Calcul Scientifique avec Python

Mohamed El Ghmary
mohamed.elghmary@um5s.net.ma
***

Intégration numérique.

Exercice 03:

1. Ecrire une fonction qui permet de calculer la valeur de $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

Remarque :

$$I_n = n * I_{n-1} - 1/e \text{ avec } I_0 = 1 - 1/e$$

Exercice 04 :

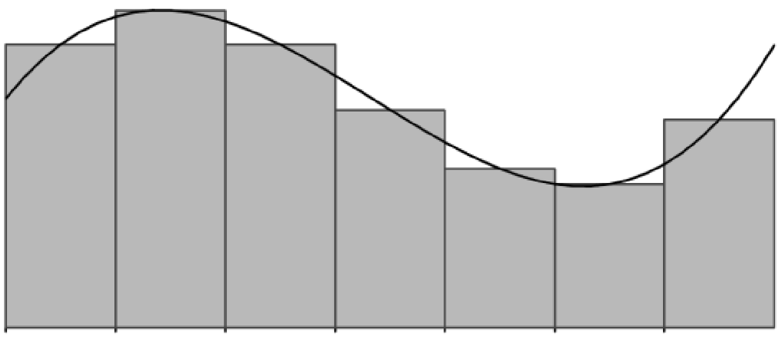
MÉTHODES D'INTÉGRATION

Soit une fonction f à valeurs réelles, continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$. On souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$.

1. Méthode des rectangles

La méthode des rectangles consiste à approximer la fonction f par une fonction en escalier. On considère un entier n et un pas de subdivision $\frac{b-a}{n}$. Pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$, on pose $a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$. Sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, on approxime f par la fonction constante égale à $f(\frac{a_k+a_{k+1}}{2})$ (voir figure 4.3).
On prend, comme valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$, l'intégrale de la fonction en escalier ainsi construite, c'est-à-dire la somme des aires des rectangles (les rectangles ont tous une base de longueur $\frac{(b-a)}{n}$).

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(b-a)}{2n} + k\frac{(b-a)}{n}\right)$$

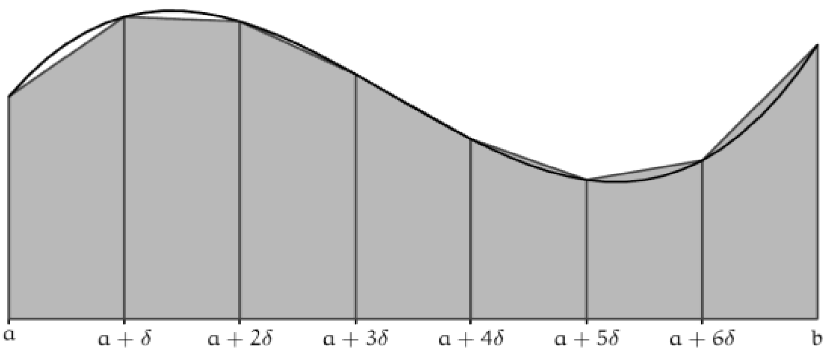


Méthode des rectangles

2. Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approximer la fonction f par une fonction continue affine par morceaux. Ceux-ci coïncident avec la fonction f aux points de la subdivision (voir figure 4.4). En notant $a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ les points de la subdivision du segment $[a, b]$, l'aire de chaque trapèze est égale à $\frac{(b-a)}{n} \cdot \frac{(f(a_k)+f(a_{k+1}))}{2}$, c'est-à-dire, en sommant,

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) \right).$$



. **Méthode des trapèzes**

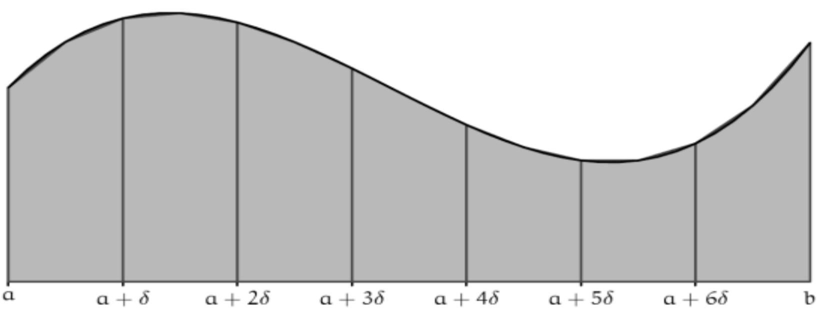
.3. Méthode de Simpson

On note toujours $a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$. La méthode de Simpson consiste à approximer le graphe de la fonction sur chaque segment $[a + k \cdot \text{pas}, a + (k+1) \cdot \text{pas}]$ par un arc de parabole qui coïncide avec le graphe de la fonction aux points d'abscisses a_k, a_{k+1} et $\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$. En notant f_k la fonction parabolique obtenue pour le segment $[a_k, a_{k+1}]$ et $m_k = \frac{a_k+a_{k+1}}{2}$, on peut montrer que l'aire sous l'arc de la parabole ainsi construite est égale à

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)\,dt = \frac{a_{k+1}-a_k}{6}\big(f(a_k) + 4\,f(m_k) + f(a_{k+1})\big).$$

Le résultat après sommation est une expression d'une valeur approchée de l'intégrale.

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq \frac{1}{6} \cdot \frac{(b-a)}{n} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$



Méthode de Simpson

Ecrire une fonction en langage **Python** qui permet de calculer la valeur de $\int_a^b f\,dx$

Avec trois méthodes:

- **Méthode des Rectangles**
- **Méthode des Trapèzes**
- **Méthode des Simpsons**

2. Vérifier en comparant avec les méthodes :

integrate.quad(f,a,b)

integrate.trapz(f(x),x)

integrate.simps(f(x),x)

integrate (f(x),(x,a,b))

Exercice 05 :

Écrire un programme qui permet de calculer la valeur de l'intégrale suivante **:**

a) $\int_0^1 x\,dx$

b) $\int_0^1 \sin^5(x)\,dx$

c) $\int_0^1 \log(x+1)-x^3+4\,dx$