TP2_ex1

November 15, 2022

Implementação

Começamos por importar o módulo pysmt.shortcuts que oferece uma API simplificada que disponibiliza as funcionalidades para a utilização usual de um SMT solver. Os tipos estão definidos no módulo pysmt.typing de onde temos que importar o tipo INT e o BVType (para utilização de bit vectors)

[1]:
```
from pysmt.shortcuts import *
from pysmt.typing import INT
```

A seguinte função cria a -ésima cópia das variáveis de estado, agrupadas num dicionário que nos permite aceder às mesmas pelo nome.

Parâmetros do programa

- **a** e **b**: dois valores inteiros que serão multiplicados
- **n**: precisão limitada (em bits)

[2]:
```
a = 4
b = 2
n = 4
```

Função declare

A seguinte função cria a -ésima cópia das variáveis de estado, agrupadas num dicionário que nos permite aceder às mesmas pelo nome.

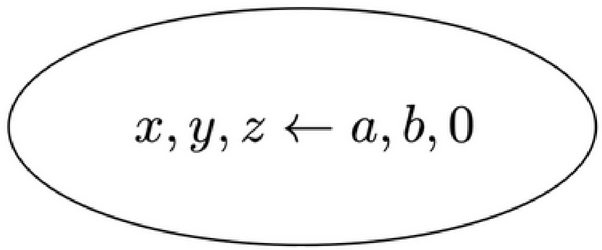
x, **y** e **z** são bit vectors e **pc** (program counter) é um inteiro

[3]:
```
def declare(i):
    state = {}
    state['pc'] = Symbol('pc' + str(i), INT)
    state['x'] = Symbol('x' + str(i), BVType(n))
    state['y'] = Symbol('y' + str(i), BVType(n))
    state['z'] = Symbol('z' + str(i), BVType(n))
    return state
```

Função init

Dado um possível estado do programa (um dicionário de variáveis), devolve um predicado do pySMT que testa se esse estado é um possível estado inicial do programa.

Analisando o Control Flow Automaton do enunciado do problema, definimos que o estado inicial corresponde a esta parte do diagrama:



O diagrama exige que neste estado tenhamos:

- x igual a **a** (a é parâmetro do programa e é inteiro)
- y igual a **b** (b é parâmetro do programa e é inteiro)
- z igual a **0**

Adicionalmente, definimos que o **program counter** do nosso estado inicial é 0

Como **x**, **y**, **z** serão bit vectors, construímos um predicado assumindo os valores inteiros enunciados acima no formato de bit vectors com precisão limitada de **n** bits

[4]:
```
def init(state):
    return And(Equals(state['pc'], Int(0)), Equals(state['x'], BV(a, n)),␣
↪Equals(state['y'], BV(b, n)), Equals(state['z'], BVZero(n)))
```

Função trans

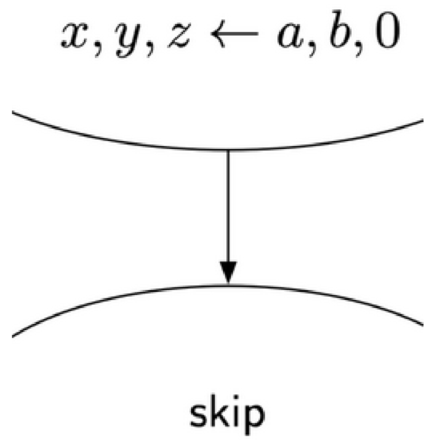
Dados dois possíveis estados do programa, devolve um predicado do pySMT que testa se é possível transitar do primeiro para o segundo.

Esta função contém todas as transições possíveis dentro do programa, basta que uma se verifique para que possamos transitar do estado **curr** para o **prox**

Vejamos o que cada transição representa no Control Flow Automaton ilustrado no enunciado do trabalho

t1

- Ocorre imediatamente após o estado inicial
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 0 para 1
- Os valores de **x**, **y**, **z** mantém-se iguais



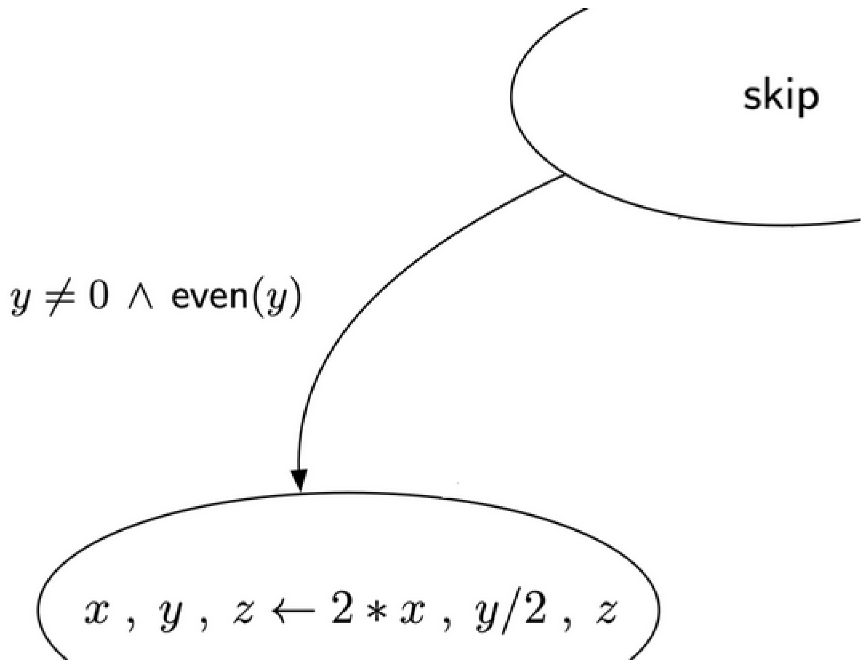
t2 (não overflow) e t3 (overflow)

t2:

- Ocorre quando o valor de y é par, isto é, quando o bit menos significativo é 0 e quando y é diferente de 0 e quando não há overflow
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 1 para 2
- O valor de **x** é duplicado
- O valor de **y** é dividido por 2
- O valor de **z** mantém-se

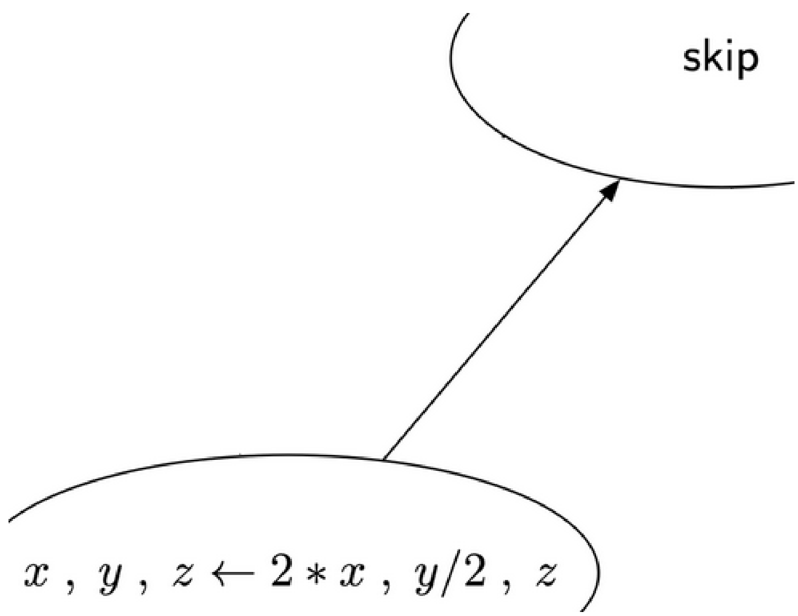
t3:

- Ocorre quando o valor de y é par, isto é, quando o bit menos significativo é 0 e quando y é diferente de 0 e quando há overflow
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 1 para -1
- O valor de **x** é duplicado
- O valor de **y** é dividido por 2
- O valor de **z** mantém-se



t4

- Ocorre após imediatamente após efetuar t2
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 2 para 1
- Os valores de **x**, **y**, **z** mantém-se iguais



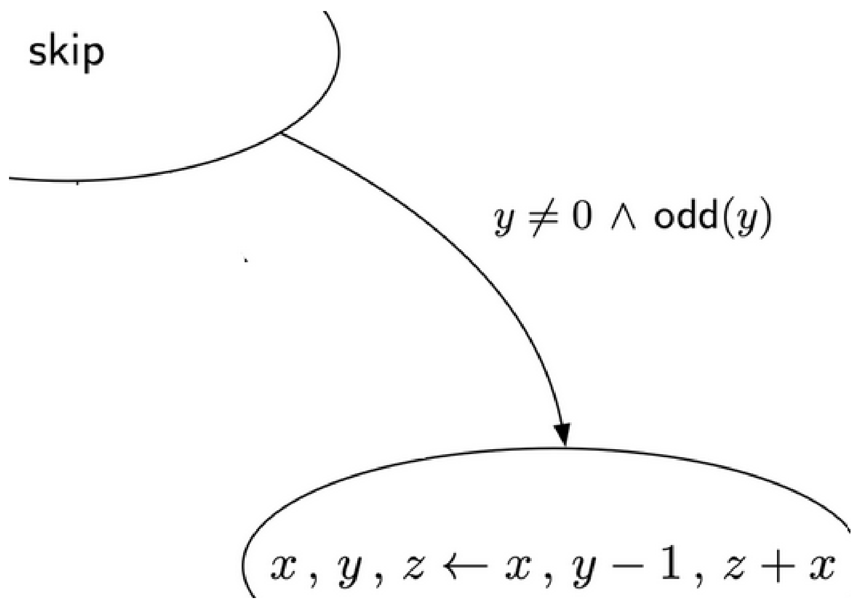
t5 (não overflow) e t6 (overflow)

t5:

- Ocorre quando o valor de y é ímpar, isto é, quando o bit menos significativo é 1 e quando y é diferente de 0 e quando não há overflow
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 1 para 3
- O valor de **x** mantém-se
- Ao valor de **y** subtraí-se 1
- Ao valor de **z** adiciona-se o valor de **x**

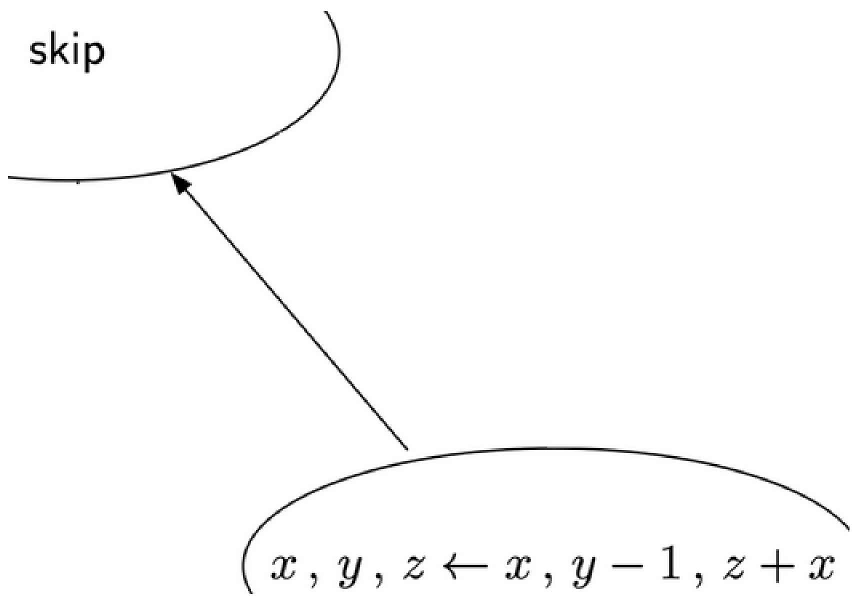
t6:

- Ocorre quando o valor de y é ímpar, isto é, quando o bit menos significativo é 1 e quando y é diferente de 0 e quando há overflow
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 1 para -1
- O valor de **x** mantém-se
- Ao valor de **y** subtraí-se 1
- Ao valor de **z** adiciona-se o valor de **x**



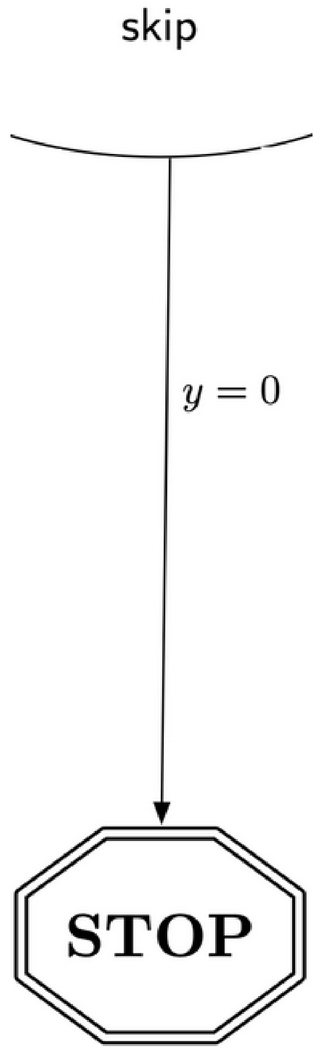
t7

- Ocorre após imediatamente após efetuar t5
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 3 para 1
- Os valores de **x**, **y**, **z** mantém-se iguais



t8

- Ocorre quando o valor de y é 0
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 1 para 4
- Os valores de **x**, **y**, **z** mantém-se iguais



tSTOP

- Ocorre quando o programa acabou com sucesso
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de 4 para 4

tERROR

- Ocorre quando o programa acabou sem sucesso
- Representa a passagem do **program counter** (**pc**) de -1 para -1


```
[5]: def trans(curr,prox):
         t1 = And(
                 Equals(curr['pc'], Int(0)),
                 Equals(prox['pc'], Int(1)),
                 Equals(prox['x'], curr['x']),
                 Equals(prox['y'], curr['y']),
                 Equals(prox['z'], curr['z'])
             )

         t2 = And(
                 Equals(curr['pc'], Int(1)),
                 Equals(prox['pc'], Int(2)),
                 NotEquals(curr['y'], BVZero(n)),
                 Equals(BVZero(1), BVExtract(curr['y'], start=0, end=0)),
                 Equals(prox['x'], BVMul(curr['x'], BV(2, n))),
                 Equals(prox['y'], BVUDiv(curr['y'], BV(2, n))),
                 Equals(prox['z'], curr['z']),
                 Equals(BVUDiv(prox['x'], curr['x']), BV(2, n)),
                 )

         t3 = And(
                 Equals(curr['pc'], Int(1)),
                 Equals(prox['pc'], Int(-1)),
                 NotEquals(curr['y'], BVZero(n)),
                 Equals(BVZero(1), BVExtract(curr['y'], start=0, end=0)),
                 Equals(prox['x'], BVMul(curr['x'], BV(2, n))),
                 Equals(prox['y'], BVUDiv(curr['y'], BV(2, n))),
                 Equals(prox['z'], curr['z']),
                 NotEquals(BVUDiv(prox['x'], curr['x']), BV(2, n)),
             )

         t4 = And(
                 Equals(curr['pc'], Int(2)),
                 Equals(prox['pc'], Int(1)),
                 Equals(prox['x'], curr['x']),
                 Equals(prox['y'], curr['y']),
                 Equals(prox['z'], curr['z'])
             )
```

```
t5 = And(
        Equals(curr['pc'], Int(1)),
        Equals(prox['pc'], Int(3)),
        NotEquals(curr['y'], BVZero(n)),
        Equals(BVOne(1), BVExtract(curr['y'], start=0, end=0)),
        Equals(prox['x'], curr['x']),
        Equals(prox['y'], BVSub(curr['y'], BV(1, n))),
        Equals(prox['z'], BVAdd(curr['z'], curr['x'])),
        BVUGE(prox['z'], curr['z'])
    )

t6 = And(
        Equals(curr['pc'], Int(1)),
        Equals(prox['pc'], Int(-1)),
        NotEquals(curr['y'], BVZero(n)),
        Equals(BVOne(1), BVExtract(curr['y'], start=0, end=0)),
        Equals(prox['x'], curr['x']),
        Equals(prox['y'], BVSub(curr['y'], BV(1, n))),
        Equals(prox['z'], BVAdd(curr['z'], curr['x'])),
        BVULE(prox['z'], curr['z'])
    )

t7 = And(
        Equals(curr['pc'], Int(3)),
        Equals(prox['pc'], Int(1)),
        Equals(prox['x'], curr['x']),
        Equals(prox['y'], curr['y']),
        Equals(prox['z'], curr['z']),
    )

t8 = And(
        Equals(curr['pc'], Int(1)),
        Equals(prox['pc'], Int(4)),
        Equals(curr['y'], BVZero(n)),
        Equals(prox['x'], curr['x']),
        Equals(prox['y'], curr['y']),
        Equals(prox['z'], curr['z'])
)

tSTOP = And(
            Equals(curr['pc'], Int(4)),
            Equals(prox['pc'], Int(4)),
            Equals(prox['x'], curr['x']),
            Equals(prox['y'], curr['y']),
            Equals(prox['z'], curr['z'])
        )
```

```
    tERROR = And(
                Equals(curr['pc'], Int(-1)),
                Equals(prox['pc'], Int(-1)),
                Equals(prox['x'], curr['x']),
                Equals(prox['y'], curr['y']),
                Equals(prox['z'], curr['z'])
            )

    return Or(t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, tSTOP, tERROR)
```

Função gera_traco

Dada uma função que gera uma cópia das variáveis do estado, um predicado que testa se um estado é inicial, um predicado que testa se um par de estados é uma transição válida, e um número positivo k, utilizamos o SMT solver para gerar um possível traço de execução do programa de tamanho k. Para cada estado do traço imprimimos o respectivo valor das variáveis.

[6]:
```
def gera_traco(declare,init,trans,k):

    with Solver(name="z3") as s:
        trace = [declare(i) for i in range(k)]

        #adicionar o estado inicial
        s.add_assertion(init(trace[0]))

        #adicionar a função ed transição
        for i in range(k-1):
            s.add_assertion(trans(trace[i], trace[i+1]))

        if s.solve():
            for i in range(k):
                print("Passo", i)
                for v in trace[i]:
                    print(v, "=", s.get_value(trace[i][v]))
                print("--------------")

# gera_traco(declare,init,trans,20)
```

Função inv

Dado um possível estado do programa (um dicionário de variáveis), devolve um predicado do pySMT que testa se nesse estado $\mathbf{x} * \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$, que é o invariante que queremos verificar

[7]:
```
def inv(state):
    return Equals(BVAdd(BVMul(state['x'], state['y']), state['z']), BVMul(BV(a,␣
↪n), BV(b, n)))
```

Verificação indutiva de invariantes

No caso da verificação de propriedades de segurança $G\ \phi$, para verificar o invariante ϕ por indução temos que verificar as seguintes condições: - ϕ é válido nos estados iniciais, ou seja, $\mathit{init}(s) \rightarrow \phi(s)$ - Para qualquer estado, assumindo que ϕ é verdade, se executarmos uma transição, ϕ continua a ser verdade no próximo estado, ou seja, $\phi(s) \wedge \mathit{trans}(s, s') \rightarrow \phi(s')$.

Função induction_always

Verifica invariantes por indução. A função recebe como argumento uma função que gera uma cópia das variáveis do estado, um predicado que testa se um estado é inicial, um predicado que testa se um par de estados é uma transição válida, e o invariante.

Teremos que testar a validade das duas condições acima recorrendo à satisfiabilidade, ou seja, usando o solver para encontrar contra-exemplos, devendo o procedimento reportar qual das propriedades falha. Por exemplo, no caso da primeira deve procurar uma valoração que satisfaça $\mathit{init}(s) \wedge \neg\phi(s)$.

[8]:
```
def induction_always(declare,init,trans,inv):
    with Solver(name="z3") as s:
        s_now = declare(0)
        s_next = declare(1)

        #caso base
        s.push()
        s.add_assertion(init(s_now))
        s.add_assertion(Not(inv(s_now)))

        if s.solve():
            #significa que encontramos um contraexemplo
            print("A propriedade não é válida")
            return
        s.pop() #limpa tudo o que foi posto depois do push no solver

        #passo de indução
        s.push()
        s.add_assertion(inv(s_now))
        s.add_assertion(trans(s_now, s_next))
        s.add_assertion(Not(inv(s_next)))

        if s.solve():
            print("A propriedade não é válida")
            for k in s_now:
                print(k, "=", s.get_value(s_now[k]))
            return
        s.pop()

# induction_always(declare, init, trans, inv)
```

Verificação do invariante x * y + z = a * b

Como não encontramos contra-exemplos com o caso base e o passo de indução, então o invariante verifica-se