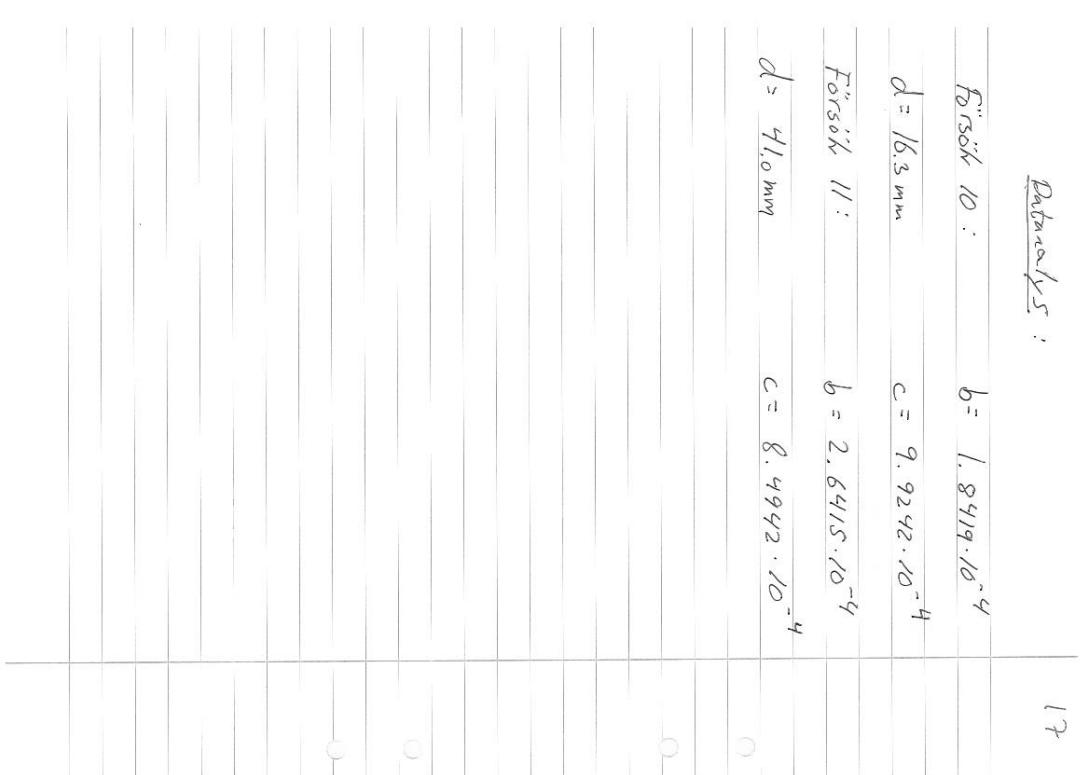
$c = 7,4978 \cdot 10^{-3}$

Kurvan blir inte bra anpassad här

16

Dataanalys:Forsök 10:  $b = 1,8419 \cdot 10^{-4}$  $d = 16,3 \text{ mm}$   $c = 9,9242 \cdot 10^{-4}$ Forsök 11:  $b = 2,6415 \cdot 10^{-4}$  $d = 41,0 \text{ mm}$   $c = 8,4942 \cdot 10^{-4}$ 

17



## Blad 18

Forsök 14:

$$\begin{aligned} t &= 786 \text{ mm} \\ m &= 119,4 \text{ g} \\ d &= 68 \text{ mm} \end{aligned}$$

fick någ ot  
elliptisk bana

Slut: 35 s  
Jamvikt: 10 s

$$\begin{aligned} b &= 1.4651 \cdot 10^{-4} \\ c &= 6.4872 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Koncentratur:  
x Street reflexband

18

Forsök 15:

$$\begin{aligned} m &\sim 12,1 \text{ g} \\ t &= 742 \text{ mm} \\ d &= 14,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

Kan bero på  
fiskenräden som  
inte blir helt  
strökt.

Slut: 31 s  
Jamvikt: 10 s

$$\begin{aligned} b &= 6.8288 \cdot 10^{-5} \\ c &= 2.8105 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

19

Forsök 16:

$$\begin{aligned} t &= 784 \text{ mm} \\ m &= 12,1 \text{ g} \\ d &= 14,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

Ingen precision  
men fiskenräden  
barde bytas  
ut vid så  
pass långa  
välkor.

Slut: 35 s  
Jamvikt: 10 s

$$\begin{aligned} b &= 7.3772 \cdot 10^{-5} \\ c &= 2.2536 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Pendeln böjde  
precisera och en smärt  
elliptisk bana intiförde.

19

## Blad 20

20

Linen byts här mot sybad, på grund  
av att fishlian inte sträcks ut helt  
med en liten massa, och precisionen vitt  
undvikas.

Försök 17:

$$l = 776 \text{ mm}$$

$$d = 14,5 \text{ mm}$$

$$m = 12,1 \text{ g}$$

$$c = 1.1654 \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} \text{Slut: } & 26 \text{ s} \\ \text{jämv: } & 10 \text{ s} \end{aligned}$$

Försök 19:

$$l = 771 \text{ mm}$$

$$m = 7,3 \text{ g}$$

$$d = 12,3 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \text{Slut: } & 50 \text{ s} \\ \text{jämv: } & 10 \text{ s} \end{aligned}$$

$$b = 6.3791 \cdot 10^{-5}$$

$$b = 8.0773 \cdot 10^{-5}$$

$$c = 4.3946 \cdot 10^{-5}$$

Försök 18:

$$l = 775 \text{ mm}$$

$$m = 31,6 \text{ g}$$

$$d = 22,45 \text{ mm}$$

Preciseras till

Koncentrasi:

Denna var  
magnehisk →  
bordet är  
metall vilket

gör att en  
liten induktions-  
effekt konser-  
verstår.  
Den är dock  
10 cm från  
bordet så  
känns som att  
det inte körde  
påverka.

21

## Blad 21

Blad 22

Försök 20 :

$$l = 771 \text{ mm}$$

$$d = 2.15 \text{ cm}$$

$$m = 2.96 \text{ g}$$

Slut: 53.5Jämvikt: 10 s

$$b = 7.7621 \cdot 10^{-5}$$

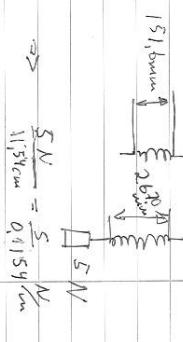
$$c = 1.9817 \cdot 10^{-4}$$

22

Blad 23

Nu byts pendeln mot en upphängd  
fjäder med cylindrisk vikt

$$k: 156 \text{ N/m}$$

Försök 21 :

Vikt under pendel  
(ur skrivna)

$k = \frac{s}{F} =$

$$m = 5.03 \text{ g}$$

$$r = 49.3/2 \text{ mm}$$

$$d = 5 \text{ cm}$$

23

$$\text{Slut: } 26 \text{ s}$$

Jämvikt: 10 s

$$b = 0.1654$$

$$c = 0.0018$$

23

## Blad 24

24

Forsök 22:

$$\begin{aligned} k &= \dots u \\ m &= 508.3 g \\ r &= 11.3/2 \text{ cm} \\ d &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Konstantar:  
 $d$  är inklusive  
 viktten.

$$\begin{aligned} Slut: & 29 s \\ Jamvikt: & 10 s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0.4597 \\ c &= 0.0114 \end{aligned}$$

Forsök 23:

$$\begin{aligned} k &= \dots u \\ m &= 512 g \\ r &= 14.1/2 \text{ cm} \\ d &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Kommentar:  
 glönde registrera  
 jämviktsläget  
 finns i figuren  
 "Forsök 23j. t sv"

$$\begin{aligned} Slut: & 25 s \\ Jamvikt: & 10 s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0.4550 \\ c &= 0.0394 \end{aligned}$$

Forsök 24:

$$\begin{aligned} k &= \dots u \\ m &= 515 \text{ g} \\ r &= 16.5/2 \text{ cm} \\ d &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Slut: & 31 s \\ Jamvikt: & 10 s \end{aligned}$$

Forsök 25:

$$\begin{aligned} k &= \dots u \\ m &= 506 g \\ r &= 22.3/2 \text{ cm} \\ d &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Slut: & 32 s \\ Jamvikt: & 10 s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0.2860 \\ c &= 0.0049 \end{aligned}$$

25

## Blad 25

## Blad 26

26

Försök 26: Här ska d varieras  
 $k = \dots$   
 $m = 517 \text{ g}$   
 $r = 542 \text{ mm}$   
 $d = 162 \text{ mm}$

Kommentar:  
 Förslutande mätningar  
 för ändring av  
 längden på objekten.  
 Kameran ska  
 placeras om  
 på högre utsäg  
 för dessa uppsättning.  
 Residual: 0,19  
 Bra kalibrering.  
 En kation töjs  
 som en cylindr  
 över viken.

Längden kan varieras.

## Blad 27

27

Dag 3: 14/4

08:45 Vi börjar med att  
 kalibrera kameran, residual blev  
 0,27.  
 Första försök blev med fäder  
 varierande av d.

Försök 27: Variera längd (d).  
 $d = 126,4 \text{ mm}$   
 $k = \dots$   
 $r = 52,7 \text{ mm}$   
 $m = 517 \text{ g}$

Kommentar:  
 Här är kastningen  
 upp på hela viken.  
 Kan påverka reading.  
 se figur →

Händer lite snett,  
 kanske någon gränd  
 (sört att uppslanta)

Slat: 385  
 Samvikt: 105

$b = 0,1966$   
 $c = 0,0010$

$b = 0,1911$   
 $c = 0,0021$

Mätningar mycket nära jämvikten.

Blad 28

28

Forsök 28:m = 514 gk =d = 92,8 mmr =Slat: 34 sJamvikt: 10 sb = 0,19028c = 0,001831Forsök 29:m = 512 gk =d = 69,2 mmr =Slat: 38 sJamvikt: 10 s

28

Blad 29

29

Forsök 30:m = 509 gk =d = 51,2 mmSlat: 31 sJamvikt: 10 sHär vill vi testa  
om det blir söt  
skallad om

## Blad 30

Funderingar inför extrafysy. f:

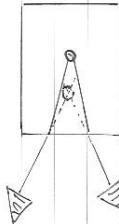
Vi vill testa mottäckandets beroende  
av vinkel.

Erl. regnvidståd kommet y:visk.  
& g:deas. att sätta rörl.

Hur ska vi mäta ur h a

kanonerna?

Allt 1: Brunna glaset.



Allt 2: Pe linan

Allt 3:

djupet kommer  
att bli felbaktat

och därfor kommer  
peenden att den  
posisivera att sätta  
fel position



reflex  
kula

väger mindre än standard  
kulorna från kanonerna.

30

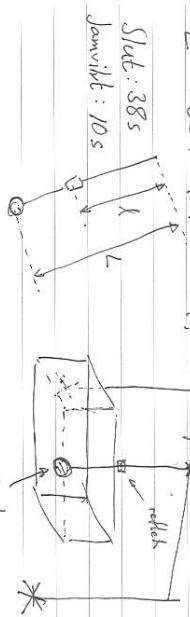
## Blad 31

Tred + reflex väger missanmärks  
ca 0,7 g. Fischedräg används,  
upphängning med flera stänger för att undvika  
skakningar, till kula i metall, ganska  
tung.

Förslag 31: Ball i luft  
ska variera medie.

$m = 234 \text{ g}$   
 $d = 38,1 \text{ mm}$   
 $l = 610 \text{ mm}$   
 $L = 851 \text{ mm}$

Går ned i ladan som  
andra medier ska vara



Jamvikt: 10 s

upifrån  
djup  
efter vägen minskar.

Började präcisa  
efter vägen minskar.  
Efter 10 min. jämska  
ungefärt.

Behöver det du upphängningen?

$$b = 2 \cdot 63443 \cdot 10^{-4} \quad \text{Nils släpper röret}$$

$$c = 1.534351 \cdot 10^{-3} \quad \text{och så kan man kolla}$$

31

## Blad 32

Forsök 32:

$$\begin{aligned} m &= 234 \text{ g} \\ d &= 38,1 \text{ mm} \\ l &= 565 \text{ mm} \\ L &= 801 \text{ mm} \end{aligned}$$

På detta försök har upphängningen byts ut mot en knut, för att försöka minimera precision.

Denna upphängning preciserar också kraftigt.

Slut: 31 s

Jamvikt: 10 s

$$b = 7,5249995 \cdot 10^{-4}$$

$$c = -6,949365 \cdot 10^{-4}$$

Mätningen ger mycket dålig ut, hög precision.

32

## Blad 33

Nu har uppställningen ändrats.

Linan har ändrats till sytard och upphängningen har ändrats till två block som trycks mot varandra. Tygden är en metallkula med en ganska stor cylindrisk upphängning.

Forsök 33:

$$\begin{aligned} m &= 234 \text{ g} \\ d &= 38,1 \text{ mm} \\ l &= 586 \text{ mm} \\ L &= 817 \text{ mm} \end{aligned}$$

Kommentar:  
Bytte reflex för den rörande.  
Kan se mätsäkerhet  
på ,5 mm

Slut: 31 s

Jamvikt: 10 s

$$b = 3,68351 \cdot 10^{-5}$$

$$c = 0,00201600$$

Denna blir ej helt utdämpad, sista delen ganska dåligt p.g.a. precision.

33

Blad 34

Försök 34:

$$\begin{aligned}m &= 234 \text{ g} \\d &= 38.1 \text{ mm} \\l &= 586 \text{ mm} \\L &= 817 \text{ mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Slut: & 35 \text{ s} \\Jämvikt: & 10 \text{ s}\end{aligned}$$

$$b = 5.465167 \cdot 10^{-5}$$

$$c = 0.00206383$$

34

Blad 35

Försök 35:

$$\begin{aligned}m &= 234 \text{ g} \\d &= 38.1 \text{ mm} \\l &= 586 \text{ mm} \\L &= 817 \text{ mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Slut: & 65 \text{ s} \\Jämvikt: & 10 \text{ s}\end{aligned}$$

$$b = 0.0119838$$

$$c = 0.335118$$

Nu fylls dvvariet med manatten.  
Vattnet har rumstemperatur.

Kommentar:

Den där jämföras  
snabbhet  
Efter endast ett  
fota / strängningar  
är kulen mer  
pa nästan

35

## Blad 36

Försök 36:

$$\varphi = 586 \text{ mm}$$

$$L = 817 \text{ mm}$$

$$m = 234$$

$$d = 38.1 \text{ mm}$$

Slut: 75 s

Jamvt: 15 s

$$b = 0.00752051$$

$$c = 0.328949$$

## 36

Försök 38:

Samma som innan

Slut: 72 s

Jamvt: 15 s

## 37

## Blad 37

Försök 39:

Samma som innan

Slut: 97 s

Jamvt: 15 s

Kommentar:  
Mötningens innehåll  
ca 32 svängningar.

Uppställningen ändras så att dväret  
byts mot en mindre storlek och  
reflexen byts mot en mer homogen.

Vatten fortsätter användas.

$$\varphi = 586 \text{ mm}$$

$$L = 817 \text{ mm}$$

$$m = 234$$

$$d = 38.1 \text{ mm}$$

Slut: 73 s

Jamvt: 10 s

$$b = 0.00770458$$

$$c = 0.334439$$

## Blad 38

38

Försök 40: Hår är med. et luft,  
Mindre stort - amplitud.

$$m = -11^-$$

$$d = -11^-$$

$$f = 605 \text{ mm}$$

$$l = 817 \text{ mm}$$

$$\text{Slut: } 33 \text{ s}$$

$$\text{Jämvikt: } 10 \text{ s}$$

Försök 41: Hår är med. et vatten

Samma värden som innan.

$$\text{Slut: } 91 \text{ s}$$

$$b = 0.00801357$$

$$c = 0.332908$$

$$\text{Jämvikt: } 10 \text{ s}$$

Försök 42:

Samma som innan

$$\text{Slut: } 102 \text{ s}$$

$$b \approx 0.00839742$$

$$c = 0.333073$$

38

Nu byts vatten mot 30% glycerol  
och 70% vatten.

Försök 43:

Samma värden som innan

$$\text{Slut: } 80 \text{ s}$$

$$b = 0.019044$$

$$c = 0.327808$$

Försök 44:

Kunskapsdator:  
Låne halvdelsgör  
slagff.

$$\text{Slut: } 94 \text{ s}$$

$$b = 0.018410$$

$$c = 0.327840$$

Försök 45:

$$\text{Samma}$$

$$b = 0.018796$$

$$c = 0.322893$$

Samma som innan

$$\text{Slut: } 88 \text{ s}$$

39

## Blad 39

|                   |                             |
|-------------------|-----------------------------|
| <u>Försök 44:</u> | <u>Försök 45:</u>           |
| Samma             | Låne halvdelsgör<br>slagff. |
| Slut: 94 s        | b = 0.018410                |
| Jämvikt: 10 s     | c = 0.327840                |
|                   |                             |
| <u>Försök 42:</u> |                             |
| Samma som innan   |                             |
| Slut: 102 s       | b = 0.00839742              |
| Jämvikt: 10 s     | c = 0.333073                |

## Blad 40

Försök 46:

Samma  $b = 0.018355$   
 $c = 0.322013$

Slut: 77 s

Försök 47:

Samma

Slut: 67 s

Kranvattnets densitet beräkning:

53,38 g  $\text{b}\ddot{\text{a}}\text{g}\text{a}\text{c}\text{u}\text{s}$  vikt  
 77,911 g bärer + vattnets vikt  
 volym vatten  $\approx$  25 ml

kranvattnetens densitet =  $981.2 \text{ kg/m}^3$

Vatten+glycerol 20% 30%  
 53,38 g bärer vikt + glycerol  
 80,240 g bärer + vatten vikt  
 volym vatten+glyc = 25 ml

densitet bladning =  $1.0744 \text{ g/cm}^3$

densitet glycerol  $\approx 1.261 \text{ g/cm}^3$

40

## Blad 41

Förlorning 1/2 avger felmarginal av

ny reflexmontering. innerhjäl  
 Dim bögar innersida:  $146 \times 90 \times 140 \text{ mm}$

$85 \text{ ml} + 85 \text{ ml} = 170 \text{ ml}$  rent glycerol (99%)

111 111 (70-30%) koncentrat

Rörlös med 1%, men funn ut 13.

$\Rightarrow$  Nu används töning med 39,3 % glycerol

Försök 48: Ny bländning  $\uparrow$ 

Samma

Slut: 63 s (80)  $b = 0.0249279$   
 $c = 0.325285$

Försök 49:

Samma

Slut: 78 s (118)  $b = 0.024674$   
 $c = 0.325076$

41



## Blad 44

|   |                             |
|---|-----------------------------|
| <u>Försök 57:</u>   | $b = 0.0154340$             |
| Samma   | $c = 0.333330$              |
| Slut: 57 s  | (63)                        |
| <u>Försök 58:</u>   |                             |
| Samma   |                             |
| Slut: 71 s  |                             |
| <u>Bevislets mätning av</u>                                 | <u>20/80 glycose/vatten</u> |
| Bärger vikt: 53,46 g  |                             |
| Bärger + glasflaskan vikt: 79,295 g                         |                             |
| Volym glyc. + vatten = 25 ml                                |                             |
| $\Rightarrow$ densitet $20/80 \approx 1.033 \text{ g/cm}^3$ |                             |
| Nu bländas 50% 20/80 glyc.                                  |                             |
| med 50% rent kramatex.                                      |                             |
| Ger 10/90 glyc.   |                             |

## Blad 45

|   |  |
|---|--|
| <u>Försök 59:</u>   | <u>Ny råttska, 10/90 glycose/vatten.</u> |
| Samma   | <u>Använder exakt samma</u>              |
| Slut: 45 s  | (72)                                     |
| <u>Försök 60:</u>   |  |
| Samma   |  |
| Slut: 71 s  |  |
| <u>Bevislets mätning av</u>                                 | <u>20/80 glycose/vatten</u>              |
| Bärger vikt: 53,46 g  |  |
| Bärger + glasflaskan vikt: 79,295 g                         |  |
| Volym glyc. + vatten = 25 ml                                |  |
| $\Rightarrow$ densitet $20/80 \approx 1.033 \text{ g/cm}^3$ |  |
| Nu bländas 50% 20/80 glyc.                                  |  |
| med 50% rent kramatex.                                      |  |
| Ger 10/90 glyc.   |  |

## D Matlabkod för analys av mätdata

```

1
2 %% l ngd pendel
3 clc
4 clear all
5
6 B=[log(2.0121e-4) log(2.3818e-4) log(1.6018e-4) log(2.1005e-4)];
7 C=[log(6.7164e-4) log(2.6309e-4) log(9.6632e-4) log(4.8541e-4)];
8 l=[log(653e-3) log(778e-3) log(894e-3) log(1003e-3)];
9 plot(l,C)
10 p=polyfit(l,C,1);
11 a=p(1)
12
13 %% radie pendel
14 clc
15 clear all
16
17 B=[log(6.3791e-5) log(8.0773e-5) log(1.8419e-4) log(7.7621e-5)
     log(1.5382e-4) log(2.6415e-4) log(2.4924e-4) log(1.4651e-4)];
18 C=[log(6.5260e-5) log(4.3946e-5) log(9.9242e-4) log(1.9817e-4)
      log(1.1054e-4) log(8.4942e-4) log(3.2627e-3) log(6.4872e-3)];
19 d=[log(12.3e-3) log(14.5e-3) log(16.3e-3) log(21.5e-3) log(22.45
     e-3) log(41e-3) log(58.8e-3) log(68e-3)];
20 plot(d,C)
21 p=polyfit(d,C,1);
22 a=p(1)
23
24 %% radie endast sytr d pendel
25 clc
26 clear all
27
28 B=[log(6.3791e-5) log(8.0773e-5) log(7.7621e-5) log(1.5382e-4)];
29 C=[log(6.5260e-5) log(4.3946e-5) log(1.9817e-4) log(1.1054e-4)];
30 d=[log(12.3e-3) log(14.5e-3) log(21.5e-3) log(22.45e-3)];
31 plot(d,C)
32 p=polyfit(d,C,1);
33 a=p(1)
34
35 %% fj der radie
36 clc
37 clear all
38
39 B=[log(0.1654) log(0.2860) log(0.4597) log(0.5264) log(0.7550)];
40 C=[log(0.0018) log(0.0049) log(0.0114) log(0.0263) log(0.0394)];
41 r=[log(24.65e-3) log(38.85e-3) log(56.5e-3) log(70.5e-3) log

```

```
    (82.5e-3) ];  
42 plot(r,C)  
43 p=polyfit(r,C,1);  
44 a=p(1)  
45  
46 %% fj der djup d  
47  
48 clc  
49 clear all  
50  
51 B=[log()];  
52 C=[log()];  
53 d=[log()];  
54 plot(r,B)  
55 p=polyfit(r,B,1);  
56 a=p(1)  
57  
58 %% pendel densitet  
59  
60 clc  
61 clear all  
62  
63 B=[log(0.0082057) log(0.0155272) log(0.018651) log(0.0248057)];  
64 C=[log(0.33299) log(0.33132) log(0.325139) log(0.325177)];  
65 rho=[log(981.2) log(1033) log(1074) log(1103)];  
66 plot(rho,C,'o')  
67 p=polyfit(rho,C,1);  
68 a=p(1)  
69  
70 %% pendel viskositet  
71  
72 clc  
73 clear all  
74  
75 B=[log()];  
76 C=[log()];  
77 n=[log()];  
78 plot(r,B)  
79 p=polyfit(r,B,1);  
80 a=p(1)
```

```

1 function [b,c] = coeff(forsok,l,L,m,matning,jamvikt)
2 clc
3 clf
4 clear all
5
6 M=load(forsok);
7 %l = 771; % l?ngd till m?tboll i mm
8 %L = l; % l?ngd till masscentrum i mm
9 %m=0.00296; % massa i kg
10 %M=ones(5000,5);
11 Hz=100;
12 matning=53; % tid f?r avslutad m?tning i sek
13 jamvikt=10; % j?mviktsm?tning i sek
14 N=size(M);
15 Lagen=M(1:N(1)-Hz*matning,:); % M?tdata
16 Jamvikt=M(N(1)-Hz*jamvikt:N(1),:); % Nollst?lle
17 Jamvikt= [ Jamvikt(:,3) Jamvikt(:,4) Jamvikt(:,5)]; % endast l?
    get
18 jamvikt = mean(Jamvikt,1); % j?mviktsl?ge
19 Theta=[]; % vinklar
20 Position = [Lagen(:,3) Lagen(:,4) Lagen(:,5)]; % positioner
21
22 for i = 1:size(Position,1) % ber?kna vinkel
23     temp=norm(Position(i,:)-jamvikt); % avst?nd fr?n j?mvikten
24     Theta(i)= acos(1-temp^2/(2*l^2)); % vinkeln
25 end
26 Tid = [Lagen(:,2)]; % tider f?r l?gena
27 Tid = Tid';
28 hold off
29 figure
30 plot(Tid,Theta)
31
32 [theta, tid] = findpeaks(Theta, Tid, 'MinPeakProminence',0.003);
    % vinkel-amplitud vid tidpunkt
33 theta=theta(1,2:length(theta)-1);
34 tid=tid(1,2:length(tid)-1);
35 figure
36 plot(tid,theta)
37
38 max=0.2;
39 min=0.0; % minsta till?tna vinkel
40 %antal=1; % punkter som vill tas bort
41 for i = 1:length(theta)
42     if (i>length(theta))
43         break;
44     end

```

```

45 if (theta(i)<min)
46 theta(i)=[];
47 tid(i)=[];
48 end
49 if (theta(i)>max)
50 theta(i)=(theta(i-1)+theta(i+1))/2;
51 end
52 end
53 figure
54 plot(tid,theta)
55
56 time=tid';
57 theta=theta';
58 %afit = fittype('b*a*exp(-b*time)/(b+c*a*(1-exp(-b*time)))','
59 %               independent','time','dependent','theta'); % specificera
60 %               funktion
61 fo = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares','Lower'
62 , [0,-1,-1], 'Upper', [1,1,1], 'StartPoint', [0.2,3e-4 1]);
63 afit = fittype('b*a*exp(-b*time)/(b+c*a*(1-exp(-b*time)))','
64 %               independent','time','dependent','theta','options',fo); %
65 %               specificera funktion
66
67 f=fit(time,theta,afit); % ber?kna parametrar
68 hold on
69 plot(f)
70 MyCoeffs = coeffvalues(f);
71 B=MyCoeffs(2);
72 C=MyCoeffs(3);
73
74 t=diff(tid);
75 w=mean(t)
76 ww= 2*((tid(length(tid))-tid(1))/length(t))
77
78 b=2*m*B
79 c=C*3*pi*m/(4*w*L)

```

```
1 clc
2 clear all
3
4 M=load( 'Forsok25.tsv' );
5 k = 5/0.151; % l ngd till m tboll i mm
6 m=0.506; % massa i kg
7 %M=ones(5000,5);
8 Hz=100;
9 matning=32; % tid f r avslutad m tning i sek
10 jamvikt=10; % j mviktsm tning i sek
11 N=size(M);
12 Lagen=M(1:N(1)-Hz*matning,:); % M tdata
13 Jamvikt=M(N(1)-Hz*jamvikt:N(1),:); % Nollst lle
14 Jamvikt= [ Jamvikt(:,3) Jamvikt(:,4) Jamvikt(:,5)]; % endast
   l get
15 jamvikt = mean(Jamvikt,1); % j mviktsl ge
16 lage=[]; % x
17 Position = [ Lagen(:,3) Lagen(:,4) Lagen(:,5)]; % positioner
18
19 for i = 1:size(Position,1) % ber kna vinkel
20     lage(i)=norm(Position(i,:)-jamvikt); % avst nd fr n
       j mvikt
21 end
22 Tid = [ Lagen(:,2) ]; % tider f r l gena
23 Tid = Tid';
24 hold off
25 figure
26 plot(Tid,lage)
27
28 [x, tid] = findpeaks(lage, Tid, 'MinPeakProminence',0.003); % 
   vinkel-amplitud vid tidpunkt
29 x=x(1,2:length(x)-1);
30 tid=tid(1,2:length(tid)-1);
31 figure
32 plot(tid,x)
33
34 max=Inf;
35 min=-Inf; % minsta till tna vinkel
36 %antal=1; % punkter som vill tas bort
37 for i = 1:length(x)
38     if (i>length(x))
39         break;
40     end
41     if (x(i)<min)
42         x(i)=[];
43         tid(i)=[];
```

```

44    end
45    if (x(i)>max)
46        x(i)=(x(i-1)+x(i+1))/2;
47    end
48 end
49 figure
50 plot(tid,x)
51
52 time=tid';
53 x=x';
54 %afit = fittype('b*a*exp(-b*time)/(b+c*a*(1-exp(-b*time)))',',
55 %                independent','time','dependent','x'); % specificera funktion
55 fo = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares','Lower'
56 , [0,-1,-1], 'Upper', [100,1,1], 'StartPoint', [50,3e-4 3e-7]);
56 afit = fittype('b*a*exp(-b*time)/(b+c*a*(1-exp(-b*time)))',',
57 %                independent','time','dependent','x','options',fo); %
57 % specificera funktion
58 f=fit(time,x,afit); % ber kna parametrar
59 hold on
60 plot(f)
61 MyCoeffs = coeffvalues(f);
62 B=MyCoeffs(2);
63 C=MyCoeffs(3);
64
65 t=diff(tid);
66 w=2*mean(t)
67 ww= 2*((tid(length(tid))-tid(1))/length(t))
68
69 b=2*k*B/w^2
70 c=C*3*pi*k/(4*w^3)

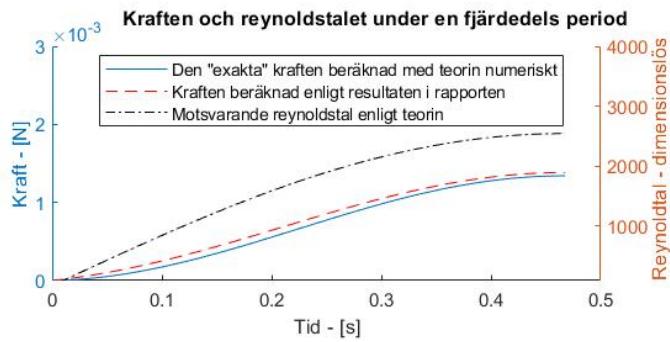
```

## E Matlabkod för felanalys

```

1 clf
2 clc
3
4 % Parametrar
5 g = 9.82 % lilla g, gravitation
6 l = 0.1 % langd p? lina
7 omega = sqrt(g/l) % vinkelhastighet (map p? perioden T=2pi/omega
8 i rad)
9 amp = 2*pi*1/360 % amplitud i rad
9 rho = 998 % densitet for omgivande amne
10 d = 0.05 % karakteristisk langd (dubbla radien pa cirkel)

```



Figur 55: Plottat är kraften mot tiden för en fjärdedels period hos en pendel i vatten med en utslagsvinkel på  $10^\circ$ .

```

11 ny = 1.3e-3 % viskositet Pa*s
12 A = pi*(d/2).^2 % tvärsnittsarea
13
14 % Funktioner
15 v = @(t) amp.*omega.*sin(omega.*t).*l % hastighet ungefarlig
16 Re = @(v) rho.*d.*v./ny % reynoldtal
17 C_d = @(Re) 24./Re + 6./(1+sqrt(Re))+0.4 % C_d
18 F = @(v,C_d) 1/2*C_d.*A.*rho.*v.^2 % kraften beroende av annat
19
20
21
22 % Exakt integral
23 exaktfun = @(t) F(v(t),C_d(Re(v(t)))).*v(t) %integrand
24 exint=integral(exaktfun,0,pi/omega,'RelTol',0.0001)
25
26 % Ej exakt integral
27 b = @(t) 358.5*(d/2).*ny % resultat
28 c = @(t) 0.57*(d/2).^2.*rho % resultat
29 fun = @(t) (b(t).*v(t)+c(t).*v(t).^2).*v(t) %integrand
30 int=integral(fun,0,pi/omega,'RelTol',0.0001)
31
32 % Felet
33 andelfel = (int-exint)/int
34
35 % Plottar
36 t_part = linspace(0,pi/omega/2,1000);
37
38 hold on
39 yyaxis left
40 plot(t_part,F(v(t_part),C_d(Re(v(t_part))))) % Kraft
41 plot(t_part,(b(t_part).*v(t_part)+c(t_part).*v(t_part).^2), '--', % Kraft
      'Color','r')
42 xlabel('Tid - [s]')

```

```
43 ylabel( 'Kraft – [N]' )
44
45 yyaxis right
46 plot(t_part,Re(v(t_part)),'-.', 'Color', 'k')
47 title('Kraften och reynoldstalet under en halvperiod')
48 legend('Den "exakta" kraften ber?knad med teorin numeriskt',,
        'Kraften ber?knad enligt resultaten i rapporten', 'Motsvarande
        reynoldstal enligt teorin')
49 ylabel('Reynoldtal – dimensionsl?s')
```