

Сборник упражнений по теории категорий

Nick Yurchenko

27 января 2017 г.

1 Общие Категории

1. Выберите любую категорию по своему выбору и докажите для нее аксиомы категории.
2. Убедитесь в существовании категории с одним объектом $*$ и множеством морфизмов $C(*, *)$, которое состоит из алгебраических выражений $t ::= x_0 | f(t) | g(t, t)$ где x_0 - заданная переменная, f и g - заданные символы функций, композицией является подстановка $t[t'/x_0]$ (где " t' замещает x_0 " в t определяется рекурсивно).
3. Убедитесь, что любой моноид (M, b, e) является категорией с единственным объектом $*$ и $C(*, *) \stackrel{\text{def}}{=} M$
4. Если X и Y - предпорядки, убедитесь что и декартово произведение $X \times Y$ упорядочено в координатном порядке (coordinate-wise)
5. Пусть даны категории C и D , объекты в категории $C \times D$ это пары (A, B) объектов из C и D соответственно. Проверьте, что не существует совершенно очевидной категории $C \times D$. Сравните с преды-

дущим вопросом, теперь учитывая что X и Y являются категориями.

6. Если $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ являются монотонными функциями для предпорядков, то их композиция тоже $f \circ g : X \rightarrow Z$, которая определена как $(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))$ для всех $x \in X$. Удостоверьтесь в этом, и в вытекающем отсюда факте, что предпорядки формируют категорию
7. ★ Пускай объектами в категории \mathcal{C} являются пары (A, R) где A - множество, R - бинарное отношение, заданное на A : $R \subseteq A \times A$. Найдите морфизмы в этой категории.

2 Изоморфизм, Эпиморфизм, Мономорфизм, Инициальный и Терминальный объекты

8. Докажите, что в категории множеств эпиморфизмы являются сюръективными функциями
9. Докажите, что в категории множеств мономорфизмы являются инъективными функциями
10. Показать, что если f и g являются мономорфизмами, то их композиция $g \circ f$ тоже является мономорфизмом
11. Показать, что если композиция $g \circ f$ является мономорфизмом, то f является мономорфизмом
12. Показать, что если f и g являются эпиморфизмами, то их композиция $g \circ f$ тоже является эпиморфизмом
13. Показать, что если композиция $g \circ f$ является эпиморфизмом, то g является эпиморфизмом
14. Найти категорию, в которой содержится морфизм, являющийся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, но не изоморфизмом.
15. Показать что если f^{-1} является обратным $f : A \rightarrow B$ и g^{-1} является обратным $g : B \rightarrow C$, то $f^{-1} \circ g^{-1}$ является обратным по отношению к $g \circ f$

16. Показать, что терминальные объекты попарно изоморфны
17. Показать, что инициальные объекты попарно изоморфны
18. Найти категорию без инициального объекта
19. Найти категорию без терминального объекта
20. Найти категорию, в которой один объект является и инициальным и терминальным одновременно

3 Разновидности пределов

21. Показать, что $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$
22. Показать, что $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$
23. Показать, что $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$
24. Пускай X и Y - объекты в категории частично упорядоченных множеств (poset). Чем будет являться их произведение?
25. Пускай X и Y - объекты в категории частично упорядоченных множеств (poset). Чем будет являться их копроизведение?