

# Дискретни динамички системи

Ласко Баснарков  
Мирослав Мирчев



# Дефиниција

- Дискретен динамички систем (со дискретно време) е оној кај кој промените на состојбата се случуваат во дискретни временски моменти (најчесто се еднакви меѓу себе)
- Задачата на моделирање е да се најде како идната состојба зависи од тековната (и можеби претходните)

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$



# Решавање на моделот

- Аналитички решенија. Математичко решение во затворен облик со помош на  $Z$  трансформација
- Нумерички решенија. Со компјутер. Најчесто во праксата
- Квалитативно поведење. Добивање на најважните особини на решенијата кога времето оди во бескрај.
- Чувствителност на решенијата на промена на параметри.
- Техники на моделирање



# Решавање на линеарни диференцни равенки

- Хомогена диференцна равенка (нема влијание од надвор)

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_m x_{n-m}$$

- Карактеристична равенка која што има  $m$  решенија

$$\lambda^m = a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-2} \lambda^2 + a_{m-1} \lambda + a_m$$

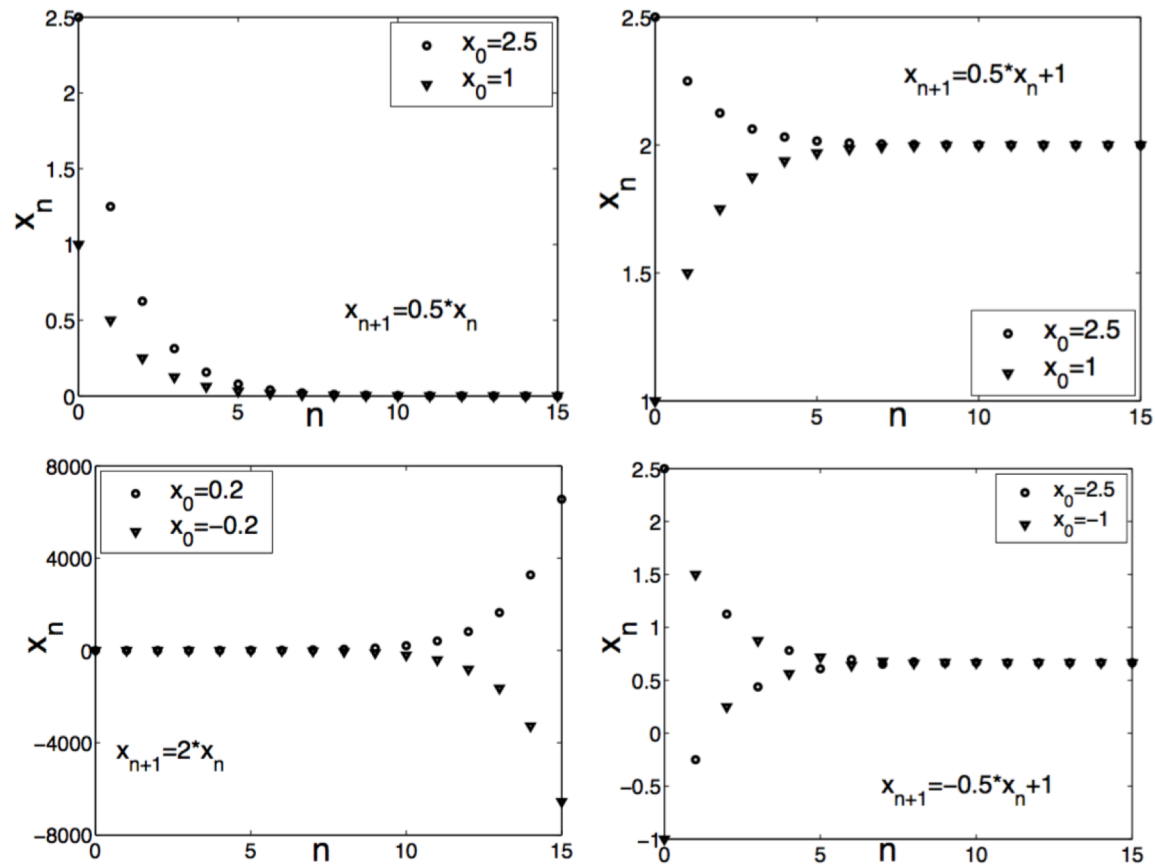
- Општ облик на решението кога решенијата на кар. рав. се различни

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_m \lambda_m^n$$

- Константите се определуваат од почетните услови



# Едноставен модел $x_{n+1} = ax_n + b$





# Модел на популација

- Модел за бројот на единици од некоја популација
- Линеарен модел (со параметар на вселување/иселување  $\beta$ )

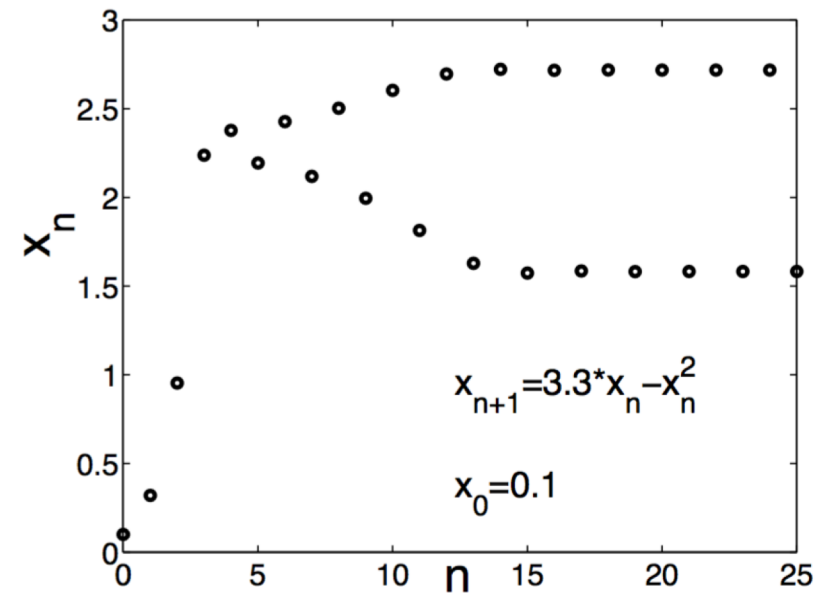
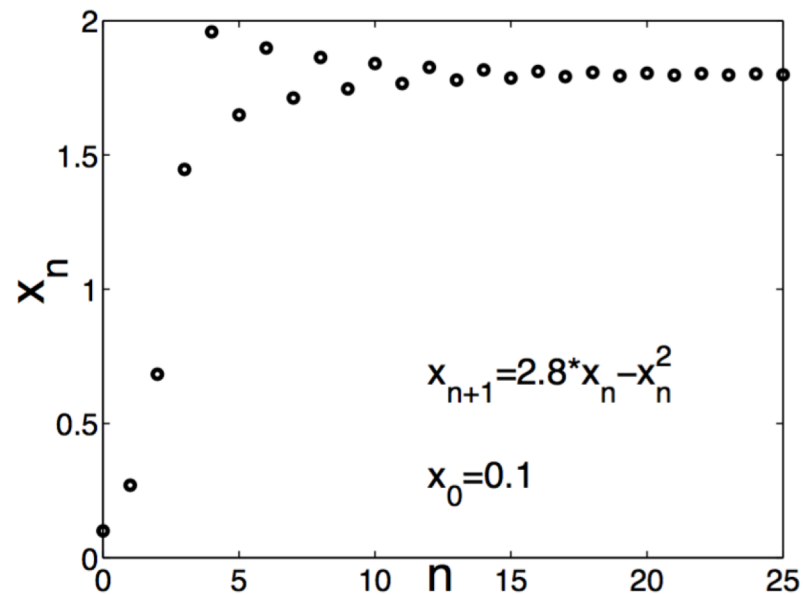
$$p_{n+1} - p_n = kp_n + \beta,$$

- Нелинеарен модел (кога има ограничена храна)

$$p_{n+1} = rp_n - p_n^2$$



# Модел на популација – нелинеарен модел





# Модел на заштеда на пари

- Пари на сметка на почетокот од секој месец  $a_n$
- Приход од камата  $i_n$ . Стапката е  $r$  проценти на годишно ниво
- Ставање/земање од сметката  $p_n$

$$a_{n+1} = a_n + i_n + p_n$$

$$a_{n+1} = ka_n + p_n$$

$$i_n = \left( \frac{r}{100} \frac{1}{12} \right) a_n$$

$$k = 1 + \frac{r}{1200}.$$





# Низа на Фибоначи

- На почетокот има еден пар зајаци, кои се размножуваат секој месец и за достигнување полова зрелост е потребен еден месец
- Рекурентна равенка за бројот на зајаци после n-тиот месец

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

- Линеарна диференцна равенка од ред 2

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144



# Оперативни системи на мобилни уреди

- Секоја година  $\frac{2}{3}$  од корисниците на IOS го зачувуваат ОС, а  $\frac{1}{3}$  преминуваат на користење на Android
- Секоја година  $\frac{1}{2}$  од корисниците на Android го зачувуваат ОС, а  $\frac{1}{2}$  преминуваат на користење на IOS
- Колкав е соодносот на бројот на корисници после долго време?

$$A_n = \frac{1}{3}I_{n-1} + \frac{1}{2}A_{n-1}$$
$$I_n = \frac{2}{3}I_{n-1} + \frac{1}{2}A_{n-1}$$

$$\lim \frac{A_n}{I_n} = \frac{2}{3}$$



## Задачи за вежбање

- Да се најдат првите 100 члена на низата на Фибоначи со помош на симулација и со решението на диференцна равенка
- Да се испрограмира логистичката равенка ЛР
- Да се испита поведението на ЛР во бесконечност за различни почетни услови