

分类号：

UDC

密级：公开

学号：2019021882

華南師範大學

South China Normal University

硕士学位论文

(学术学位)

全重四夸克态的研究

学位申请人：	庄泽坚
专业名称：	粒子物理与原子核物理
研究方向：	强子物理
所在院系：	物理与电信工程学院
导师姓名及职称：	王倩 研究员

2022 年 5 月 27 日

华南师范大学研究生学位论文答辩合格证明

学位申请人庄泽坚向本学位论文答辩委员会提交题为全重四夸克态的研究的硕士论文，经答辩委员会审议，本论文答辩合格，特此证明。

庄泽坚 硕士学位论文答辩委员会成员名单

姓名	职称	单位	备注
廖益	教授	南开大学	主席
王恩科	教授	华南师范大学	成员
邢宏喜	研究员	华南师范大学	成员
杨帅	研究员	华南师范大学	成员
梁剑	研究员	华南师范大学	成员

论文指导老师：王作

华南师范大学物理与电信工程学院（公章）

2022年5月27日



全重四夸克态的研究

专业：粒子物理与原子核物理

申请人：庄泽坚

导师：王倩

摘 要

实验上和理论上研究超出传统夸克模型的奇特强子态对于理解描述强相互作用的理论量子色动力学的非微扰特性具有极其重要的作用。1964 年提出的夸克模型成功解决了当时已发现的强子结构问题，并且预言了 Ω 粒子的存在。随后的实验证实了这一预言。然而，自 2003 年以来发现的一系列 XYZ 态，其性质无法用传统夸克模型进行简单的描述。这些超出夸克模型的奇特态被称为奇特强子态。特别地，这些奇特强子态不仅包含了隐藏重味夸克对 $c\bar{c}$ 或者 $b\bar{b}$ ，并且包含了轻味夸克对 $u\bar{d}$ 或者 $\bar{u}d$ 。这些类粲（底）夸克偶素的发现，开创了研究多夸克态的新领域，同时也为我们提供了独特的机会来研究量子色动力学在低能区域的性质。

另外一个感兴趣的研究领域是那些只包含全重夸克的多夸克态。理论上研究全重多夸克态最早可以追溯到 50 多年前。另一方面，LHCb 实验组曾尝试进行有关全重四夸克态 $b\bar{b}b\bar{b}$ 的研究。然而，结果没有任何信号显示存在 $b\bar{b}b\bar{b}$ 。幸运的是，在 2020 年，第一个包含全粲夸克和反夸克的四夸克态被 LHCb 实验组发现了。通过质心能量高达 7、8 和 13 TeV 的质子-质子对撞，在双 J/ψ 的不变质量分布中，LHCb 实验组发现了这些共振结构。在这些结构中，其中一个结构在 6.9 GeV 附近有明显的凸起，并且统计量超过了 5σ ，这可以认为那里存在着一个新的粒子态。这个态被命名为 $X(6900)$ 。这里 X 代表着我们对它的一些性质，例

如自旋和宇称都还不了解。另外一个峰结构较宽，能量分布在 $[6.2, 6.8]$ GeV 范围内。这个实验结果引起了许多理论家和实验家的注意。

在本论文的工作中，在紧致四夸克态图像下，从非相对论近似出发，我们提出了一个包含色电相互作用和色磁相互作用的参数化哈密顿量来描述全重四夸克态。我们从已知的强子谱提取了这些参数。之后，我们系统计算了全重四夸克态的质量，分析了它们的衰变道，并计算了它们的衰变宽度。在我们的计算中，我们发现存在几个全粲四夸克态的候选者，分别是 0^{++} 量子数的 $X(6035)$ 和 $X(6254)$ ， 2^{++} 量子数的 $X(6139)$ 。它们的质量均低于 6.8 GeV。为了进一步理解这些态以及 $X(6900)$ 的性质，我们从实验数据提取了有关全粲四夸克态的内部结构信息。通过拟合双 J/ψ 不变质量分布的线型，我们发现 $X(6900)$ 可能是由 $J/\psi \psi(3770)$ 道带来的阈值效应（**cusplike effect**）。另外还有一个尖端在 6.8 GeV 附近，来源于 $J/\psi \psi'$ 的影响。两个 0^{++} 四夸克态的行为表现为两个共振态。它们的质量分别高于 $\eta_c \eta_c$ 和 $J/\psi J/\psi$ 的阈值。 2^{++} 的态则是一个质量低于 $J/\psi J/\psi$ 的阈值。除此之外，我们发现在我们的耦合道分析中，在 $\eta_c \eta_c$ 线型中， $X(6035)$ 是一个非常重要的结构。这一独特的结构将有助于我们区分全粲四夸克态是紧致四夸克态还是强子分子态。最后，为了调查这些态的性质，我们用温伯格准则进行了估算。结果表明它们更有可能是紧致四夸克态结构，概率高达 95%以上。

关键字：夸克模型；奇特强子态；全重四夸克态；耦合道效应

SYSTEMATIC STUDY OF FULL HEAVY TETRAQUARK STATES

Major: Particle Physics and Nuclear Physics

Name: Zejian Zhuang

Supervisor: Prof. Qian Wang

ABSTRACT

Experimental investigations and theoretical studies of exotic hadrons beyond the conventional quark model are vital for understanding the nonperturbative properties of strong interaction theory quantum chromodynamics. The quark model proposed in 1964 is very successful in explaining the properties of hadrons that were discovered from the 1950s to 1960s. It predicted the existence of Ω baryon, which was identified in an experiment at Brookhaven National Laboratory. However, the conventional quark model fails for describing the structures of XYZ states that have been observed since 2003. These states beyond the conventional quark model are called exotic hadrons. In particular, these exotic hadrons encompass not only the hidden heavy flavor quarks $c\bar{c}$ or $b\bar{b}$, but also light flavor quarks $u\bar{d}$ or $\bar{u}d$. The discovery of charmonium- and bottomonium-like states has inaugurated a new era of studying multiquark systems, which also provide us a unique platform to gain more information into the low-energy QCD.

Another interesting research field is multiquark states that only include heavy flavor quarks. In fact, pioneering studies on the heavy tetraquark systems are traced back to about 50 years ago. On the other hand, an investigation for the tetraquark $b\bar{b}b\bar{b}$ was carried out by LHCb Collaboration. However, there was no signal for observing it. Fortunately, in 2020, the first tetraquark comprising all charm quarks and antiquarks

have been spotted by LHCb Collaboration. LHCb Collaboration reported these resonant structures in the $J/\psi J/\psi$ invariant mass distribution produced by pp collisions at the c.m. energies 7, 8 and 13 TeV. There is a bump around 6.9 GeV. Its statistical significance is more than 5σ . This narrow structure is dubbed X(6900). Here X denotes the fact that we are not yet certain about the key properties of this particle, including its spin, parity, and so on. There is also a broad structure located in the energy range [6.2, 6.8]GeV. The experimental results arouse interest for theoretical physicists.

In nonrelativistic approximation, we adopt a parametric framework that includes the chromoelectro and chromomagnetic interaction to describe the heavy tetraquark in a compact tetraquark picture. We extract these parameters from the existing heavy hadrons. Then we discuss the mass spectrum of all heavy tetraquark systems by diagonalizing the Hamiltonian. From the mass spectrum, we show all possible charmonium decay channels for the heavy tetraquark systems and calculate their decay widths. In the spectrum of the full charm tetraquark system, there are three states whose masses are less than 6.8 GeV. They are $X(6035)$ and $X(6254)$ with $J^{PC} = 0^{++}$ and $X(6194)$ with $J^{PC} = 2^{++}$, respectively. In order to research for the properties of these states and $X(6900)$, we extract the internal structures of the full charm tetraquarks from the experimental data. By constructing coupled-channel models to describe the data, we find that the $X(6900)$ may be the cusp effect from the $J/\psi \psi(3770)$ channel. What's more, there is also a cusp that is slight below 6.8 GeV stemming from the $J/\psi \psi'$ channel. Two 0^{++} tetraquark whose masses are above the $\eta_c \eta_c$ and $J/\psi J/\psi$ threshold behave as two resonances. The 2^{++} state is a bound state below the $J/\psi J/\psi$ threshold. In addition, our results show that the $X(6035)$ is a significant structure in the $\eta_c \eta_c$ lineshape after the coupled channel effect. It is a unique feature that can distinguish compact tetraquark pictures from loosely hadronic molecule pictures. Furthermore, we estimate the compositeness of full heavy tetraquarks that we predict using the Weinberg criterion. The results support these states as compact tetraquarks with probabilities of more than 95%.

KEY WORDS: quark model, exotic hadrons, full heavy tetraquarks, coupled channel effect

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	VI
1 绪论	1
1.1 强子物理简介	1
1.2 选题背景及意义	3
1.3 全重四夸克态的研究现状	4
1.4 论文结构及安排	5
2 强子的夸克模型和奇特强子态	6
2.1 基本粒子简介	6
2.2 强子的夸克模型	7
2.3 奇特强子态	8
2.4 强子分子态和紧致四夸克态	10
2.5 温伯格准则	13
3 常用模型介绍	17
3.1 组分夸克模型	17
3.2 色磁相互作用模型	19
3.3 色流管模型	19
3.4 本论文模型	21
4 对全重四夸克态的研究	22

4.1 四夸克态的波函数	22
4.2 全粲（底）四夸克态和粲底四夸克态的总波函数	25
4.3 计算自旋和色相互作用的期望值	28
4.4 提取动力学参数	31
4.5 全重四夸克态的质量谱和衰变宽度	34
5 耦合道效应	44
5.1 耦合道模型	44
5.2 拟合结果与分析	46
总结与展望	50
参考文献	51
攻读硕士学位期间发表论文	59
致谢	60

1 绪论

1.1 强子物理简介

我们知道世界是由物质组成的，但是构成物质的最小单元是什么？这个问题是科学家们一直都在探索的问题。早在公元前 4 世纪，古希腊人德谟克利特就提出原子这个概念，并把它作为物质的最小单元。在那的很长一段时间，人们都认为物质是由原子构成的。直到 19 世纪，卢瑟福利用 α 粒子轰击靶核，即著名的 α 粒子散射实验，提出了原子的核式结构模型。他认为原子是由原子核以及核外电子组成的。原子核几乎占据了整个原子 99.9% 以上的质量。在那个时期，人们认识到原子只不过是物质结构的一个层次。随后卢瑟福和查德威克各自发现了原子核是由质子和中子组成的。在 1968 年美国斯坦福直线加速器中心（SLAC）通过深度非弹性散射实验^[1]证明了质子内部存在点状结构。随着世界各地的大科学装置的兴起，物质结构层次不断被刷新。

我们知道在量子力学中，粒子被划分为两类：一类是费米子，另一类是玻色子。玻色子的自旋为整数 $n\hbar$ ，而费米子的自旋为半整数 $(n + \frac{1}{2})\hbar$ （ $n = 0, 1, 2 \dots$ ）。在标准模型下的三代夸克和三代轻子属于费米子。我们知道粒子参与的相互作用包括四种。它们分别是强相互作用、弱相互作用、电磁相互作用和引力相互作用。标准模型中的玻色子则是传递这些相互作用的媒介子。其中胶子负责传递强相互作用，光子负责电磁相互作用，W 和 Z 玻色子则是弱相互作用的媒介子，而负责引力相互作用的引力子尚未被找到。目前科学家们已经建立了一些成熟的理论来描述其中的一些相互作用。例如，建立于 20 世纪 40 年代的量子电动力学用于描述电磁相互作用。在上个世纪 70 年代建立起来的量子色动力学，被用来描述强相互作用。而在上个世纪 60 年代，由 Weinberg、Salam 和 Glashow 共同建立的电弱统一理论，将电磁相互作用和弱相互作用统一起来了。本论文的主题是全重四夸克态的研究，涉及的相互作用只包括强相互作用。

1964 年提出的夸克模型，将粒子不同的夸克组分进行了分类。包含一个夸克以及一个反夸克的粒子称为介子，由三个夸克构成的粒子称为重子。介子和

重子都直接参与强相互作用，因此我们把介子和重子统称为强子。量子色动力学是用于描述强子和强子、夸克和胶子之间的强相互作用的理论，具有 SU(3) 非阿贝尔规范对称性。

量子色动力学的一个特征是渐进自由。渐进自由由 Gross、Wilczek 和 Politzer 提出^{[2][3]}。他们指出描述强相互作用的跑动耦合常数 $\alpha_s(Q^2)$ 会随着能量的增大而逐渐减小。单圈情况下的跑动耦合常数为

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}n_f) \ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})}, \quad (1-1)$$

这里 n_f 为夸克味道个数， Λ 是标度参数，实验给出 Λ 处于 0.1~0.4 GeV 范围内。

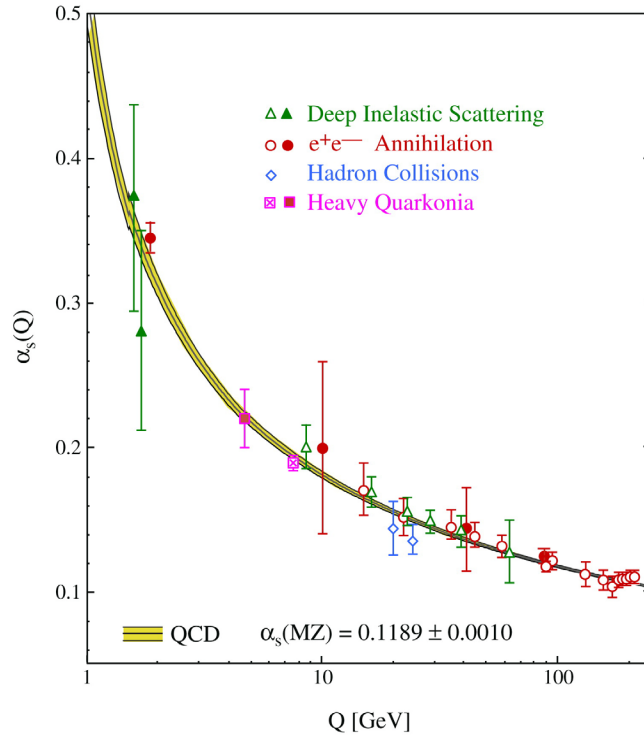


图 1-1 跑动耦合常数的实验测量值，取自文献^[4]。在图中，空心的符号表示领头阶的计算结果，实心的符号表示下一领头阶的计算结果。

从图 1-1 可以清楚的看到跑动耦合常数随着能标的增大不断减少。当能量趋于无穷大时，耦合常数将趋于零。在能区，量子色动力学可使用微扰论。

量子色动力学另外一个重要特征是色禁闭。色禁闭是指夸克都是束缚在强子内部，自由的单个夸克不能被观察到。这个现象实际上可以通过跑动耦合常数简单理解。当夸克之间的距离增大时，夸克之间通过胶子交换的能量越少，

这时跑动耦合常数将增大。导致夸克之间的相互作用增强。使得夸克只能束缚在强子内部。

在低能区域，量子色动力学具有非微扰的特点。微扰论在这个能区内不适用。然而，在处理强子相关的问题时，例如强子的束缚态，这些问题往往与量子色动力学的非微扰特性相关。因此在处理强子物理问题时，我们采用一些非微扰的方法来处理强子物理的问题。而这些非微扰的方法，我们将在本论文的后续章节做介绍。除此以外，量子色动力学还允许存在多夸克态（夸克组分为 $qq\bar{q}\bar{q}$ 、 $qqqq\bar{q}$ 、 $qqqqqq$ 等）、胶球以及混杂态等不能由夸克模型描述的态，我们称为奇特强子态。这些奇特强子态具有丰富的物理内容。深入研究这些奇特强子态的物理性质，将帮助我们深入理解量子色动力学理论。

1.2 选题背景及意义

由于量子色动力学允许存在奇特强子态，近几十年来科学家们一直在实验上寻找这些奇特强子态。但是，第一个奇特强子态的候选者 $X(3872)$ ，直到 2003 年才被确认。它是在日本的 Belle 实验组在 $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ 过程中被发现的^[5]。之后它又被其他相关的实验确认^{[6][7][8]}。许多研究表明 $X(3872)$ 具有与粲偶素 ($c\bar{c}$) 不符合的性质，例如宽度就与粲偶素极度不符合。因此 $X(3872)$ 被认为具有不同于 $c\bar{c}$ 的结构。继 $X(3872)$ 之后，其他一些奇特强子态陆续被发现，例如 $Y(4260)$ ^[9] 以及 $Z_c(3900)$ ^{[10][11][12]} 等等。在 2015 年 LHCb 实验组报道了他们发现五夸克态 $P_c^+(4380)$ 和 $P_c^+(4450)$ ^[13]。被发现一系列 XYZ 态大都包含一对重夸克 ($c\bar{c}$) 和一对轻夸克 ($q\bar{q}$)。然而实验上是否存在夸克组分都是重夸克四夸克态呢？这是科学家们感兴趣的另外一个方向。LHCb 实验组曾致力于 $\Upsilon(1S)\mu^+\mu^-$ 不变质量谱重寻找包含底夸克的四夸克态 $b\bar{b}b\bar{b}$ ，然而没有任何确切的信号被发现^[14]。幸运地是，在 2020 年，LHCb 实验组利用质心能量高达 7、8 和 13 TeV 的质子-质子对撞，在双 J/ψ 的不变质量谱中发现了共振结构^[15]。其中的一个峰结构比较窄，并且能量接近 6.9 GeV，被命名为 $X(6900)$ 。另外一个结构比较宽，能量分布在 6.2 到 6.8 GeV 范围内。这些峰结构的发现，成为了全重四夸克态 $cc\bar{c}\bar{c}$ 的直接候选者。在该结果发布以后，理论上解释这些态的结构处于激烈的讨论当中，其中主要的理论模型是强子分子态和紧致四夸克态。但

是各个模型之间的解释各有各的说法。因此能够对实验上发现的全粲四夸克态的性质作出一些确定的解释并对其他课题组的工作进行讨论与总结，则是本论文希望解决的问题。

1.3 全重四夸克态的研究现状

理论上研究全重多夸克态早已不是新鲜事了，只是 $X(6900)$ 的发现，使得全重多夸克态再次引起人们的注意。理论上研究全重四夸克态最早可以追溯到上个世纪 70 年代。在 1975 年，Y. Lwasaki 等人在他们的文章中研究了全粲四夸克态 $cc\bar{c}\bar{c}$ 。他们指出该粒子质量大概为 6GeV 左右，并且将 $J/\psi\eta_c$ 作为其衰变道^[16]。在 1981 年 K.-T. Chao 等人利用夸克-胶子模型研究了 $cc\bar{c}\bar{c}$ 的质量谱和衰变模式，给出了 $cc\bar{c}\bar{c}$ 的质量范围在 $6.4\sim 6.8\text{GeV}$ 并且能够衰变到一些粲介子^[17]。在同年代，JP Ader 等人从势模型出发研究了全重四夸克态，计算了全重四夸克态质量谱并比较了它们和可能衰变道的阈值^[18]。在这些理论研究的驱动下，实验上积极开展有关全重四夸克态的研究。LHCb 实验组在 $\Upsilon(1S)\mu^+\mu^-$ 的不变质量分布中去寻找是否存在全底四夸克态 $bb\bar{b}\bar{b}$ 。然而最终研究结果表明没有确定的信号显示存在 $bb\bar{b}\bar{b}$ 。直到 2020 年,实验上终于发现了第一个全重四夸克态的候选者，它的夸克组分都是粲夸克。LHCb 实验组利用质心能量高达 7、8、 13TeV 的质子-质子对撞，在双 J/ψ 的不变质量分布中发现这个信号。其质量接近于 6.9GeV ，被命名为 $X(6900)$ 。这里 X 代表着 LHCb 的物理学家们对该粒子的自旋、宇称等方面的信息尚不明确。另外还有一个比较宽的峰，质量分布范围在 $6.2\sim 6.8\text{GeV}$ 范围内。在该结果发布之后，理论上开展了激烈的讨论。其中主要的一些情况如下。在文献中^[19]，作者从分子态图像出发，利用耦合道方法分析 LHCb 文章里的实验数据。结果表明在 $6.2\sim 6.8\text{GeV}$ 范围内认为存在一个态，称为 $X(6200)$ ，并指出该态可以作为强子分子态。同样的预测也由研究^[20]给出。在该研究工作中，利用分波分析的方法分析了实验数据。结果表明 $X(6900)$ 确实存在并且其量子数极有可能为 2^{++} 。并且还预言了存在其他的态： $X(6200)$ 、 $X(6680)$ 和 $X(7200)$ 。 $X(7200)$ 在文献^[21]的研究中也被预言。同时，该研究还表明 $X(6900)$ 可能不能作为 $J/\psi\psi(2S)$ 的分子态。在文献^[22]中，作者从不同的模型出发，认

为质量范围在 $6.2\sim 6.8\text{GeV}$ 可以作为四夸克态 $[cc][\bar{c}\bar{c}]$ ($[cc]$ 表示两个粲夸克形成双夸克系统) 的基态。而窄结构的 $X(6900)$ 在组分夸克模型下则是 $[cc][\bar{c}\bar{c}]$ 的激发态, 轨道角动量可以为 $L = 1 (L = 2)$ 。同样认为 $X(6900)$ 是激发态也有研究工作^[23]给出。该研究从 QCD 求和规则出发认为 $X(6900)$ 是 P 波态, 具有量子数 0^{-+} 或者 1^{-+} 。另外有研究指出 $X(6900)$ 更应该是一个紧致四夸克态结构而不是分子态结构^[24]。关于 $X(6900)$ 的研究, 可谓是模型很多, 说法很多, 没有一些统一的结论。在这样的背景下, 我们希望能从一些模型无关的角度出发来系统研究全重四夸克态。我们采用一套参数化的方案, 从现有的强子谱中提取一些模型无关的参数, 然后来分析全重四夸克态的性质。我们将重点研究全粲四夸克态, 对实验上发现的这两个峰给出我们的解释。同时, 我们将对其他课题组的工作进行一些分类, 比较他们的结果并给出评论。最后, 给出本论文的结论。

综上所述, 我们将把全重四夸克态作为本论文的研究对象。通过建立合适的模型来的研究全重四夸克态的有关性质, 并对实验上发现的全粲四夸克态的性质作出我们的解释。通过对全重四夸克态的研究, 将加深我们对奇特强子态的理解以及帮助实验上寻找其他可能的全重四夸克态。

1.4 论文结构及安排

基于前面讲述的研究背景, 制定了本论文的内容安排如下: 第一章是绪论, 主要回顾了强子物理的发展历史和理论发展并提出了本论文的研究对象; 第二章是强子的夸克模型和奇特强子态, 主要介绍夸克模型的建立和奇特强子态的发现, 特别是全重四夸克态的发现, 并对常用于解释奇特强子态的几个常用模型做了介绍; 第三章是有关本论文使用的模型介绍, 回顾几个基于势模型来研究多夸克态的方法, 并在此基础上建立本论文的模型; 第四章将系统研究全重四夸克态, 给出计算结果和分析以及相关的图形; 第五章中我们利用耦合道方法去分析实验数据, 并用温伯格准则来估算我们预测的态的性质; 最后给出本文的总结。

2 强子的夸克模型和奇特强子态

在这一章中，我们介绍标准模型中的基本粒子和四种基本相互作用以及强子的夸克模型。然后介绍奇特强子态的发现。最后介绍常用于研究奇特强子态两种图像，强子分子态和紧致四夸克态。

2.1 基本粒子简介

标准模型指出，构成物质的基本组成单位是夸克、轻子。夸克分为三代。第一代是上夸克（ u ）和下夸克（ d ）；第二代是粲夸克（ c ）和奇异夸克（ s ）；第三代是顶夸克（ t ）和底夸克（ b ）。轻子同样分为三代。分别是电子（ e ）和电子中微子（ ν_e ）、 μ 子和子中微子（ ν_μ ）、 τ 子和子中微子（ ν_τ ）。所有的夸克和轻子都是费米子。夸克带有分数电荷和颜色。每一种夸克可以具有三种可能的颜色，即红（ r ）、绿（ g ）、蓝（ b ）。夸克和轻子的具体信息可以参看图 2-1 的夸克和轻子部分。

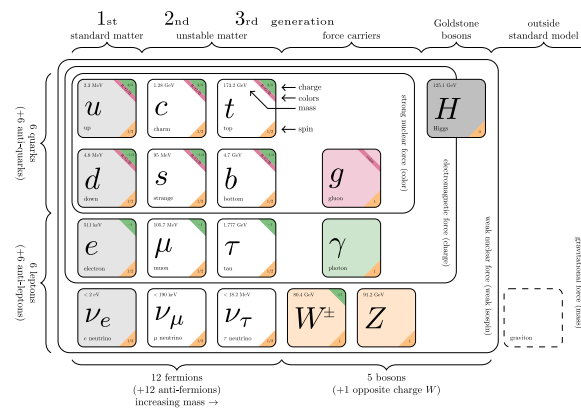


图 2-1 标准模型中的基本粒子。图片取自网站 <http://davidgalbraith.org/portfolio/ux-standard-model-of-the-standard-model/>。

自然界中存在四种基本相互作用，也就是强相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和引力相互作用由标准模型中的玻色子进行传递。具体可以参看图 2-1 中的玻色子部分。夸克可以参与所有的基本相互作用，而轻子不参与强相互作用。基本粒子参与的相互作用情况可以参考表格 2-1。

表格 2-1 四种基本相互作用和特点。

基本相互作用	参与的粒子	作用范围（米）	媒介子
强相互作用	夸克	10^{-15}	胶子
电磁相互作用	带电粒子	∞	光子
弱相互作用	轻子和夸克	10^{-18}	W^{\pm} 、 Z^0
引力相互作用	所有粒子	∞	引力子

2.2 强子的夸克模型

自近代以来，人们通过宇宙线和粒子加速器相继发现了许许多多的粒子。对这些粒子的结构进行分析和分类成为了许多科学家的工作。在 1949 年，费米和杨振宁提出了第一个强子结构的模型^[25]。这个模型虽然成功解释了 π 介子的性质，但是却不能解释奇异粒子的结构。1955 年，日本科学家坂田昌一认为所有的强子都是由质子、中子和超子构成。虽然坂田模型在一些实验的检验中较为成功，但是对重子的分类并不是特别好。直到 1964 年，由 Gell-Mann 和 G.Zweig 提出的强子夸克模型^[26]，才解决了当时的粒子的结构问题。

夸克模型认为构成强子的基本粒子是夸克，夸克有三种味道，分别是 u、d、s。这三种夸克构成了 SU(3) 的三重态。在夸克模型中，介子由一对正反夸克构成。用 SU(3) 群的不可约表示可将介子分为 $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ ，也就是介子单态和八重态。介子可以处于 1S_0 或者 3S_1 两种状态中。这两种状态对应赝标介子和矢量介子八重态，它们可由图 2-2 表示。

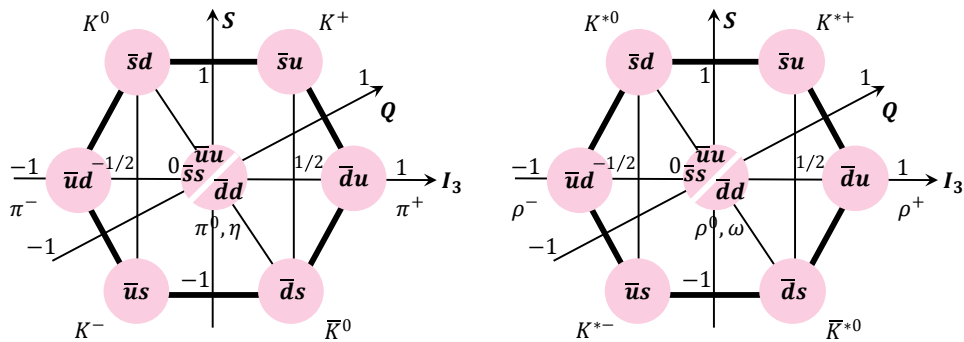


图 2-2 赝标介子八重态（左）和矢量介子八重态（右）。在坐标轴中， S 表示奇异数， I_3 表示同位旋的第三分量。图 2-3 的情况也是如此。

重子由三个夸克构成。按 $SU(3)$ 群可分类为 $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ ，即单态、两个八重态和一个十重态。重子八重态对应的自旋为 $\frac{1}{2}$ ，而十重态对应的自旋为 $\frac{3}{2}$ 。重子八重态和十重态可由图 2-3 来表示。

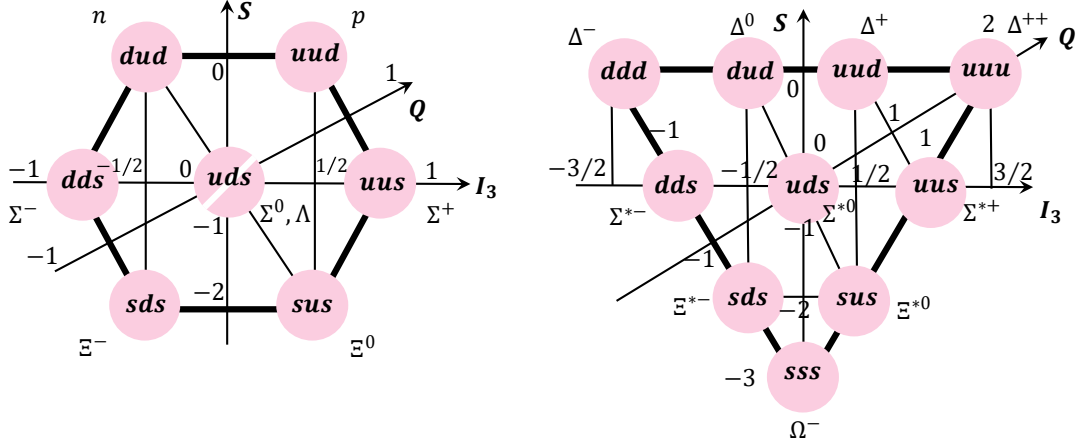


图 2-3 重子八重态（左）和重子十重态（右）

夸克模型在描述介子和重子的构成取得了巨大成功。由它所预言的 Ω 重子在 1964 年得到了验证^[27]，进一步显示了夸克模型的成功性。

2.3 奇特强子态

除了由 $q\bar{q}$ 构成的介子和由 qqq 构成的重子之外，Gell-Mann 和 G.Zweig 还指出了存在多夸克态的情况^{[28][29]}，而量子色动力学也允许存在多夸克态。这些多夸克态不能简单的由夸克模型进行描述，因而被称为奇特强子。在这一节的内容中，我们将介绍奇特强子的发现过程，包括 3 个具有代表性的 XYZ 态、 P_c 五夸克态和全重四夸克态。我们将把重点描述全重四夸克态的发现，因为它是本论文研究的主要目标。

实验上的第一个奇特强子态是由 Belle 实验组于 2003 年发现的，被命名为 $X(3872)$ 。它是在 $B^+ \rightarrow K^+ \pi^+ \pi^- J/\psi$ 过程中的 $\pi^+ \pi^- J/\psi$ 不变质量谱中存在一个峰被发现的。而由 $X(3872)$ 衰变的产物 $\gamma J/\psi$ 、 $\pi^+ \pi^- \pi^0 J/\psi$ 和 $D^0 \bar{D}^{*0}$ 也被观察到。 $X(3872)$ 的质量与 $D^0 \bar{D}^{*0}$ 阈值十分接近，被认为很可能是由 D^0 和 \bar{D}^{*0} 形成的束缚态，它们之间通过交换轻介子传递相互作用。

$Y(4260)$ 是在 $\pi^+\pi^-J/\psi$ 的不变质量谱上被发现的^[9]。它被认为是通过初态辐射过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-J/\psi$ 生成的。因此具有 1^- 的量子数。

在 $X(3872)$ 和 $Y(4260)$ 被发现后，其他的一系列 X 和 Y 态陆续被发现。这些态一般都包含着一对粲夸克 $c\bar{c}$ 和一对轻夸克 $q\bar{q}$ 。因而被称为类粲偶素。因此人们猜测在 b 夸克部分也应该存在类似的对应。在这一想法驱动下，Belle 实验组对 $\Upsilon(5S) \rightarrow \pi^+\pi^- + \text{anything}$ 过程进行了研究^[30]，分析出了两个结构，这两个结构被称为 $Z_b(10610)$ 和 $Z_b(10650)$ 。它们位于底偶素能区附近。

除了 XYZ 态，科学家也在积极寻找五夸克态的存在。在 2015 年，LHCb 实验组在 $J/\psi p$ 的不变质量谱中发现了两个结构。它们是在衰变过程 $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ 被发现的。这两个结构被标记为 $P_c^+(4380)$ 和 $P_c^+(4450)$ ^[13]。由于它们的末态是 $J/\psi p$ ，所以它们的夸克组分为 $uudc\bar{c}$ 。在 2019 年，LHCb 实验组更新了实验数据^[31]。他们发现 $P_c(4450)$ 结构是由 $P_c(4440)$ 和 $P_c(4457)$ 叠加构成的。另外还有一个窄的结构 $P_c(4312)$ 。这些 P_c 态处于 $\Sigma_c D^{(*)}$ 阈值，因此被认为是 $\Sigma_c D^{(*)}$ 形成的分子态。相关的研究可参考文献^[32]。

自 2003 年以来发现的这些奇特强子态，它们都包含着重夸克和轻夸克的组分，而对于只包含重夸克的多夸克态是否存在？理论上研究全重多夸克态已有很多文章，最早可以追溯到 1976 年，但是实验上一直没有观察到这些态的存在。直到 2020 年，LHCb 实验组通过在质心能量高达 7、8、13TeV 的质子-质子对撞中，在双 J/ψ 的不变质量谱上发现了共振结构^[15]，如图 2-4 所示。

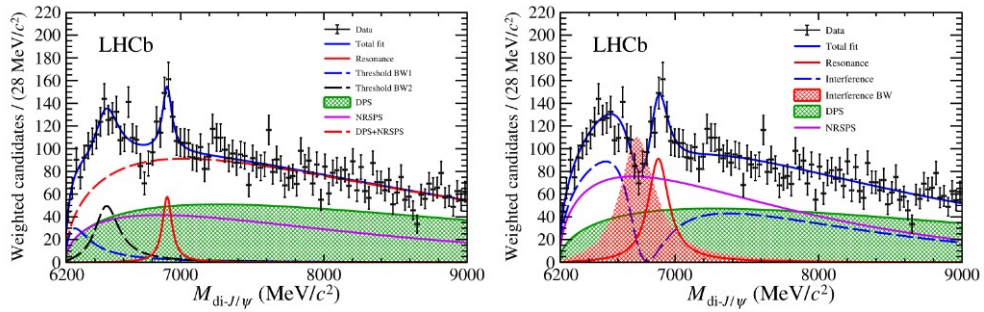


图 2-4 在双 J/ψ 不变质量谱中发现的峰结构。图片取自文献^[15]。

在这些结构中，其中的一个结构比较窄，质量接近 6.9GeV ，被命名为 $X(6900)$ 。这源于对该结构的性质尚不明确。另外一个结构比较宽，质量范围在 $6.2\text{--}6.8\text{GeV}$ 范围内。 $X(6900)$ 的发现，被认为是实验上第一个全粲四夸克态的候选者。除了 6.9GeV 附近存在确定的全粲四夸克态信号之外，许多研究表明在

6.2~6.8GeV 范围内和大于 6.9GeV 的范围存在其他可能的全粲四夸克态。众多理论研究表明存在另外一些有待发现的态： $X(6200)^{[19][20][38]}$ 、 $X(6680)^{[20]}$ 和 $X(7200)^{[20][21][39][40]}$ 。这些理论研究表明，实验上还可能存在着其他尚未被发现的全粲四夸克态，需要理论和实验进一步研究。

综合上述，奇特强子态的发现，毫无疑问丰富了强子物理的内容。研究奇特强子态的性质，将不断加深我们对微观世界的理解。为了看到奇特强子态的发现历程，我们将 2003 年至今发现的一些奇特强子态列在图 2-5 中。

		$Z_c(4430)$															$X(6900)$
		$Y(4360)$			$Z_b(10650)$				$X(5568)$			$Z_c(4100)$	$P_c(4312)$	$P_{cs}(4459)$			$Z_{cs}(3985)$
	$Z(3930)$	$Y(4660)$	$X(4140)$		$Z_b(10610)$	$Z_c(3900)$		$P_c(4450)$	$Y(4390)$			$\Xi(1620)$	$P_c(4440)$	$X_1(2904)$			
$X(3872)$	$Y(4260)$	$X(4160)$	$X(3915)$	$X(4274)$		$Z_c(4020)$	$Z_c(4200)$	$P_c(4380)$	$Y(4220)$			$\Omega(2012)$	$P_c(4457)$	$X_0(2866)$	T_{cc}		
2003	2005	2007	2009	2011	2013	2014	2015	2016			2018	2019	2020	2021			
Year																	

图 2-5 2003 年至今发现的一些奇特强子态。

2.4 强子分子态和紧致四夸克态

在前面的叙述有关奇特强子态的内容时，我们提到强子分子态和紧致四夸克态，它们是常用于研究奇特强子态时所采用的两种图像。除此之外，用于描述奇特强子态的模型还有胶球^{[41][42][43][44]}和混杂态^{[43][44][45]}。由于和本论文有关的模型是强子分子态和紧致四夸克态，所以这里我们只叙述和强子分子态以及紧致四夸克态有关的内容。在本节最后我们将给出如何区分强子分子态和紧致四夸克态，也就温伯格准则。

• 强子分子态

传统夸克模型在描述一些已发现的介子和重子的性质取得了一些比较好的结果，例如能够比较好地描述味道 SU(3) 矢量介子、重子的空间基态性质。然而，它却不能够用于描述介子和重子最低激发态的一些性质。特别地，对于实验上近些年来发现的一些奇特强子态，传统夸克模型无法给出一些比较好的描述。例如 $X(3872)$ 的一些性质，传统夸克模型无法做出解释。但是，如果把 $X(3872)$ 作为 $D^*\bar{D}$ 强子分子态或者四夸克态，关于它的性质，就能做出一些比较好的解释。在这一节中，我们首先描述有关强子分子的有关内容，在下一节中我们再描述和四夸克态的有关内容。

强子分子，由两个 $q\bar{q}$ 态构成，它们之间通过交换轻介子，通常为 π 介子。其示意图如图所示。

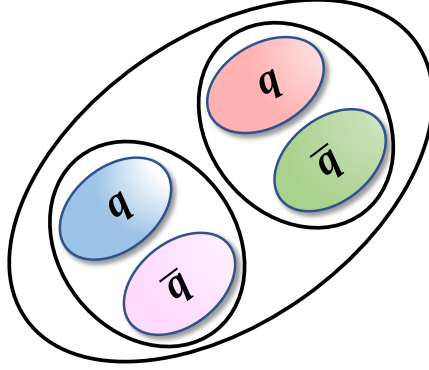


图 2-6 强子分子态的示意图。

对于强子分子态，它有几个不同的名称，分别是束缚态、共振态和虚态。这些态的出现取决于 S 矩阵中极点的位置。下面分情况进行讨论。

- 束缚态

极点位于物理黎曼面中对应的态称为束缚态。这些极点的位置允许位于实 s -轴中并且位于两个强子 h_1 和 h_2 的阈值之下，即 $m_{h_1} + m_{h_2}$ 。

- 虚态

当极点出现在非物理黎曼面，并且位于阈下实轴，这样的态称为虚态。

- 共振态

共振态出现在极点位于非物理黎曼面。对于共振态，其极点的位置并没有限制。共振态总是成对出现的，这可以通过厄密分析给出。

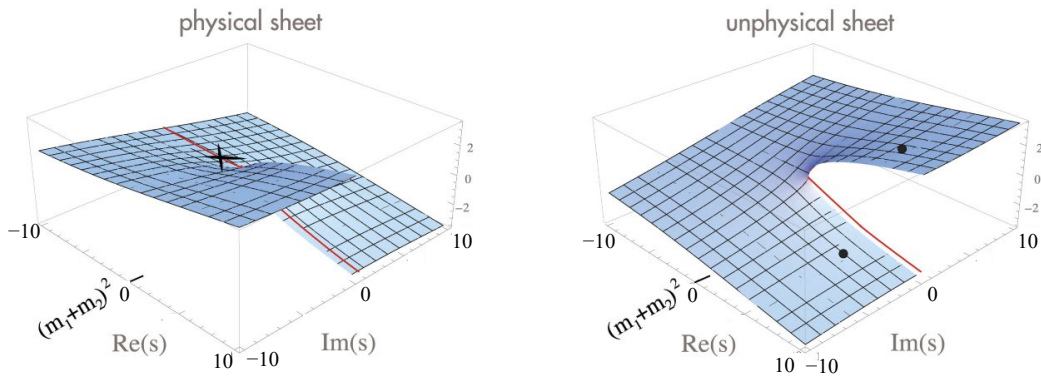


图 2-7 复 s -平面上典型的单道振幅。实心点标记允许的共振态极点，打叉的则是束缚态。实线是物理实轴。两个黎曼面之间是光滑连接的。图片取自文献^[46]。

通常情况下，当极点带有负虚部并且接近于物理轴时，将十分容易影响共振区域附近的可观测量。然而在阈值处，极点的影响效果则是一样的。

关于极点的分布情况，可由图给出。对于这三个态，他们对应的极点都是动力学相关的，并且完全依赖于参与过程的粒子的质量以及特定的物理过程。

- 紧致四夸克态

紧致四夸克态是由非色单态的双夸克和反双夸克构成的束缚态，它们之间通过交换胶子传递相互作用。这个过程与带颜色的夸克-反夸克构成色单态的介子十分类似。我们将看到带颜色的双夸克（ qq ）和反双夸克（ $\bar{q}\bar{q}$ ）可以形成色单态的四夸克态。四夸克态模型图如图 2-8 所示。

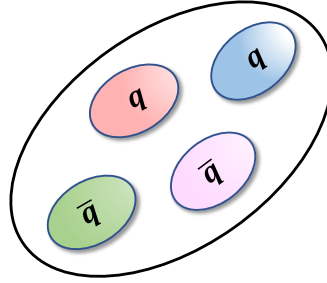


图 2-8 紧致四夸克态图像

在颜色 SU(3)群中，夸克的不可约表示为 3，而反夸克的不可约表示为 $\bar{3}$ 。两个夸克之间能够形成的不可约表示为

$$3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6 \quad (2-1)$$

即一个颜色三重态和反六重态。两个反夸克则为

$$\bar{3} \otimes \bar{3} = 3 \oplus \bar{6} \quad (2-2)$$

即一个颜色三重态和一个颜色反六重态。能够形成色单态的紧致四夸克态的结合方式只能为 $\bar{3}_{qq} \otimes 3_{\bar{q}\bar{q}}$ 或者 $6_{qq} \otimes \bar{6}_{\bar{q}\bar{q}}$ 。

因此，紧致四夸克态的颜色波函数可以为：

$$|(qq)^{\bar{3}}(\bar{q}\bar{q})^3\rangle^1 \quad (2-3)$$

或者

$$|(qq)^6(\bar{q}\bar{q})^{\bar{6}}\rangle^1 \quad (2-4)$$

其中，上指标1表示色单态。从这里可以看到，紧致四夸克模型能够给出一个色单态，与自然界中所有能够观察到的强子都是色中性的结果相一致。

前面我们提到在四夸克模型中，夸克之间通过交换胶子传递相互作用。单胶子交换势的唯象模型是 Cornell 势^[47]，其表达式可写为：

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + br \quad (2-5)$$

其中, α_s 为耦合常数, 参数 b 则表示禁闭势的强度。Cornell 模型能够很好的反映出带色的粒子 (夸克和胶子) 不能够被单独观察到, 而是形成束缚态, 即强子。如图所示, 当两个夸克之间的距离 r 增大时, $V(r)$ 不断增大, 特别地, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $V(r) \rightarrow \infty$, 这意味当我们分开两个夸克时, 需要无穷大的能量, 这是不可能的。因此, 夸克只能够被束缚在强子里。

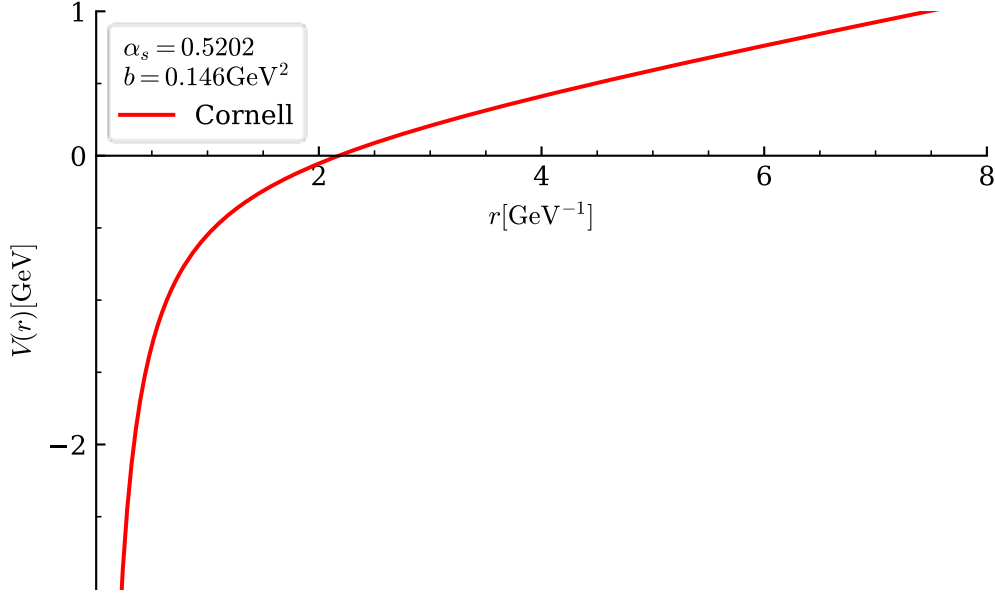


图 2-9 $V(r)$ 的图像。这里取文献^[48]里的数据: $\alpha_s = 0.5202$ 和 $b = 0.146 \text{ GeV}^2$ 。

与位于重夸克偶素能区的 XYZ 等奇特强子态相比, 夸克成分均为重夸克的四夸克态, 例如: $cc\bar{c}\bar{c}$ 、 $bb\bar{b}\bar{b}$, 更容易形成紧致四夸克态。由于轻夸克自由度在领头阶的相互作用中不体现, 在短程距离中, 重夸克 (反夸克) 之间的色相互作用为主要贡献。这使得这些包含重夸克的态更倾向于形成色单态的四夸克态而不是以长距离通过交换介子为机制的强子分子态^[49]。

2.5 温伯格准则

强子分子态模型和紧致夸克模型在描述奇特强子态的一些性质, 具有各自的特点。那么, 是否存在一套理论可用于辨别一个态是否为强子分子态或者紧致态? 在上个世纪 60 年代, Weinberg 发现了一种方法可用于辨别对于一个给定的态是否为复合粒子 (分子态) 或者为基本粒子 (紧致态) ^{[50][51][52]}。他将该方

法用于氦核，指出氦核并不是一个基本粒子。在 Weinberg 的方法中，他给出了粒子为分子态的概率为

$$1 - Z \quad (2-6)$$

这里 Z 是场的重整化常数。

我们将从文献^{[46][53][54]}出发，推导 Weinberg 公式。假设一个物理的束缚态，即位于物理黎曼面上的极点，由一个裸紧致态 $|\psi_0\rangle$ 和一个由相对动量 \vec{p} 描述的二强子分子态 $|h_1 h_2\rangle_{\vec{p}}$ 构成，即

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda|\psi_0\rangle \\ \chi(\vec{p})|h_1 h_2\rangle_{\vec{p}} \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

在一个物理态中，找到裸态的概率定义为

$$|\langle\psi_0|\psi\rangle|^2 = \lambda^2 \quad (2-8)$$

这意味着找到一个态为分子态的概率为 $1 - \lambda^2$ 。波函数 $|\psi\rangle$ 满足薛定谔方程

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (2-9)$$

其中 \hat{H} 的具体表达式采用 Weinberg 在 1963 年的文章^[1]里的表达式，即为

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_c & \hat{V} \\ \hat{V} & \hat{H}_{hh}^0 \end{pmatrix} \quad (2-10)$$

这里 \hat{H}_c 描述了裸态 $|\psi_0\rangle$ 的本征值谱，也就是 $\hat{H}_c|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$ 。而 \hat{H}_{hh}^0 则描述两个强子之间的相互作用，只包含两个强子之间的动能项 $\frac{p^2}{2\mu}$ ，其中 μ 为约化质量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 。 \hat{V} 为作用势。

利用薛定谔方程 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ ，我们有

$$\begin{aligned} E\chi(\vec{p}) &= \langle h_1 h_2 | \hat{V} \lambda |\psi_0\rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \langle h_1 h_2 | \hat{H}_{hh}^0 \chi(\vec{p}') | h_1 h_2 \rangle \\ &= \lambda f(p^2) + \frac{p^2}{2\mu} \chi(\vec{p}) \end{aligned} \quad (2-11)$$

这里我们定义了跃迁形状因子

$$f(p^2) = \langle \psi_0 | \hat{V} | h_1 h_2 \rangle \quad (2-12)$$

利用式子(2-11)和(2-12)，我们可以得到在动量空间中的波函数 $\chi(\vec{p})$ 的表达式为

$$\chi(\vec{p}) = \frac{\lambda f(\vec{p})}{E - \frac{p^2}{2\mu}} \quad (2-13)$$

波函数 $|\psi\rangle$ 必须满足归一化条件。利用式子(2-13)，我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\psi|\psi\rangle = \lambda^2 \langle\psi_0|\psi_0\rangle + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\chi(\vec{p})|^2 \langle h_1 h_2 | h_1 h_2 \rangle \\ &= \lambda^2 \left(1 + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{f^2(\vec{p})}{\left(E_B + \frac{p^2}{2\mu}\right)^2} \right) \end{aligned} \quad (2-14)$$

其中，束缚能 $E_B = m_1 + m_2 - M$ ， M 为束缚态的质量。由于式子(2-14)只包含对能量的导数， λ^2 实际上就是波函数的重整化常数，并且 λ^2 的取值范围为 0 到 1，这允许我们对一个束缚态做出物理上的概率解释。为了清楚看到 λ^2 就是重整化常数，我们从非相对论的两点格林函数出发，即

$$G(E) = \frac{1}{E - E_0 - \Sigma(E)} = \frac{Z}{E + E_B} + o((E + E_B)^2) \quad (2-15)$$

这里

$$-E_B = E_0 + \Sigma(-E_B), \quad Z = \frac{1}{1 - \partial\Sigma/\partial E|_{E=-E_B}} \quad (2-16)$$

由于

$$\Sigma(E) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{f^2(p^2)}{E - \frac{p^2}{2\mu} + i0}, \quad (2-17)$$

结合式子(2-16)和(2-17)，可以看出

$$Z = \left(1 + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{f^2(p^2)}{\left(E_B + \frac{p^2}{2\mu}\right)^2} \right)^{-1}. \quad (2-18)$$

对比式子(2-14)和(2-18)，可以得出

$$\lambda^2 = Z \quad (2-19)$$

为了进一步简化积分表达式(2-18)，我们定义束缚态的动量

$$\gamma := \sqrt{2\mu E_B}. \quad (2-20)$$

如果 γ 与力的作用范围 R 相比是一个小量，即 $\gamma \ll \frac{1}{R}$ ， $f^2(\vec{p})$ 可以展开为

$$f^2(\vec{p}) = p^{2L} f^2(0) + o(R\gamma) = p^{2L} g_0 + o(R\gamma). \quad (2-21)$$

积分式(2-18)在 S 波的相互作用中是收敛的，意味着 $L = 0$ 。将(2-21)式带入(2-18)式并积分，给出

$$\frac{1}{Z} - 1 = \frac{g_0 \mu^2}{2\pi\gamma} + o(\gamma R) \quad (2-22)$$

在物理黎曼面的极点处 $E = -E_B$ ，散射振幅可被写为

$$T(E) = \frac{g_0^2}{E + E_B + \frac{g_0^2 \mu}{2\pi}(ik + \gamma)} + \text{non-pole terms} \quad (2-23)$$

这里 $\text{Im}(\Sigma(E)) = -i\mu k g_0^2/2\pi$ ，以及 $E = \frac{k^2}{2\mu}$ 。为了将 g_0 和 Z 与观测量联系起来，

我们利用有效范围展开（ERE），将 $T(E)$ 写为

$$T(E) = -8\pi\sqrt{s} \frac{1}{1/a + (r/2)k^2 - ik + o(k^4)} \quad (2-24)$$

这里 a 和 r 标记散射长度和有效范围。对比式子(2-23)和(2-24)，给出

$$X := 1 - Z = \sqrt{\frac{1}{1 + 2|r/a|}} \quad (2-25)$$

这里，我们定义了粒子的性质 X 。式子(2-25)将用于后面验证 S 波全粲四夸克态的性质。

综合上述，在这一章中，我们首先回顾标准模型中的基本粒子四种基本相互作用的内容。简述强子的夸克模型及其成功性。然后回顾奇特强子态的发现历程，列举几个典型的 XYZ 态的发现和五夸克态的发现。重点介绍了全粲四夸克态的发现以及理论上预言的其他可能的全粲四夸克态。然后介绍强子分子态和紧致四夸克态并给出了区分它们的温伯格准则。

3 常用模型介绍

我们知道在能区，夸克之间相互作用的耦合常数非常小，量子色动力学可以用微扰方法去研究问题。然而在低能区，量子色动力学具有非微扰的特性。强子结构以及强子之间的相互作用处于量子色动力学的低能区域，这意味我们很难直接用量子色动力学去研究强子相关的问题。格点量子色动力学有望克服这个困难。格点量子色动力学从第一性原理出发去解决强子结构和强子相互作用的一些问题并取得了许多进展。但是在计算过程中需要消耗大量的计算资源，通常情况下要在超级计算机上去运行计算。因此，对于低能区域的强子相关的问题，一般采用一些近似的方案，主要包括一些唯象夸克模型、QCD 求和规则和有效场论等等。在研究多夸克强子的一些性质，例如强子的质量谱，广泛使用的还是唯象夸克模型，其中最具代表性的就是组分夸克模型。在这一章中，我们将介绍几个在研究强子谱中经常使用的唯象模型，包括组分夸克模型，色磁相互作用模型，色流管模型，然后给出我们所使用的模型。我们将重点介绍组分夸克夸克模型和色磁相互作用模型，因为本论文采用的模型基于这两个模型。

3.1 组分夸克模型

在原子的结构中，有主要贡献的是 Breit-Fermi 势中的库仑势，其次是由自旋轨道相互作用产生的精细结构以及由自旋-自旋相互作用造成的超精细结构。而在重子或介子的结构中，禁闭势和色库仑势即 Cornell 势有主要贡献，而称为色磁相互作用，也就是自旋-自旋相互作用造成了强子的能级分裂。Isgur 等人利用组分夸克模型成功诠释了重子和介子的性质。

组分夸克模型采用非相对论形式的哈密顿量。描述 S 波强子的哈密顿量的形式可以写为

$$H = \left(\sum_i m_i + T_i \right) - T_G + \sum_{i < j} V_{ij}(r_{ij}) \quad (3-1)$$

这里 m_i 和 T_i 分别代表组分夸克质量和第 i 个夸克的动能， T_G 代表多夸克系统的质心能量， $r_{ij} \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ 表示第 i 个夸克和第 j 个夸克的距离， $V_{ij}(r_{ij})$ 则表示第 i 个夸克和第 j 个夸克之间的相互作用势。 $V_{ij}(r_{ij})$ 采用被广泛使用的形式

$$V_{ij}(r_{ij}) = V_{ij}^{\text{OGE}}(r_{ij}) + V_{ij}^{\text{Conf}}(r_{ij}) \quad (3-2)$$

其中 V_{ij}^{OGE} 表示描述短程夸克-夸克相互作用的单胶子交换势，而 V_{ij}^{Conf} 则描述了夸克之间在长距离时的相互作用。下面我们对 V_{ij}^{OGE} 和 V_{ij}^{Conf} 的具体形式作说明。

在组分夸克模型中，单胶子交换是写为

$$V_{ij}^{\text{OGE}} = \frac{1}{4} \alpha_{ij} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \left[\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\pi}{2} \delta(r_{ij}) \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} + \frac{4}{3} \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j}{m_i m_j} \right) - \frac{3}{4} \frac{S_{ij}}{m_i m_j r_{ij}^3} \right] \quad (3-3)$$

上式中， $S_{ij} = \frac{3\vec{\sigma}_i \cdot \vec{r}_{ij} \vec{\sigma}_j \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^2} - \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$ 。在(3-3)式中， α_{ij} 表示两夸克之间的强耦合， $\vec{\sigma}_i$ 表示泡利算符， $\vec{\lambda}_i$ 是盖尔曼矩阵。算符 $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j$ 则按夸克类型定义。如果是夸克-夸克或者反夸克-反夸克之间的相互作用，写为 $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j = \sum_{a=1}^8 \lambda_i^a \lambda_j^a$ ，如果是夸克-反夸克之间的相互作用，则写为 $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j = \sum_{a=1}^8 -\lambda_i^a \lambda_j^{a*}$ ， λ^{a*} 表示盖尔曼矩阵的复共轭。 V_{ij}^{OGE} 可以分解为两部分，一部分是类似于库仑势的项 $V_{coul}^{\text{OGE}} \propto (\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j)$ ，描述了夸克之间短距离的相互作用，另一部分则是色磁相互作用项 $V_{CM}^{\text{OGE}} \propto (\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j)(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)$ 。对于 V_{ij}^{Conf} 项，通常情况下使用 r_{ij} 的一次幂或者平方来描述，即

$$V_{ij}^{\text{Conf}} = -\frac{3}{16} (\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j) b r_{ij}^n \quad n = 1 \text{ or } 2 \quad (3-4)$$

式中， b 表示禁闭势的强度。

将哈密顿量(3-1)应用于多夸克系统并求解对应的薛定谔方程时，我们很难获得解析解，只能近似求解。在许多工作中，通常是将空间波函数用一系列的高斯型函数进行展开，也就是我们所说的多高斯展开方法。多高斯展开方法是1988年 Kaminura 提出的^[55]。该方法具有精度高、收敛快等特点，多用于核物理领域。对 S 波的情况，空间波函数可以写为

$$\phi(r) = \prod_{n=1} C_n N_n e^{-\nu_n r^2} \quad (3-5)$$

这里 $\nu_n = \frac{1}{r_n^2}$, $r_n = r_1 a^{n-1}$, $a = \left(\frac{r_{nmax}}{r_1}\right)^{\frac{1}{nmax-1}}$ 。 N_n 是归一化常数而 C_n 是变分系数, 由动力学模型决定。

3.2 色磁相互作用模型

色磁相互作用模型考虑了造成强子质量劈裂的主要贡献, 也就是 V_{CM}^{OGE} 项。其对应的哈密顿量写为

$$H_{CM} = - \sum_{i < j} C_{ij} (\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j) (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \quad (3-6)$$

这里 C_{ij} 是待定参数。实际上, 可以看到 C_{ij} 就是式子(3-2)中的 $\frac{\pi\alpha_{ij}\delta(r_{ij})}{6m_i m_j}$ 项。要描述强子的质量谱, 还应包含质量项, 即

$$M = \sum_i m_i + \langle H_{CM} \rangle \quad (3-7)$$

这里, m_i 是有效的夸克质量, 它包含了夸克自身的裸质量、色电相互作用、禁闭项以及其他方面的效应, $\langle \dots \rangle$ 表示期望值。在一般情况下, C_{ij} 和 m_i 对于不同的强子系统, 是不一样的。并且, 我们很难精确知道强子的空间构型, 即空间波函数, 大多数情况下采用 3.1 提到用近似的方法来表示空间波函数。然而, 色磁相互作用模型旨在给出质量的精细分裂, 来计算强子的质量谱。色磁相互作用模型假设描述夸克对之间相互作用的空间波函数与已知的带有相同夸克组分的强子的空间波函数具有相同的行为^[22]。因此, 在实际应用当中, 式子(3-7)将 m_i 和 C_{ij} 作为未知参数, 通过拟合已知的强子的质量谱, 给出 m_i 和 C_{ij} 的具体值, 然后再用于具体的物理问题。色磁相互作用模型曾用于解释奇特强子态的一些性质。在文献^[56]中, 作者从该模型出发, 给出了 $X(3872)$ 作为 1^{++} 态的解释, 这与将 $X(3872)$ 作为 $D\bar{D}^*$ 强子分子态给出的结果相一致。

3.3 色流管模型

格点量子色动力学指出, 传统的强子以及多夸克体系具有弦结构, 在此结构下, 禁闭势是多体相互作用, 通过一个很窄的带颜色的流管将正夸克或者反夸克连在一起, 此时, 重子和介子具有唯一的结构。

对于重子，颜色流管结构是 Y 型的，如图 3-1 所示。

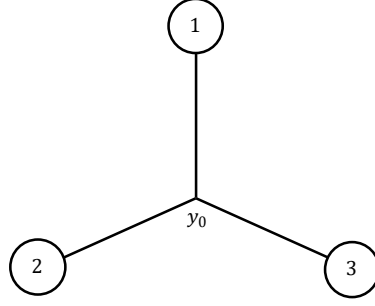


图 3-1 重子色流管模型

在色流管模型中的二体和三体的禁闭势分别写为

$$V_2^C = K_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \quad (3-8)$$

$$V_3^C = K_3[(\vec{r}_1 - \vec{y}_0)^2 + (\vec{r}_2 - \vec{y}_0)^2 + (\vec{r}_3 - \vec{y}_0)^2] \quad (3-9)$$

这里， \vec{r}_i 为夸克的位置， \vec{y}_0 表示色流管交汇的节点。 \vec{y}_0 作为变分参数由禁闭势的极小值来决定。 K_i 的值通过拟合强子谱来获得。弦结构对于不同的多夸克系统来说，会有所不同。以四夸克系统为例，其结构如图 3-2 所示。

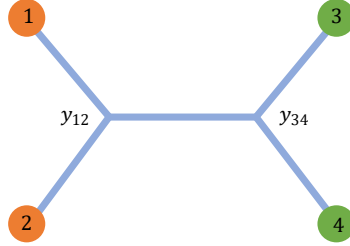


图 3-2 四夸克系统的色流管模型

四体的禁闭势可以写为

$$V_4^C = K[(\vec{r}_1 - \vec{y}_{12})^2 + (\vec{r}_2 - \vec{y}_{12})^2 + (\vec{r}_3 - \vec{y}_{34})^2 + (\vec{r}_4 - \vec{y}_{34})^2 + \kappa_d(\vec{y}_{12} - \vec{y}_{34})^2] \quad (3-10)$$

这里 \vec{r}_i 是第 i 个夸克的位置矢量， \vec{y}_{ij} 是变分参数。 κ_d 是色流管的基本强度系数，

定义为 $\kappa_d = C_d / C_3$ 。

可以指出的是，色流管模型并不是完全全新的模型，它是建立在组分夸克模型的基础上发展而来的。色流管模型被用来研究一些奇特强子态是否为四夸克态，例如在文献^[57]中，作者利用多夸克色流管模型去研究了 $Y(4626)$ 能否作为 P 波 $[cs][\bar{c}\bar{s}]$ 四夸克态。

3.4 本论文模型

在 3.2 中我们提到色磁相互作用模型的主要思想是将造成强子质量劈裂的色磁相互作用项包括进来，而将其他的效应吸收进夸克质量项中。然而，许多文献的工作表明，在利用式子(3-1)来求解多夸克态的质量谱时，计算结果显示，色电相互作用项和禁闭势项对多夸克系统的质量有比较大的贡献。参看文献^[58]里的表格四。这意味着色电相互作用项和禁闭势项的效应不可能完全吸收到夸克质量项里，必须在模型里有所体现。因此，在色磁相互作用模型的基础上，加入 $A_{ij}\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j$ 项，将模型改写为

$$M = \sum_i m_i + \sum_{i < j} \left[A_{ij} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j + \frac{B_{ij}}{m_i m_j} (\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j) (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \right] \quad (3-11)$$

同样的，我们并不期望求解完整的薛定谔方程，而是将式子(3-11)用于拟合已知的强子谱，给出待定参数值，然后再用于我们的研究对象。在下一章节中，我们将利用式子(3-11)用于研究全重四夸克态 $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ （ $Q = c$ 或者 b 夸克）的质量谱。

在这一章中，我们简要叙述了在多夸克领域研究中的几个常用的模型，描述了造成强子质量劈裂的来源主要是由色磁相互作用来的。在分析了色磁相互作用模型优缺点的基础上建立了本论文工作的模型。

4 对全重四夸克态的研究

在本论文的工作中，我们将从紧致四夸克态图像出发，系统研究 S 波全重四夸克态 $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ ，具体包括 $cc\bar{c}\bar{c}$ 、 $bb\bar{b}\bar{b}$ 和 $bc\bar{b}\bar{c}$ 四夸克系统。利用我们所采用的模型，即式子(3-11)，具体计算这些四夸克的质量谱，分析它们可能的衰变道、衰变宽度等方面的性质。我们将重点研究全粲四夸克态的性质。

4.1 四夸克态的波函数

在这一节的内容中，我们将具体构造四夸克系统的波函数，包括空间部分的波函数，味道部分的波函数，自旋部分的波函数，颜色部分的波函数。总的波函数可以写为这几部分波函数的直积形式，即

$$|\Phi\rangle = |\text{space}\rangle \otimes |\text{spin}\rangle \otimes |\text{color}\rangle \otimes |\text{flavor}\rangle \quad (4-1)$$

在考虑泡利不相容原理的基础上，构造出特定四夸克系统总的波函数。

- 空间波函数

由于我们并不求解完整的薛定谔方程，所以我们并不需要知道具体的空间波函数。事实上，要获得多夸克体系的空间波函数是一件极其困难的事情。我们只需要分析空间波函数的宇称。从组分夸克模型出发给出的相互作用势，也就是式子(3-3)和(3-4)，具有球对称性，这意味着我们能够将使用分离变量法，即将空间波函数写为如下形式

$$\psi(\vec{r}) = \phi(r)Y_{lm}(\hat{r}) \quad (4-2)$$

这时，空间波函数的宇称由球谐函数 $Y_{lm}(\hat{r})$ 决定。由于我们只在 S 波的情况下进行研究，因此 $l = 0$ 。此时空间波函数具有偶宇称。实际上，我们也可以从空间波函数的高斯展开式(3-5)看到， $l = 0$ 时，波函数是具有偶宇称的。

- 自旋波函数

由于我们采用的是紧致四夸克态的图像，因此，我们认为在四夸克态的内部，两个夸克形成一个双夸克系统 δ ，两个反夸克形成反双夸克系统 $\bar{\delta}$ ，然后正反双

夸克系统形成一个四夸克态。我们知道无论何种味道的夸克，其自旋都是 $1/2$ 。所以，对于 $\delta(\bar{\delta})$ ，自旋可以为 $S_{\delta(\bar{\delta})} = 0$ 或者 1 。总的自旋取值可以为 $S = 0, 1, 2$ 。

通常情况下，对于一个强子，我们比较感兴趣的是它的量子数，即 J^{PC} 。对于 P 宇称，我们会发现对于 S 波的四夸克系统，它是偶宇称，即 $P = +1$ 。将宇称算符 \hat{P} 作用在波函数上，我们有

$$\hat{P}\psi(\vec{r}) = \eta_{\{P\}}\psi(-\vec{r}) = \eta_{\{P\}}\psi(\vec{r}) \quad (4-3)$$

在上式中， $\eta_{\{P\}}$ 代表夸克的内禀宇称。对于夸克，内禀宇称为 $+1$ ，反夸克为 -1 。

对于四夸克系统 $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ ，我们发现 $\eta_{\{P\}} = (+1)_{\delta}^2 \times (-1)_{\bar{\delta}}^2 = +1$ 。而 S 波的空间波函数具有偶宇称。因此，从式子(4-3)我们可以看出四夸克系统 $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ 的 P 宇称为 $+1$ 。

对于 C 宇称，与自旋波函数有关，我们将按照 $C = \pm 1$ 的方式来构造四夸克系统的自旋波函数。四夸克系统 $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ 的量子数可以为

$$J^{PC} = 0^{++}, 1^{++}, 1^{+-}, 2^{++} \quad (4-4)$$

其对应的自旋波函数构型，我们列在表格 4-1 中。

表格 4-1 四夸克系统的自旋波函数构型。表格中的符号 $|S_{\delta}, S_{\bar{\delta}}\rangle_S$ ，下标 S 代表总的自旋量子数， $S_{\delta(\bar{\delta})}$ 代表双夸克系统的自旋。

J^{PC}	自旋波函数构型
0^{++}	$ 0_{\delta}, 0_{\bar{\delta}}\rangle_0, 1_{\delta}, 1_{\bar{\delta}}\rangle_0$
1^{++}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1_{\delta}, 0_{\bar{\delta}}\rangle_1 + 0_{\delta}, 1_{\bar{\delta}}\rangle_1)$
1^{+-}	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1_{\delta}, 0_{\bar{\delta}}\rangle_1 - 0_{\delta}, 1_{\bar{\delta}}\rangle_1), 1_{\delta}, 1_{\bar{\delta}}\rangle_1$
2^{++}	$ 1_{\delta}, 1_{\bar{\delta}}\rangle_2$

上述波函数的表达式可以具体写为

$$|0_{\delta}, 0_{\bar{\delta}}\rangle_0 = \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \quad (4-5)$$

$$|1_{\delta}, 1_{\bar{\delta}}\rangle_0 = \sqrt{\frac{1}{12}}(2\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow + 2\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow) \quad (4-6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1_\delta, 0_{\bar{\delta}}\rangle_1 + |0_\delta, 1_{\bar{\delta}}\rangle_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle) \quad (4-7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1_\delta, 0_{\bar{\delta}}\rangle_1 - |0_\delta, 1_{\bar{\delta}}\rangle_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle) \quad (4-8)$$

$$|1_\delta, 1_{\bar{\delta}}\rangle_1 = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle) \quad (4-9)$$

$$|1_\delta, 1_{\bar{\delta}}\rangle_2 = |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \quad (4-10)$$

在公式组中, $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 表示夸克的自旋波函数, 也就是

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

- 颜色波函数

我们知道在自然界中观察到的强子, 如介子、重子都是色单态结构。如果一个多夸克系统能够被观察到, 它应当是色单态的。在前面我们已经知道了紧致四夸克态的颜色构型, 因此我们直接写出全重四夸克态 $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ 可能的颜色构型

$$\zeta_1 = |6_\delta \bar{6}_{\bar{\delta}}\rangle^1, \quad \zeta_2 = |\bar{3}_\delta 3_{\bar{\delta}}\rangle^1 \quad (4-12)$$

每一种夸克具有三种可能的颜色, 也就是 r, g, b 。在颜色空间中, 它们可以被表示为

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

利用 $SU(3)$ 群的 CG 系数, 可以将颜色构型 ζ_1 和 ζ_2 具体写为

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}} & [(rb + br)(\bar{b}\bar{r} + \bar{r}\bar{b}) + (gr + rg)(\bar{g}\bar{r} + \bar{r}\bar{g}) \\ & + (gb + bg)(\bar{b}\bar{g} + \bar{g}\bar{b}) + 2(rr)(\bar{r}\bar{r}) + 2(gg)(\bar{g}\bar{g}) \\ & + 2(bb)(\bar{b}\bar{b})] \end{aligned} \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} & [(br - rb)(\bar{b}\bar{r} - \bar{r}\bar{b}) - (rg - gr)(\bar{g}\bar{r} - \bar{r}\bar{g}) \\ & + (bg - gb)(\bar{b}\bar{g} - \bar{g}\bar{b})] \end{aligned} \quad (4-15)$$

- 味道波函数

由于式子(3-11)并不显含和味道有关的相互作用，因此我们没有必要构造具体的味道波函数，只需要声明味道波函数的宇称即可。如果四夸克态 $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ 中的夸克成分都是粲夸克或者都是底夸克，那么 $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ 味道波函数的宇称是偶宇称，如何四夸克系统的组分为 $QQ'\bar{Q}\bar{Q}'$ （ Q 与 Q' 不一样），那么我们可以构造处具有奇宇称或者偶宇称的波函数。

4.2 全粲（底）四夸克态和粲底四夸克态的总波函数

对于 $cc\bar{c}\bar{c}$ （ $bb\bar{b}\bar{b}$ ），它们总的波函数要求是对称的。但是双夸克系统的波函数要求是反对称的，因为它们是全同粒子。我们约定 A 表示波函数是反对称的，S 表示波函数是对称的。我们用符号 $\left\{ \left\{ QQ \right\}_s^c \left\{ \bar{Q}\bar{Q} \right\}_s^c \right\}_S^C$ 表示整体的波函数构型。这里，C（c）和 S（s）表示颜色表示和自旋量子数，花括号{}表示味道波函数为对称的，用[]表示味道波函数为反对称。因为空间波函数和味道波函数都是对称的，所以，我们需要调节自旋和颜色波函数的对称性即可。下面分情况进行讨论。

- 颜色构型为 $6 - \bar{6}$ 的情况

在这个构型下，双（反）夸克系统的颜色波函数的对称性为 S。满足泡利不相容原理的情况为

$$(SASS) \times (SASS) \quad (4-16)$$

(...)内一依次代表空间波函数、自旋波函数、颜色波函数和味道波函数的对称性。

- 颜色构型为 $\bar{3} - 3$ 的情况

在这个情况下，双（反）夸克系统的颜色波函数的对称性为 A。整体波函数的情况为

$$(SSAS) \times (SSAS) \quad (4-17)$$

综合上述情况， $cc\bar{c}\bar{c}$ （ $bb\bar{b}\bar{b}$ ）四夸克态的总波函数可以为

1. 0^{++} 的情况

$$|\{cc\}_0^6\{\bar{c}\bar{c}\}_0^{\bar{6}}\rangle_0^1, |\{cc\}_1^{\bar{3}}\{\bar{c}\bar{c}\}_1^3\rangle_0^1 \quad (4-18)$$

$$|\{bb\}_0^6\{\bar{b}\bar{b}\}_0^{\bar{6}}\rangle_0^1, |\{bb\}_1^{\bar{3}}\{\bar{b}\bar{b}\}_1^3\rangle_0^1 \quad (4-19)$$

2. 1^{+-} 的情况

$$|\{cc\}_1^{\bar{3}}\{\bar{c}\bar{c}\}_1^3\rangle_1^1 \quad (4-20)$$

$$|\{bb\}_1^{\bar{3}}\{\bar{b}\bar{b}\}_1^3\rangle_1^1 \quad (4-21)$$

3. 2^{++} 的情况

$$|\{cc\}_1^{\bar{3}}\{\bar{c}\bar{c}\}_1^3\rangle_2^1 \quad (4-22)$$

$$|\{bb\}_1^{\bar{3}}\{\bar{b}\bar{b}\}_1^3\rangle_2^1 \quad (4-23)$$

对于 $bc\bar{b}\bar{c}$ 系统，其内部的双（反）夸克系统不是全同粒子，因此我们不用去考虑双夸克系统的波函数的对称性，只需要构造对称的总波函数即可。同样的，为了方便构造，我们分情况进行讨论。

• 颜色构型为 $6 - \bar{6}$ 的情况

在这个颜色构型下满足泡利不相容原理的总波函数构型为

$$(SSSA) \times (SSSA) \quad (4-24)$$

$$(SASS) \times (SASS) \quad (4-25)$$

$$(SSSA) \times (SASS) \quad (4-26)$$

• 颜色构型为 $\bar{3} - 3$ 的情况

在这个构型下，总波函数构型可以为

$$(SSAS) \times (SSAS) \quad (4-27)$$

$$(SAAA) \times (SAAA) \quad (4-28)$$

$$(SSAS) \times (SAAA) \quad (4-29)$$

在上述情况下，对于不同量子数的 $bc\bar{b}\bar{c}$ 四夸克系统的波函数构型为

1. 0^{++} 的情况

$$\begin{aligned} & |[bc]_1^6[\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}}\rangle_0^1 \quad |\{bc\}_0^6\{\bar{b}\bar{c}\}_0^{\bar{6}}\rangle_0^1 \\ & |\{bc\}_1^{\bar{3}}\{\bar{b}\bar{c}\}_1^3\rangle_0^1 \quad |[bc]_0^{\bar{3}}[\bar{b}\bar{c}]_0^3\rangle_0^1 \end{aligned} \quad (4-30)$$

2. 1^\pm 的情况

$$\begin{aligned}
 & |[bc]_1^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_1^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (|[bc]_1^6 \{\bar{b}\bar{c}\}_0^{\bar{6}} \rangle_1^1 - |\{bc\}_0^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_1^1) \\
 & |\{bc\}_1^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_1^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (|\{bc\}_1^{\bar{3}} [\bar{b}\bar{c}]_0^3 \rangle_1^1 - |[bc]_0^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_1^1)
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

3. 1^{++} 的情况

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}} (|[bc]_1^6 \{\bar{b}\bar{c}\}_0^{\bar{6}} \rangle_1^1 + |\{bc\}_0^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_1^1) \\
 & \frac{1}{\sqrt{2}} (|\{bc\}_1^{\bar{3}} [\bar{b}\bar{c}]_0^3 \rangle_1^1 + |[bc]_0^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_1^1)
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

4. 2^{++} 的情况

$$|[bc]_1^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_2^1 - |\{bc\}_1^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_2^1 \tag{4-33}$$

为了清楚看到 $cc\bar{c}\bar{c}$ 、 $bb\bar{b}\bar{b}$ 和 $bc\bar{b}\bar{c}$ 波函数的具体情况和比较，我们将它们总结在表格 4-2 中。

表格 4-2 全重四夸克态的波函数。这里 $\{\}$ 和 $[\]$ 分别表示双（反）夸克的对称和反对称味道波函数。

角标和上角标分别代表自旋和颜色的不可约表示。

J^{PC}	四夸克	波函数
0^{++}	$cc\bar{c}\bar{c}$	$ \{cc\}_0^6 \{\bar{c}\bar{c}\}_0^{\bar{6}} \rangle_0^1 - \{cc\}_1^{\bar{3}} \{\bar{c}\bar{c}\}_1^3 \rangle_0^1$
	$bb\bar{b}\bar{b}$	$ \{bb\}_0^6 \{\bar{b}\bar{b}\}_0^{\bar{6}} \rangle_0^1 - \{bb\}_1^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{b}\}_1^3 \rangle_0^1$
	$bc\bar{b}\bar{c}$	$ [bc]_1^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_0^1 - \{bc\}_0^6 \{\bar{b}\bar{c}\}_0^{\bar{6}} \rangle_0^1$
		$ \{bc\}_1^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_0^1 - [bc]_0^{\bar{3}} [\bar{b}\bar{c}]_0^3 \rangle_0^1$
1^{+-}	$cc\bar{c}\bar{c}$	$ \{cc\}_1^{\bar{3}} \{\bar{c}\bar{c}\}_1^3 \rangle_1^1$
	$bb\bar{b}\bar{b}$	$ \{bb\}_1^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{b}\}_1^3 \rangle_1^1$
	$bc\bar{b}\bar{c}$	$ [bc]_1^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_1^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} ([bc]_1^6 \{\bar{b}\bar{c}\}_0^{\bar{6}} \rangle_1^1 - \{bc\}_0^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_1^1)$ $ \{bc\}_1^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_1^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\{bc\}_1^{\bar{3}} [\bar{b}\bar{c}]_0^3 \rangle_1^1 - [bc]_0^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_1^1)$
1^{++}	$bc\bar{b}\bar{c}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} ([bc]_1^6 \{\bar{b}\bar{c}\}_0^{\bar{6}} \rangle_1^1 + \{bc\}_0^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_1^1) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\{bc\}_1^{\bar{3}} [\bar{b}\bar{c}]_0^3 \rangle_1^1 + [bc]_0^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_1^1)$
2^{++}	$cc\bar{c}\bar{c}$	$ \{cc\}_1^{\bar{3}} \{\bar{c}\bar{c}\}_1^3 \rangle_2^1$
	$bb\bar{b}\bar{b}$	$ \{bb\}_1^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{b}\}_1^3 \rangle_2^1$
	$bc\bar{b}\bar{c}$	$ [bc]_1^6 [\bar{b}\bar{c}]_1^{\bar{6}} \rangle_2^1 - \{bc\}_1^{\bar{3}} \{\bar{b}\bar{c}\}_1^3 \rangle_2^1$

4.3 计算自旋和色相互作用的期望值

在式子(3-11)中包含了自旋相互作用 $\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$ 和色相互作用 $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j$ ，如果我们想到计算具体的四夸克质量谱，就需要知道它们在每两个夸克之间相互作用的期望值。为了指明是哪两个夸克之间的相互作用，我们对夸克进行标记，如图 4-1 所示

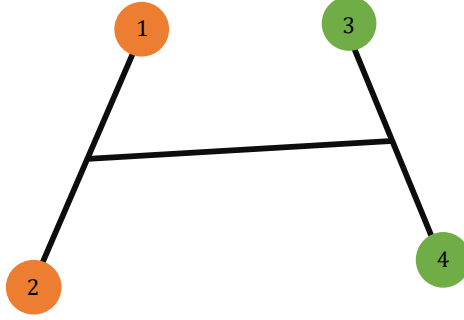


图 4-1 紧致四夸克态图像下，夸克之间的相互作用。这里夸克 1 和夸克 2 构成双夸克系统，夸克 3 和夸克 4 构成另外一个双夸克系统。

- 自旋相互作用项 $\langle \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \rangle$ 的期望值

利用前面描述的自旋波函数的写法，我们可以直接计算双（反）夸克系统 $(ij) = (12)$ 或者 (34) 的自旋相互作用的期望值，也就是

$$\begin{aligned} {}_S \langle S_{12}, S_{34} | \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j | S'_{12}, S'_{34} \rangle_{S'} \\ = [2S_{ij}(S_{ij} - 1) - 3] \delta_{S_{12}, S'_{12}} \delta_{S_{34}, S'_{34}} \delta_{S, S'} \end{aligned} \quad (4-34)$$

为了计算其他夸克对之间的自旋相互的期望值，我们需要将基底 $|S_{12}, S_{34}\rangle_S$ 用另外一组基底表示，这通过 9j 系数进行联系。这样 $|S_{12}, S_{34}\rangle_S$ 可以写为^[59]

$$\begin{aligned} |S_{12}, S_{34}\rangle_S &= \sqrt{(2S_{12} + 1)(2S_{34} + 1)(2S_{13} + 1)(2S_{24} + 1)} \times \\ &\quad \left\{ \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_{12} \\ S_3 & S_4 & S_{34} \\ S_{13} & S_{24} & S \end{matrix} \right\} |S_{13}, S_{24}\rangle_S \end{aligned} \quad (4-35)$$

式子(4-35)可用于计算 $\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_3 \rangle$ 和 $\langle \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_4 \rangle$ 的期望值。对于 $\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4 \rangle$ 和 $\langle \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 \rangle$ 的期望值，我们需要将 $|S_{12}, S_{34}\rangle_S$ 用 $|S_{14}, S_{23}\rangle_S$ 展开。我们知道两个粒子自旋之间的耦合方式有两种，即 $(S_1 \otimes S_2)^{S_{12}}$ 和 $(S_2 \otimes S_1)^{S_{12}}$ ，它们之间通过一个因子进行联系

$$(S_1 \otimes S_2)^{S_{12}} = (-1)^{S_1 + S_2 - S_{12}} (S_2 \otimes S_1)^{S_{12}} \quad (4-36)$$

借助式子(4-35)和(4-36)，我们很容易就能获得 $|S_{12}, S_{34}\rangle_S$ 在基底 $|S_{14}, S_{23}\rangle_S$ 下的展开形式。

利用上面给出的式子，我们就能够计算 $\langle \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \rangle$ 在不同夸克对之间的相互作用的期望值了。计算结果列在表格 4-3 里。

表格 4-3 $\langle \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \rangle$ 的期望值。

$\langle S_{12}, S_{34} \hat{O} S_{12}, S_{34} \rangle$	$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle$	$\langle \vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_4 \rangle$	$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_3 \rangle$	$\langle \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_4 \rangle$	$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4 \rangle$	$\langle \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 \rangle$
${}_0\langle 0,0 \hat{O} 0,0 \rangle_0$	-3	-3	0	0	0	0
${}_0\langle 1,1 \hat{O} 1,1 \rangle_0$	1	1	-2	-2	-2	-2
${}_0\langle 0,0 \hat{O} 1,1 \rangle_0$	0	0	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
${}_1\langle 0,1 \hat{O} 0,1 \rangle_1$	-3	1	0	0	0	0
${}_1\langle 1,0 \hat{O} 1,0 \rangle_1$	1	-3	0	0	0	0
${}_1\langle 1,1 \hat{O} 1,1 \rangle_1$	1	1	-1	-1	-1	-1
${}_1\langle 0,1 \hat{O} 1,0 \rangle_1$	0	0	1	1	-1	-1
${}_1\langle 0,1 \hat{O} 1,1 \rangle_1$	0	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
${}_1\langle 1,0 \hat{O} 1,1 \rangle_1$	0	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
${}_2\langle 1,1 \hat{O} 1,1 \rangle_2$	1	1	1	1	1	1

- 色相互作用项 $\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle$ 的期望值

为了计算两体的色相互作用的期望值，我们将 $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j$ 改写为

$$\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j = \frac{1}{2}(\vec{\lambda}_{ij}^2 - \vec{\lambda}_i^2 - \vec{\lambda}_j^2) \quad (4-37)$$

这里 $\vec{\lambda}_{ij}^2$ 称为 Casimir 算符。 $\vec{\lambda}_i$ 在 $SU(3)_c$ 群中写为 Gell-Mann 矩阵的形式。也就是

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (4-38)$$

如果将 $SU(3)_c$ 的不可约表示写为 $\Phi(\lambda\mu)$ ，那么 $\vec{\lambda}_{ij}$ 的本征值为^[60]

$$\vec{\lambda}_{ij}^2 \Phi(\lambda\mu) = \frac{4}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu)\Phi(\lambda\mu) \quad (4-39)$$

如果夸克处于颜色不可约 3 表示, 则有 $(\lambda\mu) = (10)$, 反夸克为颜色不可约 $\bar{3}$ 表示, 这时, $(\lambda\mu) = (01)$ 。那么,

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_i^2 \Phi(10) &= \frac{16}{3} \Phi(10) \\ \vec{\lambda}_i^2 \Phi(01) &= \frac{16}{3} \Phi(01) \end{aligned} \quad (4-40)$$

如果夸克处于 6 ($\bar{6}$) 的表示, 则有 $(\lambda\mu) = (20)$ 。所以,

$$\vec{\lambda}_i^2 \Phi(20) = \frac{40}{3} \Phi(20) \quad (4-41)$$

结合式子(4-37)和(4-39)-(4-41), 我们可以直接计算 $(ij) = (12), (34)$ 夸克对之间的相互作用。对于其他夸克对之间的色相互作用, 我们需要做基底变换, 才可直接计算。利用文献^[60]里的公式, 我们有

$$\begin{aligned} |1_{Q_1 Q_3} 1_{Q_2 Q_4}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |\bar{3}_{Q_1 Q_2} 3_{Q_3 Q_4}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |6_{Q_1 Q_2} \bar{6}_{Q_3 Q_4}\rangle \\ |8_{Q_1 Q_3} 8_{Q_2 Q_4}\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}} |\bar{3}_{Q_1 Q_2} 3_{Q_3 Q_4}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |6_{Q_1 Q_2} \bar{6}_{Q_3 Q_4}\rangle \\ |1_{Q_1 Q_4} 1_{Q_2 Q_3}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}} |\bar{3}_{Q_1 Q_2} 3_{Q_3 Q_4}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |6_{Q_1 Q_2} \bar{6}_{Q_3 Q_4}\rangle \\ |8_{Q_1 Q_4} 8_{Q_2 Q_3}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\bar{3}_{Q_1 Q_2} 3_{Q_3 Q_4}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |6_{Q_1 Q_2} \bar{6}_{Q_3 Q_4}\rangle \end{aligned} \quad (4-42)$$

利用式子(4-42)并结合(4-37)和(4-39)-(4-41), 我们就可直接计算其他夸克对之间的色相互作用。我们将结果列在表格 4-4 $\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle$ 的期望值。

表格 4-4 $\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle$ 的期望值。

$\langle \hat{O} \rangle$	$\langle \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_2 \rangle$	$\langle \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_4 \rangle$	$\langle \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_3 \rangle$	$\langle \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_4 \rangle$	$\langle \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4 \rangle$	$\langle \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_3 \rangle$
$\langle \zeta_1 \hat{O} \zeta_1 \rangle$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$
$\langle \zeta_2 \hat{O} \zeta_2 \rangle$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
$\langle \zeta_1 \hat{O} \zeta_2 \rangle$	0	0	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$

4.4 提取动力学参数

为了计算 S 波全重四夸克态的质量谱，我们必须确定参数 A_{ij} 和 B_{ij} 的具体值。在我们的模型中，我们将来自颜色空间和自旋空间的贡献用盖尔曼矩阵和自旋矩阵来进行表示了，并且在上一节中我们计算了它们的具体值。由于我们的模型并不现含和味道相关的相互作用，所以味道的贡献是平凡的。最后包含在参数 A_{ij} 和 B_{ij} 中贡献仅来源空间波函数。我们定义

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ij} &:= \langle A_{ij} \rangle \\ \mathcal{B}_{ij} &:= \langle B_{ij} \rangle\end{aligned}\tag{4-43}$$

这里， $\langle \dots \rangle$ 表示在空间波函数中的期望值。因为我们是在 S 波的情况进行计算的，所以根据我们的假设，用来提取参数用的强子是处于 S 波下的。从自旋波函数和颜色波函数可以很容易看出它们是存在对称性的。参看(4-5)-(4-10)和

(4-14)-(4-15)。我们很容易给出 \mathcal{A}_{ij} 和 \mathcal{B}_{ij} 在不同夸克对之间是存在关系的：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{34} \quad \mathcal{A}_{13} = \mathcal{A}_{24} = \mathcal{A}_{14} = \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{B}_{12} = \mathcal{B}_{34} \quad \mathcal{B}_{13} = \mathcal{B}_{24} = \mathcal{B}_{14} = \mathcal{B}_{23}\end{aligned}\tag{4-44}$$

在我们的工作中，用来提取参数用强子列在表格 4-5 里了。对于参数 \mathcal{A}_{bc} 和 \mathcal{B}_{bc} 可以用夸克组分为 $c\bar{b}$ 或者 $b\bar{c}$ 的赝标介子和矢量介子作为输入。然而，在实验上只发现了一个 $c\bar{b}$ 态，也就是标量介子 $B_c^{[61][62]}$ ，矢量介子 B_c^* 并没有被发现。因此我们转而用理论上的计算的质量^[63]来作为 $B_c^{(*)}$ 的输入值。

表格 4-5 用于提取参数用的介子的质量以及误差。前 4 个介子的质量和误差取自文献^[65]。

质量 (MeV)	η_c	J/ψ	η_b	Υ	$B_c^{[63]}$	$B_c^{*[63]}$
数值	2983.9	3096.9	9398.7	9460.3	6276	6331
误差	0.4	0.006	2	0.26	7	7

原则上我们需要将夸克质量同样作为参数，从已知的强子谱中提取出来。但是由于我们能用的强子不多，如果将其作为参数，会导致和参数有关的方程组无

解，所以这里我们将夸克质量设为固定值，也就是 c 和 b 夸克的质量。我们采用组分夸克模型给出的质量^[64]

$$\begin{aligned} m_c &= 1.5 \text{ GeV} \\ m_b &= 5 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (4-45)$$

由于所有的介子都是色单态的，所以我们很容易知道 $\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle = -\frac{4}{3}$ 。对于自旋相互作用，我们有

$$\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} & S = 1 \\ -\frac{3}{4} & S = 0 \end{cases} \quad (4-46)$$

利用这两个结果，从式子(3-11)出发，我们很容易写出提取参数的方程组：

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{i=c,b} m_i + \sum_{i,j=c,b} \left[-\frac{16}{3} \mathcal{A}_{ij} + \frac{4\mathcal{B}_{ij}}{m_i m_j} \right] \\ M_1 &= \sum_{i=c,b} m_i + \sum_{i,j=c,b} \left[-\frac{16}{3} \mathcal{A}_{ij} - \frac{4\mathcal{B}_{ij}}{3m_i m_j} \right] \end{aligned} \quad (4-47)$$

这里 M_0 和 M_1 分别表示赝标介子和矢量介子的质量。将表格 4-5 中的数据 and 式子 (4-45) 的夸克质量值分别带入式子(4-47)，我们就可获得 \mathcal{A}_{cc} 、 \mathcal{A}_{bb} 、 \mathcal{A}_{cb} 、 \mathcal{B}_{cc} 、 \mathcal{B}_{bb} 和 \mathcal{B}_{cb} 的具体值。计算结果我们列表格 4-6 在里。

表格 4-6 \mathcal{A}_{ij} 和 \mathcal{B}_{ij} 的计算结果。这里 \mathcal{A}_{ij} 的单位为 GeV，而 \mathcal{B}_{ij} 的单位为 GeV^3 。

计算结果	\mathcal{A}_{cc}	\mathcal{A}_{bb}	\mathcal{A}_{cb}	\mathcal{B}_{cc}	\mathcal{B}_{bb}	\mathcal{B}_{cb}
数值	-0.01287	0.10408	0.03427	-0.04767	-0.28875	-0.07734
误差	2×10^{-5}	10^{-4}	1.04×10^{-3}	2.1×10^{-4}	9.45×10^{-3}	1.392×10^{-2}

虽然我们已经获得了参数，但是在正式用于研究全重四夸克态之前，我们必须校验我们的参数的合理性。实验上已经发现了一些全重重子并且给出了它们的质量，而一些尚未被发现的全重重子理论上有关于它们的质量的计算结果。我们可以将我们的模型用于一些已知的全重重子，通过比较我们模型给出质量与实验上或者理论上给出的质量是否接近来判断我们参数的可靠性。我们选取夸克组分为 QQQ' （ Q 和 Q' 的成分不一样）和 QQQ 重重子。对于 QQQ' ，由式子(4-47)给出

$$M_{\frac{1}{2}} = 2m_Q + m_{Q'} - \frac{8}{3}(2\mathcal{A}_{QQ'} + \mathcal{A}_{QQ}) + \left(-\frac{8}{3}\right) \left(\frac{\mathcal{B}_{QQ}}{4m_Q^2} - \frac{\mathcal{B}_{QQ'}}{m_Q m_{Q'}} \right) \quad (4-48)$$

$$M_{\frac{3}{2}} = 2m_Q + m_{Q'} - \frac{8}{3}(2\mathcal{A}_{QQ'} + \mathcal{A}_{QQ}) + \left(-\frac{8}{3}\right) \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{B}_{QQ}}{m_Q^2} + \frac{2\mathcal{B}_{QQ'}}{m_Q m_{Q'}} \right) \quad (4-49)$$

这里 M_S 表示自旋为 S 的重重子的质量。而对于 QQQ ，我们只有 $S = \frac{3}{2}$ ，也就是

$$M_{\frac{3}{2}} = 3m_Q - \frac{8}{3} \left(2\mathcal{A}_{QQ} + \frac{3}{4} \frac{\mathcal{B}_{QQ}}{m_{QQ}^2} \right) \quad (4-50)$$

我们需要计算的重重子，我们选择以下粒子： $\Omega_{ccb}^{(*)}$ 、 $\Omega_{bbc}^{(*)}$ 、 Ω_{ccc}^* 和 Ω_{bbb}^* 。它们的质量都由格点 QCD 的计算给出了^{[66][67][68]}。利用式子(4-48)-(4-50)，我们计算以上这几个重重子的质量。我们将计算结果以及来自格点 QCD 的计算结果绘制在图 4-2 中。在图 4-2 中，为了确保我们的计算准确，这里我们将作为输入的强子质量再次计算了一遍，并将它们绘制在图 4-2 里了。

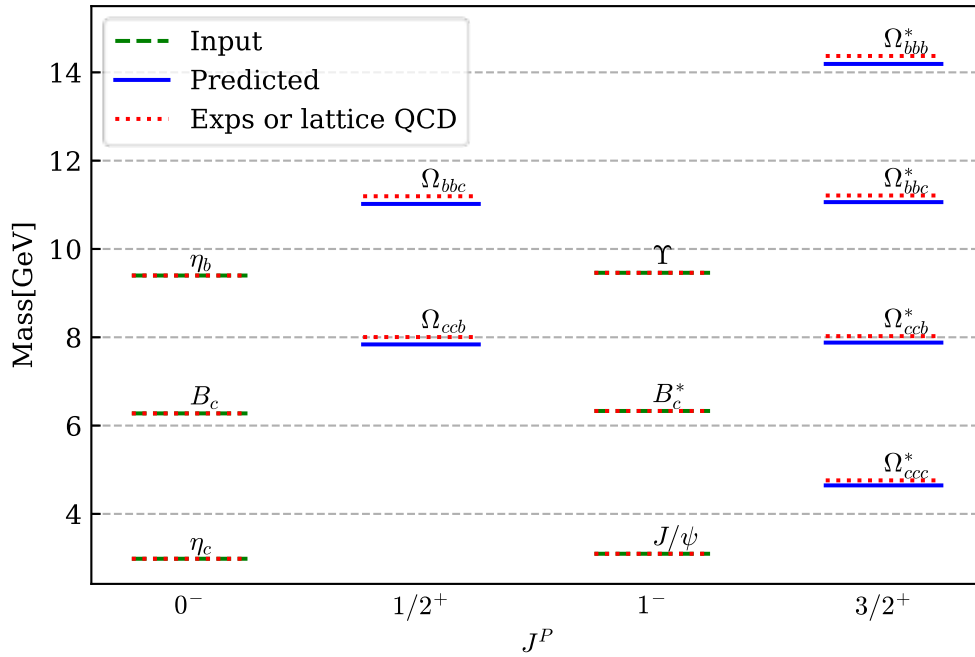


图 4-2 由我们的模型计算给出的重味强子的质量和来自实验上或者理论上给出质量的比较。这里红色点线表示结果来源于 PDG 或者格点 QCD 的计算。绿色的虚线和蓝色实线分别是我们的输入强子的质量和我们模型给出的计算结果。 J/ψ 、 η_c 、 Υ 和 η_b 的质量来源于 PDG^[65]。 $B_c^{(*)}$ 、 $\Omega_{bbc}^{(*)}$ 和 $\Omega_{ccb}^{(*)}$ 取自文献^[68]。 Ω_{bbb}^* 和 Ω_{ccc}^* 取自文献^{[66][67]}。

由图 4-2 我们可以清楚看到我们的模型给出的结果与来自格点 QCD 给出的结果非常的接近。这意味着我们的模型是具备可靠性的。因此，我们可以开始用我们的模型以及参数来研究全重四夸克态的质量谱了。

4.5 全重四夸克态的质量谱和衰变宽度

在获得了相应的参数之后，我们需要将哈密顿量(3-11)按照不同的系统，在不同量子数下的基底，也就是表格 4-2 所示的波函数构型，进行表示。哈密顿量在不同基底下的表示的计算结果列在了表格 4-7 的第三列。为了计算这些矩阵表示的哈密顿量的本征值和本征矢量，我们使用 SciPy^[69]里的线性代数模块进行计算。计算结果列在了表格 4-7 的第四列和第六列。获得了质量谱之后，我们就可以分析全重四夸克态的衰变道。为了直观的看出质量谱的分布情况以方便分析它们的衰变性质，我们将它们绘制在图里。下面按不同的夸克系统进行分析。

- $cc\bar{c}\bar{c}$ 系统

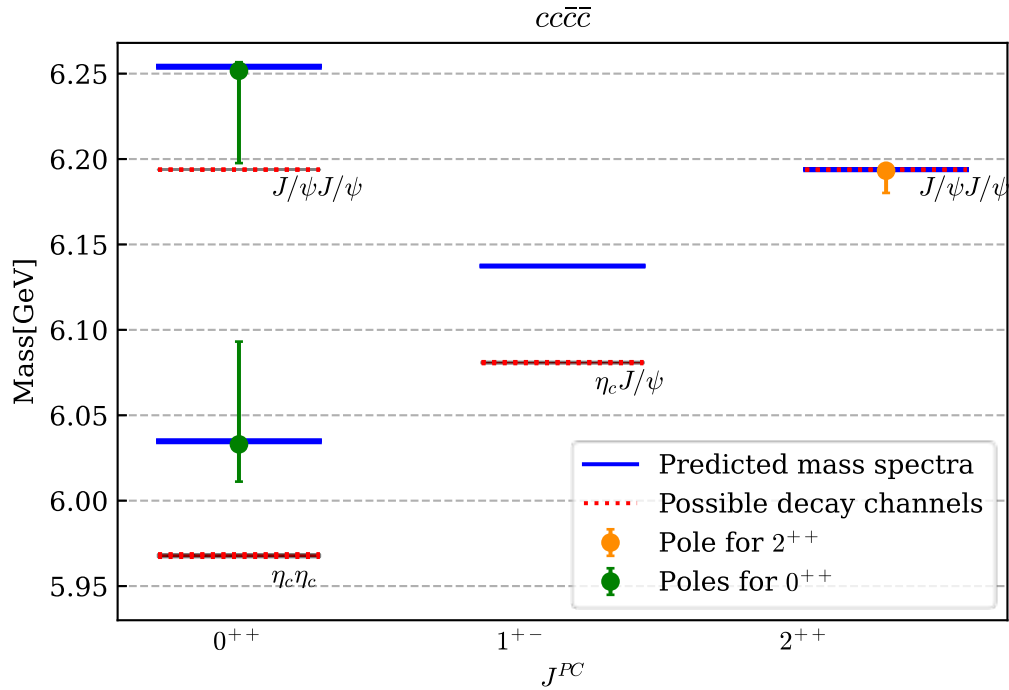


图 4-3 全重四夸克态的质量谱、衰变道、极点（极点相关的内容的分析将放在后面的内容中）在不同量子数下的分布情况。蓝色框图表示我们计算的质量。红色点框图是它们可能的衰变道。与图 4-4 和图 4-5 的标记情况相同。

如图 4-3 所示是 $cc\bar{c}\bar{c}$ 系统的质量谱和衰变道的分布情况（有关极点的分析是后面的内容）。从图可以看出 0^{++} 量子数中的态的质量劈裂为两个，其中一个的质量大于 6.25GeV ，并且具有两条可能的衰变道。它能够衰变到 $J/\psi J/\psi$ 和 $\eta_c \eta_c$ 。另外一个态的质量较小，只高于 $\eta_c \eta_c$ 的阈值，因此只可能衰变到 $\eta_c \eta_c$ 。 1^{+-} 道只

有一个态，而只有 $\eta_c J/\psi$ 能够组成 1^{+-} 的量子数，所以其衰变道只可能为 $\eta_c J/\psi$ 。 $J/\psi J/\psi$ 除了能构成 0^{++} 的量子数外，还能组成 2^{++} 的量子数。在 2^{++} 我们的计算有一个态，其质量略微大于 $J/\psi J/\psi$ 的阈值，所以它有可能衰变到 $J/\psi J/\psi$ 。

- $b\bar{b}b\bar{b}$ 系统

$b\bar{b}b\bar{b}$ 的情况与 $c\bar{c}c\bar{c}$ 的情况类似。 0^{++} 质量高于 18.95GeV 的态的衰变道可以为 $\Upsilon_b \Upsilon_b$ 和 $\eta_b \eta_b$ 而质量较小的另外一个态的衰变道只可能为 $\eta_b \eta_b$ 。量子数为 1^{+-} 的态的衰变道只有一个，为 $\eta_b \Upsilon_b$ 。对于 2^{++} 的情况，计算结果给出的态的质量仅仅稍微高于 $\Upsilon_b \Upsilon_b$ 的阈值，衰变道有可能为 $\Upsilon_b \Upsilon_b$ 。

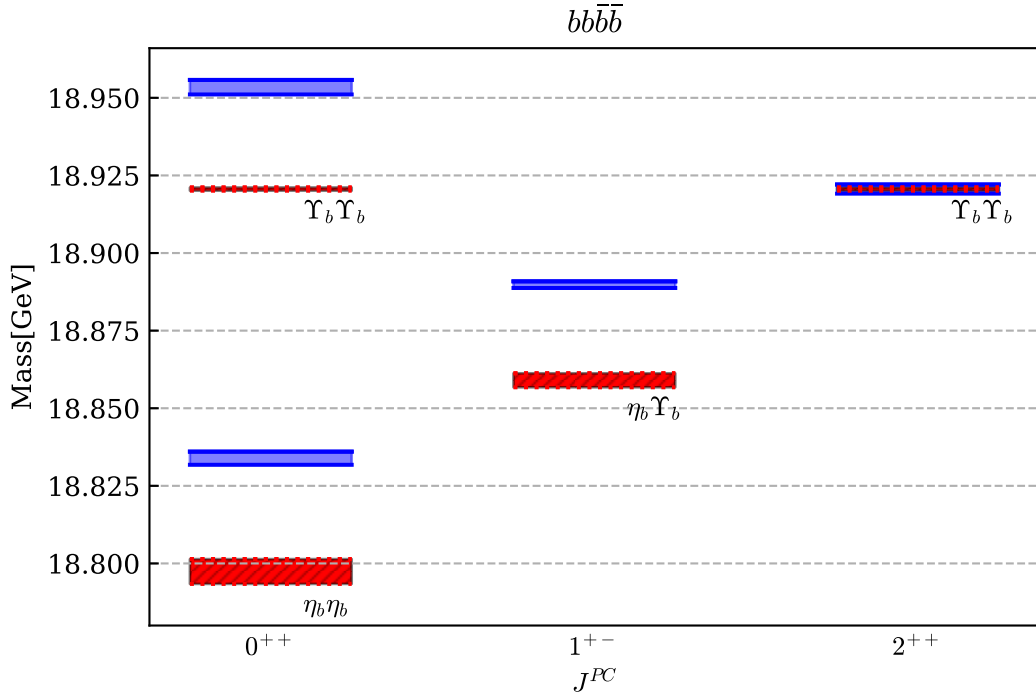


图 4-4 全底四夸克态的质量谱、衰变道在不同量子数下的分布情况。

- $b\bar{c}b\bar{c}$ 系统

$b\bar{c}b\bar{c}$ 系统的情况比起 $c\bar{c}c\bar{c}$ 和 $b\bar{b}b\bar{b}$ 就丰富多了。在 0^{++} 量子数中的态有四个。其中质量最大的态的质量分布与 $B_c^* B_c^*$ 道质量分布有重合，在误差允许范围内，它能够衰变到 $B_c^* B_c^*$ 。除此之外，它还可能衰变到 $\Upsilon J/\psi$ 、 $B_c B_c$ 和 $\eta_b \eta_c$ 。质量分布在 12.60GeV 附近的态的衰变道可以为 $\Upsilon J/\psi$ 、 $B_c B_c$ 和 $\eta_b \eta_c$ 。质量较小的两个态的衰变道只能为 $\eta_b \eta_c$ 。对于 1^{+-} 的情况，没有任何态的质量高于 $B_c^* B_c^*$ 的阈值。质量最大的态的质量分布与 $B_c^* B_c^*$ 的质量分布有交集。在误差允许范围内，它能够

衰变到 $B_c^* B_c$ 。另外它还能够衰变到 $\eta_b J/\psi$ 和 $\Upsilon \eta_c$ 。能够衰变到 $\eta_b J/\psi$ 和 $\Upsilon \eta_c$ 的态还有质量在 12.55GeV 附近的态。较小的两个态的质量都小于所有衰变道的阈值，因此它们不能衰变。在 1^{++} 的情况中，质量较大的态的质量分布与 $B_c^* B_c$ 的质量分布有重合的地方，所以在误差允许范围内，它能够衰变到 $B_c^* B_c$ 。除此以外它还能衰变到 $\Upsilon J/\psi$ 。另外一个态的质量都低于衰变道的阈值，因此不能发生衰变。对于 2^{++} 的情况，两个态的质量都低于 $B_c^* B_c$ 的阈值，但是都高于 $\Upsilon J/\psi$ 的阈值，所以它们能够衰变到 $\Upsilon J/\psi$ 。

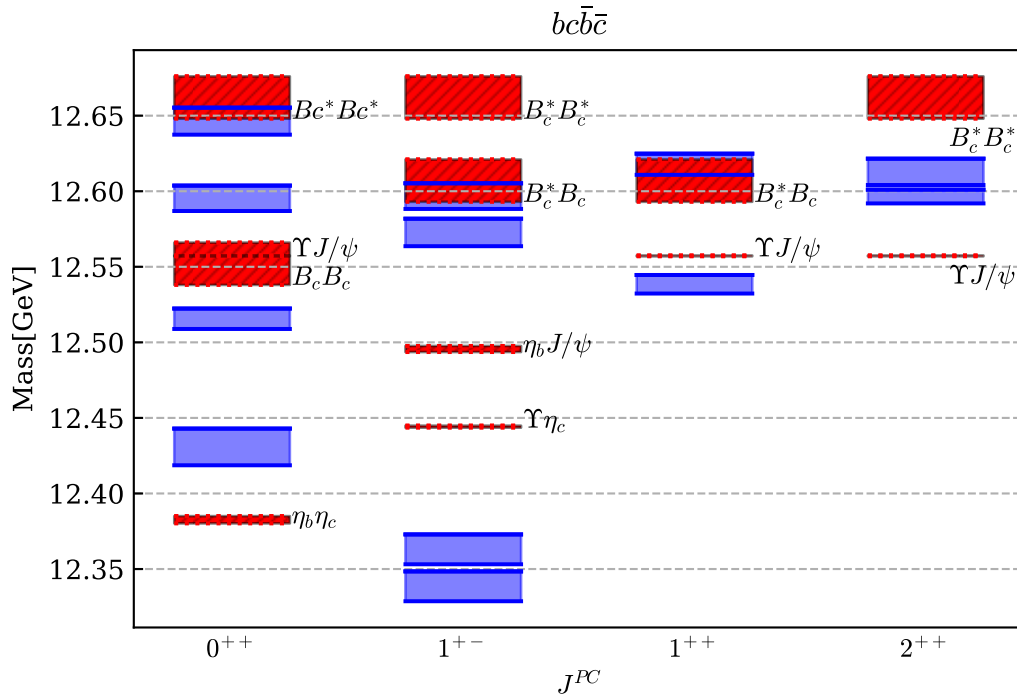


图 4-5 四夸克态 $bcb\bar{c}$ 的质量谱、衰变道在不同量子数下的分布情况。

表格 4-7 哈密顿量（第三列）在基底下（表格 4-2）的表示。第四第五列是 $cc\bar{c}\bar{c}$ 、 $bb\bar{b}\bar{b}$ 和 $bcb\bar{c}$ 在不同量子数下的质量谱以及误差。最后一列是哈密顿量对应的本征矢量。

J^{PC}	四夸克	$\langle H \rangle [\text{MeV}]$	质量[MeV]	误差[MeV]	本征矢
0^{++}	$cc\bar{c}\bar{c}$	$\begin{bmatrix} 6179.68 & -103.80 \\ -103.80 & 6109.05 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6034.72 \\ 6254.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.52 \\ 0.57 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.58 & 0.81 \\ -0.81 & 0.58 \end{bmatrix}$
	$bb\bar{b}\bar{b}$	$\begin{bmatrix} 18912.91 & -56.58 \\ -56.58 & 18874.41 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18833.90 \\ 18953.43 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.12 \\ 2.34 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.58 & 0.81 \\ -0.81 & 0.58 \end{bmatrix}$
	$bcb\bar{c}$	$\begin{bmatrix} 12463.09 & 0 & 0 & -65.36 \\ 0 & 12579.53 & -65.36 & 0 \\ 0 & -65.36 & 12582.44 & 0 \\ -65.36 & 0 & 0 & 12563.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12515.61 \\ 12646.36 \\ 12430.79 \\ 12595.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.75 \\ 8.94 \\ 12.14 \\ 8.41 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.70 & 0.70 & 0 \\ 0 & -0.70 & 0.71 & 0 \\ 0.90 & 0 & 0 & 0.44 \\ -0.44 & 0 & 0 & 0.90 \end{bmatrix}$
	$cc\bar{c}\bar{c}$	$[6137.30]$	$[6137.30]$	$[0.25]$	$[1]$
1^{+-}	$bb\bar{b}\bar{b}$	$[18889.81]$	$[18889.81]$	$[1.07]$	$[1]$
	$bcb\bar{c}$	$\begin{bmatrix} 12338.56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12369.28 & 0 & -37.73 \\ 0 & 0 & 12572.73 & 0 \\ 0 & -37.73 & 0 & 12590.51 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12363.02 \\ 12596.77 \\ 12338.56 \\ 12572.85 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.88 \\ 8.49 \\ 9.87 \\ 9.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.99 & 0 & 0.16 \\ 0 & -0.16 & 0 & 0.99 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
	$bcb\bar{c}$	$\begin{bmatrix} 12565.78 & 37.73 \\ 37.73 & 12590.51 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12538.44 \\ 12617.85 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.14 \\ 7.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.81 & 0.59 \\ 0.59 & 0.81 \end{bmatrix}$
1^{++}	$cc\bar{c}\bar{c}$	$[6193.80]$	$[6193.80]$	$[0.35]$	$[1]$
2^{++}	$bb\bar{b}\bar{b}$	$[18920.61]$	$[18920.61]$	$[1.47]$	$[1]$
	$bcb\bar{c}$	$\begin{bmatrix} 12596.50 & 0 \\ 0 & 12612.83 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12896.50 \\ 12612.83 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.57 \\ 8.71 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

在前面的内容中，我们研究了全重四夸克态的在不同量子数下可能的衰变道。根据我们的分析，大部分四夸克态都是高于它们所允许的隐粲（底）衰变道的阈值，这一点，许多其他课题组的研究都有给出分析[18][22][23][33][35][37][70][71][72][73][74][75][76][77][78][79][81][82]。在这一节我们分析它们对应的衰变宽度。在我们先前的计算中，我们是在双夸克-反双夸克的图像下，也就是图 4-1 所示的模型，去研究全重四夸克态的性质的。相应的波函数构建是基于这个模型给出的。我们知道前面我们分析的衰变道都是介子-介子，也就是衰变道都是色单态。换句话说衰变道的波函数是在基底 $Q_1\bar{Q}_3 \otimes Q_2\bar{Q}_4$ 或者 $Q_1\bar{Q}_4 \otimes Q_2\bar{Q}_3$ 下的形式。所以为了分析全重四夸克态的衰变性质，我们必须将基矢 $Q_1Q_2 \otimes \bar{Q}_3\bar{Q}_4$ 转换成 $Q_1\bar{Q}_3 \otimes Q_2\bar{Q}_4$ 或者 $Q_1\bar{Q}_4 \otimes Q_2\bar{Q}_3$ 。它们之间通过 Fierz 重排^{[83][84][85]}进行联系。以 $cc\bar{c}\bar{c}$ 系统为例子，我们有

$$\begin{aligned} |\{cc\}_0^6\{\bar{c}\bar{c}\}_0^6\rangle_0^1 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}|\{c\bar{c}\}_0^8\{c\bar{c}\}_0^8\rangle_0^1 + \frac{1}{2}|\{c\bar{c}\}_1^8\{c\bar{c}\}_1^8\rangle_0^1 \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{6}}|\{c\bar{c}\}_0^1\{c\bar{c}\}_0^1\rangle_0^1 + \sqrt{\frac{1}{2}}|\{c\bar{c}\}_1^1\{c\bar{c}\}_1^1\rangle_0^1 \end{aligned} \quad (4-51)$$

$$\begin{aligned} |\{cc\}_1^3\{\bar{c}\bar{c}\}_1^3\rangle_0^1 &= -\sqrt{\frac{1}{2}}|\{c\bar{c}\}_0^8\{c\bar{c}\}_0^8\rangle_0^1 + \sqrt{\frac{1}{6}}|\{c\bar{c}\}_1^8\{c\bar{c}\}_1^8\rangle_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{2}|\{c\bar{c}\}_0^1\{c\bar{c}\}_0^1\rangle_0^1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}|\{c\bar{c}\}_1^1\{c\bar{c}\}_1^1\rangle_0^1 \end{aligned} \quad (4-52)$$

$$\begin{aligned} |\{c\bar{c}\}_1^3\{c\bar{c}\}_1^3\rangle_1^1 &= -\sqrt{\frac{1}{3}}|\{c\bar{c}\}_0^8\{c\bar{c}\}_1^8\rangle_1^1 - \sqrt{\frac{1}{3}}|\{c\bar{c}\}_1^8\{c\bar{c}\}_0^8\rangle_1^1 \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{6}}|\{c\bar{c}\}_1^1\{c\bar{c}\}_0^1\rangle_1^1 + \sqrt{\frac{1}{6}}|\{c\bar{c}\}_0^1\{c\bar{c}\}_1^1\rangle_1^1 \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$|\{c\bar{c}\}_1^3\{c\bar{c}\}_1^3\rangle_2^1 = \sqrt{\frac{1}{3}}|\{c\bar{c}\}_1^1\{c\bar{c}\}_1^1\rangle_2^1 - \sqrt{\frac{2}{3}}|\{c\bar{c}\}_1^8\{c\bar{c}\}_1^8\rangle_2^1 \quad (4-54)$$

对于 $b\bar{b}b\bar{b}$ 系统和 $b\bar{c}b\bar{c}$ 系统，情况是完全类似的。由于所有的强子都是具有色单态的结构，所以在式子(4-51)-(4-54)中对我们有用的项是哪些色单态的项，即 $|(c\bar{c})_{S_{i1}}^1(c\bar{c})_{S_{i2}}^1\rangle_{J_n^{PC}}^1$ 对衰变道有贡献。我们把这些项前面的系数标记为 α_n^i ，这里 i 标记允许的二体粲偶素衰变道。 J_n^{PC} 表示第 n 个 J^{PC} 下的基底。我们将所有的 α_n^i 的计算结果放在了表格 4-8 里。

表格 4-8 全重四夸克态和它可能衰变道之间的系数。

J^{PC}	Tetraquark	$c\bar{c} \otimes c\bar{c}(b\bar{b} \otimes c\bar{c})$			Tetraquark	$b\bar{b} \otimes b\bar{b}(b\bar{c} \otimes \bar{b}c)$		
		$\eta_c \eta_c$	J/ψ	J/ψ	$\eta_c J/\psi$	$\eta_b \eta_b$	$\Upsilon \Upsilon$	$\eta_b \Upsilon$
0^{++}	$X_{cc\bar{c}\bar{c}}^{0^{++}}(6035)$	0.644	—	—	$X_{bb\bar{b}\bar{b}}^{0^{++}}(18834)$	0.644	—	—
	$X_{cc\bar{c}\bar{c}}^{0^{++}}(6254)$	0.041	-0.743	—	$X_{bb\bar{b}\bar{b}}^{0^{++}}(18953)$	0.041	-0.743	—
1^{+-}	$X_{cc\bar{c}\bar{c}}^{1^{+-}}(6137)$	—	—	0.408	$X_{bb\bar{b}\bar{b}}^{1^{+-}}(18890)$	—	—	0.408
2^{++}	$X_{cc\bar{c}\bar{c}}^{2^{++}}(6194)$	—	0.577	—	$X_{bb\bar{b}\bar{b}}^{2^{++}}(18921)$	—	0.577	—
0^{++}		$\eta_b \eta_c$	$\eta_b J/\psi$	$\Upsilon \eta_c$	$\Upsilon J/\psi$	$B_c B_c$	$B_c^* B_c$	$B_c^* B_c^*$
	$X_{bcb\bar{c}}^{0^{++}}(12516)$	0.641	—	—	—	—	—	—
	$X_{bcb\bar{c}}^{0^{++}}(12646)$	0.072	—	—	—	-0.072	—	—
	$X_{bcb\bar{c}}^{0^{++}}(12431)$	0.762	—	—	—	—	—	—
	$X_{bcb\bar{c}}^{0^{++}}(12595)$	-0.0546	—	—	—	-0.0546	—	—
1^{+-}	$X_{bcb\bar{c}}^{1^{+-}}(12363)$	—	—	—	—	—	—	—
	$X_{bcb\bar{c}}^{1^{+-}}(12597)$	—	-0.308	0.308	—	—	—	—
	$X_{bcb\bar{c}}^{1^{+-}}(12339)$	—	—	—	—	—	—	—
	$X_{bcb\bar{c}}^{1^{+-}}(12573)$	—	0.408	0.408	—	—	—	—
1^{++}	$X_{bcb\bar{c}}^{1^{++}}(12538)$	—	—	—	—	—	—	—
	$X_{bcb\bar{c}}^{1^{++}}(12618)$	—	—	—	0.947	—	—	—
2^{++}	$X_{bcb\bar{c}}^{2^{++}}(12597)$	—	—	—	0.817	—	—	—
	$X_{bcb\bar{c}}^{2^{++}}(12613)$	—	—	—	0.477	—	—	—

另外，我们还需要获得每一个四夸克态与基矢 $|(Q_1 Q_2)_{S_{12}}^{C_{12}}(Q_3 Q_4)_{S_{34}}^{C_{34}}\rangle_S^C$ 之间混和的系数。而它，恰好就是本征矢量里的数字，也就是表格 4-7 的最后一列。以 $cc\bar{c}\bar{c}$ 为例，这些系数定义为

$$\beta = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.81 \\ -0.81 & 0.58 \end{pmatrix} \quad (4-55)$$

在准备好 α_n^i 和 β 之后，我们就可以计算四夸克态 $cc\bar{c}\bar{c}$ 与他们可能衰变道之间的跃迁率。对于 0^{++} 的情况，在基矢 $[[c\bar{c}]_0^1[c\bar{c}]_0^1]_0^1$ 和 $[\{c\bar{c}\}_1^1\{\bar{c}\bar{c}\}_1^1]_0^1$ 中，我们有

$$\mu(X_{0^{++}}(6035)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}}\beta_{11} + \frac{1}{2}\beta_{12} & \sqrt{\frac{1}{2}}\beta_{11} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\beta_{12} \end{pmatrix} \quad (4-56)$$

$$\mu(X_{0^{++}}(6254)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}}\beta_{21} + \frac{1}{2}\beta_{22} & \sqrt{\frac{1}{2}}\beta_{21} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\beta_{22} \end{pmatrix} \quad (4-57)$$

对于 1^{+-} 的情况，在基矢 $[[c\bar{c}]_1^1\{\bar{c}\bar{c}\}_0^1]_1^1$ 和 $[\{c\bar{c}\}_0^1[c\bar{c}]_1^1]_1^1$ 中，则有

$$\mu(X_{1^{+-}}(6137)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} \quad (4-58)$$

对于 2^{++} ，只有一个基矢有用，即 $[\{c\bar{c}\}_1^1\{\bar{c}\bar{c}\}_1^1]_2^1$ 。我们有

$$\mu(X_{2^{++}}(6194)) = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (4-59)$$

将式子(4-56)-(4-59)展开，我们发现

$$\begin{aligned} X_{0^{++}}(6035) \sim & \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\beta_{11} + \frac{1}{2}\beta_{12} \right) |[c\bar{c}]_0^1 [c\bar{c}]_0^1 \rangle_0^1 \\ & + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\beta_{11} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\beta_{12} \right) |\{c\bar{c}\}_1^1 \{c\bar{c}\}_1^1 \rangle_0^1 \end{aligned} \quad (4-60)$$

$$\begin{aligned} X_{0^{++}}(6254) \sim & \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\beta_{21} + \frac{1}{2}\beta_{22} \right) |[c\bar{c}]_0^1 [c\bar{c}]_0^1 \rangle_0^1 \\ & + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\beta_{21} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\beta_{22} \right) |\{c\bar{c}\}_1^1 \{c\bar{c}\}_1^1 \rangle_0^1 \end{aligned} \quad (4-61)$$

$$X_{1^{+-}}(6137) \sim \sqrt{\frac{1}{6}} |[c\bar{c}]_1^1 \{c\bar{c}\}_0^1 \rangle_1^1 + \sqrt{\frac{1}{6}} |\{c\bar{c}\}_0^1 [c\bar{c}]_1^1 \rangle_1^1 \quad (4-62)$$

$$X_{2^{++}}(6194) \sim \sqrt{\frac{1}{3}} |\{c\bar{c}\}_1^1 \{c\bar{c}\}_1^1 \rangle_{\frac{1}{2}}^1 \quad (4-63)$$

这里~表示我们略去了非色单态的项。式子(4-60)-(4-63)每一项的系数代表着不同量子数下四夸克态能够衰变到不同隐藏粲偶素的概率。

我们定义 S 波空间的相因子

$$\text{P.S.} = \frac{1}{2S+1} \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{p}|}{M^2} \quad (4-64)$$

这里 $|\vec{p}|$ 表示末态粒子的三动量。结合上述式子，我们能够很容易写下全粲四夸克态在不同量子数下的衰变宽度。相同计算方法直接运用到 $b\bar{b}b\bar{b}$ 和 $b\bar{c}b\bar{c}$ 系统。我们将结果列在表格 4-9 里。

表格 4-9 全重四夸克系统的衰变宽度 $\frac{1}{(2S+1)8\pi} |\mathcal{M}_i^{(j)}|^2 \frac{|\vec{p}|}{M^2}$ 。

J^{PC}	Tetraquark	$c\bar{c} \otimes c\bar{c}(\bar{b}\bar{b} \otimes c\bar{c})$			Tetraquark	$b\bar{b} \otimes b\bar{b}(b\bar{c} \otimes \bar{b}c)$		
		$\eta_c \eta_c$	$J/\psi J/\psi$	$\eta_c J/\psi$		$\eta_b \eta_b$	$\Upsilon \Upsilon$	$\eta_b \Upsilon$
0^{++}	$X_{cc\bar{c}\bar{c}}^{0^{++}}(6035)$	2.03×10^{-4}	—	—	$X_{bb\bar{b}\bar{b}}^{0^{++}}(18834)$	2.726×10^{-5}	—	—
	$X_{cc\bar{c}\bar{c}}^{0^{++}}(6254)$	1.599×10^{-6}	2.431×10^{-4}	—	$X_{bb\bar{b}\bar{b}}^{0^{++}}(18953)$	2.259×10^{-7}	3.409×10^{-5}	—
1^{+-}	$X_{cc\bar{c}\bar{c}}^{1^{+-}}(6137)$	—	—	2.435×10^{-5}	$X_{bb\bar{b}\bar{b}}^{1^{+-}}(18890)$	—	—	3.336×10^{-6}
2^{++}	$X_{cc\bar{c}\bar{c}}^{2^{++}}(6194)$	—	—	—	$X_{bb\bar{b}\bar{b}}^{2^{++}}(18921)$	—	7.198×10^{-8}	—
0^{++}		$\eta_b \eta_c$	$\eta_b J/\psi$	$\Upsilon \eta_c$	$\Upsilon J/\psi$	$B_c B_c$	$B_c^* B_c$	$B_c^* B_c^*$
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{0^{++}}(12516)$	2.049×10^{-3}	—	—	—	—	—	—
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{0^{++}}(12646)$	3.589×10^{-5}	—	—	—	2.5×10^{-5}	—	—
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{0^{++}}(12431)$	1.76×10^{-3}	—	—	—	—	—	—
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{0^{++}}(12595)$	1.864×10^{-5}	—	—	—	9.805×10^{-6}	—	—
1^{+-}	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{1^{+-}}(12363)$	—	—	—	—	—	—	—
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{1^{+-}}(12597)$	—	5.47×10^{-6}	6.647×10^{-6}	—	—	—	—
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{1^{+-}}(12339)$	—	—	—	—	—	—	—
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{1^{+-}}(12573)$	—	8.401×10^{-6}	1.073×10^{-5}	—	—	—	—
1^{++}	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{1^{++}}(12538)$	—	—	—	—	—	—	—
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{1^{++}}(12618)$	—	—	—	3.987×10^{-5}	—	—	—
2^{++}	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{2^{++}}(12597)$	—	—	—	1.436×10^{-5}	—	—	—
	$X_{bc\bar{b}\bar{c}}^{2^{++}}(12613)$	—	—	—	5.813×10^{-6}	—	—	—

到目前为止，我们已经从我们的模型出发系统计算了全重四夸克态的质量谱，分析了它们的衰变道，并且给出它们的衰变宽度。实验上确定的全重四夸克态的候选者只有全粲四夸克态，并且对全粲四夸克态的许多性质还不明确。因此我们有必要从我们的计算结果出发对全粲四夸克态的候选者的一些性质做出解释。我们将通过与其他课题组的工作^{[23][33][34][35][36][37][70][79][86][87][88][89][90]}给出的结果对比总结出有关全粲四夸克态的一些结论。我们将我们的计算结果和来自其他文献的结果绘制在图 4-6 里。

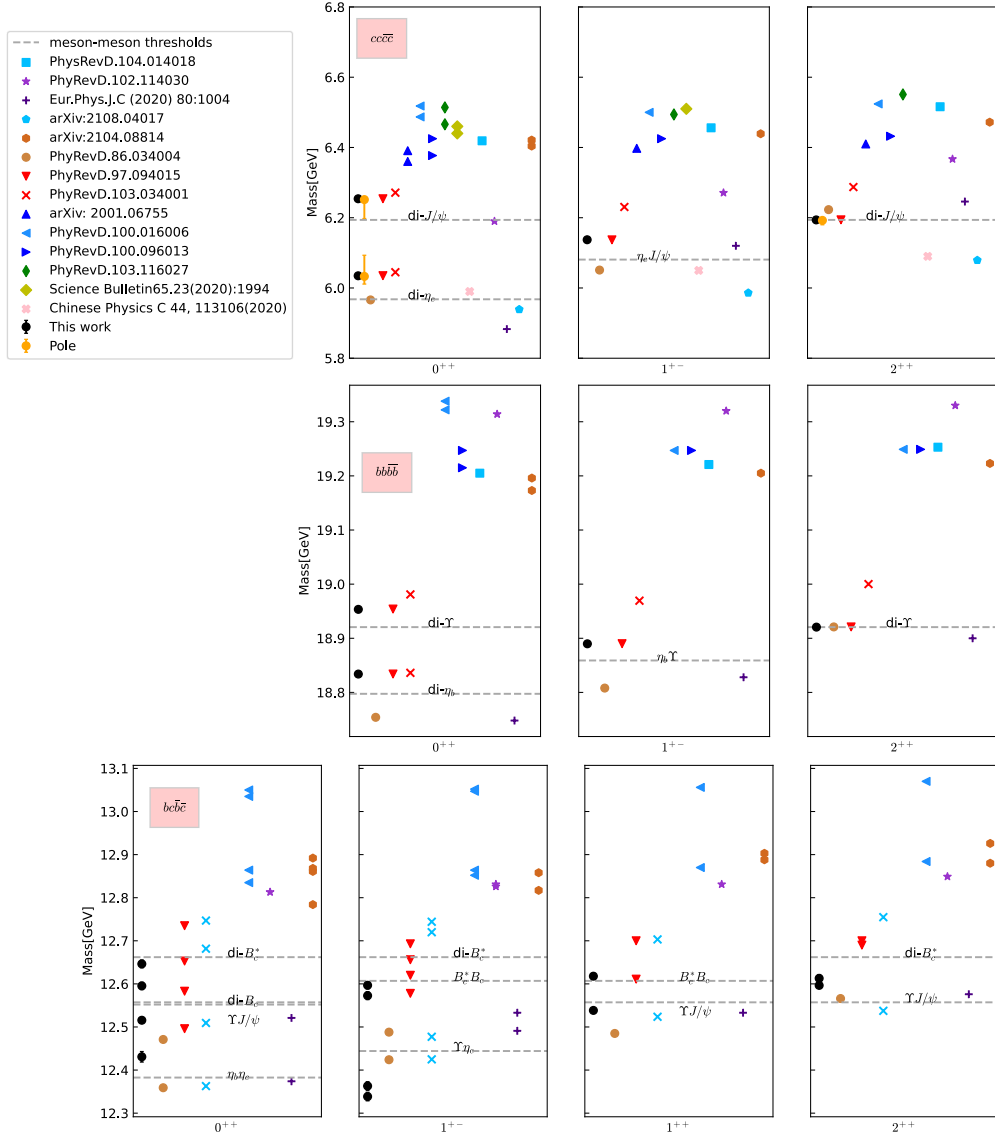


图 4-6 比较由我们模型给出的全重四夸克态的质量谱和来自其他课题组的工作^{[23][33][34][35][36][37][70][79][86][87][88][89][90]}。黑色实心圆我们给出的计算结果。黄色圆是全粲四夸克态极点的位置。

和我们的方法一样，通过参数化方案获得全粲四夸克态质量谱的有文献^{[33][79]}。利用高斯展开方法来研究全重四夸克态的有文献^{[35][37][58][70]}。从 QCD 求和规则出来研究全重四夸克态的则有文献^{[23][86]}。大部分研究工作给出有关全粲四夸克态的质量都分布在区间 $[6.2, 6.8]\text{GeV}$ ，这与 LHCb 实验组发现的宽结构的质量范围相一致。在文献^[80]的研究中，造成质量劈裂的原因主要来源于自旋相互作用。而在文献^{[22][33]}的研究中，作者加入了色电相互作用和色磁相互作用项，并且研究指出者两种相互作用不能够被忽略。在这些模型方法中，我们的方法与文献^[79]的类似，这意味着我们应该获得相一致质量谱。不过从图 4-6 中，我们可以看出它们的质量存在差别。这是由于我们的模型是在非相对论近似下的，并且动能项与重夸克的质量相比能够被忽略掉。然而在文献^{[79][91]}中，带有轻夸克的轻介子和重介子被用于提取参数。轻夸克的动能在非相对论近似下不能被忽略，这是造成结果存在差别的原因。文献^{[35][37][58][70]}，利用变分法获得全重四夸克态的质量谱，但是这只能获得质量的上限。这就是为什么利用变分法获得的质量一般都大于使用参数法获得的质量。文献^[23]从 QCD 求和规则出发认为实验上发现的宽的结构和 $X(6900)$ 分别是 S 波和 P 波全粲四夸克态。与其相反的是，同样使用 QCD 求和规则方法的文献^[86]，却认为宽的结构是第一径向激发的全粲四夸克态，而 $X(6900)$ 是第二径向激发态。

本论文的模型是在 S 波的框架下进行，计算结果显示全粲四夸克态的质量分布在区间 $[6.2, 6.8]\text{GeV}$ 范围内，这意味着质量范围在 $6.2\sim 6.8\text{GeV}$ 范围内的宽结构如果存在四夸克态，它可能为 S 波的 $cc\bar{c}\bar{c}$ 态。 $X(6900)$ 应该是更高分波情况下的 $cc\bar{c}\bar{c}$ 态。

我们从我们的模型出发，系统研究了全重系夸克态的质量谱。利用质量谱，我们分析了全重四夸克态的衰变道，并且给出它们的衰变宽度。为了体现各个模型之间的差异性，我们还比较了我们的方法和来自其他课题组研究采用的方法。在分析中，我们给出了一些有关全粲四夸克态的解释。

5 耦合道效应

在上一章节中，我们获得了全粲四夸克态的质量谱。实际上，通过我们的模型计算的质量称为裸质量，并非物理上的质量。不过这些计算结果为我们指明了方向，即在实验上发现的质量范围在 6.2~6.8GeV 的较宽的峰存在着四夸克态。为了找出这些可能的候选者质量的位置，在这一章中，我们利用耦合道方法，来描述 LHCb 的实验数据，获取极点的位置，然后分析这些极点的性质。

5.1 耦合道模型

LHCb 实验数据横坐标采用的是 $J/\psi J/\psi$ 不变质量分布。 $J/\psi J/\psi$ 的 C 宇称是正的，所以为了解释实验数据，我们只能采用量子数为 0^{++} 或者 2^{++} 的态。对于 0^{++} 量子数，我们采用以下几条双粲偶素道： $\eta_c \eta_c$ 、 $J/\psi J/\psi$ 、 $J/\psi \psi'$ 和 $J/\psi \psi(3770)$ 。对于 2^{++} 的道，我们使用 $J/\psi J/\psi$ 、 $J/\psi \psi'$ 和 $J/\psi \psi(3770)$ 这几条道。在具体写出全粲四夸克态和这些道的相互作用势之前，我们首先定义强子化过程：

$$g_{\text{di-}J/\psi} = \langle J/\psi J/\psi | \hat{H}_{\text{strong}} | \{c\bar{c}\}_1^1 \{c\bar{c}\}_1^1 \rangle_J \quad (5-1)$$

$$g_{\text{di-}\eta_c} = \langle \eta_c \eta_c | \hat{H}_{\text{strong}} | [c\bar{c}]_0^1 [c\bar{c}]_0^1 \rangle_J \quad (5-2)$$

类似的，我们可以写出 $g_{J/\psi \psi'}$ 和 $g_{J/\psi \psi''}$ 。

四夸克态和这些道的相互作用势写为

$$V_{ij}^{J^{PC}}(E) = \sum_{n=1,2} \sum_{\alpha, \beta=1,2} \frac{\mu_n^\alpha \mu_n^\beta g_i^\alpha g_j^\beta}{E - E_{n0}} \quad (5-3)$$

这里 E_{10} 和 E_{20} 分别表示全粲四夸克态 $X_{0^{++}}(6035)$ 和 $X_{0^{++}}(6254)$ 的裸质量。 μ_n^α 是在第 n 个紧致四夸克态中 $[c\bar{c}]_0^1 [c\bar{c}]_0^1$ 和 $\{c\bar{c}\}_1^1 \{c\bar{c}\}_1^1$ 前面的系数。 g_i^α 表示强子化过程。

在建立了上述相互作用势之后，我们就可以写下耦合道系统的 T 矩阵

$$T(E) = V(E) \cdot [1 - G(E)V(E)]^{-1} \quad (5-4)$$

这里 E 指代双 J/ψ 的质心能量。 G 是一个对角矩阵，表示两体传播子。传播子的形式，我们采用维数正规化的形式^[92]

$$G(E) = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ a(\mu) + \log \frac{m_{i1}^2}{\mu^2} + \frac{m_{i2}^2 - m_{i1}^2 + s}{2s} \log \frac{m_{i2}^2}{m_{i1}^2} \right. \\ \left. + \frac{k}{E} [\log(2k_i E + s + \Delta_i) + \log(2k_i E + s - \Delta_i) - \log(2k_i E - s + \Delta_i) - \log(2k_i E - s - \Delta_i)] \right\} \quad (5-5)$$

这里 $s = E^2$, m_{i1} 和 m_{i2} 第 i 条道的粒子的质量, $\Delta_i = m_{i1}^2 - m_{i2}^2$, $k_i = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(E^2, m_{i1}^2, m_{i2}^2)}{2E}$ 。我们取 $a(\mu) = -3$, $\mu = 1\text{GeV}$ 。如图 5-1 所示, 是不同黎曼面上的传播子的情况。

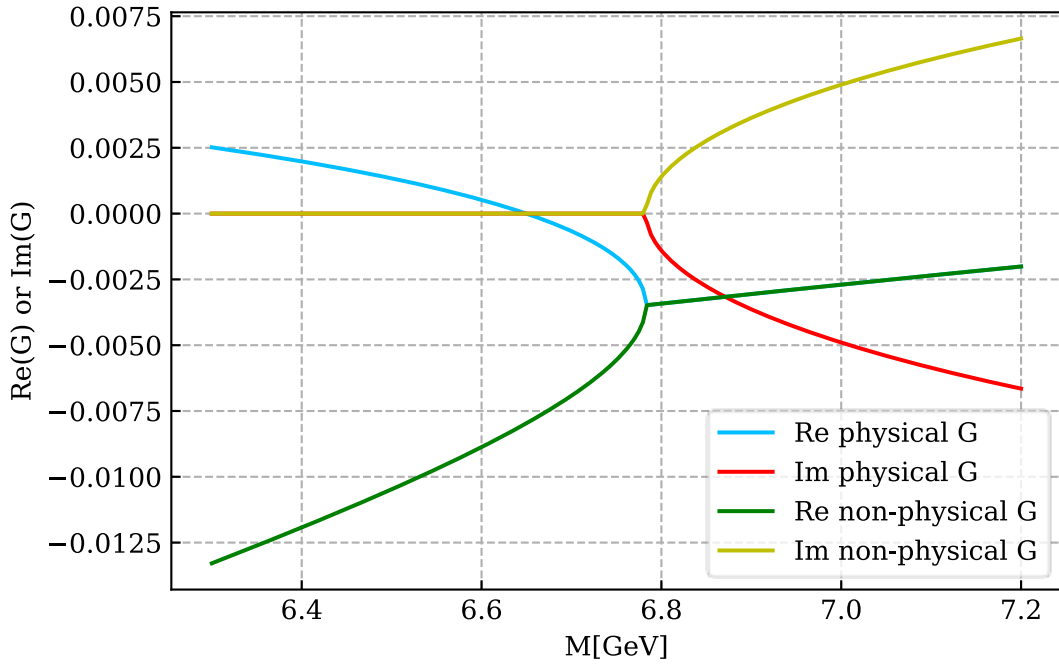


图 5-1 不同黎曼面上的传播子的情况, 以 $J/\psi J/\psi$ 道为例。蓝色和红色线分别代表物理黎曼面的传播子的实部和虚部, 绿色和黄色线分别代表非物理黎曼面的传播子的实部和虚部。

有了 T 矩阵之后, 我们能够构造 0^{++} 量子数的 $J/\psi J/\psi$ 道的产生振幅:

$$P_2^{0^{++}} = U_2^{0^{++}} + U_1^{0^{++}} G_1 T_{12} + U_2^{0^{++}} G_2 T_{22} + U_3^{0^{++}} G_3 T_{32} + U_4^{0^{++}} G_4 T_{42} \quad (5-6)$$

这里 $U_i^{0^{++}}$ 代表第 i 条道的裸产生顶点。我们按照阈值来排列不同的道: $\eta_c \eta_c$ 、 $J/\psi J/\psi$ 、 $J/\psi \psi'$ 和 $J/\psi \psi(3770)$, 所以 $i = 2$ 代表 $J/\psi J/\psi$ 。 T_{ij} 是 T 矩阵的矩阵元。对于 2^{++} 的情况我们有

$$P_1^{2^{++}} = U_1^{2^{++}} + U_1^{2^{++}} G_1 T_{11} + U_2^{2^{++}} G_2 T_{21} + U_3^{2^{++}} G_3 T_{31} \quad (5-7)$$

S 波情况下的相空间因子写为

$$\rho(E) = \frac{|\vec{k}|}{8\pi E} \quad (5-8)$$

这里 \vec{k} 表示粒子在质心系中的三动量。最后我们写下实验上产生双 J/ψ 分布的拟合函数

$$(|P_2^{0++}|^2 + |P_1^{2++}|^2)\rho(E) \quad (5-9)$$

我们将以 $U_i^{J^{PC}}$ 、 g_i^α 作为拟合参数。通过拟合双 J/ψ 分布来确定它们的具体值。

5.2 拟合结果与分析

拟合参数一共有 8 个。我们通过选取一系列的猜想初始值来减少拟合的复杂性。我们使用 Minuit 拟合包^{[93][94]}提供的算法来最小化 χ^2 函数。最好的拟合结果给出 $\chi^2/\text{dof} = 1.2$ ，如图 5-2 所示。

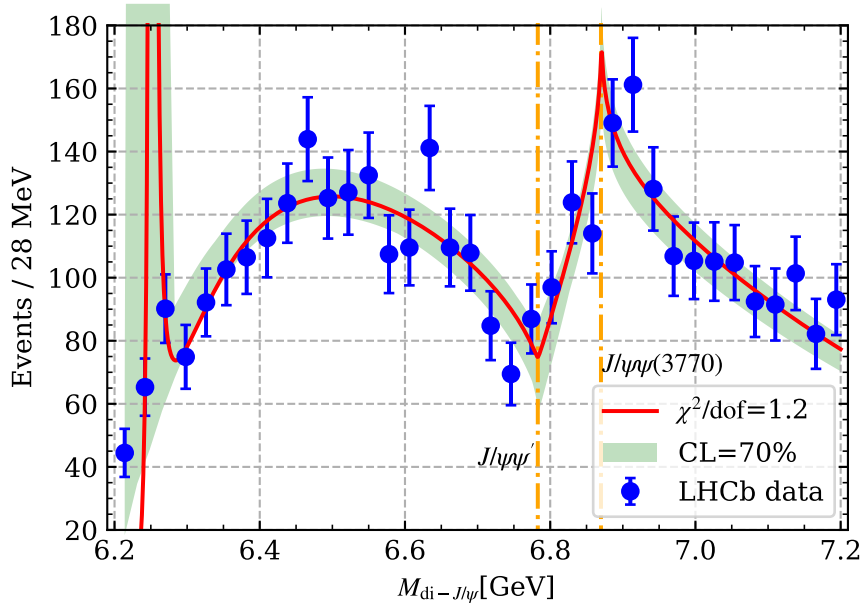


图 5-2 拟合结果（红色实线）与实验数据的比较。选择的拟合区间是双 J/ψ 不变质量分布区间 $[6.2, 7.2]$ GeV。实验数据来源于文献^[15]。

在最佳拟合结果下给出的参数如表格 5-1 所示。从图 5-2 的拟合曲线可以明显看出在 6.25GeV 附近有一个明显的结构，这可能来源于 $X_{0++}(6254)$ 质量的移动。可以预言这个结果在实验上增加统计量的情况下将被显示出来作为紧致四夸克态的强有力证据。在 6.9GeV 附近的尖峰结构可以证明是由 $J/\psi\psi(3770)$ 道带来的阈值效应（cusp effect）。这通过后面的极点分析给出。由我们前面的申明，我们可以看到裸态 $X_{0++}(6035)$ 将强耦合道 $\eta_c\eta_c$ 道并且将在 $\eta_c\eta_c$ 的不变质量谱中

表格 5-1 通过拟合实验数据获取的参数值。误差来源于实验的不确定度。参数下角标对应不同的道。

参数	0^{++} 的情况	2^{++} 的情况
$U_{\eta_c\eta_c}^{J^{PC}}$	-572.92 ± 912.33	—
$U_{J/\psi J/\psi}^{J^{PC}}$	7.53 ± 3.87	30.67 ± 1.93
$U_{J/\psi\psi'}^{J^{PC}}$	34447.71 ± 4145.37	39111.96 ± 6605.72
$U_{J/\psi\psi''}^{J^{PC}}$	-37513.64 ± 4035.80	-51446.38 ± 7192.27
$g_{\eta_c\eta_c}$	0.924 ± 0.03	
$g_{J/\psi J/\psi}$	0.989 ± 0.03	
$g_{J/\psi\psi'}$	0.177 ± 0.02	
$g_{J/\psi\psi''}$	0.134 ± 0.01	

出现明显的峰结构。这将作为理解全重四夸克态性质的重要物理量。根据我们获得的拟合参数，我们可以绘制 $\eta_c\eta_c$ 的线型。结果如图 5-3 所示。

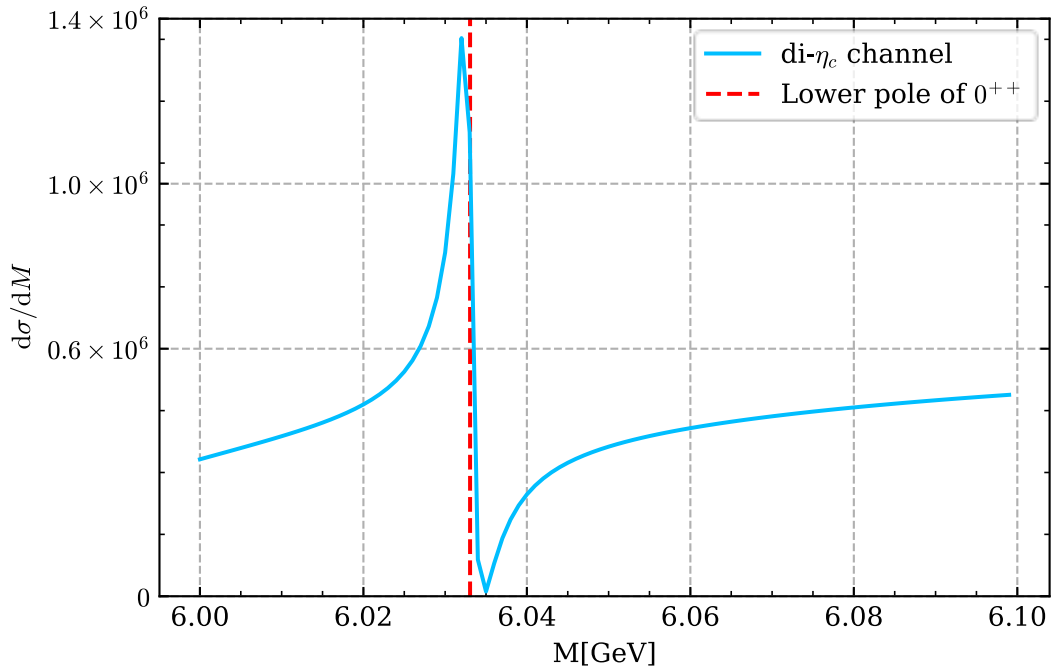


图 5-3 由我们的参数给出的 $\eta_c\eta_c$ 线型由天蓝色线表示，红色虚线是 $X_{0^{++}}(6035)$ 的阈值。

接下来我们用拟合的参数来研究 T 矩阵的极点结构。通过解方程 $\text{Det}(1 - VG) = 0$ 我们获得了满足条件的极点。我们将结果列在表格 5-2 中。我们在拟合实验数据时绘制了一个 70%置信度的图。同样的，我们绘制了 70%置信度下的极点分布，如图 5-4 所示。两个 0^{++} 的极点的分布表现为两个共振态的形式，它们的值分别大于 $\eta_c\eta_c$ 和 $J/\psi J/\psi$ 的阈值。 2^{++} 的极点则是一个束缚态，低于 $J/\psi J/\psi$ 的阈值。

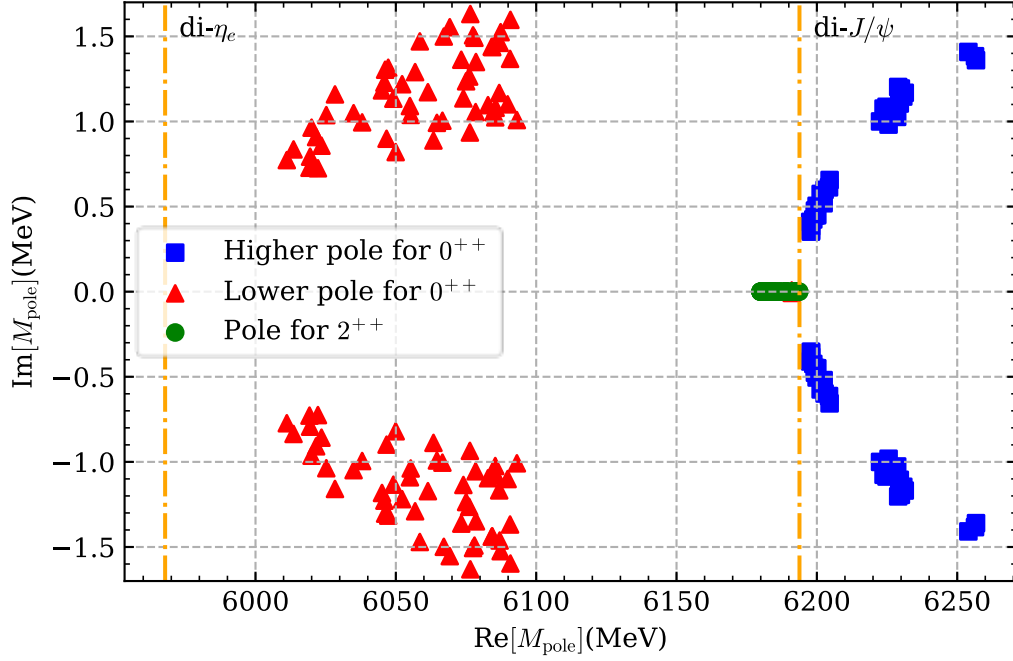


图 5-4 在 70%置信度下的极点的位置。红色三角形和蓝色方形分别代表 0^{++} 情况下的两个极点的位置，绿色实心圆代表 2^{++} 情况下极点的位置。

另外，从表格 5-2 我们可以清楚看到裸质量与极点的位置差别很小，这意味着物理质量的贡献大部分来源于紧致四夸克态。在寻找极点位置时，我们并没有发现任何极点分布在 6.9GeV 附近，这表明了 6.9GeV 附近的峰结构是由 $J/\psi\psi(3770)$ 道带来的阈值效应（cusp effect）。

表格 5-2 0^{++} 和 2^{++} 情况下的极点的位置（单位为 MeV）。括号内为裸四夸克态的质量。极点位置的误差来源于实验上双 J/ψ 分布的误差。

0^{++}	2^{++}
$6251.65^{+5}_{-54} + 1.47^{+0.06}_{-1.12}i(6254^{+0.57}_{-0.57})$	$6192.46^{+1.23}_{-12.56}(6193.8^{+0.35}_{-0.35})$
$6032.96^{+60.16}_{-21.82} + 1.036^{+0.60}_{-0.31}i(6034.72^{+0.52}_{-0.52})$	

为了进一步理解这些极点，也就是可能的全粲四夸克态的候选者，我们来估算它们的性质，也就是在 2.5 节提到的温伯格准则。由式子(2-24)，我们有

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2}rk^2 + o(k^4) = -8\pi\sqrt{s}T^{-1}(k) + ik = -8\sqrt{s}\text{Re}[T^{-1}(k)] \quad (5-10)$$

由此给出

$$a = -\frac{T(k=0)}{8\pi(m_1 + m_2)} \quad (5-11)$$

$$\begin{aligned} r &= -\frac{8\pi}{\mu} \frac{d}{dE} [E\text{Re}(T^{-1})]_{E=m_1+m_2} \\ &= -\frac{8\pi}{\mu} \left[\text{Re}(T^{-1}) + (m_1 + m_2) \frac{d}{dE} \text{Re}(T^{-1}) \right]_{E=m_1+m_2} \end{aligned} \quad (5-12)$$

这里 $E = \sqrt{s}$ 。利用式子(2-25)、(5-11)和(5-12)，我们就可以计算 \bar{X}_A 。计算结果搜集在表格 5-3 里。

表格 5-3 0^{++} 和 2^{++} 情况下的在双 J/ψ 道中的散射长度 a 、有效长度 r 、表现粒子性质的 \bar{X}_A 和波函数重整化常数 \bar{Z}_A 的计算结果。

量子数	a (fm)	r (fm)	\bar{X}_A	\bar{Z}_A
0^{++}	$0.012^{+3.129}_{-5.142}$	$-37.966^{+4.010}_{-4.882}$	$0.013^{+0.241}_{-0.003}$	$0.987^{+0.003}_{-0.241}$
2^{++}	$-0.280^{+0.443}_{-2.397}$	$-60.803^{+1.592}_{-15.222}$	$0.048^{+0.095}_{-0.042}$	$0.952^{+0.042}_{-0.095}$

从表格里的 \bar{Z}_A 的值来看，我们找到的极点，也就是全粲四夸克态的候选者，很大程度上是紧致四夸克态。

综合上述，为了进一步理解全粲四夸克态候选者的性质，我们从耦合道方法出发，通过拟合实验数据获取了有关的参数。利用这些参数，我们从 T 矩阵获取了 0^{++} 和 2^{++} 情况下的极点位置。分析表明全粲四夸克态的物理质量大部分来源于裸质量的贡献。 6.9GeV 附近的峰结构可以用 $J/\psi\psi(3770)$ 道带来的阈值效应（cusp effect）解释。为了调查这些极点的结构的性质，我们用温伯格准则进行了估计，结果表明这些极点大概率上是紧致四夸克态。

总结与展望

在本论文的工作是首次从紧致四夸克态图像出发，直接从实验数据提取有关全重四夸克态的结构参数来描述全重四夸克态。我们通过一个包含色电相互作用和色磁相互作用的参数化模型，系统计算了全重四夸克态的质量谱，并通过质量谱，分析了它们的衰变性质。我们是在 S 波的框架下进行本研究的。在提取参数的过程中，S 波情况下的波函数是平凡的，以至于它们的叠加可以被忽略。参数直接从已知的 S 波基态重介子提取出来。我们采用的重介子为分别是 J/ψ 、 η_c 、 $\Upsilon(1S)$ 、 η_b 和 $B_c^{(*)}$ 。全重四夸克态的质量谱计算表明，大部分的裸质量高于它们允许衰变的最低阈值的重夸克偶素对。在我们计算的全重四夸克态的质量谱中，并不意味着这些质量对应的态都能够在实验上发现的宽结构出现。例如，虽然我们计算的 $X_{0^{++}}(6035)$ 的质量小于 $X_{2^{++}}(6254)$ 的质量，但是 $X_{0^{++}}(6035)$ 衰变到 $\eta_c\eta_c$ 的概率远大于 $X_{2^{++}}(6254)$ 衰变到 $\eta_c\eta_c$ 。这一点，在我们的耦合道效应分析时很清楚的看到，在 $\eta_c\eta_c$ 不变质量分布，出现了峰结构。在分析质量谱时，我们发现关于全重四夸克态的计算结果都是小于 6.9GeV 的。这让我们认为 $X(6900)$ 可能不是 S 波的全重四夸克态，而有可能是更高分波的全重四夸克态。然而，在我们利用耦合道方法分析实验数据时，我们没有发现任何极点分布在 6.9GeV 附近。在我们拟合的线型中，出现在 6.9GeV 附近的峰结构很大可能来源于 $J/\psi\psi(3770)$ 道带来的阈值效应（cusp effect）。在我们进行极点分析时， 0^{++} 的两个极点分布表现为两个共振结构，并且它们的值分别高于 $\eta_c\eta_c$ 和 $J/\psi J/\psi$ 的阈值。而 2^{++} 的极点则是一个低于 $J/\psi J/\psi$ 阈值的束缚态。最后，为了理解我们预测的这些态的结构性质，我们利用温伯格准则进行了估计，结果表明它们更可能作为一个紧致的四夸克态结构，概率高达 95% 以上。综合本论文的研究，将来实验上更新和全重四夸克态有关的实验数据时，如何这些态能够被发现，它们将很有可能作为紧致四夸克态的结构出现。总之，通过研究全重四夸克态，将不断加强我们对强子物理的理解同时为实验上指明方向取寻找更多可能全重多夸克态。

参考文献

- [1] Duong-Van M. The Drell-Yan contribution to massive lepton-pair production[J]. Physics Letters B, 1976, 60(3): 287-289.
- [2] Gross D J, Wilczek F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories[J]. Physical Review Letters, 1973, 30(26): 1343.
- [3] Politzer H D. Reliable perturbative results for strong interactions?[J]. Physical Review Letters, 1973, 30(26): 1346.
- [4] Bethke S. Experimental tests of asymptotic freedom[J]. Progress in particle and Nuclear Physics, 2007, 58(2): 351-386.
- [5] Choi S K, Olsen S L, Abe K, et al. Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive $B^{\pm} \rightarrow K^{\pm} \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays[J]. Physical review letters, 2003, 91(26): 262001.
- [6] Acosta D, Affolder T, Ahn M H, et al. Observation of the Narrow State X (3872) $\rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$ in $p^- p$ Collisions at $s = 1.96$ TeV[J]. Physical review letters, 2004, 93(7): 072001.
- [7] Abazov V M, Abbott B, Abolins M, et al. Observation and Properties of the X (3872) Decaying to $J/\psi \pi^+ \pi^-$ in $p p^-$ Collisions at $s = 1.96$ TeV[J]. Physical review letters, 2004, 93(16): 162002.
- [8] Aubert B, Barate R, Boutigny D, et al. Search for a charged partner of the X (3872) in the B meson decay $B \rightarrow X^- K$, $X^- \rightarrow J/\psi \pi^- \pi^0$ [J]. Physical Review D, 2005, 71(3): 031501.
- [9] Aubert B, Barate R, Boutigny D, et al. Observation of a broad structure in the $\pi^+ \pi^- J/\psi$ mass spectrum around 4.26 GeV/c²[J]. Physical review letters, 2005, 95(14): 142001.
- [10] Ablikim M, Achasov M N, Ai X C, et al. Observation of a Charged charmoniumlike Structure in $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ at $s = 4.26$ GeV[C]//30 Years of BES Physics: Proceedings of the Symposium. 2013: 229-235.

- [11]Liu Z Q, Shen C P, Yuan C Z, et al. Study of $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ and Observation of a Charged charmoniumlike State at Belle[J]. Physical review letters, 2013, 110(25): 252002.
- [12]Ablikim M, Achasov M N, Albayrak O, et al. Observation of a Charged (D^-*) \pm Mass Peak in $e^+ e^- \rightarrow \pi D D^{*-}$ at $s= 4.26$ GeV[J]. Physical review letters, 2014, 112(2): 022001.
- [13]Aaij R, Adeva B, Adinolfi M, et al. Observation of J/ψ p Resonances Consistent with Pentaquark States in $\Lambda b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ Decays[J]. Physical review letters, 2015, 115(7): 072001.
- [14]Aaij R, Adeva B, Adinolfi M, et al. Search for beautiful tetraquarks in the $\Upsilon(1S) \mu^+ \mu^-$ invariant-mass spectrum[J]. Journal of High Energy Physics, 2018, 2018(10): 1-22.
- [15]LHCb Collaboration. Observation of structure in the J/ψ -pair mass spectrum[J]. Science Bulletin, 2020, 65(23): 1983-1993.
- [16]Iwasaki Y. Is a State $c \bar{c} c \bar{c}$ Found at 6.0 GeV?[J]. Physical Review Letters, 1976, 36(21): 1266.
- [17]Chao K T. The $$(cc)-(\overline{cc})$ (diquark-antidiquark) states in $e^+ e^-$ annihilation[J]. Zeitschrift für Physik C Particles and Fields, 1981, 7(4): 317-320.$
- [18]Ader J P, Richard J M, Taxil P. Do narrow heavy multiquark states exist?[J]. Physical Review D, 1982, 25(9): 2370.
- [19]Dong X K, Baru V, Guo F K, et al. Coupled-Channel Interpretation of the LHCb Double- J/ψ Spectrum and Hints of a New State Near the $J/\psi J/\psi$ Threshold[J]. Physical review letters, 2021, 126(13): 132001.
- [20]Liang Z R, Wu X Y, Yao D L. Hunting for states in the recent LHCb di- J/ψ invariant mass spectrum[J]. Physical Review D, 2021, 104(3): 034034.
- [21]Cao Q F, Chen H, Qi H R, et al. Some remarks on X (6900)[J]. Chinese Physics C, 2021, 45(10): 103102.
- [22]Deng C, Chen H, Ping J. Towards the understanding of fully-heavy tetraquark states from various models[J]. Physical Review D, 2021, 103(1): 014001.

- [23]Chen H X, Chen W, Liu X, et al. Strong decays of fully-charm tetraquarks into di-charmonia[J]. Science Bulletin, 2020, 65(23): 1994-2000.
- [24]Guo Z H, Oller J A. Insights into the inner structures of the fully charmed tetraquark state $X(6900)$ [J]. Physical Review D, 2021, 103(3): 034024.
- [25]Fermi E, Yang C N. Are mesons elementary particles?[J]. Physical Review, 1949, 76(12): 1739.
- [26]GelUMann M. POSSIBLE TRIPLETS IN THE EIGHTFOLD WAY[J].
- [27]Barnes V E, Connolly P L, Crennell D J, et al. Observation of a hyperon with strangeness minus three[J]. Physical Review Letters, 1964, 12(8): 204.
- [28]Gell-Mann M. A schematic model of baryons and mesons[J]. Phys. Letters, 1964, 8.
- [29]Zweig G. An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking[R]. CM-P00042884, 1964.
- [30]蒋传辉. 高能多重产生过程中奇特强子态的产生研究[D]. 2018.
- [31]LHCb Collaboration. Observation of a narrow pentaquark state, $P_c(4312)^+$, and of the two-peak structure of the $P_c(4450)^+$ [J]. Physical Review Letters, 2019, 122(22): 222001.
- [32]Du M L, Baru V, Guo F K, et al. Interpretation of the LHCb P_c States as Hadronic Molecules and Hints of a Narrow $P_c(4380)$ [J]. Physical review letters, 2020, 124(7): 072001.
- [33][Wu J, Liu Y R, Chen K, et al. Heavy-flavored tetraquark states with the $Q Q Q \bar{Q}$ configuration[J]. Physical Review D, 2018, 97(9): 094015.
- [34]Liu M S, Lü Q F, Zhong X H, et al. All-heavy tetraquarks[J]. Physical Review D, 2019, 100(1): 016006.
- [35]Wang G J, Meng L, Zhu S L. Spectrum of the fully-heavy tetraquark state $Q Q Q' \bar{Q}'$ [J]. Physical Review D, 2019, 100(9): 096013.
- [36]Bedolla M A, Ferretti J, Roberts C D, et al. Spectrum of fully-heavy tetraquarks from a diquark+ antidiquark perspective[J]. The European Physical Journal C, 2020, 80(11): 1-10.

- [37]Chen X. Fully-charm tetraquarks: $c\bar{c}c\bar{c}$ [J]. arXiv preprint arXiv:2001.06755, 2020.
- [38]Nefediev A V. X (6200) as a compact tetraquark in the QCD string model[J]. The European Physical Journal C, 2021, 81(8): 1-10.
- [39]Wan B D, Qiao C F. Gluonic tetracharm configuration of X (6900)[J]. Physics Letters B, 2021, 817: 136339.
- [40]Liu M Z, Geng L S. Is X (7200) the heavy anti-quark diquark symmetry partner of X (3872)?[J]. The European Physical Journal C, 2021, 81(2): 1-9.
- [41]Cho Y M, Pham X Y, Zhang P, et al. Glueball physics in QCD[J]. Physical Review D, 2015, 91(11): 114020.
- [42]Mathieu V, Kochelev N, Vento V. The physics of glueballs[J]. International Journal of Modern Physics E, 2009, 18(01): 1-49.
- [43]Klempt E, Zaitsev A. Glueballs, hybrids, multiquarks: Experimental facts versus QCD inspired concepts[J]. Physics Reports, 2007, 454(1-4): 1-202.
- [44]Palano A. Glueballs and hybrids: An Experimental review[J]. Nuclear Physics B- Proceedings Supplements, 1995, 39(2-3): 287-300.
- [45]Chanowitz M, Sharpe S. Hybrids: mixed states of quarks and gluons[J]. Nuclear Physics B, 1983, 222(2): 211-244.
- [46]Guo F K, Hanhart C, Meißner U G, et al. Hadronic molecules[J]. Reviews of Modern Physics, 2018, 90(1): 015004.
- [47]Eichten E, Gottfried K, Kinoshita T, et al. Charmonium: the model[J]. Physical review D, 1978, 17(11): 3090.
- [48]Mutuk H. Nonrelativistic treatment of fully-heavy tetraquarks as diquark-antidiquark states[J]. The European Physical Journal C, 2021, 81(4): 1-14.
- [49]Gong C, Du M C, Zhao Q, et al. Nature of X (6900) and its production mechanism at LHCb[J]. Physics Letters B, 2022, 824: 136794.
- [50]Weinberg S. Elementary particle theory of composite particles[J]. Physical Review, 1963, 130(2): 776.
- [51]Weinberg S. Quasiparticles and the Born series[J]. Physical Review, 1963, 131(1): 440.

- [52] Weinberg S. Evidence that the deuteron is not an elementary particle[J]. Physical Review, 1965, 137(3B): B672.
- [53] Matuschek I, Baru V, Guo F K, et al. On the nature of near-threshold bound and virtual states[J]. The European Physical Journal A, 2021, 57(3): 1-13.
- [54] Baru V, Haidenbauer J, Hanhart C, et al. Evidence that the $a_0(980)$ and $f_0(980)$ are not elementary particles[J]. Physics Letters B, 2004, 586(1-2): 53-61.
- [55] Kamimura M. Nonadiabatic coupled-rearrangement-channel approach to muonic molecules[J]. Physical Review A, 1988, 38(2): 621.
- [56] Høgaasen H, Richard J M, Sorba P. Chromomagnetic mechanism for the X (3872) resonance[J]. Physical Review D, 2006, 73(5): 054013.
- [57] Deng C, Chen H, Ping J. Can the state Y (4626) be a P-wave tetraquark state $[c\bar{s}][c^-\bar{s}^-]$?[J]. Physical Review D, 2020, 101(5): 054039.
- [58] Liu M S, Lü Q F, Zhong X H, et al. All-heavy tetraquarks[J]. Physical Review D, 2019, 100(1): 016006.
- [59] Giron J F, Lebed R F. Spectrum of p-wave hidden-charm exotic mesons in the diquark model[J]. Physical Review D, 2020, 101(7): 074032.
- [60] Vijande J, Valcarce A. Tetraquark spectroscopy: a symmetry analysis[J]. Symmetry, 2009, 1(2): 155-179.
- [61] Abe F, Akimoto H, Akopian A, et al. Observation of B_c mesons in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV[J]. Physical Review D, 1998, 58(11): 112004.
- [62] McNeil M. Search for B_c and Y in hadronic Z decays[J]. International Journal of Modern Physics A, 1997, 12(22): 3921-3930.
- [63] Ortega P G, Segovia J, Entem D R, et al. Spectroscopy of \mathbf{B}_c mesons and the possibility of finding exotic \mathbf{B}_c B_c -like structures[J]. The European Physical Journal C, 2020, 80(3): 1-8.
- [64] Griffiths D. Introduction to elementary particles[M]. John Wiley & Sons, 2020.
- [65] Particle Data Group, Zyla P A, Barnett R M, et al. Review of particle physics[J]. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2020, 2020(8): 083C01.
- [66] Meinel S. Prediction of the Ω_{bbb} mass from lattice QCD[J]. Physical Review D, 2010, 82(11): 114514.

- [67] Padmanath M, Edwards R G, Mathur N, et al. Spectroscopy of triply charmed baryons from lattice QCD[J]. Physical Review D, 2014, 90(7): 074504.
- [68] Mathur N, Padmanath M, Mondal S. Precise predictions of charmed-bottom hadrons from lattice QCD[J]. Physical Review Letters, 2018, 121(20): 202002.
- [69] Virtanen P, Gommers R, Oliphant T E, et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python[J]. Nature methods, 2020, 17(3): 261-272.
- [70] Zhao Z, Xu K, Kaewsnod A, et al. Study of charmoniumlike and fully-charm tetraquark spectroscopy[J]. Physical Review D, 2021, 103(11): 116027.
- [71] Faustov R N, Galkin V O, Savchenko E M. Heavy tetraquarks in the relativistic quark model[J]. Universe, 2021, 7(4): 94.
- [72] Lü Q F, Chen D Y, Dong Y B. Masses of fully heavy tetraquarks $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ and $QQQ\bar{Q}$ in an extended relativized quark model[J]. The European Physical Journal C, 2020, 80(9): 1-9.
- [73] Karliner M, Rosner J L, Nussinov S. $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ states: masses, production, and decays[J]. arXiv preprint arXiv:1611.00348, 2016.
- [74] Chen W, Chen H X, Liu X, et al. Hunting for exotic doubly hidden-charm/bottom tetraquark states[J]. Physics Letters B, 2017, 773: 247-251.
- [75] Zhao J, Shi S, Zhuang P. Fully-heavy tetraquarks in a strongly interacting medium[J]. Physical Review D, 2020, 102(11): 114001.
- [76] Ke H W, Han X, Liu X H, et al. Tetraquark state X (6900) and the interaction between diquark and antidiquark[J]. The European Physical Journal C, 2021, 81(5): 1-9.
- [77] Zhu R. Fully-heavy tetraquark spectra and production at hadron colliders[J]. Nuclear Physics B, 2021, 966: 115393.
- [78] Karliner M, Rosner J L. Interpretation of structure in the di- J/ψ spectrum[J]. Physical Review D, 2020, 102(11): 114039.
- [79] Weng X Z, Chen X L, Deng W Z, et al. Systematics of fully heavy tetraquarks[J]. Physical Review D, 2021, 103(3): 034001.
- [80] Berezhnoy A V, Luchinsky A V, Novoselov A A. Heavy tetraquarks production at the LHC[J]. Physical Review D, 2012, 86(3): 034004.

- [81]Zhang J R. 0^+ fully-charmed tetraquark states[J]. Physical Review D, 2021, 103(1): 014018.
- [82]Yang B C, Tang L, Qiao C F. Scalar fully-heavy tetraquark states $QQ'^\prime \bar{Q}\bar{Q}'$ in QCD sum rules[J]. The European Physical Journal C, 2021, 81(4): 1-9.
- [83]Becchi C, Giachino A, Maiani L, et al. Search for bbb^-b^- tetraquark decays in 4 muons, B^+B^- , $B0B^-0$ and $Bs0B^-s0$ channels at LHC[J]. Physics Letters B, 2020, 806: 135495.
- [84]Becchi C, Ferretti J, Giachino A, et al. A study of ccc^-c^- tetraquark decays in 4 muons and in $D(*)D^-(*)$ at LHC[J]. Physics Letters B, 2020, 811: 135952.
- [85]Ali A, Maiani L, Polosa A D. Multiquark hadrons[M]. Cambridge University Press, 2019.
- [86]Wang Z G. Tetraquark candidates in LHCb's di- J/ψ mass spectrum[J]. Chinese Physics C, 2020, 44(11): 113106.
- [87]Yang G, Ping J, Segovia J. Exotic resonances of fully-heavy tetraquarks in a lattice-QCD inspired quark model[J]. Physical Review D, 2021, 104(1): 014006.
- [88]Tiwari R, Rathaud D P, Rai A K. Spectroscopy of all charm tetraquark states[J]. arXiv preprint arXiv:2108.04017, 2021.
- [89]Faustov R N, Galkin V O, Savchenko E M. Masses of the $QQ\bar{Q}\bar{Q}$ tetraquarks in the relativistic diquark-antidiquark picture[J]. Physical Review D, 2020, 102(11): 114030.
- [90]Li Q, Chang C H, Wang G L, et al. Mass spectra and wave functions of $TQQ\bar{Q}$ tetraquarks[J]. Physical Review D, 2021, 104(1): 014018.
- [91]Weng X Z, Chen X L, Deng W Z. Masses of doubly heavy-quark baryons in an extended chromomagnetic model[J]. Physical Review D, 2018, 97(5): 054008.
- [92]Veltman M. Diagrammatica: the path to Feynman diagrams[M]. Cambridge University Press, 1994.
- [93]James F, Roos M. MINUIT: a system for function minimization and analysis of the parameter errors and corrections[J]. Comput. Phys. Commun., 1975, 10(CERN-DD-75-20): 343-367.

- [94]H. Dembinski et al. [iminuit team], iminuit: A Python in-terface to MINUIT,
<https://github.com/scikit-hep/iminuit>.

攻读硕士学位期间发表论文

Zhuang Zejian, Zhang Y, Ma Y, et al. Lineshape of the compact fully heavy tetraquark[J]. Physical Review D, 2022, 105(5): 054026. (学生第一作者)

致谢

自 2019 年入学，心里想着将要开启漫长的科研道路。但是现在回想起来，三年时间稍纵即逝。在这三年的读研时间里，我在科研方面得到了充分的锻炼。首先，我要感谢我的导师王倩。从论文的选题到论文的撰写，王老师都层层把关，给出相应的指导意见。王老师渊博的知识和严谨的学术态度不断激励我前行，王老师经常与组内的学生对文章里面某个具体细节进行探讨研究。每周王老师都会让我们把问题和方法归纳出来，然后在组会上定期汇报成果和进展情况。在王老师指导下我深入研究了与全重多夸克态的文章，在王老师的关心和帮助下我养成了分析问题和独立思考的能力。

感谢张旦波副教授，在张老师的指导下，让我第一次接触到和量子计算和量子算法的相关知识。在他的指导下，我尝试将量子计算方面的方法应用于强子物理领域。虽然最后并没有做出一些成果，但是让我爱上了量子计算这门学科。不仅如此，张老师一直认为我有做科研的潜质，这让我备受鼓舞。感谢马远卓博士，在马师兄的讨论和接触中，让我学到了一些解决多体物理问题的知识和方法。感谢牛鹏宇博士在实验数据拟合方面给出的指导。感谢同一课题组的凌攀师兄，张颖师妹，王镐楠师弟和戴小虎在三年研究生生涯中给予的帮助。感谢我最可爱的侄子，庄家勇，在我撰写毕业论文这段枯燥的时间里增添了一些乐趣。

最后，感谢我的父母和兄弟姐妹们对我一直以来的理解与支持。

华南师范大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。

本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：庄泽坚

日期：2022 年 5 月 27 日

学位论文使用授权声明

本论文属于非涉密论文，本人完全了解华南师范大学有关收集、保留、使用学位论文的规定，即研究生在校攻读学位期间论文的知识产权单位属华南师范大学。学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版，有权将学位论文用于非赢利目的复制并允许论文进入学校图书馆、院系资料室被查阅和借阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，可以采用复印、缩印或其他方法保存学位论文。

论文作者签名：庄泽坚

日期：2022 年 5 月 27 日

导师签名：王仲

日期：2022 年 5 月 27 日