多目标规划讲解

Your Name

2025 年 3 月 24 日

1 引言

在实际的决策问题中，往往需要同时考虑多个相互冲突的目标。例如，在生产计划中，我们可能希望最大化利润的同时最小化成本；在城市规划中，我们可能需要同时考虑交通流量最小化和土地利用效率最大化等。多目标规划（Multi - Objective Programming, MOP）就是为了解决这类问题而发展起来的一种数学规划方法。

2 基本概念

2.1 多目标规划问题的定义

一般地，多目标规划问题可以表示为：

$$\begin{aligned}
\min_{x\in X} \quad & F(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))^T && (1)\\
\text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m && (2)\\
& h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, l && (3)
\end{aligned}$$

其中，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是决策变量向量，$X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是可行域，$f_i(x)$（$i = 1, 2, \cdots, k$）是目标函数，$g_i(x)$（$i = 1, 2, \cdots, m$）是不等式约束函数，$h_j(x)$（$j = 1, 2, \cdots, l$）是等式约束函数。

2.2 解的概念

在单目标规划中，最优解是唯一确定的。但在多目标规划中，由于各个目标之间可能存在冲突，通常不存在一个能同时使所有目标达到最优的解。

因此，需要引入一些特殊的解的概念。

2.2.1 有效解（Pareto 最优解）

设 $x^*, x \in X$，如果不存在 $x \in X$ 使得 $F(x) \le F(x^*)$ 且 $F(x) \ne F(x^*)$，则称 x^* 是多目标规划问题的有效解（Pareto 最优解）。这里，$F(x) \le F(x^*)$ 表示 $f_i(x) \le f_i(x^*)$ 对所有 $i = 1, 2, \cdots, k$ 成立。

2.2.2 弱有效解

设 $x^*, x \in X$，如果不存在 $x \in X$ 使得 $F(x) < F(x^*)$，则称 x^* 是多目标规划问题的弱有效解。这里，$F(x) < F(x^*)$ 表示 $f_i(x) < f_i(x^*)$ 对所有 $i = 1, 2, \cdots, k$ 成立。

3 多目标规划的求解方法

3.1 加权法

加权法是将多目标规划问题转化为单目标规划问题的一种常用方法。具体做法是给每个目标函数 $f_i(x)$ 赋予一个权重 ω_i（$\omega_i \ge 0$，$\sum_{i=1}^k \omega_i = 1$），然后构造一个加权和目标函数：

$$\min_{x \in X} \quad \sum_{i=1}^{k} \omega_i f_i(x)$$

通过求解这个单目标规划问题，可以得到一个有效解。不同的权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)^T$ 可以得到不同的有效解。

3.2 ε-约束法

ε-约束法是将其中一个目标函数作为主要目标函数，而将其他目标函数转化为约束条件。设我们选择 $f_1(x)$ 作为主要目标函数，则 ε-约束法可以表

示为：

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in X} \quad & f_1(x) && (4)\\
\text{s.t.} \quad & f_i(x) \le \varepsilon_i, \quad i=2,3,\cdots,k && (5)\\
& g_j(x) \le 0, \quad j=1,2,\cdots,m && (6)\\
& h_l(x) = 0, \quad l=1,2,\cdots,p && (7)
\end{aligned}
$$

其中，ε_i（$i=2,3,\cdots,k$）是预先给定的约束值。

4 应用实例

考虑一个简单的生产计划问题。假设一个工厂生产两种产品 A 和 B，生产产品 A 每件需要 2 个单位的原材料和 3 个单位的劳动力，生产产品 B 每件需要 4 个单位的原材料和 2 个单位的劳动力。工厂每天可用的原材料为 100 个单位，劳动力为 80 个单位。产品 A 的每件利润为 5 元，产品 B 的每件利润为 6 元。同时，为了满足市场需求，产品 A 的产量不能低于 10 件。

我们的目标是在满足约束条件的前提下，最大化总利润 $f_1(x_1,x_2)=5x_1+6x_2$，同时最小化生产时间 $f_2(x_1,x_2)=3x_1+2x_2$，其中 x_1 和 x_2 分别是产品 A 和产品 B 的产量。

该问题可以表示为以下多目标规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1,x_2} \quad & f_1(x_1,x_2)=5x_1+6x_2 && (8)\\
\min_{x_1,x_2} \quad & f_2(x_1,x_2)=3x_1+2x_2 && (9)\\
\text{s.t.} \quad & 2x_1+4x_2 \le 100 && (10)\\
& 3x_1+2x_2 \le 80 && (11)\\
& x_1 \ge 10 && (12)\\
& x_1,x_2 \ge 0 && (13)
\end{aligned}
$$

我们可以使用加权法将其转化为单目标规划问题。设权重 $\omega_1=0.6$，$\omega_2=0.4$，则加权和目标函数为：

$$
\max_{x_1,x_2} \quad 0.6(5x_1+6x_2)-0.4(3x_1+2x_2)=1.8x_1+2.8x_2
$$

同时满足上述约束条件。通过求解这个单目标规划问题，我们可以得到一个有效解。

5 结论

多目标规划是一种处理多个相互冲突目标的重要数学规划方法。在实际应用中，需要根据具体问题的特点选择合适的求解方法。不同的求解方法可能会得到不同的有效解，决策者可以根据自己的偏好和实际情况选择最优的解决方案。