

Наука Логики Хаскеля

Никита Юрченко

20 августа 2017 г.

1 Примерное содержание

- Множества, отношения
- Логическое письмо: генеративная грамматика Хомского, БНФ, исчисление предикатов, теорема о его полноте, кризис оснований и интуиционизм, изоморфизм Карри - Говарда, основы Coq, логика первого порядка, Case Study: Логика Аристотеля (Coq), Case Study: утверждения эквивалентные закону исключенного третьего (Coq), ??? утверждения, эквивалентные Аксиоме Выбора.
- Логический синтаксис: аксиоматический метод, Lingua Universalis и Calculus Ratiocinator, Генцевский секвенциальный вывод, непротиворечивость, полнота, устранение сечений, теорема Эрбрана;
- Логическая семантика: теория моделей, тарскианская концепция истины, таблицы истинности, общезначимость, Сколемизация, теорема Сколема, теорема о компактности, модели Крипке, алгебра Гейтинга, вложение Крипке в алгебры Гейтинга алгебра Линденбаума, теория категорий, (локально) декартово замкнутая категория, идеи Сили и Ловира
- Теория типов: λ , λ_{\rightarrow} , System F_{ω} , $\lambda\Pi$, * MLTT - CiC - UTT $_{\Sigma}$, Automath, Agda, Isabelle, Hindley Milner in Haskell, λ_{\rightarrow} type inference, графическая модель λ , разрешимость $\lambda\Pi$, (сильная) нормализуемость
- Теории первого порядка и вычислимость: тезис Черча, эквиваленты машины Тьюринга, задача останова рекурсивные функции Клини, регулярные выражения, (не)разрешимые теории, формальные арифметики (Пeano, Гейтинга, Пресбургера), Case Study: решалка арифметики Пресбургера
- Теорема Геделя: Геделева нумерация, Первая теорема о неполноте (в форме Россера), Вторая теорема о неполноте
- Дополнительные материалы: Модальные логики, Линейная логика, ?? философия логики,

2 Глава

Mda kek

2.1 Изоморфизм Карри - Говарда - Ламбека

Он же Computational Trinitarianism Харпера.

Под логической частью имеется ввиду интуиционистское исчисление предикатов в ВНК интерпретации. Типы приведены а-ля Хаскелл/Агда, отдельно надо будет ввести для просто типизированного лямбда исчисления (STLC), потому что получится громоздко. Категорная семантика Ловиновская [?].

Curry Proof Theory	Howard Type Theory	Lambek Category Theory
Высказывание A	Тип A	Объект A
Доказательство A	$\Gamma \vdash a : A$	$\Gamma \xrightarrow{a} A$
$A \wedge B$	Pair A B	$A \times B$ произведение
$A \vee B$	Either A B	$A + B$ копроизведение
$A \supset B$	$A \rightarrow B$	B^A экспоненциал
$\neg A (i.e. A \rightarrow \perp)$	$A \rightarrow \perp$?
\top true	\top unit type	1 конечный объект
\perp false	\perp void type	0 начальный объект
$\forall x \in A. B(x)$	$\prod_{x:a} B(x)$?
$\exists x \in A. B(x)$	$\sum_{x:a} B(x)$?
индукция	индуктивный тип (напр. \mathbb{N})	начальная алгебра эндифунктора
закон Пирса $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$	Продолжения	?
Трансляция Гливенко	Continuation-passing style	Лемма Йонеды
...

Определение 1. Трансляция Гливенко (1929) (*alias* Теорема Гливенко, negative translation, double-negation translation) : Пропозициональная формула ϕ - классическая тавтология если и только если $\neg\neg\phi$ - интуиционистская тавтология. Расширена до логики первого порядка в виде расширений Куроды и Геделя-Генцена

2.2 Понятие типа

По-видимому, не имеет смысла говорить о типах вообще, вне конкретной формальной системы. Пока мне удалось найти 2 основных взгляда на типы:

1. Типы как множества.
Наиболее распространенный взгляд, особенно когда говорят об основаниях математики и сферической ТТ в вакууме.
2. Типы как приписки к термам.
Распространено в литературе по лямбда исчислению и всему что к нему примыкает. Также популярна у имплементоров языков программирования.

2.3 Виды равенства

Здесь много разночтений и философии, привожу по [?]. Надо разобраться, какие синонимы куда совать: judgemental, propositional, ...

1. Интенциональное (alias definitional)

Definitional equality is intensional equality, or equality of *meaning* (synonymy).
Definitional equality \equiv is a relation between *linguistic expressions* ... it should not be confused with *equality between objects*

(Per Martyn - L\"of [?], курсив мой)

Бывают двух видов:

- По определению (напр. $\text{two} \equiv \text{suc}(\text{suc zero})$)
- Вычислительные (напр. $\text{four} \equiv \text{two} + \text{two}$)

2. Экстенциональное (alias propositional)

Экстенциональное равенство выражает суждение (мета-высказывание о высказывании), однако есть способ включить его внутрь самой системы с помощью типа $I(A, a, b)$, который выражает идею $a = b \in A$. Например, $2^2 = 2 + 2 \in \mathbb{N}$ - экстенциональное равенство, в то же время очевидно, что левая и правая части $2^2 \equiv 2 + 2$ не равны по определению.

Список литературы

- [1] Per Martin-Löf : Intuitionistic Type Theory
- [2] Lawvere : Adjointness in Foundations
<http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/16/tr16.pdf>