Mohamed El Ghmary
mohamed.elghmary@um5s.net.ma

***

Résolution approchée d'équations différentielles.

Les équations différentielles (**ED**) apparaissent très souvent dans la modélisation de la physique et des sciences de l'ingénieur. Trouver la solution d'une **ED** ou d'un système d'**ED** est ainsi un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour les résoudre.

Le **problème de Cauchy** consiste à trouver une fonction $\boldsymbol{y(t)}$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\begin{cases} y' = f(y(t), t) \quad ; \quad \forall\, t \in [\,a\,, b\,] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Pour obtenir une approximation numérique de la solution **y(t)** sur l'intervalle **[a, b]**, nous allons estimer la valeur de cette fonction en un nombre fini de points t_i, pour $i = 0, 1, \dots, n$, constituants les nœuds du maillage. La solution numérique obtenue aux points t_i est notée $y_i = y(t_i)$. L'écart entre deux abscisses, noté **h**, est appelé : **le pas de discrétisation**.

Les principales méthodes de résolution numérique des **ED** sont séparées en deux grandes catégories :

- ✓ **les méthodes à un pas** : Le calcul de la valeur y_{n+1} au nœud t_{n+1} fait intervenir la valeur y_n obtenue à l'abscisse précédente. Les principales méthodes sont celles de : *Euler, Runge-Kutta, Crank-Nicholson …*
- ✓ **les méthodes à multiples pas**: Le calcul de la valeur y_{n+1} au nœud t_{n+1} fait intervenir plusieurs valeurs y_n , y_{n-1} , y_{n-2} , … obtenues aux abscisses précédentes. Les principales méthodes sont celles de : *Nyström, Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Gear …*

La méthode de Nyström :

La méthode de **Nyström** est une méthode à deux pas, son algorithme est :

y_0 donné ;

y_1 calculé par la méthode Euler ;

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2 * h * f(y_n, t_n)$$

Géométriquement : on considère la droite de pente $f(y_n , t_n)$ passant par le point (y_{n-1} , t_{n-1}) parallèle à la tangente passant par (y_n , t_n). La valeur y_{n+1} est l'ordonnée du point de cette droite d'abscisse t_{n+1}.

Les méthodes d'Adams-Bashforth et d'Adams-Moulton :

Ce sont des méthodes basées sur des techniques d'intégration numérique, qui utilisent les polynômes interpolateurs de Lagrange. La formulation générale de ces méthodes est :

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{j=-1\, ou\, 0}^{p} b_j \cdot f\left(t_{n-j}\,,y_{n-j}\right)$$

Dans la suite de cette partie, nous nous intéressons aux méthodes d'*Adams-Bashforth* et d'*Adams-Moulton* d'ordre **2**.

- **Le schéma d'Adams-Bashforth à deux pas, explicite, d'ordre 2 :**

$$\left|\begin{array}{l} y_0 \text{ donné ;} \\ y_1 \text{ calculé par la méthode Euler ;} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left(3 \cdot f(t_n\,,y_n) - f(t_{n-1}\,,y_{n-1})\right) \end{array}\right.$$

- **Le schéma d'Adams-Moulton à un pas, implicite, d'ordre 2 :**

$$\left|\begin{array}{l} y_0 \text{ donné ;} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n\,,y_n) + f(t_{n+1}\,,y_{n+1})\right) \end{array}\right.$$

En pratique, les schémas d'**Adams-Moulton** ne sont pas utilisés comme tels, car ils sont implicites. On utilise plutôt conjointement un schéma d'**Adams-Moulton** et un schéma d'**Adams-Bashforth** de même ordre, pour construire un schéma *prédicteur-correcteur* : Dans le schéma d'**Adams-Moulton**, on utilise la valeur de y_{n+1} prédite (calculée) par le schéma d'**Adams-Bashforth**.

Le schéma prédicteur-correcteur d'ordre 2, d'Adams-Bashforth et Adams-Moulton est :

$$\left|\begin{array}{l} y_0 \text{ donné ;} \\ y_1 \text{ calculé par la méthode d'Euler ;} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n\,,y_n) + f(t_{n+1}\,,k)\right) \\ \text{avec : } k = y_n + \dfrac{h}{2}\left(3 \cdot f(t_n\,,y_n) - f(t_{n-1}\,,y_{n-1})\right) \end{array}\right.$$

Q. 1 : Écrire une fonction **ABM2 (*f*, a, b, y0, h)**, qui reçoit en paramètres :

- ✓ ***f*** est la fonction qui représente une équation différentielle du premier ordre ;
- ✓ **a** et **b** sont les deux bornes de l'intervalle d'intégration ;
- ✓ **y0** est la valeur initiale à l'instant **a** (y(a) = y0) ;
- ✓ **h** est le pas de discrétisation.

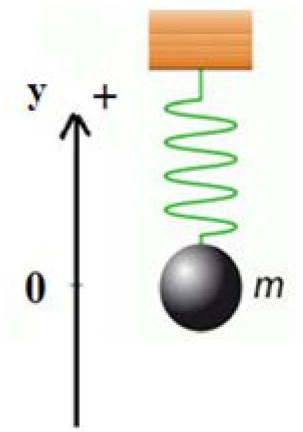
En utilisant le schéma prédicteur-correcteur d'ordre **2**, d'Adams-Bashforth et Adams-Moulton, la fonction renvoie **T** et **Y**, qui peuvent être des listes ou des tableaux :

- ➢ **T** contient la subdivision de l'intervalle **[a, b]**, en valeurs régulièrement espacée, utilisant le **pas** de discrétisation **h** ;
- ➢ **Y** contient les approximations des valeurs **y(t_i)**, à chaque instant **t_i** de **T**.

Application à un oscillateur harmonique

Un objet, de masse ***m***, est suspendu à un ressort fixé à un support.

0 représente le point d'équilibre, et ***y(t)*** représente la position de l'objet par rapport au point d'équilibre, avec la direction positive vers le haut.



Si l'objet suspendu est tiré verticalement vers le bas, celui-ci effectue un mouvement harmonique. La forme générale de l'équation différentielle modélisant ce mouvement harmonique est :

(E) $$\boldsymbol{m \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = F(t)}$$

Les paramètres de cette équation différentielle sont :

- ✓ ***b*** : constante de proportionnalité de la force d'amortissement ;
- ✓ ***F(t)*** : force extérieure appliquée sur l'objet ;
- ✓ ***k*** : constante de rappel du ressort ;
- ✓ ***m*** : masse de l'objet.

Si $b = 0$ et $F(t) = 0$, alors le mouvement harmonique est dit : **simple**.

Si $b \neq 0$ et $F(t) = 0$, alors mouvement harmonique est dit: **amorti**.

Si $F(t) \neq 0$, alors mouvement harmonique est dit : **forcé**.

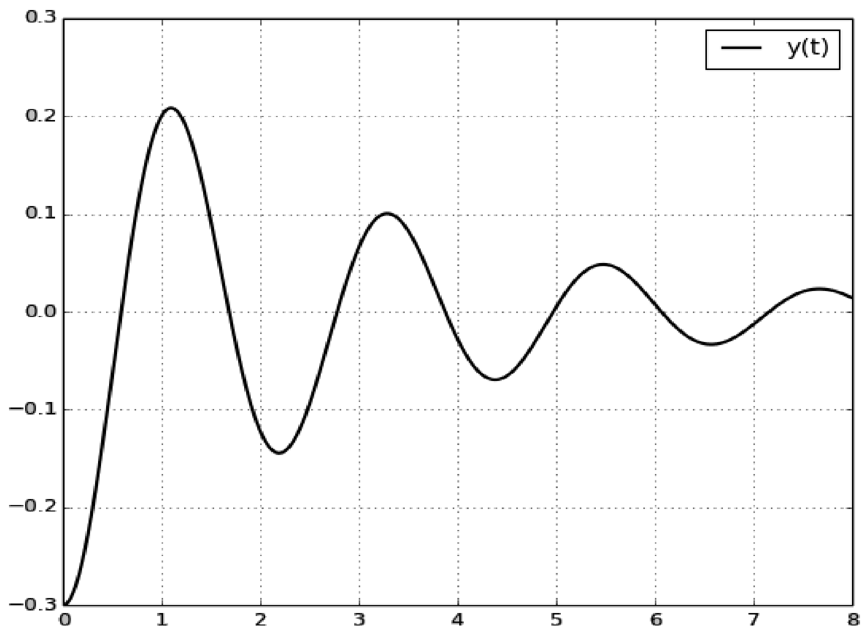
Q. 2 : On suppose que les valeurs des paramètres de l'équation différentielle **(E)**, sont :

$$b = 1 \quad ; \quad k = 12.5 \quad ; \quad m = 1.5 \quad et \quad F(t) = 0$$

Écrire l'équation différentielle **(E)** sous la forme **z' = G(t, z)**, avec **G(t, z)** une fonction à deux variables **(t, z)** dont **z** est un tableau de longueur **2.**

Q. 3 : On suppose avoir tiré l'objet suspendu verticalement vers le bas, avant de le relâcher *sans vitesse initiale*.

En utilisant le schéma prédicteur-correcteur d'ordre **2**, d'Adams-Bashforth et Adams-Moulton, écrire le code Python qui permet de tracer la courbe ci-dessous, représentant la position **y(t)** de l'objet **m** suspendu, toutes les $\mathbf{10^{-3}}$ **secondes**.



Q. 4 : Écrire la fonction **racines (P)**, qui reçoit en paramètre la liste (ou le tableau) **P** des positions **y(t)** de l'objet suspendu, à intervalles de temps de $\mathbf{10^{-3}}$ **secondes**. La fonction affiche les valeurs des zéros de la fonction **y(t)** : les valeurs des **t** tels que **y(t) = 0**, ou **y(t) ≈ 0** avec la précision $\mathbf{10^{-3}}$**.**

Exemple :

La fonction affiche les valeurs suivantes :

0.589 , 1.684 , 2.78 , 3.875 , 4.971 , 6.067 , 7.162