Модели со стохастични диференцијални равенки

Примери за мотивација

- Влијанието на поединечните учесници на берзите на акции не може да се предвиди – не може да се предвиди насоката на движење на цената на одредена акција
- Бројот на заболени клетки од некоја болест во даден момент не може да се определи точно
- Случајните исходи како од разликите на поединечните членови во некој систем, но и од влијанието на околината соодветно може да се моделираат со помош на шум

Стохастични модели

- Моделите со стохастични диференцијални равенки вклучуваат во себе и дел кој одговара на случајна променлива

$$dx = a(x)dt + b(x)dW$$

- каде што dW е Винеров процес кој ја опишува промената на случајната променлива
- Вакви модели се користат кога во системите кои што се моделираат постојат процеси на микроскопско ниво и тие процеси не може добро да се опишат, а исходот од нивното влијание е како да делува некој шум

Методи за решавање на стохастичните равенки

- Наједноставен метод е на апроксимацијата на Ојлер и Марујама

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\,\mathrm{d}t + b(X_t)\,\mathrm{d}W_t$$

$$X_{n+1} = X_n + a(X_n)\,\Delta t + b(X_n)\Delta W_n$$

- Случајните прирасти на Винеровиот процес ΔW_n се случајни броеви од нормална распределба со средна вредност 0 и варијанса Δt

$$p(\Delta W_n) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}} e^{-\frac{(\Delta W_n)^2}{2\Delta t}}$$

Пример – модел на цена на акција

- Модел на промена на цена на акција *S* на некоја компанија со таканаречената волатилност (јачина на променливост) σ

$$dS = rSdt + \sigma SdW$$

- Решението на стохастичната равенка е распределба на веројатноста цената да има некоја вредност после *S* време *t*
- Распределбата е логнормална (логаритамот е нормална распределба) со средна вредност и варијанса

$$E(S_t) = S_0 e^{rt} \qquad Var(S_t) = S_0^2 e^{2rt}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Нумеричко решавање на моделот на цена на акција

- Вредност на цената во дискретни моменти

$$S_{n+1} = S_n + rS_n\Delta t + \sigma S_n \Delta W_n$$

при што случајните броеви ΔW_n се влечат од нормална распределба со варијанса Δt

- За различни реализации на случајните броеви (различни симулации) ќе се добијат различни низи од вредности, односно различни решенија на стохастичната равенка

Анализа на решенијата

- Едно решение на стохастична равенка не е многу корисно бидејќи се однесува на систем чија што иднина не можеме да ја предвидиме
- Обично се бараат очекувањето (средната вредност при различни реализации на случајниот процес) и стандардната девијација на решенијата
  - Со повеќекратни повторувања на пресметките (повеќе симулации)
  - Со равенки за еволуција на распределба (равенка на Фокер и Планк)

Пример – стохастички логистички модел

- Детерминистички логистички модел на пораст на популација

$$dN(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t)dt$$

- Стохастичен логистички модел на пораст на популација

$$dN_t = rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)dt + \alpha N_t dW_t$$

- Стохастичниот модел може да се реши со постапката на Ојлер и Марујама

Решавање со помош на равенката на Фокер и Планк

- Парцијална диференцијална равенка која определува како се менува некоја функција на густина на веројатност $p(x,t)$ кога системот на кој се однесува таа густина се менува според некоја стохастична равенка

$$dX_t = \mu(X_t, t)\, dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t$$

стохастичен модел на системот

$$D(X_t, t) = \sigma^2(X_t, t)/2$$

Коефициент на дифузија (мерка за варијансата)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,t) p(x,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D(x,t) p(x,t)\right]$$

Задачи

- Да се пробаат различни вредности на временскиот чекор и на шумот за да се види какво е нивното влијание во моделите на цена и бројност на популација
- Да се прошират програмите и со повеќекратно извршување да се најдат средните вредности и варијансите на идните вредности на цената, односно бројноста на популацијата