U-ERRE

Universidad Regiomontana

Métodos Numéricos

Segundo Parcial

Reporte Método Interpolación de Lagrange

Coach: Sergio Castillo

Oziel Misael Velazquez Carrizales 746441

Fecha Entrega: 28/06/2025

Oziel Velazquez Carrizales 746441   28/06/25

metodo interpolación de lagrange

Definición: es un algoritmo para encontrar un polinomio de grado mínimo que pase exactamente por un conjunto de puntos dados.

Antecedentes: Desarrollada por Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII, fue descubierto inicialmente por Edward Waring en 1779 y redescubierto por Leonhard en 1783.

Relación con otros metodos

- intpolación de newton: mas eficiente para añadir nuevos puntos
- spline cúbico: usado cuando se prefieren segmentos polinomiales en lugar de un unico polinomio global.

Formula: Dados n + 1 puntos, el polinomio interpolado es

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x)$$

donde $L_k(x)$ son los polinomios de lagrange

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Algoritmo:

- identificar puntos
- calcular $L_k(x)$ para cada K
- construir $P(x)$
- Evaluar

Aplicaciones

· procesamiento de señales en la reconstrucción de señales muestra

· graficos por computadora: Generación de trayectoras

· machine learning.

Ejemplo clase

$$\left.\begin{matrix}(0,1)\\(1,3)\\(2,0)\end{matrix}\right\} n=3 \qquad P(x)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,L_i(x)$$

donde
$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad \begin{matrix} i=0,1,2\ldots n-1\\ j=0,1,2\ldots n-1\end{matrix}$$

$n=3$ $\quad x_0=0$ $\quad f(x_0)=1$

$i=0,1,2$ $\quad x_1=1$ $\quad f(x_1)=3$

$j=0,1,2$ $\quad x_3=2$ $\quad f(x_2)=0$

$\underset{x_0\ y_0}{(0,1)}$; $\underset{x\ y}{(1,3)}$; $\underset{x\ y}{(2,0)}$ $\qquad y_0=f(x_0)$

$y_1=f(x_1)$

$y_2=f(x_2)$

I_1 $i=0$; $j=1,2$

$$L_0(x)=\frac{(x_1-x_2)}{(x_0-x_1)}\cdot\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} \quad\Big|\quad L_0(x)=\frac{(x-1)}{(0-1)}\cdot\frac{(x-2)}{(0-2)}$$

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad\Big|\quad L_0(x)=\frac{x^2-x-2x+2}{2}$$

$$\underline{L_0(x)=\tfrac{1}{2}(x^2-3x+2)}$$

It 2

$i = 1 \; ; \; j = 0, 2$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 0)}{(1 - 0)} \cdot \frac{(x - 2)}{(1 - 2)}$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-2)}{-1} = L_1(x) = -x^2 + 2x$$

It 3

$i = 2 \; ; \; j = 0, 1$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 0)}{(2 - 0)} \frac{(x - 1)}{(2 - 1)} \quad \Big| \quad L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\underline{L_2(x) = \frac{1}{2}}(x^2 - x)$$

polinomio

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} F(x) L_i(x)$$

$$P(x) = F(x_0) L_0(x) + F(x_1) L_1(x) + \cancel{F(x_2)\, L_2(x)}^{0}$$

$$P(x) = (1)\left[\tfrac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)\right] + (3)(-x^2 + 2x$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 - 3x^2 + 6x$$

$$\underline{P(x) = \frac{-5}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 2}$$

Oziel velazquez 746441 28/06/25

- Ejemplo tarea -

Dado $(1,2), (3,4)$

$$\left.\begin{matrix}(1,2)\\(3,4)\end{matrix}\right\} n=2$$

$n=2$ $\quad x_0 = 1$ $\quad f(x_0) = 2$

$i = 1, 4$ $\quad x_1 = 3$ $\quad f(x_1) = 4$

$j = 1, 3$

i1

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-3}{1-3} = \frac{x-3}{-2}$$

i2

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-1}{3-1} = \frac{x-1}{2}$$

$$P(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) = 2 \cdot \left(\frac{x-3}{-2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$P(x) = 2 \cdot \left(\frac{x-3}{-2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) = -(x-3) + 2(x-1)$$

$$P(x) = -x + 3 + 2x - 2$$

$$P(x) = (-x + 2x) + (3-2) = \underline{x + 1}$$