

U-ERRE

Universidad Regiomontana

Métodos Numéricos

Segundo Parcial

Reporte del método de gauss seidel y Jacobi

Coach: Sergio Castillo

Oziel Misael Velazquez Carrizales 746441 ITC

Fecha de entrega: 22/06/25

Método de Jacobi y Gauss-Seidel:

22/06/23

Definición: Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son algoritmos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$. Ambos descomponen la matriz A en una parte diagonal D , triángulo inf L y t. sup. U .

Antecedentes: Ambos métodos tienen raíces en el trabajo de matemáticos como Carl Gaus y Seidel, el método de Jacobi fue uno de los primeros métodos iterativos propuestos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Relación con otros métodos:

- métodos directos (eliminación gaussiana): más precisos pero costosos en memoria.
- Gradiente conjugado: usado para matrices simétricas def. positivas.

fórmula y algoritmo

$$\text{Dado } A = D + L + U$$

D : diagonal de A

L : triangular inferior (sin diagonal)

U : triangular sup (sin diagonal)

$$\text{Jacobi: } x^{(k+1)} = D^{-1} (b - (L+U)x^{(k)})$$

$$\text{Gauss-Seidel: } x^{(k+1)} = (D+L)^{-1} (b - Ux^{(k)})$$

Jacobi Algoritmo:

- **Inicialización:** se asignan valores iniciales a las variables
- **Despeje ecuaciones:** despeje de cada variable de su ecuación correspondiente.
- **Iteración:** calcular nuevos valores utilizando ecuación despejada
- **Criterio parada:** se verifica la dif de variables entre los valores de la iteración actual y la anterior es menor o igual que un error predet.

Guía sobre el algoritmo

- Inicialización: se asignan valores iniciales a las variables
- Despeje ecuaciones: despeje de cada variable de su ecuación correspondiente.
- Iteración: calcular nuevos valores utilizando ecuación despejada, pero a ritmo de Jacobi, se utilizan los valores más recientes de las variables.
- criterio parada: se verifica la dif de variables entre los valores de la iteración actual y la anterior es menor o igual que un error predef.

Aplicaciones en la vida diaria (ITC)

Simulación de circuitos - Resolución de sistemas en análisis de redes elect.

Gráficos 3D: cálculo de luz en renderizado

Machine learning: optimización en mínimos cuadrados.

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad 7x + 2y - z = 5 \\ \textcircled{2} \quad -x - 12y + 4z = -11 \\ \textcircled{3} \quad 5x - 9y + 23z = 0 \end{array}$$

- a) Jacobi
b) Gauss-Seidel

Jacobi

paso 1 - Definir Diagonal Dominante

paso 2 - Despejar x, y, z

$$x = \frac{s - 2y + z}{7}$$

$$y = \frac{-11 + x - 4z}{-12}$$

$$z = \frac{-5x + 9y}{23}$$

con error de 1%

Iteracion 1 suponiendo que

$$x = 0 \quad z = 0$$

$$y = 0$$

paso 3 Evaluar

$$x = \frac{5 - 2(0) + (0)}{7} = 0.714$$

$$y = \frac{-11 + (0) - 4(0)}{-12} = 0.916$$

$$z = \frac{-5(0) + 9(0)}{23} = 0$$

$$\text{paso 4} \quad \text{error} = \left| \frac{x_{\text{actual}} - x_{\text{act}}}{x_{\text{act}}} \right| \times 100$$

Iteración 2

$$x = 0.714 \quad y = 0.916 \quad z = 0$$

$$x = \frac{s - 2(0.916) + 10}{7} = 0.452$$

$$y = \frac{-11 + (0.714) - 4(0)}{-12} = 0.857$$

$$z = \frac{-5(0.714) + 9(0.916)}{23} = 0.203$$

paso 4 Error: $x = \left| 1 - \frac{0.714}{0.452} \right| * 100 = 57.9\%$.

$$y = \left| 1 - \frac{0.916}{0.857} \right| * 100 = 6.88\%$$

$$z = \left| 1 - \frac{0}{0.203} \right| * 100 = 100\%.$$

Iteración 3

paso 3

$$x = 0.452 \quad y = 0.857 \quad z = 0.203$$

$$x = \frac{s - 2(0.857) + 10}{7} = 0.498$$

$$y = \frac{-11 + (0.452) + 4(0.203)}{-12} = 0.946$$

$$z = \frac{-5(0.452) + 9(0.857)}{23} = 0.237$$

PASO 4 ENOR

$$x = \left| 1 - \frac{0.452}{0.498} \right| * 100 = 9.23\%$$

$$y = \left| 1 - \frac{0.857}{0.746} \right| * 100 = 9.4\%$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.203}{0.237} \right| * 100 = 14.34\%$$

iteración 4 paso 3

$$x = 0.498 \quad y = 0.946 \quad z = 0.237$$

$$x = \frac{s - z(0.946) + (0.237)}{7} = 0.477$$

$$y = \frac{-11 + (0.498) - 4(0.237)}{-12} = 0.954$$

$$z = \frac{-s(0.498) + 4(0.946)}{27} = 0.261$$

paso 4 ENOR

$$x = \left| 1 - \frac{0.498}{0.477} \right| * 100 = 4.40\%$$

$$y = \left| 1 - \frac{0.946}{0.954} \right| * 100 = 8.83\%$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.237}{0.261} \right| * 100 = 9.19\%$$

its

$$x = 0.477, y = 0.954, z = 0.261$$

$$x = \frac{3 - 2(0.954) + (0.261)}{7} = 0.479$$

$$y = \frac{-11 + (0.477) - 4(0.261)}{-12} = 0.963$$

$$z = \frac{-5(0.477) + 9(0.954)}{23} = 0.264$$

Errorv $x = \left| 1 - \frac{0.477}{0.479} \right| * 100 = \% 0.41$

$$y = \left| 1 - \frac{0.954}{0.963} \right| * 100 = \% 0.93$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.261}{0.264} \right| * 100 = \% 2.97$$

$$x = 0.479, y = 0.963, z = 0.264$$

I 6

$$x = \frac{3 - 2(0.963) + (0.264)}{7} = 0.477$$

$$y = \frac{-11 + (0.477) - 4(0.264)}{-12} = 0.966$$

$$z = \frac{-5(0.477) + 9(0.963)}{23} = 0.272$$

Errorv $x = \left| 1 - \frac{0.479}{0.477} \right| * 100 = \% 0.41$

$$y = \left| 1 - \frac{0.963}{0.966} \right| * 100 = \% 0.31$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.264}{0.272} \right| * 100 = \% 1.10$$

$$T7x = 0.477, y = 0.966, z = 0.272$$

$$x = \frac{3 - 2(0.966) + (0.272)}{7} = 0.477$$

$$y = \frac{-11 + (0.477) - 4(0.272)}{-12} = 0.967$$

$$z = \frac{-5(0.477) + 9(0.966)}{23} = 0.274$$

Error in $x = \left| 1 - \frac{0.477}{0.472} \right| * 100 = \underline{\underline{\% 0}}$

$$y = \left| 1 - \frac{0.966}{0.967} \right| * 100 = \underline{\underline{\% 0.10}}$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.272}{0.274} \right| * 100 = \underline{\underline{\% 0.72}}$$

Gauß-Seidel

I 1

$x = 0$

$y = 6$

$z = 0$

Paso 3

$$x = \frac{5 - 2(0) + 1(0)}{7} = 0.714$$

$$y = \frac{-11 + (0.714) - 4(0)}{-12} = 0.857$$

$$z = \frac{-5(0.714) + 9(0.857)}{23} = 0.180$$

Paso 4 Error

I 2 $x = 0.714, y = 0.857, z = 0.180$

$$x = \frac{5 - 2(0.857) + 1(0.180)}{7} = 0.495$$

$$y = \frac{-11 + (0.495) - 4(0.180)}{-12} = 0.935$$

$$z = \frac{-5(0.495) + 9(0.935)}{23} = 0.258$$

P 4

Error

$$x = \left| 1 - \frac{0.714}{0.495} \right| * 100 = 44.24\%$$

$$y = \left| 1 - \frac{0.857}{0.935} \right| * 100 = 8.34\%$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.180}{0.258} \right| * 100 = 30.23\%$$

I₃

$$x = 0.493 \quad y = 0.935 \quad z = 0.258$$

$$x = \frac{5-2(0.935) + (0.258)}{7} = \underline{0.484}$$

$$y = \frac{-11 + (0.484) - 4(0.258)}{-12} = \underline{0.962}$$

$$z = \frac{-5(0.484) + 9(0.962)}{23} = \underline{0.271}$$

P4 Einov

$$x = \left| 1 - \frac{0.493}{0.484} \right| * 100 = 2.77\%$$

$$y = \left| 1 - \frac{0.935}{0.962} \right| * 100 = 2.8\%$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.258}{0.271} \right| * 100 = 4.74\%$$

I₄

$$x = 0.484 \quad y = 0.962 \quad z = 0.271$$

$$x = \frac{5-2(0.962) + (0.271)}{7} = \underline{0.478}$$

$$y = \frac{-11 + (0.478) - 4(0.271)}{-12} = \underline{0.967}$$

$$z = \frac{-5(0.478) + 9(0.967)}{23} = \underline{0.274}$$

P4 Einov

$$x = \left| 1 - \frac{0.484}{0.478} \right| * 100 = \% 1.25$$

$$y = \left| 1 - \frac{0.962}{0.967} \right| * 100 = \% 0.51$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.271}{0.274} \right| * 100 = \% 1.09$$

Is

$$x = 0.478 \quad y = 0.967 \quad z = 0.274$$

$$x = \frac{5 - z(0.967) + (0.274)}{7} = 0.477$$

$$y = \frac{-11 + (0.477) - 4(0.274)}{-12} = 0.968$$

$$z = \frac{-5(0.477) + 9(0.968)}{23} = 0.275$$

P4 Error

$$x = \left| 1 - \frac{0.478}{0.477} \right| * 100 = 0.20\%$$

$$y = \left| 1 - \frac{0.967}{0.968} \right| * 100 = 0.10\%$$

$$z = \left| 1 - \frac{0.274}{0.275} \right| * 100 = 0.36\%$$