МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики

ЗВІТ

до індивідуального завдання №6

з дисципліни «Моделі статистичного навчання»

Виконав
студент групи ПМіМ-12:
Зелінський Олександр

Перевірив:
Проф. Заболоцький Т. М.

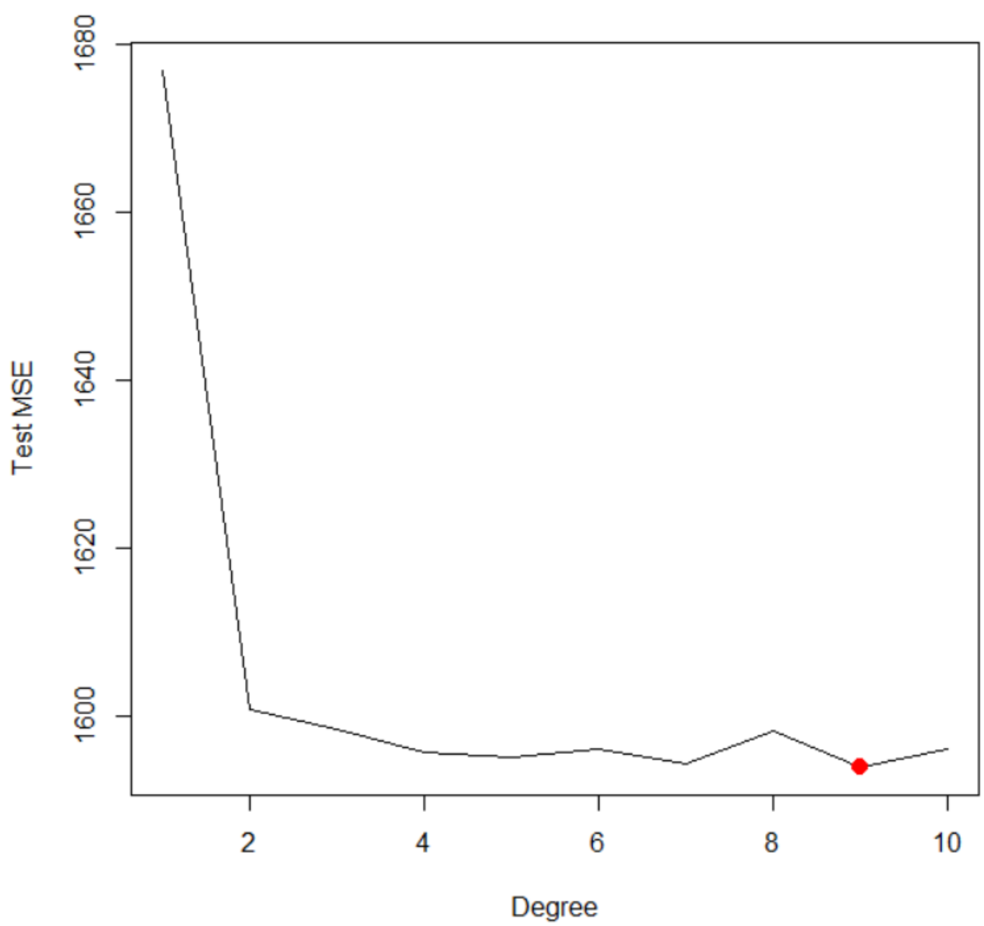
Львів – 2021

Хід виконання

1. Wage

1.1

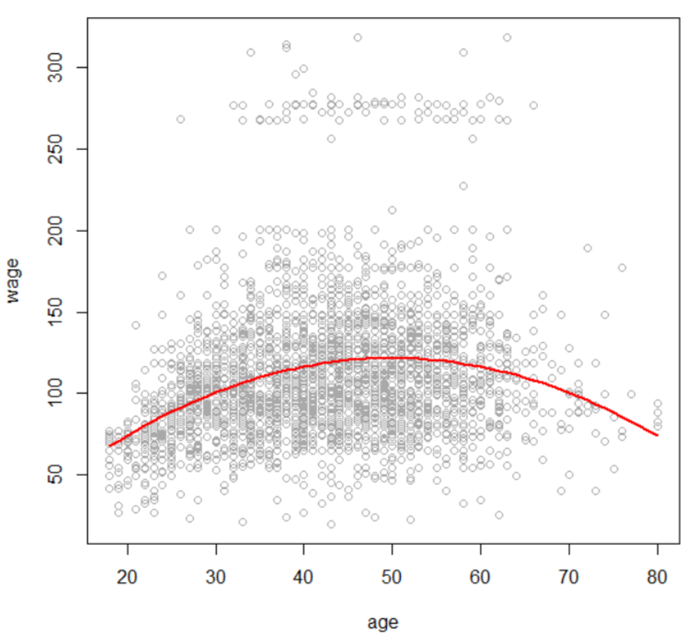
```
> library(ISLR)
> library(boot)
> set.seed(1)
>
> deltas = rep(NA, 10)
> for (i in 1:10) {
+     fit = glm(wage ~ poly(age, i), data = Wage)
+     deltas[i] = cv.glm(Wage, fit, K = 10)$delta[1]
+ }
> plot(1:10, deltas, xlab = "Degree", ylab = "Test MSE", type = "l")
> d.min = which.min(deltas)
> points(which.min(deltas), deltas[which.min(deltas)], col = "red", cex = 2, pch = 20)
```

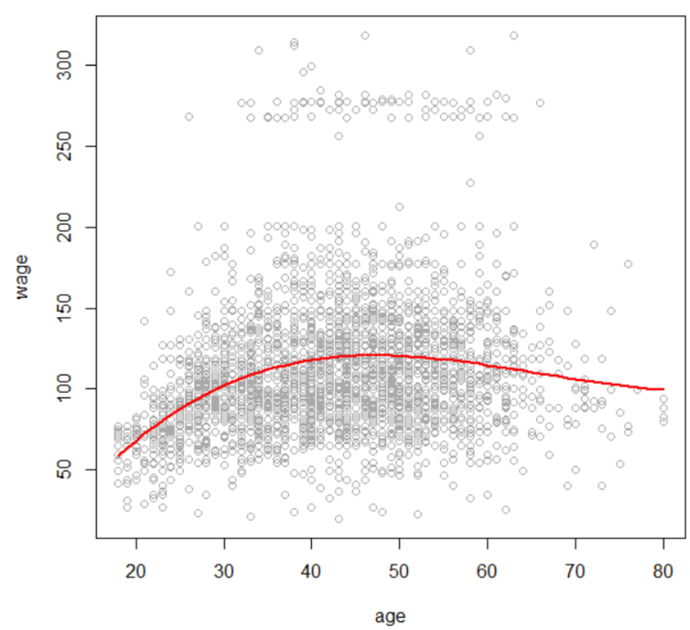


Зважаючи на результат можемо побачити, що d=9 є оптимальним степенем для полінома.

```
> fit1 = lm(wage ~ age, data = Wage)
> fit2 = lm(wage ~ poly(age, 2), data = Wage)
> fit3 = lm(wage ~ poly(age, 3), data = Wage)
> fit4 = lm(wage ~ poly(age, 4), data = Wage)
> fit5 = lm(wage ~ poly(age, 5), data = Wage)
> fit6 = lm(wage ~ poly(age, 6), data = Wage)
> fit7 = lm(wage ~ poly(age, 7), data = Wage)
> fit8 = lm(wage ~ poly(age, 8), data = Wage)
> fit9 = lm(wage ~ poly(age, 9), data = Wage)
> fit10 = lm(wage ~ poly(age, 10), data = Wage)
> anova(fit1, fit2, fit3, fit4, fit5, fit6, fit7, fit8, fit9, fit10)
Analysis of Variance Table

Model  1: wage ~ age
Model  2: wage ~ poly(age, 2)
Model  3: wage ~ poly(age, 3)
Model  4: wage ~ poly(age, 4)
Model  5: wage ~ poly(age, 5)
Model  6: wage ~ poly(age, 6)
Model  7: wage ~ poly(age, 7)
Model  8: wage ~ poly(age, 8)
Model  9: wage ~ poly(age, 9)
Model 10: wage ~ poly(age, 10)
   Res.Df     RSS Df Sum of Sq        F    Pr(>F)
1    2998 5022216
2    2997 4793430  1    228786 143.7638 < 2.2e-16 ***
3    2996 4777674  1     15756   9.9005  0.001669 **
4    2995 4771604  1      6070   3.8143  0.050909 .
5    2994 4770322  1      1283   0.8059  0.369398
6    2993 4766389  1      3932   2.4709  0.116074
7    2992 4763834  1      2555   1.6057  0.205199
8    2991 4763707  1       127   0.0796  0.777865
9    2990 4756703  1      7004   4.4014  0.035994 *
10   2989 4756701  1         3   0.0017  0.967529
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

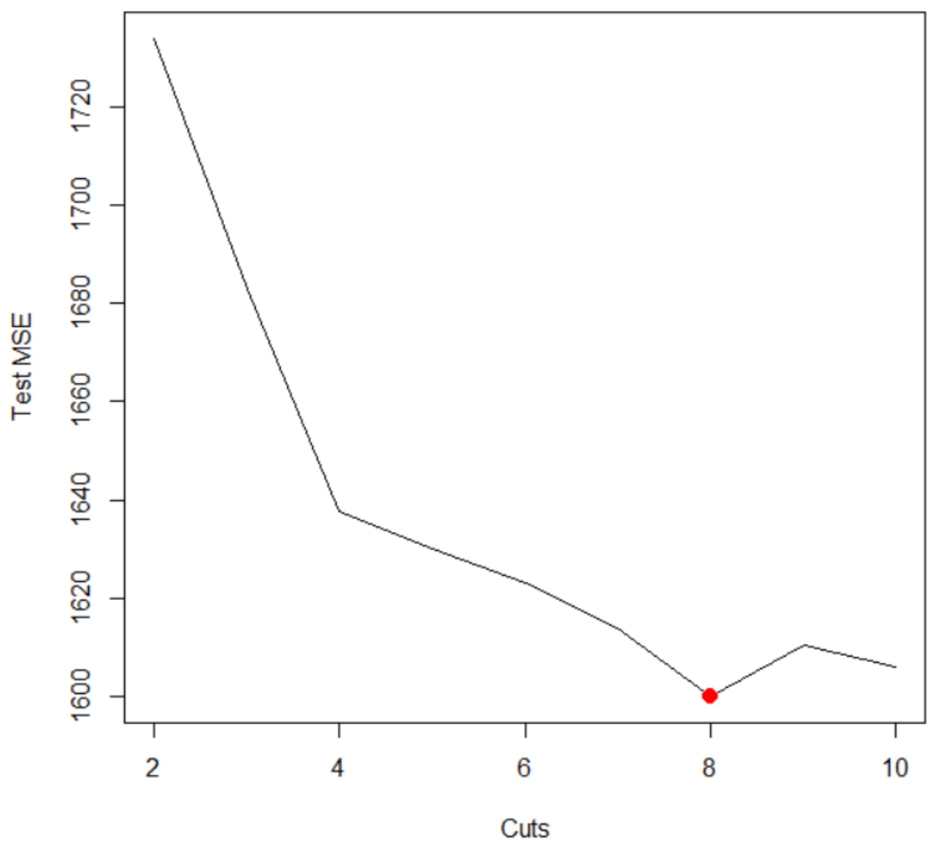
З результатів видно, що зважаючи на p-значення, ми можемо побачити, що поліном 2 і 3 степеня забезпечує найкращий результат. Побудуємо ці два поліноми.





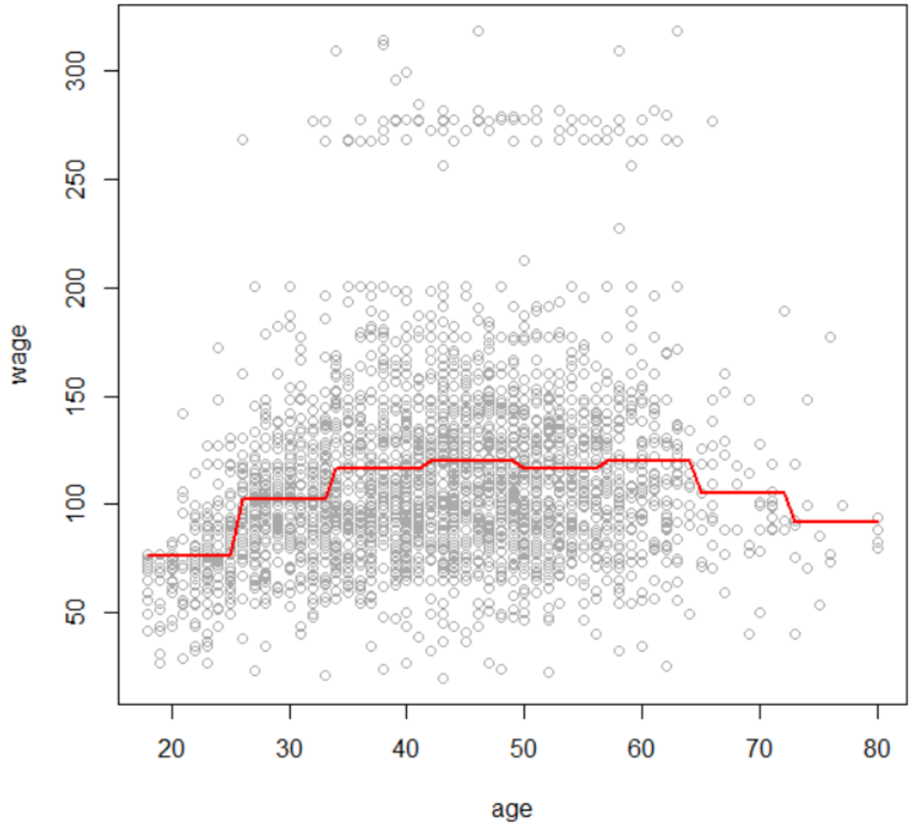
1.2

```
> cvs = rep(NA, 10)
> for (i in 2:10) {
+     Wage$age.cut = cut(Wage$age, i)
+     fit = glm(wage ~ age.cut, data = Wage)
+     cvs[i] = cv.glm(Wage, fit, K = 10)$delta[1]
+ }
> plot(2:10, cvs[-1], xlab = "Cuts", ylab = "Test MSE", type = "l")
> d.min = which.min(cvs)
> points(which.min(cvs), cvs[which.min(cvs)], col = "red", cex = 2, pch = 20)
```



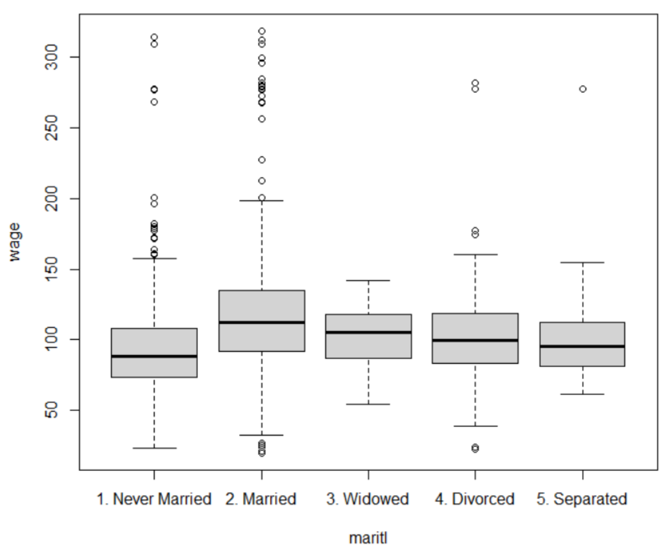
Зважаючи на результат можемо побачити, що помилка буде мінімальною для 8 зрізів.

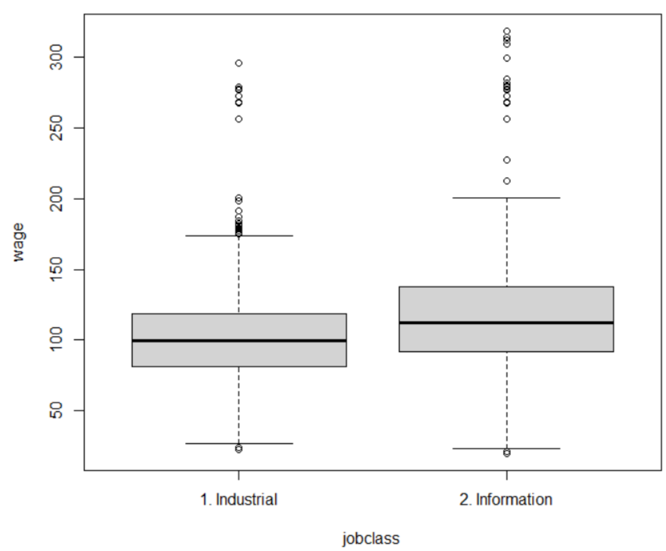
```
> plot(wage ~ age, data = Wage, col = "darkgrey")
> agelims = range(Wage$age)
> age.grid = seq(from = agelims[1], to = agelims[2])
> fit = glm(wage ~ cut(age, 8), data = Wage)
> preds = predict(fit, data.frame(age = age.grid))
> lines(age.grid, preds, col = "red", lwd = 2)
```



2. Wage

```
> summary(Wage$maritl)
1. Never Married       2. Married        3. Widowed       4. Divorced      5. Separated
             648             2074                19               204                55
> summary(Wage$jobclass)
 1. Industrial 2. Information
          1544           1456
```

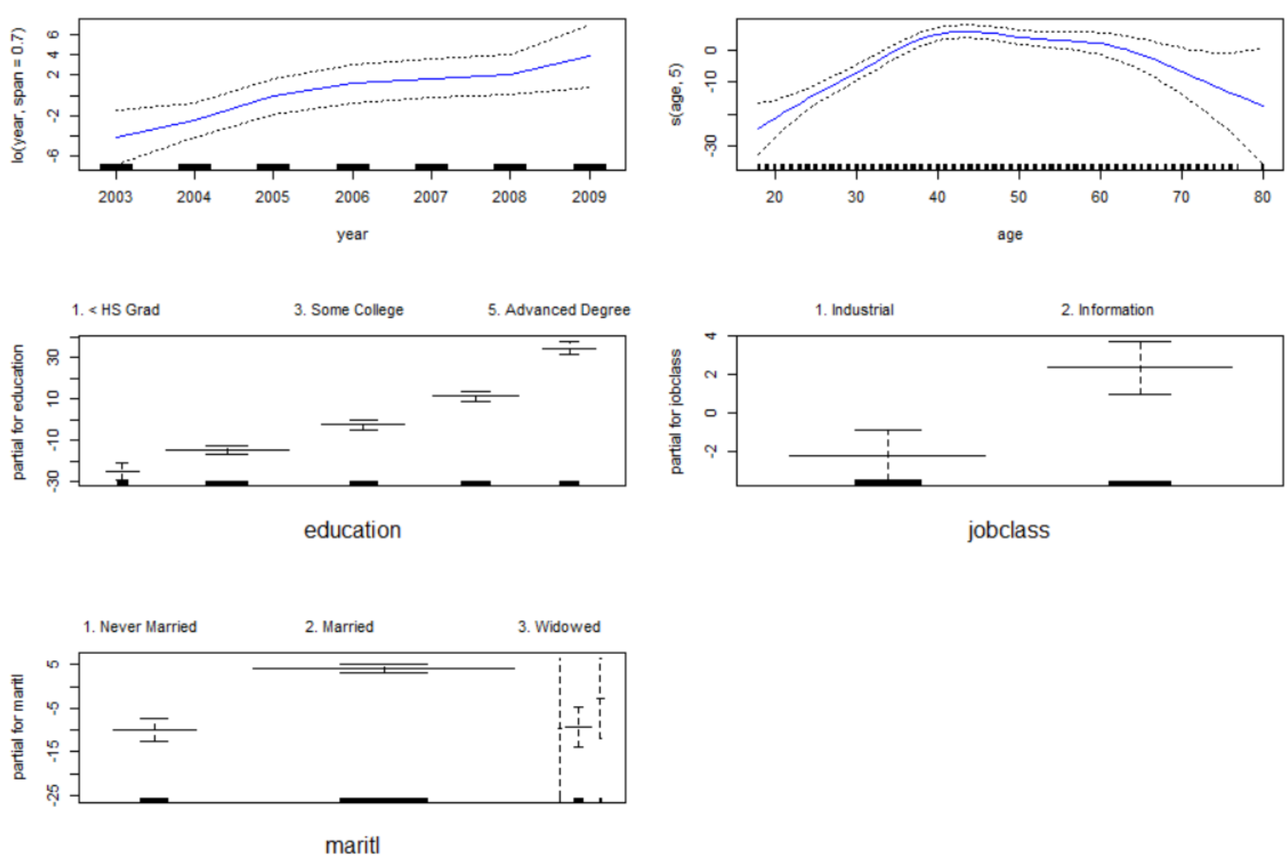




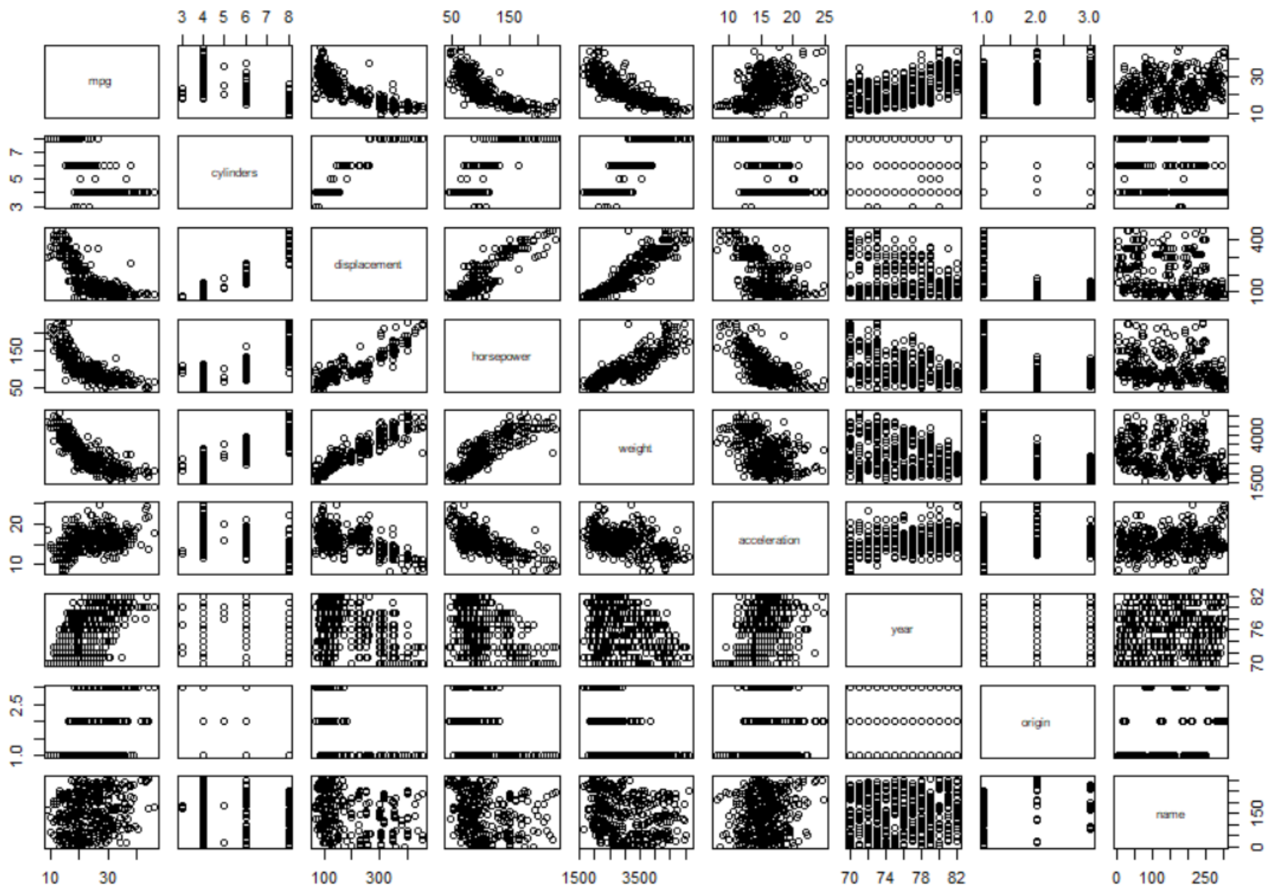
Отже, можна зробити висновок, що подружжя в середньому заробляє більше грошей ніж решта категорій, а також, що працівник в інформаційній сфері в середньому заробляє більше ніж в індустріальній.

```
> fit0 = gam(wage ~ lo(year, span = 0.7) + s(age, 5) + education, data = Wage)
> fit1 = gam(wage ~ lo(year, span = 0.7) + s(age, 5) + education + jobclass, data = Wage)
> fit2 = gam(wage ~ lo(year, span = 0.7) + s(age, 5) + education + maritl, data = Wage)
> fit3 = gam(wage ~ lo(year, span = 0.7) + s(age, 5) + education + jobclass + maritl, data = Wage)
> anova(fit0, fit1, fit2, fit3)
Analysis of Deviance Table

Model 1: wage ~ lo(year, span = 0.7) + s(age, 5) + education
Model 2: wage ~ lo(year, span = 0.7) + s(age, 5) + education + jobclass
Model 3: wage ~ lo(year, span = 0.7) + s(age, 5) + education + maritl
Model 4: wage ~ lo(year, span = 0.7) + s(age, 5) + education + jobclass +
    maritl
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance  Pr(>Chi)
1    2987.1    3691855
2    2986.1    3679689  1    12166 0.0014637 **
3    2983.1    3597526  3    82163  9.53e-15 ***
4    2982.1    3583675  1    13852 0.0006862 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

З результатів видно, що найкраще підходить третя модель.



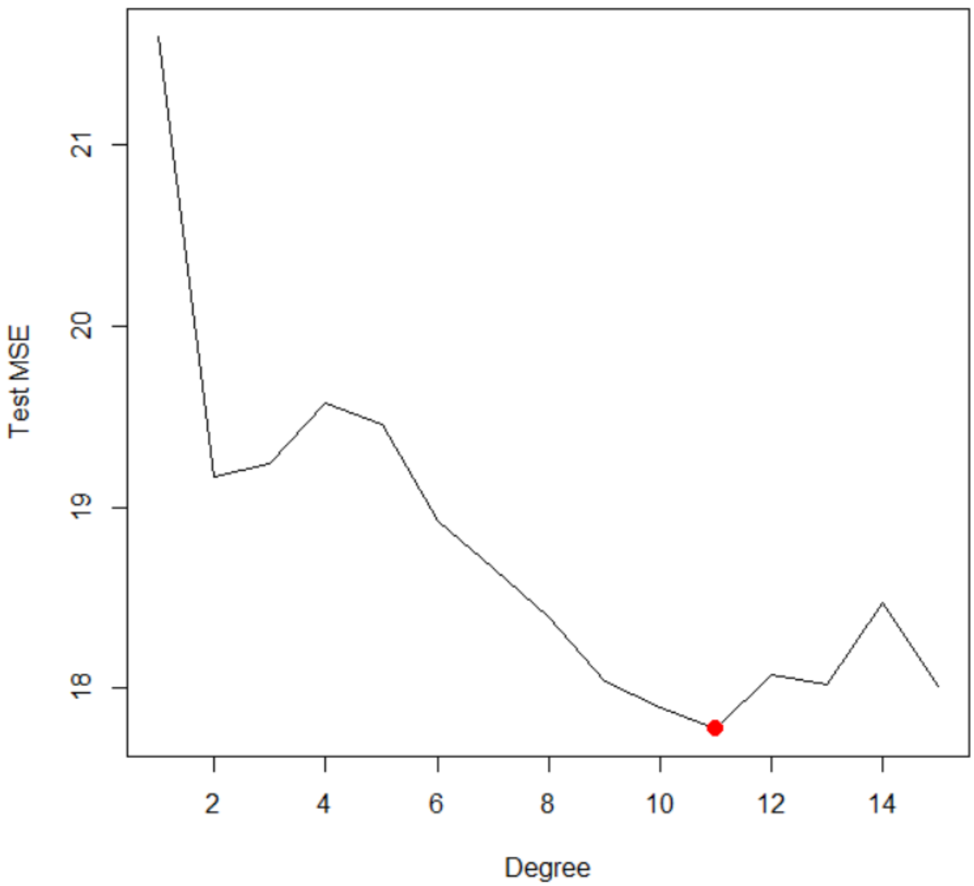
3. Auto



З графіків пар можна легко побачити, що mpg негативно корелює з cylinders, displacement, horsepower та weight.

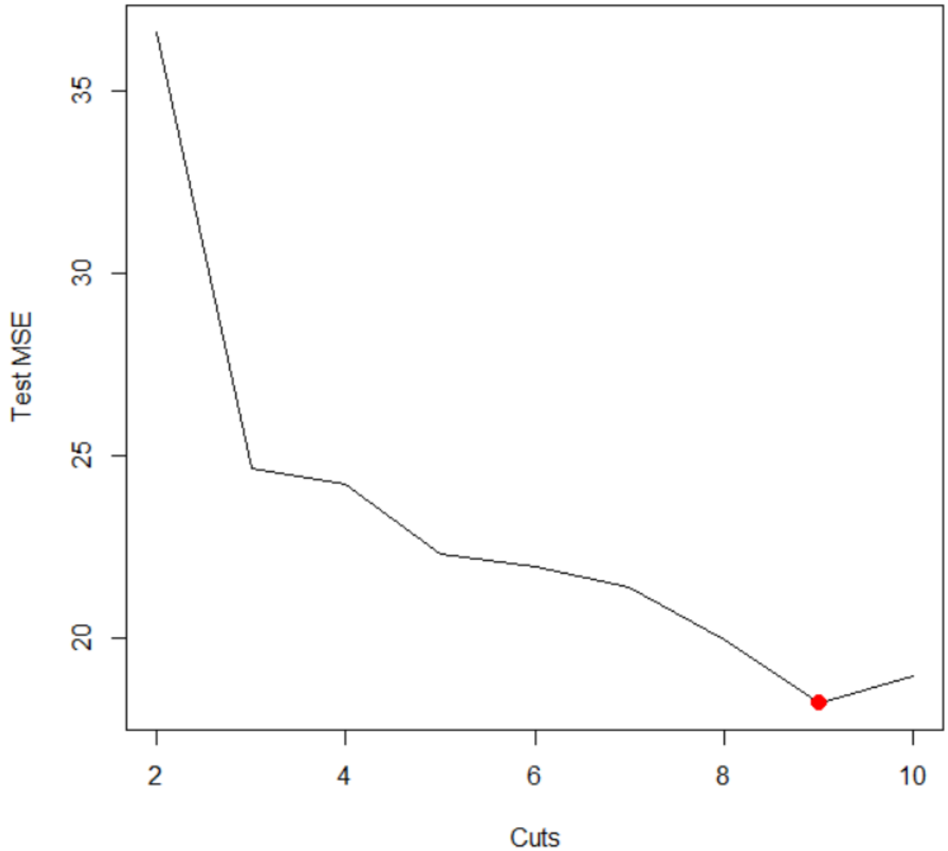
```
> deltas = rep(NA, 15)
> for (i in 1:15) {
+     fit = glm(mpg ~ poly(displacement, i), data = Auto)
+     deltas[i] = cv.glm(Auto, fit, K = 10)$delta[1]
+ }
> plot(1:15, deltas, xlab = "Degree", ylab = "Test MSE", type = "l")
> d.min = which.min(deltas)
> points(which.min(deltas), deltas[which.min(deltas)], col = "red", cex = 2, pch = 20)
```

Зважаючи на графік наведений нижче можемо побачити, що d=11 є оптимальним степенем для полінома.



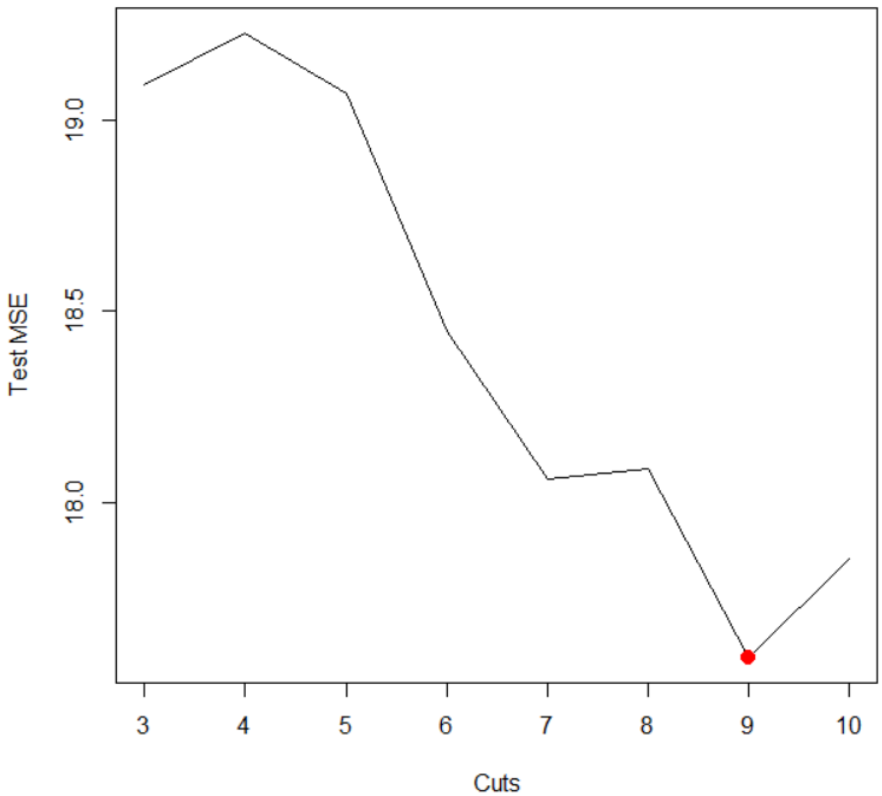

```
> cvs = rep(NA, 10)
> for (i in 2:10) {
+     Auto$dis.cut = cut(Auto$displacement, i)
+     fit = glm(mpg ~ dis.cut, data = Auto)
+     cvs[i] = cv.glm(Auto, fit, K = 10)$delta[1]
+ }
> plot(2:10, cvs[-1], xlab = "Cuts", ylab = "Test MSE", type = "l")
> d.min = which.min(cvs)
> points(which.min(cvs), cvs[which.min(cvs)], col = "red", cex = 2, pch = 20)
```

Зважаючи на графік наведений нижче можемо побачити, що помилка буде мінімальною для 9 зрізів.




```
> library(splines)
> cvs = rep(NA, 10)
> for (i in 3:10) {
+     fit = glm(mpg ~ ns(displacement, df = i), data = Auto)
+     cvs[i] = cv.glm(Auto, fit, K = 10)$delta[1]
+ }
> plot(3:10, cvs[-c(1, 2)], xlab = "Cuts", ylab = "Test MSE", type = "l")
> d.min = which.min(cvs)
> points(which.min(cvs), cvs[which.min(cvs)], col = "red", cex = 2, pch = 20)
```

Зважаючи на графік наведений нижче, можемо побачити, що похибка мінімальна для 9 ступенів свободи.

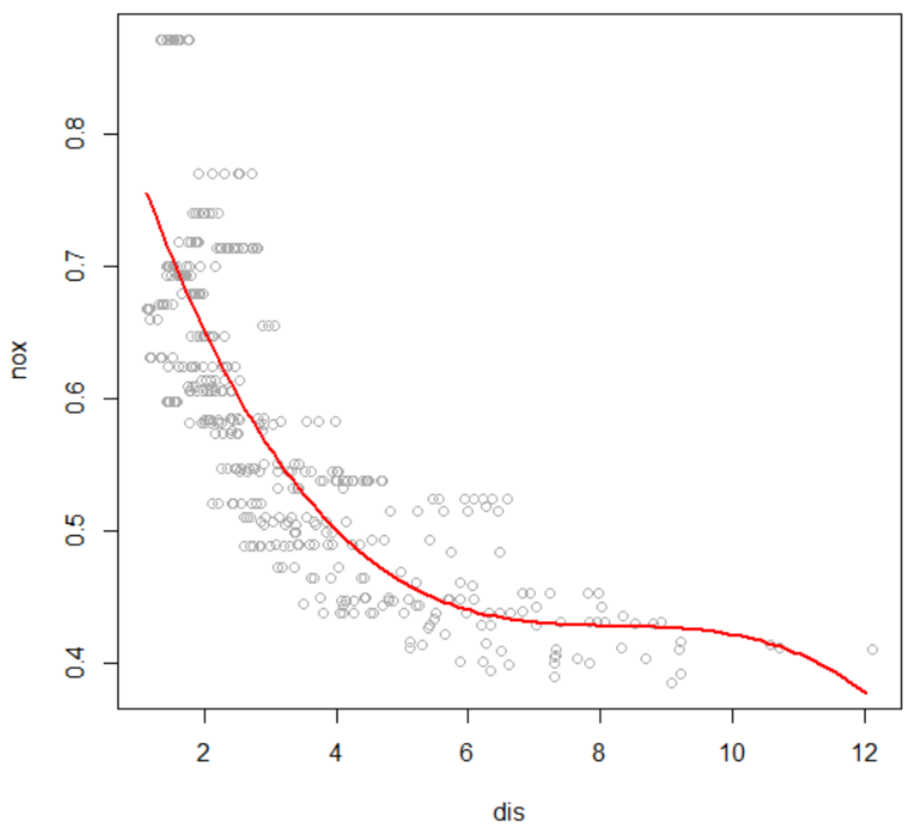



```
> fit = gam(mpg ~ s(displacement, 4) + s(horsepower, 4), data = Auto)
> summary(fit)

Call: gam(formula = mpg ~ s(displacement, 4) + s(horsepower, 4), data = Auto)
Deviance Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.2982  -2.1592  -0.4394   2.1247  17.0946

(Dispersion Parameter for gaussian family taken to be 15.3543)

    Null Deviance: 23818.99 on 391 degrees of freedom
Residual Deviance: 5880.697 on 382.9999 degrees of freedom
AIC: 2194.05

Number of Local Scoring Iterations: NA

Anova for Parametric Effects
                    Df  Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
s(displacement, 4)   1 15254.9 15254.9 993.524 < 2e-16 ***
s(horsepower, 4)     1  1038.4  1038.4  67.632 3.1e-15 ***
Residuals          383  5880.7    15.4
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Anova for Nonparametric Effects
                   Npar Df Npar F     Pr(F)
(Intercept)
s(displacement, 4)       3 13.613 1.863e-08 ***
s(horsepower, 4)         3 15.606 1.349e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

4. Boston

4.1

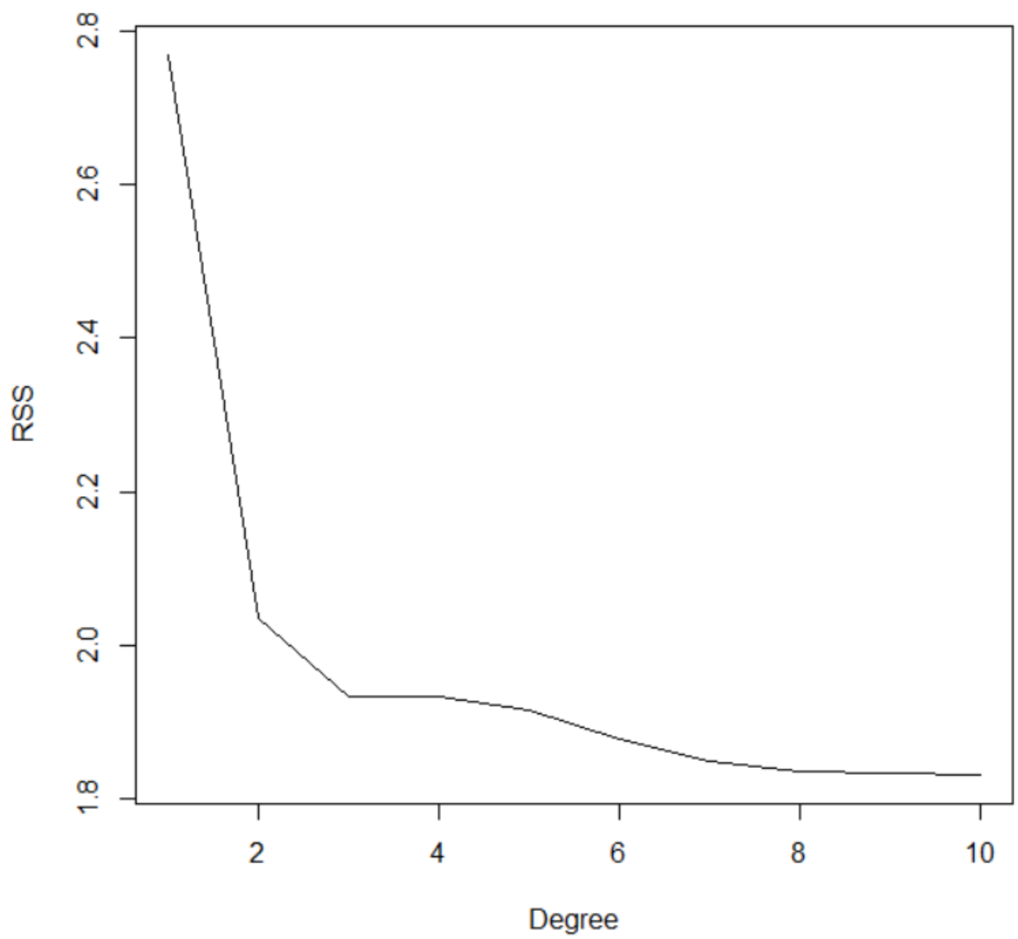
```
> library(MASS)
> set.seed(1)
> fit = lm(nox ~ poly(dis, 3), data = Boston)
> summary(fit)

Call:
lm(formula = nox ~ poly(dis, 3), data = Boston)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max 
-0.121130 -0.040619 -0.009738  0.023385  0.194904 

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)    0.554695   0.002759 201.021  < 2e-16 ***
poly(dis, 3)1 -2.003096   0.062071 -32.271  < 2e-16 ***
poly(dis, 3)2  0.856330   0.062071  13.796  < 2e-16 ***
poly(dis, 3)3 -0.318049   0.062071  -5.124 4.27e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.06207 on 502 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7148,	Adjusted R-squared:  0.7131 
F-statistic: 419.3 on 3 and 502 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



З наведених вище результатів можна сказати, що всі доданки в поліномі є значущими.

4.2

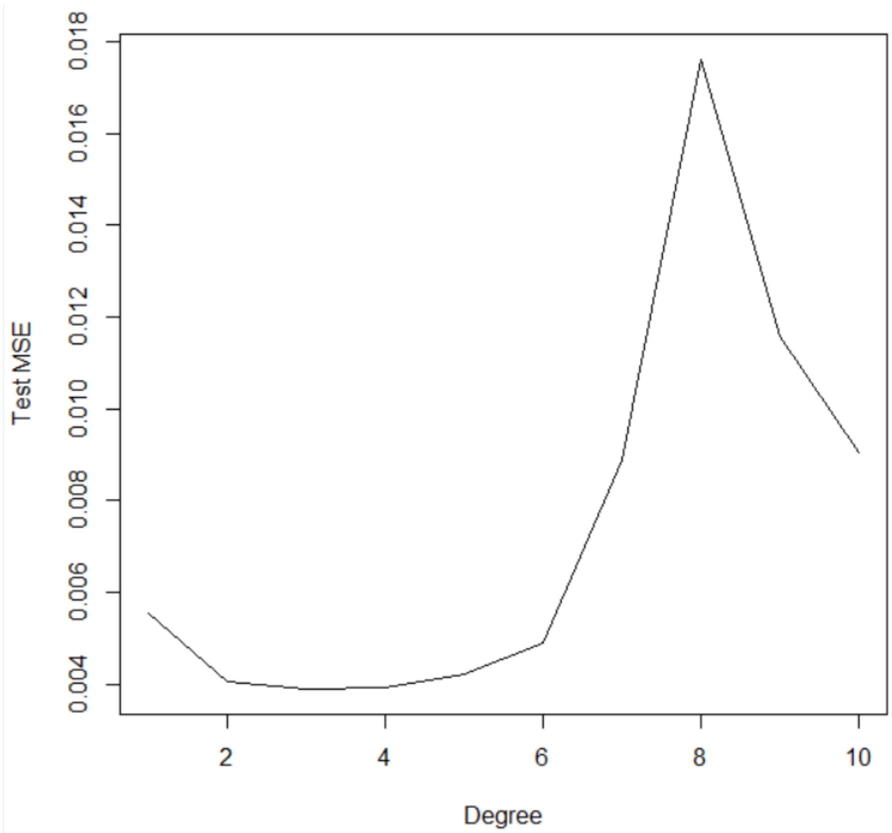
```
> rss = rep(NA, 10)
> for (i in 1:10) {
+     fit = lm(nox ~ poly(dis, i), data = Boston)
+     rss[i] = sum(fit$residuals^2)
+ }
> plot(1:10, rss, xlab = "Degree", ylab = "RSS", type = "l")
```



З графіка, можна сказати, що RSS зменшується зі збільшенням степеня полінома.

4.3

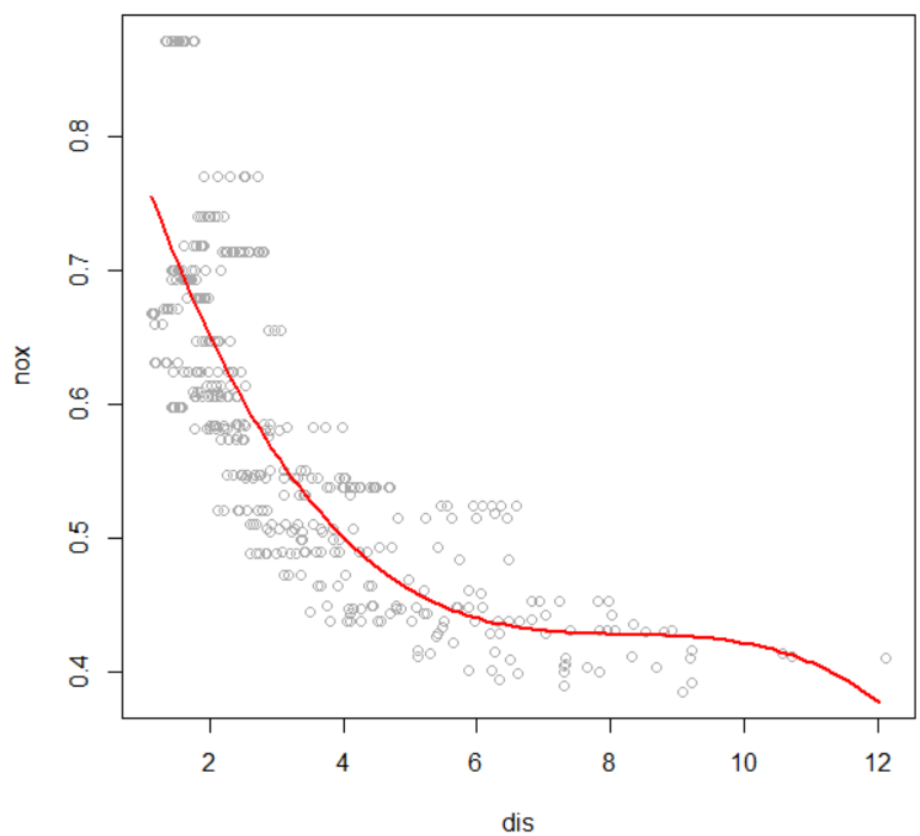
```
> deltas = rep(NA, 10)
> for (i in 1:10) {
+     fit = glm(nox ~ poly(dis, i), data = Boston)
+     deltas[i] = cv.glm(Boston, fit, K = 10)$delta[1]
+ }
> plot(1:10, deltas, xlab = "Degree", ylab = "Test MSE", type = "l")
```



З графіка видно, що найменше MSE при степені полінома чотири.

4.4

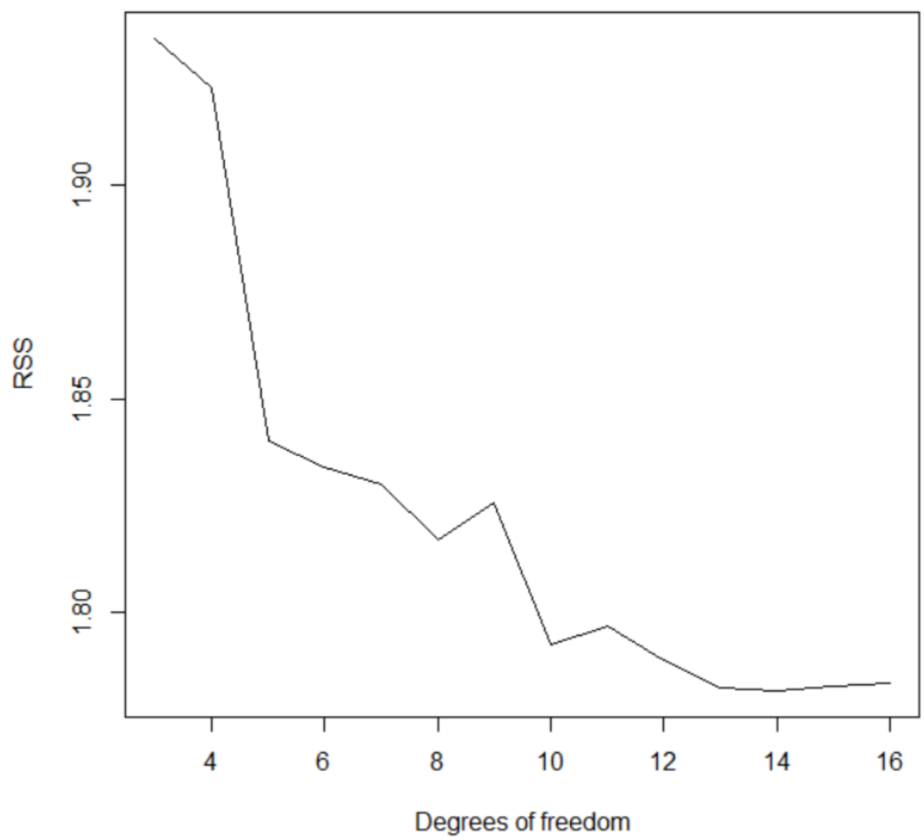
```
> fit = lm(nox ~ bs(dis, knots = c(4, 7, 11)), data = Boston)
> summary(fit)

Call:
lm(formula = nox ~ bs(dis, knots = c(4, 7, 11)), data = Boston)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max 
-0.124567 -0.040355 -0.008702  0.024740  0.192920 

Coefficients:
                              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)                    0.73926    0.01331  55.537  < 2e-16 ***
bs(dis, knots = c(4, 7, 11))1 -0.08861    0.02504  -3.539  0.00044 ***
bs(dis, knots = c(4, 7, 11))2 -0.31341    0.01680 -18.658  < 2e-16 ***
bs(dis, knots = c(4, 7, 11))3 -0.26618    0.03147  -8.459 3.00e-16 ***
bs(dis, knots = c(4, 7, 11))4 -0.39802    0.04647  -8.565  < 2e-16 ***
bs(dis, knots = c(4, 7, 11))5 -0.25681    0.09001  -2.853  0.00451 ** 
bs(dis, knots = c(4, 7, 11))6 -0.32926    0.06327  -5.204 2.85e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.06185 on 499 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7185,	Adjusted R-squared:  0.7151 
F-statistic: 212.3 on 6 and 499 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



З наведених вище результатів можна сказати, що всі терми у сплайні є значущими.

4.5

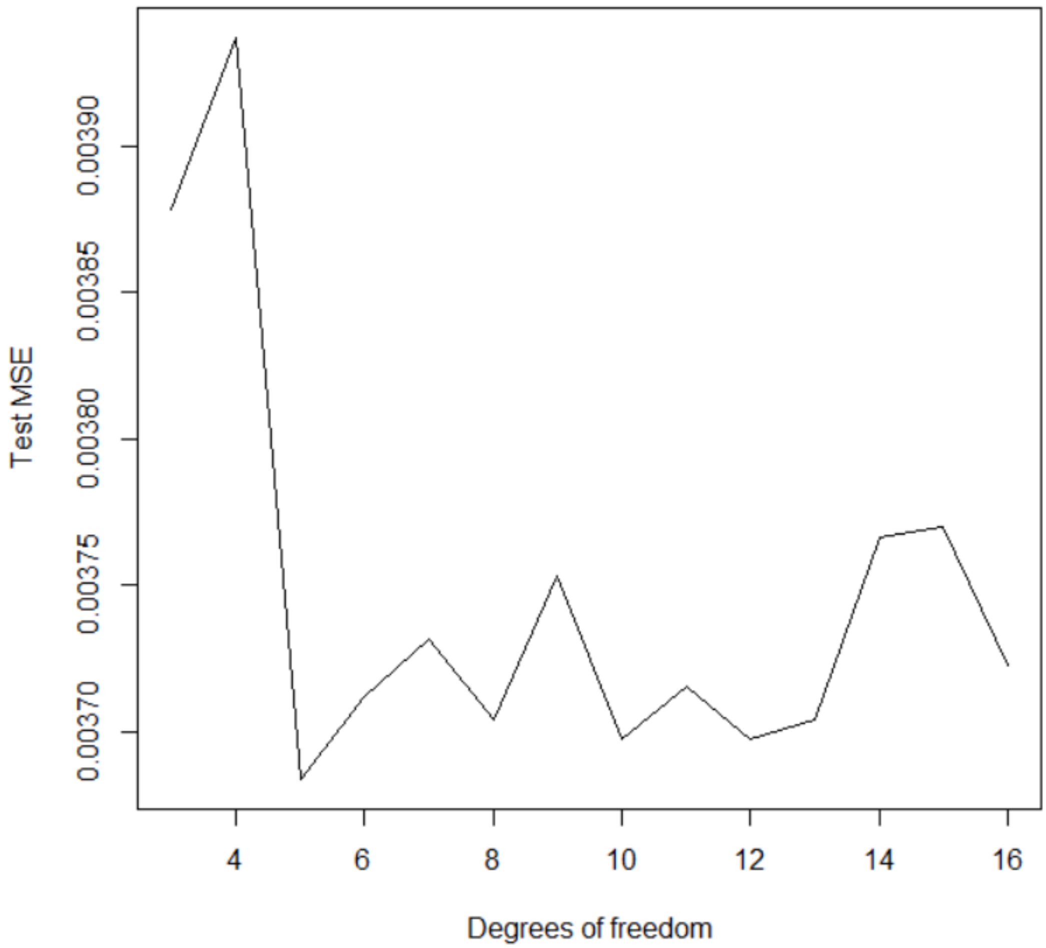
```
> rss = rep(NA, 16)
> for (i in 3:16) {
+     fit = lm(nox ~ bs(dis, df = i), data = Boston)
+     rss[i] = sum(fit$residuals^2)
+ }
> plot(3:16, rss[-c(1, 2)], xlab = "Degrees of freedom", ylab = "RSS", type = "l")
```



Можемо побачити, що RSS спадає до 14, а потім починає по трохи зростати.

4.6

```
> cv = rep(NA, 16)
> for (i in 3:16) {
+     fit = glm(nox ~ bs(dis, df = i), data = Boston)
+     cv[i] = cv.glm(Boston, fit, K = 10)$delta[1]
+ }
There were 50 or more warnings (use warnings() to see the first 50)
> plot(3:16, cv[-c(1, 2)], xlab = "Degrees of freedom", ylab = "Test MSE", type = "l")
```

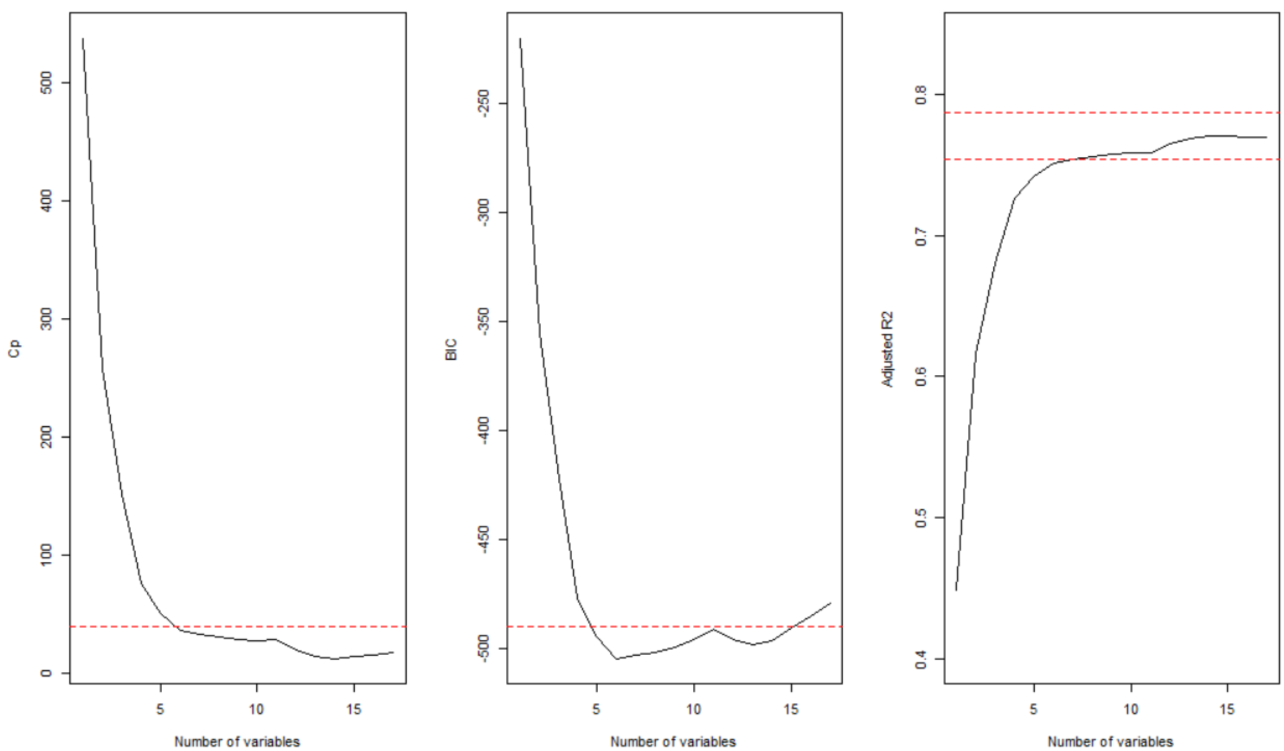


Тестова MSE мінімальна для п’яти ступенів свободи.

5. College

5.1

```
> train = sample(length(Outstate), length(Outstate) / 2)
> test = -train
> College.train = College[train, ]
> College.test = College[test, ]
> fit = regsubsets(Outstate ~ ., data = College.train, nvmax = 17, method = "forward")
> fit.summary = summary(fit)
> par(mfrow = c(1, 3))
> plot(fit.summary$cp, xlab = "Number of variables", ylab = "Cp", type = "l")
> min.cp = min(fit.summary$cp)
> std.cp = sd(fit.summary$cp)
> abline(h = min.cp + 0.2 * std.cp, col = "red", lty = 2)
> abline(h = min.cp - 0.2 * std.cp, col = "red", lty = 2)
> plot(fit.summary$bic, xlab = "Number of variables", ylab = "BIC", type='l')
> min.bic = min(fit.summary$bic)
> std.bic = sd(fit.summary$bic)
> abline(h = min.bic + 0.2 * std.bic, col = "red", lty = 2)
> abline(h = min.bic - 0.2 * std.bic, col = "red", lty = 2)
> plot(fit.summary$adjr2, xlab = "Number of variables", ylab = "Adjusted R2", type = "l", ylim = c(0.4, 0.84))
> max.adjr2 = max(fit.summary$adjr2)
> std.adjr2 = sd(fit.summary$adjr2)
> abline(h = max.adjr2 + 0.2 * std.adjr2, col = "red", lty = 2)
> abline(h = max.adjr2 - 0.2 * std.adjr2, col = "red", lty = 2)
```

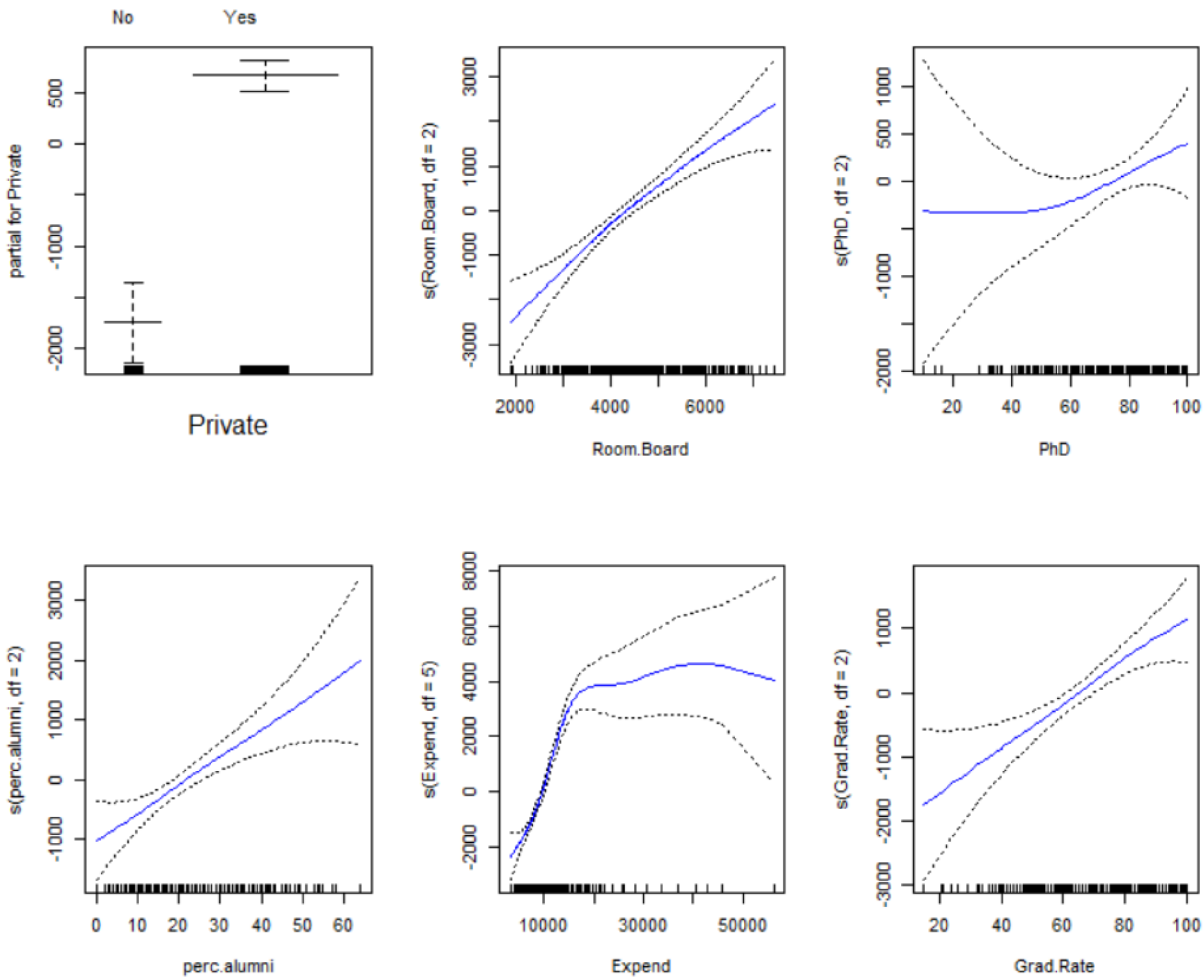


Cp, BIC і скорегований R^2 показують, що розмір 6 є мінімальним розміром для підмножини.

```
> fit = regsubsets(Outstate ~ ., data = College, method = "forward")
> coeffs = coef(fit, id = 6)
> names(coeffs)
[1] "(Intercept)" "PrivateYes"  "Room.Board"  "PhD"          "perc.alumni" "Expend"      "Grad.Rate"
```

5.2

```
> library(gam)
> fit = gam(Outstate ~ Private + s(Room.Board, df = 2) + s(PhD, df = 2) + s(perc.alumni, df = 2) + s(Expend, df = 5) + s(Grad.Rate, df = 2),
+ data=College.train)
> par(mfrow = c(2, 3))
> plot(fit, se = T, col = "blue")
```



5.3

```
> preds = predict(fit, College.test)
> err = mean((College.test$Outstate - preds)^2)
> err
[1] 3349290
> tss = mean((College.test$Outstate - mean(College.test$Outstate))^2)
> rss = 1 - err / tss
> rss
[1] 0.7660016
```

Ми отримуємо тест R^2 0,766, використовуючи GAM з 6 предикторами.

5.4

```
> summary(fit)

Call: gam(formula = Outstate ~ Private + s(Room.Board, df = 2) + s(PhD, 
    df = 2) + s(perc.alumni, df = 2) + s(Expend, df = 5) + s(Grad.Rate, 
    df = 2), data = College.train)
Deviance Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-7402.89 -1114.45   -12.67  1282.69  7470.60 

(Dispersion Parameter for gaussian family taken to be 3711182)

    Null Deviance: 6989966760 on 387 degrees of freedom
Residual Deviance: 1384271126 on 373 degrees of freedom
AIC: 6987.021 

Number of Local Scoring Iterations: NA 

Anova for Parametric Effects
                        Df     Sum Sq    Mean Sq F value    Pr(>F)    
Private                  1 1778718277 1778718277 479.286 < 2.2e-16 ***
s(Room.Board, df = 2)    1 1577115244 1577115244 424.963 < 2.2e-16 ***
s(PhD, df = 2)           1  322431195  322431195  86.881 < 2.2e-16 ***
s(perc.alumni, df = 2)   1  336869281  336869281  90.771 < 2.2e-16 ***
s(Expend, df = 5)        1  530538753  530538753 142.957 < 2.2e-16 ***
s(Grad.Rate, df = 2)     1   86504998   86504998  23.309 2.016e-06 ***
Residuals              373 1384271126    3711182                      
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Anova for Nonparametric Effects
                       Npar Df  Npar F     Pr(F)    
(Intercept)                                         
Private                                             
s(Room.Board, df = 2)        1  1.9157    0.1672    
s(PhD, df = 2)               1  0.9699    0.3253    
s(perc.alumni, df = 2)       1  0.1859    0.6666    
s(Expend, df = 5)            4 20.5075 2.665e-15 ***
s(Grad.Rate, df = 2)         1  0.5702    0.4506    
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

ANOVA показує чіткий не лінійний зв'язок між Outstate та Expend.

6. Метод підгонки

6.1

```
> set.seed(1)
> X1 = rnorm(100)
> X2 = rnorm(100)
> eps = rnorm(100, sd = 0.1)
> Y = -3.14 + 2.72 * X1 + 0.5 * X2 + eps
```

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

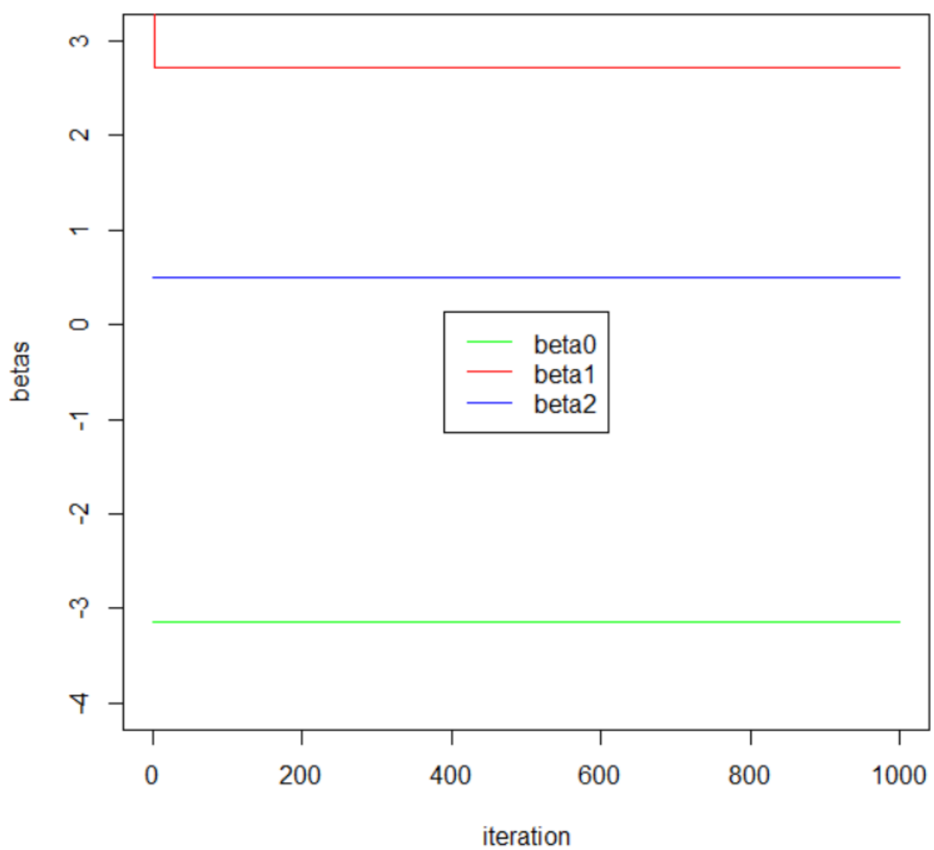
6.2

```
> beta0 = rep(0, 1000)
> beta1 = rep(0, 1000)
> beta2 = rep(0, 1000)
> beta1[1] = 7
```

Візьмемо $\beta_1 = 7$.

6.3–6.5

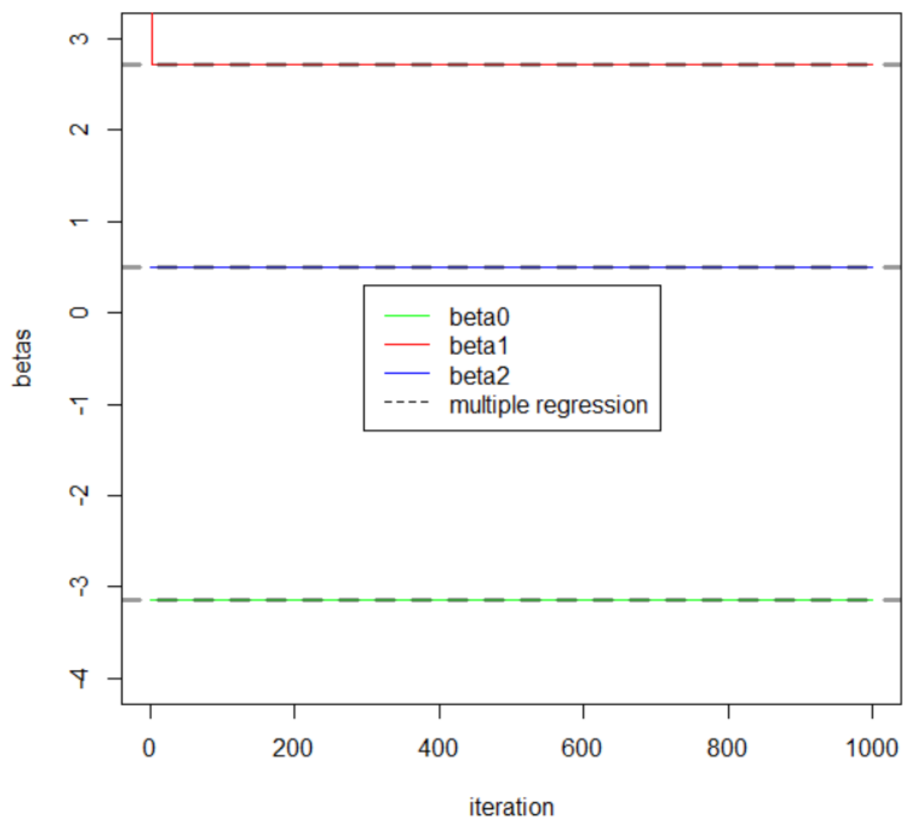
```
> for (i in 1:1000) {
+     a = Y - beta1[i] * X1
+     beta2[i] = lm(a ~ X2)$coef[2]
+     a = Y - beta2[i] * X2
+     lm.fit = lm(a ~ X1)
+     if (i < 1000) {
+         beta1[i + 1] = lm.fit$coef[2]
+     }
+     beta0[i] = lm.fit$coef[1]
+ }
> plot(1:1000, beta0, type = "l", xlab = "iteration", ylab = "betas", ylim = c(-4, 3), col = "green")
> lines(1:1000, beta1, col = "red")
> lines(1:1000, beta2, col = "blue")
> legend("center", c("beta0", "beta1", "beta2"), lty = 1, col = c("green", "red", "blue"))
```



Коефіцієнти швидко досягають значень найменших квадртатів.

6.6

```
> lm.fit = lm(Y ~ X1 + X2)
> plot(1:1000, beta0, type = "l", xlab = "iteration", ylab = "betas", ylim = c(-4, 3), col = "green")
> lines(1:1000, beta1, col = "red")
> lines(1:1000, beta2, col = "blue")
> abline(h = lm.fit$coef[1], lty = "dashed", lwd = 3, col = rgb(0, 0, 0, alpha = 0.4))
> abline(h = lm.fit$coef[2], lty = "dashed", lwd = 3, col = rgb(0, 0, 0, alpha = 0.4))
> abline(h = lm.fit$coef[3], lty = "dashed", lwd = 3, col = rgb(0, 0, 0, alpha = 0.4))
> legend("center", c("beta0", "beta1", "beta2", "multiple regression"), lty = c(1,
+     1, 1, 2), col = c("green", "red", "blue", "black"))
```



Пунктирні лінії на графіку показують, що коефіцієнти множинної регресії точно збігаються з коефіцієнтами отриманими за допомогою backfitting-у.

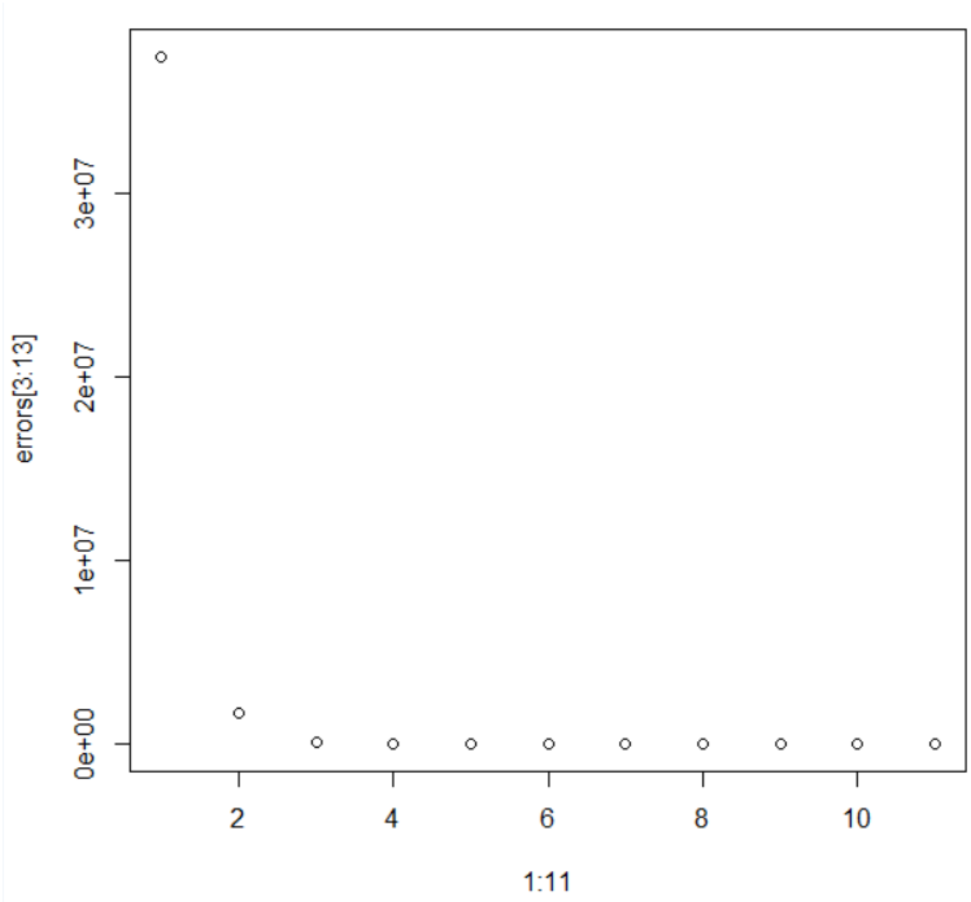
6.7

Коли зв’язок між ігреком та іксами є лінійним, однієї ітерації достатньо для досягнення хорошого наближення до істинних коефіцієнтів регресії.

7.

```
> # 7
> set.seed(1)
> p = 100
> n = 1000
> x = matrix(ncol = p, nrow = n)
> coefi = rep(0, p)
> for (i in 1:p) {
+     x[, i] = rnorm(n)
+     coefi[i] = rnorm(1) * 100
+ }
> y = x %*% coefi + rnorm(n)
>
> beta = rep(0, p)
> max_iterations = 1000
> errors = rep(0, max_iterations + 1)
> iter = 2
> errors[1] = Inf
> errors[2] = sum((y - x %*% beta)^2)
> threshold = 1e-04
> while (iter < max_iterations && errors[iter - 1] - errors[iter] > threshold) {
+     for (i in 1:p) {
+         a = y - x %*% beta + beta[i] * x[, i]
+         beta[i] = lm(a ~ x[, i])$coef[2]
+     }
+     iter = iter + 1
+     errors[iter] = sum((y - x %*% beta)^2)
+     print(c(iter - 2, errors[iter - 1], errors[iter]))
+ }
[1]          1 1016122216   37472751
[1]        2 37472751  1669889
[1]       3.00 1669889.42   77923.75
[1]     4.000 77923.754  6157.425
[1]     5.000 6157.425 1277.046
[1]     6.0000 1277.0458  928.3072
[1]    7.0000 928.3072 904.7608
[1]    8.0000 904.7608 903.2173
[1]    9.0000 903.2173 903.1259
[1]   10.0000 903.1259 903.1232
[1]   11.0000 903.1232 903.1239
>
> plot(1:11, errors[3:13])
```

Десять ітерацій достатньо, щоб отримати хорошу апроксимацію визначену пороговим значенням суми квадратичних помилок між наступними ітераціями. Також видно, що похибка збільшується на 11-й ітерації.


errors[3:13]
3e+07
2e+07
1e+07
0e+00
2
4
6
8
10
1:11