

Модели со стохастични диференцни равенки



Примери за мотивација

- Груба претстава на социјалните процеси е комбинација на трендови (пад или пораст), циклуси (периодични повторувања) и случајни шокови (непредвидени промени)
- Секое животно е различно од останатите од неговиот вид и каква ќе биде неговата способност за преживување и размножување е посебна и различна од останатите – не може точно да се предвиди промената на бројот на популацијата
- Случајните исходи како од разликите на поединечните членови во некој систем, но и од влијанието на околината соодветно може да се моделираат со помош на шум



Општ модел на дискретен систем со шум

- Детерминистички системи од прв и k -ти ред

$$x_n = f(x_{n-1})$$

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$$

- Стохастични системи од прв и k -ти ред

$$x_n = f(x_{n-1}, \xi_n)$$

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}, \xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_{n-k+1})$$

- ξ_n се случајни променливи



Особини на шумот

- Промена на состојбата

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = f(x_{n-1}, \xi_n) - x_{n-1} = g(x_{n-1}, \xi_n)$$

- Шумот од претходните моменти е вграден во претходната состојба
- Зависност на состојбата од претходните

$$x_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i, \xi_{i+1})$$



Случајно движење

- Промена која не зависи од состојбата, ами само од шумот е исто така случајна променлива η која е функција од основната ξ

$$g(x_{n-1}, \xi_n) = g(\xi_n) = \eta_n$$

- Состојбата во даден момент се добива со случајно движење кое поаѓа од почетната состојба

$$x_n = x_0 + \sum_{i=1}^n \eta_i = x_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$$

- Честопати се зема дека случајните чекори η_i се независни и имаат еднаква распределба (IID independent and identically distributed)

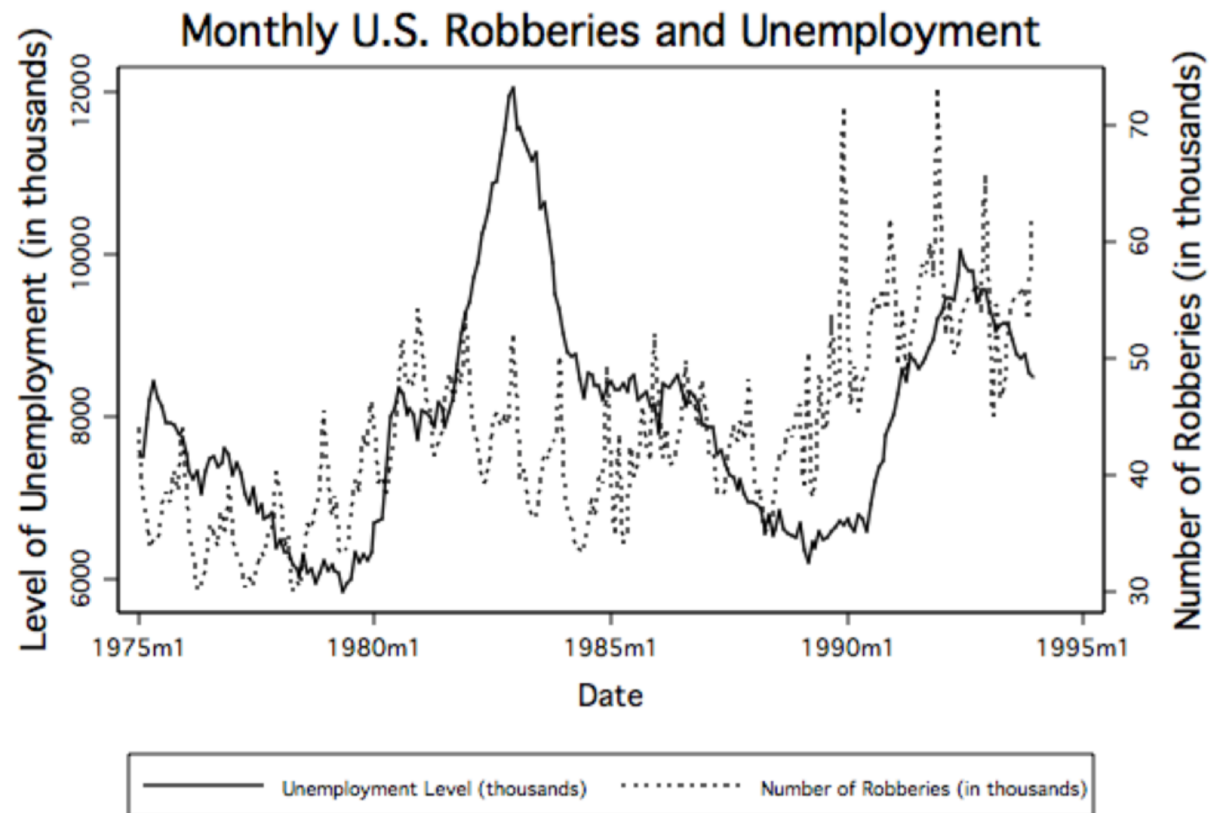


Истражување на случајните системи

- Во симулациите се земаат случајни вредности на шумот од некоја соодветна распределба (најчесто Гаусова, или рамномерна, или бинарна)
- Секоја поединечна симулација дава еден можен развој на настаните
- Се прават бројни симулации и се пресметуваат средни вредности на разни променливи од интерес
 - Средна очекувана вредност на состојбата во даден момент
 - Средна вредност на квадратното отстапување на моменталната од средната вредност како мерка на сигурноста
- Се испитува влијанието на јачината на шумот, или параметрите во системот на средните вредности



Модел на грабежите во САД



Source: Unemployment (U.S. Bureau of Labor Statistics <http://www.bls.gov/data/home.htm>)

Source: Robberies (Uniform Crime Reports - Monthly Weapon-Specific Crime and Arrest Time Series (ICPSR 6792))



Спрегнат модел на грабежите и невработеноста

- Линеарен модел на невработеноста во кој е додаден шум со кој се моделираат процесите или надворешните влијанија кои не може да се објаснат и чии последици се непредвидливи

$$U_n = a + bU_{n-1} + \varepsilon$$

- Линеарен модел на грабежите во кој влијание има и невработеноста, но и други надворешни влијанија или процеси чии последици се непредвидливи

$$R_n = c + dR_{n-1} + fU_{n-1} + \eta$$

- a, b, c, d и f се константи



Видови шум кај логистичкото пресликување

- Адитивен шум. Случајната променлива се додава на детерминистичкиот дел

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) + \varepsilon_{n+1}$$

- Мултипликативен шум. Случајната променлива се додава на множител во детерминистичкиот дел. Множителот е најчесто константа

$$x_{n+1} = r(1 + \varepsilon_{n+1})x_n(1 - x_n)$$

- Влијанието на шумот е особено силно во близина на точките на бифуркација



Задачи

- Да се испита дали е можно со помош на дискретен систем од една променлива од повисок ред да се добие осцилаторно поведење со произволно голем период. Со ова би се добил модел на невработеноста кој ќе одговара на набљудувањата