Лекции по дискретной математике

А. И. Зеленина

9 марта 2018 год

Содержание

1 Перестановки, размещения, сочетания

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$— конечное множество. Совокупность из k элементов множества A (не обязательно различных) называется k–выборкой множества A. Выборка называется упорядоченной, если каждомуее элементу поставлен в соответствие номер – натуральное число, не превосходящее k так, что разным элементам соответствуют разные числа. Упорядоченные выборки будем называть также наборами. Элементы упорядоченных выборок будем заключать в круглые скобки, а элементы неупорядоченных выборок– в фигурные скобки. Например, (a_1, a_2, a_2)и (a_2, a_1, a_2) – две различных упорядоченных выборки, а $\{a_1, a_2, a_2\}$и $\{a_2, a_1, a_2\}$– одна и та же неупорядоченная выборка.

Перестановкой n–элементного множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ называется любой набор $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, состоящий из элементов A, в котором каждый элемент из A встречается ровно один раз. Например, у трехэлементного множества $\{a_1, a_2, a_3\}$ существует ровно шесть различных перестановок:

$$
\begin{array}{lll}
(a_1, a_2, a_3), & (a_1, a_3, a_2), & (a_2, a_1, a_3), \\
(a_2, a_3, a_1), & (a_3, a_1, a_2), & (a_3, a_2, a_1).
\end{array}
$$

Найдем число P_n различных перестановок n–элементного множества. Для этого из n –элементного множества будем последовательно выбирать элементы и формировать из них упорядоченную выборку: первый выбранный элемент станет первым элементом упорядоченной выборки, второй –вторым и т. д. Нетрудно видеть, что первый элемент можно выбрать n способами. Второй элемент будет выбираться из $(n-1)$ оставшихся элементов,поэтому его можно выбрать $(n-1)$ способом. Продолжая выбор, заметим, что после выбора первых k элементов останется $(n-k)$ невыбранных элементов. Следовательно, $(k+1)$-й элемент можно выбрать $(n-k)$ способами.Перемножив числа способов, которыми можно выбрать первый, второй,...,$(n-1)$-й и n-й элементы, получим величину, равную числу способов, которыми можно упорядочить n-элементное множество. Таким образом,

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{1}$$

Размещением из n элементов по k называется произвольная перестановка k-элементного подмножества n-элементного множества. Для обозначения числа размещений из n элементов по k используется символ A_n^k. Рассуждениями аналогичными приведенным выше при определении величины P_n, нетрудно показать, что

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Сочетанием из n элементов по k называется произвольное k-элементное подмножество n-элементного множества. Число сочетаний из n элементов по k обозначается через $\binom{n}{k}$ (иногда также используется символ C_n^k). Так как у одного k-элементного подмножества существует ровно $k!$ различных перестановок, то из (2) легко следует, что

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}. \tag{3}$$

Из равенства (3) легко вытекают следующие часто используемые свойства сочетаний:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{4}$$

Второе из этих равенств докажем также при помощи комбинаторных рассуждений. Пусть A– множество всех k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Это множество разобъем на два класса A_1 и A_2 так, что в первый класс отнесем все подмножества, содержащие n, а во второй класс– подмножества без этого элемента.Нетрудно видеть, что A_1 состоит из $\binom{n-1}{k-1}$подмножеств, а A_2– из $\binom{n-1}{k}$.Так как каждое k-элементное подмножество попадает либо в класс A_1, либо в класс A_2, то $|A| = |A_1| + |A_2|$, и, следовательно, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется неупорядоченная k-выборка n-элементного множества. Например, из трех элементов a_1, a_2 и a_3 можно составить шесть сочетаний с повторениями по два элемента:

$$a_1a_1, \qquad a_1a_2, \qquad a_1a_3, \qquad a_2a_2, \qquad a_2a_3, \qquad a_3a_3.$$

Каждое сочетание с повторениями из n элементов по k однозначно определяется тем, сколько раз каждый элемент множества входит в рассматри- ваемое сочетание. Пусть в некоторое такое сочетание элемент a_i входит m_i раз, где $i = 1, 2, \dots, n$. Этому сочетанию поставим в соответствие набор

$$\underbrace{1\dots1}_{m_1}0\underbrace{1\dots1}_{m_2}0\dots\dots0\underbrace{1\dots1}_{m_n} \tag{5}$$

из k единиц, сгруппированных в n блоков, и $n-1$ нулей, разделяющих эти блоки. В этом наборе первый блок из $m1$ единиц соответствует элементу 1, второй блок из m_2 единиц — элементу a_2, и т. д. Приведенным выше двухэлементным сочетаниям соответствуют следующие шесть наборов:

$$1100, \qquad 1010, \qquad 1001, \qquad 0110, \qquad 0101, \qquad 0011.$$

Очевидно, что набор вида (5) однозначно определяет соответствующее ему сочетание с повторениями. Поэтому число H_k n сочетаний с повторениями из n элементов по k равно числун аборов из k единиц и $n-1$ нулей. Каждый такой набор можно рассматривать как набор значений характеристической функции k-элементного подмножества $(n+k-1)$-элементного множества. Следовательно,

$$H_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}. \tag{6}$$