3/02

Compress° de données.

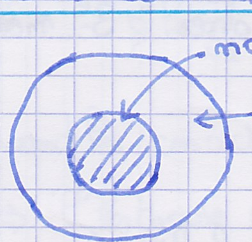
1)

revoir Huffman.

Compression conservative :

I Introduction

- Cas de la redondance :



redondance : c'est cette partie que le compresseur souhaite enlever.

Lors de la transmis°, on rajoute exprès de la redondance pour que le recepteur puisse comprendre le message.

- La compression conservative va s'attacher à la redondance. On l'utilise sur des données matériels.

- Pour la compress° non conservative, on l'utilise sur les signaux et son traitement.

- taille d'un film : $(\underbrace{768 \times 576}_{\text{Image}} \times \underset{\text{couleur}}{3} \times \underset{\text{fréquence}}{25}) + \text{son} \simeq 0{,}5$ Mo/s

→ Au début, impossibilité de faire tenir un film sur un CD de 700Mo. Arrivée du DVD ⇒ possibilité ouverte.

- Normalisat° du jpg = travail sur la norme grâce à des scientifiques, de physiciens et des médecins de l'oreille...

Pour le moment, cette norme reste au premier plan sur le marché.

But : Compression de données : un texte de 100 M caractères.
Quelle est la limite (taille du noyau) ?

I ~~L~~'entropie du signal :

- Cela fait partie de la théorie de l'info° par Shannon 1949.
(Juste après la 2nd guerre mondiale dû au besoin des armées durant cette dernière).

"Demain, nous sommes Jeudi." 1er message.

Y'a t'il de l'info°? Non, car d'après nos connaissances, on le sait déjà.

"Demain, il fera 10 degrés" 2e message.

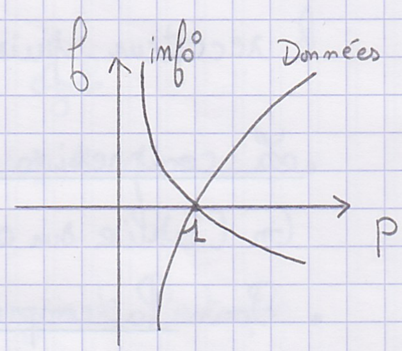
Est ce de l'info°? Oui, mais dont la valeur est amoindrie.

"Le Vesuve a explosé, Naples est sous les cendres". 3e message.

⇒ La surprise fait l'intérêt de l'info°.
↳ la probabilité.

⇒ qté d'info° est proport^l à l'inverse de sa probabilité.

Fondet de la théorie de l'info°: $\boxed{q = f\left(\frac{1}{p}\right)}$



D'où $q = \log\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow \boxed{q = -\log(p)}$

p : probabilité de l'info° / q : qté d'info°

Ex : N caractères ds un fichier.
J symboles (= 26 pour nous)

Qu'elle est la fréquence d'apparit° des 26 lettres de l'alphabet.

$P_i = \frac{n_i}{N}$ {probabilité d'apparit° d'1 lettre}

La table de fréquence n'est pas equi-probable (toutes les lettres n'ont pas la m̂ proba^lité d'apparaître.

$Q = -N \sum_{i=0}^{J-1} P_i \log(P_i)$ = qté d'info° contenue ds le fichier.

emière significat° de l'entropie:

$$\boxed{S = -\sum_{i=0}^{J-1} P_i \log_2(P_i)}$$ formule entropie

↳ l'entropie du message (en bit/caractère).

Cette entropie est basé sur la fréquence d'apparit° des caractères.
Plus un caractère a une probabilité gde, plus il prend une place petite, et inverse^t pour les caractères rares.

$S \times 10^3$ = borne inférieure du codage minimal.

que l'on compare au fichier de $8 \cdot 10^3$ bits.

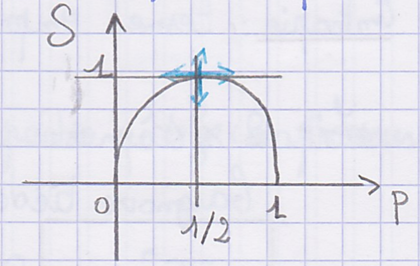
Applicat°:

$P(0) = p$

$P(1) = 1 - p$

- À partir d'1 fichier avec 1 alphabet binaire:

$$S = -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$



Quand les caractères sont équiprobables

$\Rightarrow$ l'entropie est maximal.

- Soit un fichier de taille N:

$T_0 = N$ (chaque tirage a un code de 1 bit)

Si les caractères sont équiprobables, ce fichier n'est pas compressible.

ccl:

Un fichier aléatoire n'est pas compressible.

- Soit un fichier d'image de N pixels:

$J = 256$ {nb de couleurs} et $T = N$ octets.

$$S = \sum_{i=0}^{255} \frac{1}{256} \log_2(2^8) = \sum_{i=0}^{255} \frac{8}{256} = 8 \text{ bits/pixel.}$$

ccl:

Un fichier aléatoire n'est pas compressible.

Il faut que l'équi-probabilité soit cassés pour que le fichier soit compressible.

$2^{ème}$ significat° de l'entropie:

L'entropie donne l'ordre implicite des données.

Plus elle est faible, plus les données sont ordonnées.

Plus il y a de l'ordre, plus on pourra compresser.

- - Soit un nuage de pt aléatoire ds le plan:

Combien ai-je besoin de valeur: $2N$ valeurs pour N points.

- Soit N points répartis sur 1 droite:

Il faut $(N+1)$ valeurs. $\simeq$ 2 fois $\ominus$.

La compress° de D, c'est chercher la loi qui existe entre les données.

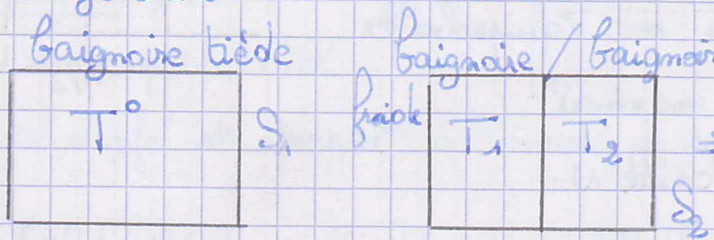
C'est l'art de trouver la loi.

L'ordre est donné par l'entropie.

Vocabulaire:

Entropie : terme emprunté à la thermodynamique.

Soit 2 systèmes :



$\Rightarrow T = \frac{T_1 + T_2}{2}$ ← eau froide, eau chaude

U_1 : energie cinétique du système = energie interne.

U_2 = energie interne égale tq $U = U_1 = U_2$

Qu'est ce qui décrit les 2 systèmes ? Il s'agit de l'entropie

S_1 est desordonné et S_2 est très bien ordonnée

Une entropie faible ⇒ ordre.

fort ⇒ desordre du système ⇒ thermiq^t mort.

Ccl : L'univers va de l'ordre vers le désordre.

Application:

Ds le cas d'1 suite : 0 1 0 1 0 1 ...

$S(p) = 0,5$, pourtant le fichier n'est pas désordonné !

Il va falloir regarder cmt utiliser l'entropie.

Si on regarde le métacaractère "01" ⇒ $S(p) \approx 0$ ⇒ le fichier est ordonné.

Avec une entropie d'ordre 2.

ccl :

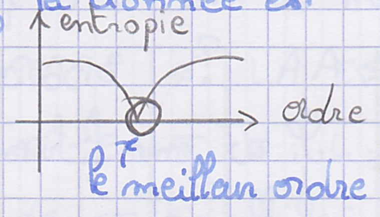
Il faut faire attent° à l'échelle. Il va falloir calculer plusieurs ordre pour voir cmt est composé le fichier.

N.B :

De m̂, pour l'alphabet on utilisera plutôt la syllables plutôt que la lettre.

compress° de ...
10/02
2

L'échelle qui mettra en relief la donnée est celle où l'entropie sera minimum.



Cas de formule de l'entropie :

- $S = -\sum_{i=0}^{J-1} p_i \log_2(p_i)$
- tout d'abord, le $\log_2$ n'est pas facile à calculer.

si $J = 3$, ce n'est pas compliqué.

De plus, $\boxed{\log_2(x) = \log_e(x) \times \frac{1}{\log_e 2}}$ avec $\log_e(2) = 0,69$

- $S(p) = -\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{3} \times \log_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3} \times \log_2\left(\frac{1}{3}\right)\right) \times 3 = -\log_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-\log_e(1/3)}{\log_e(2)}$

$S(p) = \log_e(3) \times \log_e\left(\frac{1}{2}\right) = 1,59$ bits/caractères.

$p = \frac{1}{3}$ car les caractères sont équi-probables.

- Si $J = 4$, avec des caractères aléatoires, $S(p) = 2$ bits/caractères.
- Trouver l'entropie pour $P_0 = 0,2$, $P_1 = 0,1$ et $P_2 = 0,7$.

$$S(p) = -\left(0,2 \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + 0,1 \log_2\left(\frac{1}{10}\right) + 0,7 \log_2\left(\frac{7}{10}\right)\right)$$
$$= 0,2 \log_2(5) + 0,1 \log_2(1) + 0,7 \log_2(7)$$
$$= \left(0,2 \log_e(5) + 0,1 \log_e(1) + 0,7 \log_e(7)\right) \times \frac{1}{\log_e(2)} = 1,16 \text{ bit/cara}$$

- Entropie du signal c'est la taille la plus petite du signal.

II Les algorithmes de compress° conservatifs :

Nous verrons 3 types de familles

1) Codage des répétitions :

Pour n caractères adjacents qui se répètent, on donne 1 n° d'occurence ⊕ le caractère

Exemple : AA 8888 8888 BBBB CC $N = 16$ 32 bits.

- Compress° des caractères qui se suivent.

$\Rightarrow$ 2A 88 4B 2C $1^{ère}$ vers° de compression.

On se met à la place de décompresseur :

⇒ AA ? BBBB CC

ccl : Si ds mon fichier, j'ai des nb on ne doit pas utiliser le chiffre d'occurence de la sorte.

Compress° : * 2A * 88 * 4B * 2C (*) caractère spécial.

⚠ pas interessant pour les elts < 3 caractères :

⇒ AA * 88 * 4B CC (30 bits)

Decompresseur : OK

Conclus° :

Ce codage est spécialisé pour 1 unique applica° ⇒ le fax.

Mais c'est tout. Car il y a bcp de plage de blanc qui ne prend pas bcp de place (utilisa° faible de la BP)

2) Le codage entropique :

Huffman (1952).

L'algo est l'express° directe de toutes les express° trouvées.

Quels st les défauts de Huffman :

- C'est à échelle rigide, donc difficile pour du texte.
- balayage préalable pour remplir les tables de fréquences des caractères
- d'où laisser tomber pour du texte.

3) Compress° LZW (1977) :

théorie

programme.

But : pouvoir coder sur 1 support court des paires de chaînes de tailles ≠tes.

Algorithme à apprentissage (apprendre à reconnaître des chaines et à les remplacer par quelque chose de plus court. Le décompresseur doit ê rapide.

Exemple :

Soit le proverbe : AIDE TOI ET LE CIEL T'AIDERAS. ⚠ aux blancs

@ Compresseur : On recherche les elts ayant des caractères qui se répètent.

reçu	A	I	D	E	Ø	T	O	i	Ø	E	T	Ø	L	E	Ø
écrit		A	I	D	E	Ø	T	O	i	Ø	E	T	Ø	L	SP9
dico		AI	ID	DE	EØ	ØT	TO	Oi	iØ	ØE	ET	TØ	ØL	LE	
@		256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	

lecture sur 9 bits

taille de 8 bits

reçu	C	i	E	L	Ø	T	Ø	A	i	D	E	R	A	Fin
écrit	259	C	i	E	L		260	Ø		256		258	R	A
dico	EØC	Ci	iE	EL	LØ		ØTØ	ØA		AiD		DER	RA	
@	269	270	271	272	273		274	275		276		277	278	

$T_0 = 28 \times 8 = 224$ bits

$T_C = (14 \times 8) + (11 \times 9) = 112 + 99 = 211$ bits $\Rightarrow$ gain pur de 13 bits.

Conclus° :

- algo adaptatif (c.f au dico) qui dépend de la taille du dico.
  (si dico trop petit, recommencet d'1 partie de l'apprentissage ⊕ ou ⊖ gde)
- contrainte tps réel ⇒ goulot d'étranglt prévisible en f° de la taille du dictionnaire. (rapidité possible)

ⓑ Décompresseur :

reçu	décompressé	dico	@	reçu	décomp	dico	@
A							
i	A	Ai	256	E	i	Ei	271
D	i	iD	257	L	E	EL	272
E	D	DE	258	260	L	LØ	273
Ø	E	EØ	259	Ø	ØT	ØTØ	274
T	Ø	ØT	260	256	Ø	ØA	275
O	T	TO	261	258	Ai	AiD	276
i	O	Oi	262	R	DE	DER	277
Ø	i	iØ	263	A	R	RA	278
E	Ø	ØE	264	Fin	A		
T	E	ET	265				
Ø	T	TØ	266				
L	Ø	ØL	267				
[SP9]							
259	L	LE	268				
C	EØ	EØC	269				
i	C	Ci	270				

Le décompresseur va aussi vite que le compresseur, mais la décompress°
agit aussi sur le gain de place.

Les amélioraᵗ° possibles de l'algorithmes:

- préremplir le dictionnaire (ex: ajout des élts du français svt utilisé)
- séquentiel indexé ⊕ ou ⊖ rapide.

Conclusion:

Ds le cas des données, nous sommes maîtres de ces données.
Dorénavant, nous manipulerons des nombres issu d'1 mesure (127 ≃ 128) sig
⇒ cela change absoluᵗ tout.

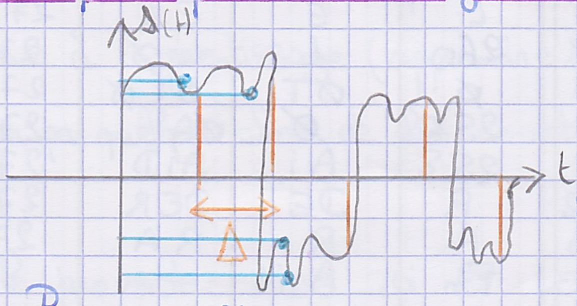
exemple:

chaque pixel s'exprime ds un alphabet de 256 bits.
Pour 1 image blanche on aura 1 fluctua° autour de la valeur moyⁿ
inévitable. Les chaînes ≈ de la valeur auront peu d'occurences
et la significaᵗ° de ces occurances seront faibles. Les algorithmes vues
seront inopérent.
La nature de ce que l'on va manipuler est complèteᵗ ≠ᵗᵉ ⇒ les
algo seront ≠.

III Rappels : numérisaᵗ° des signaux:

- Au début, le signal est tjrs analogique (tens° électrique). Il faut
numériser cette charge.

Exemple à partir d'un signal sonore:



La moyenne est nulle car la nature
du son est 1 varia° de press° qui
se transforme en vibraᵗ° (surpress° → dépress°)

Pour numériser:

1) échantillonage: numérisaᵗ sur l'axe des abcisses. Δ
avec $f = \frac{1}{\Delta}$ Hz (ou s^{-1}) d'horloge)
opéraᵗ° difficile. caractérisaᵗ° grâce à la période (tps ct X 2 top

mpress° de D
10/02
3

2) La quantificat° = déterminer l'amplitude.

Cette opérat° ne pose pas de pb grâce à un convertisseur ayant un gd support

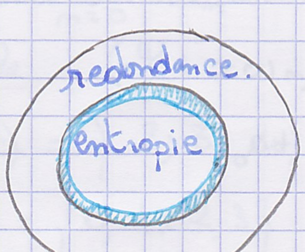
Pour qu'un signal échantillonné ne subisse aucune perte, il faut que la fréquence d'échantillonage soit supᴿ à 2 fois la fréquence maximum du signal analogique. Elle s'appelle la fréquence de Nyquist. (f_{bc})

Un signal stat°ᴿ = fait de plusieurs signaux périodiques.

Exemple : CD Audio :

- Au maximum, les enfants entendent à 20kHz.
  On pourrait choisir une fréquence $f_e = 40$ kHz. On a choisit 44kHz la fréquence d'échantillonage. (thm de Shanon et Nyquist)
- En revanche ds un canal de bande passante, la limite est de $\frac{f}{2}$ pour ne pas altérer le signal. Sinon il y aura 1 altérat° des bornes supérieures.

IV Compression non conservative :



Il va falloir sacrifier 1 partie de l'info° du signal.

Qu'elle est l'info° que l'on va supprimer ? (1980)

* Les industriels fondent 1 associat° (jpeg) pour créer 1 norme de compress° d'images. (Extrê^t compliqué = informaticiens, mathématiciens (traite^t du signal), physiologistes (percept° humaine))

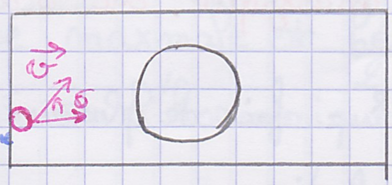
- Pour le son, modèle psycho-accoustique pour compresser le son qui marchait très bien basé sur le phénomène de masquage : une info° riche découpée en bandes de fréquence ds l'oreille interne. La bande qui possède le ⊕ d'E atténue les autres. On se focalise sur une seule. (mode de fct^t du MP3)
- Le concept de fréquence se situe ds le domaine spatial. On va étudier les fréquences pour connaître celle que l'on va garder ou pas : analyse harmonique du signal

Il s'agit d'un domaine des mathématiques, décomposit° des élts en fréquence grâce à la transformée de Fourier. (1820)

Historiquet :

Fourier, mathématicien amateur qui tentait de résoudre les équadiffs (équat° de mvt). Le pb des équat° venaient des C.I qui pouvaient tout changer.

Exemple du billard :



Si le σ est changé d'1000ème de radian, l'équat° n'avait plus rien à voir. ⇒ système profondét divergent.

Il essayait de résoudre l'équat° de diffus° de la chaleur. Il a réussit.

Mais il n'a pas sût qu'il venait de changer les math.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \frac{\partial T^2}{\partial x^2} ?$$

Son idée, une chose compliquée peut se décomposer en choses simples. → principe de superposit° en φ·q

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} C_i\, h_i}$$ cf : les séries de Fourier

La vraie formule de Fourier : $\boxed{f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \times \cos(\omega m x + \varphi_m)}$ fct° simples

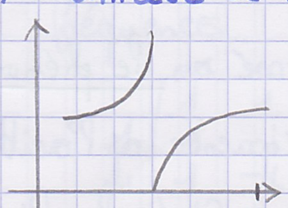
qui permet à partir d'1 fct° d'avoir 1 approximat° en une série de cosinus.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i\, h(x, i) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h_i = \sum_{i=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right) + a_0$$

1) Contrainte sur $f(x)$
2) Convergence de la série
3) Calculer a_n et b_n
4) Unicité de la décomposit°

1)



interdit asymptote.

Il faut que $\int_0^N f^2(x)dx$ existe.

2) $a_0 = \overline{f(x)} = \frac{1}{N}\int_0^N f(x)dx$.

3) $a_m = \frac{2}{N}\int_0^N f(x)\cos(\omega m x)\,dx$ soit $\omega = \frac{2\pi}{N} m$

$b_m = \frac{2}{N}\int_0^N f(x)\sin(\omega m x)\,dx.$

Il faut une unicité $\begin{cases} < \cos(\omega m x) \mid \cos(\omega m x) > = 0 \\ < \sin(\omega m x) \mid \sin(\omega m x) > = 0 \\ < \cos(\omega n x) \mid \sin(\omega m x) > = 0 \end{cases}$

$\int_0^N \cos(\omega n x) \cdot \cos(\omega m x)\,dx = 0$

Théorème : 1) La transformée de Fourier :

Toute fct périodique peut-ê exprimé de manière unique comme une fonct° de Σ circulaire (sin et cos) de fréquence multiple de la fréquence initiale chacune affectée d'une amplitude et de phase propre.

Forme complexe :

$C(n) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, e^{-in\omega x}$ À vérifier. avec $\left(\omega = \frac{2\pi}{N}\right)$

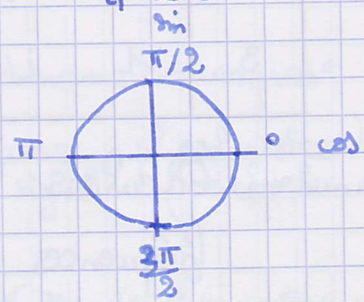
$f(x) = \sum_{m=0}^{N-1} C_m\, e^{im\omega x}$

Exemple :

$f(x) = \{2;3;4;4\}$ Soit la fenêtre d'observat° sur $[0,3]$.

$x = \{0,1,2,3\}$ et $N=4$

$C(m) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\, e^{-im\frac{\pi}{2}x}$



$C(0) = \frac{1}{4}\left(f(0)+f(1)+f(2)+f(3)\right) = \frac{13}{4}$

$C(1) = \frac{1}{4}\left(2 + 3e^{-i\pi/2} + 4e^{-i\pi} + 4e^{-i3\pi/2}\right)$

$C(1) = \frac{1}{4}\left(2 - 3i - 4 + 4i\right) = \frac{1}{4}(-2+i)$

$\Rightarrow |C_1| = \frac{1}{4}\left((-2)^2 + (i)^2\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

sachant $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et après calcul des modules

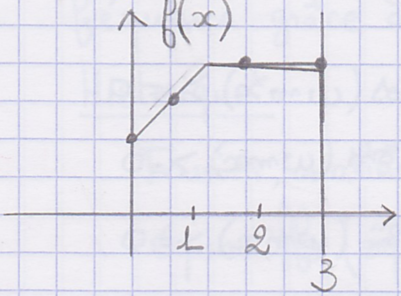
$C(2) = \frac{1}{4}\left(2 + 3e^{-i\pi} + 4e^{-i2\pi} + 4e^{-i3\pi}\right)$

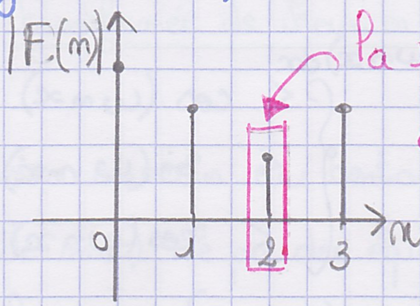
$C(2) = \frac{1}{4}\left(2 - 3 + 4 - 4\right) = -\frac{1}{4}$

$C(3) = \frac{1}{4}\left(2 + 3e^{-i\frac{\pi}{2}\times 3} + 4e^{-i3\pi} + 4e^{-i\frac{9\pi}{2}}\right)$

$C(3) = \frac{1}{4}\left(2 + i3 - 4 - i4\right) = \frac{1}{4}(-2-i)$ D'où $|C(3)| = \frac{\sqrt{5}}{4}$

$C(3)$ est le conjugué complexe de $C(1)$.





Si $f_e = 4\,Hz$, la fréquence maximale est $\frac{f_e}{2} = 2 \Rightarrow$ d'où la plus haute fréquence est située sur l'harmonique $n = 2$.

Conclusion physique:

- hautes fréquences: à chaq point, la dérivée change de signe.
  oscillit sans arrêt.

  Ici, il n'y a pas de hautes fréquences.
- On va essayer d'accéler le calcul à partir de la formule g^{ale}.
- Dans le cas $N=4$:

n \ x	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	$-i$	-1	i
2	1	-1	1	-1
3	1	i	-1	$-i$

On remarque que x et n sont de 0 à 3 $\Rightarrow$ La matrice sera symétrique.

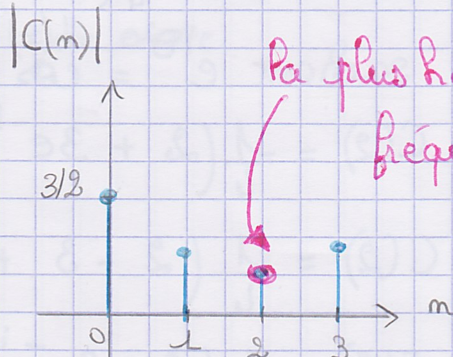
La matrice de Fourier est:

$$MF = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

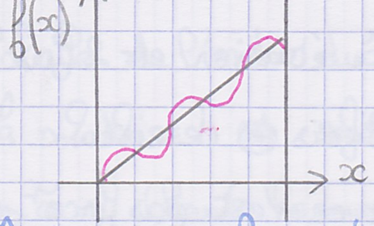
Calculons $MF \times$ vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: Est ce qu'on doit trouver des hautes fréquences.

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2+i2 \\ -2 \\ -2-i2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}$$

$$\text{module: } \frac{1}{4} \times \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -2+i2 \\ -2 \\ -2-i2 \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} 6 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}$$



pressᵒ de D
t/02
(4)

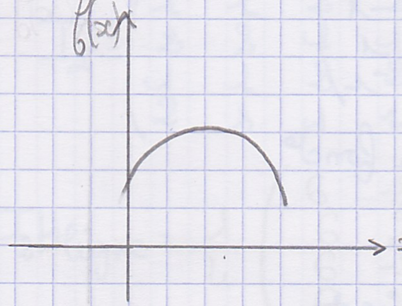


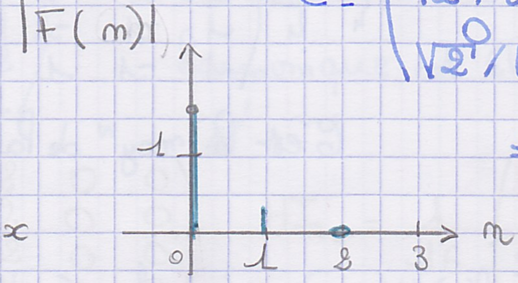
Il ne devrait pas y avoir de hautes fréquences
Et pourtant, nous trouvons des hautes fréquences

- Autre exemple : $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ (vecteur des x)

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ -1-i\\ 0\\ -1+i\end{pmatrix} \times \frac{1}{4}$$, calcul du module :

$$C = \begin{pmatrix}3/2\\ \sqrt{2}/4\\ 0\\ \sqrt{2}/4\end{pmatrix}$$





⇒ pas de hautes fréquences

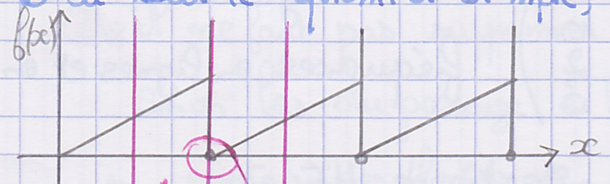
Pour l'harmonique $n = 2$, on s'aperçoit que cette fois $C(2) = 0$.

⇒ On va utiliser la FFT (1964-1965). Cet algorithme va accélérer significativement le tps de calcul du thm de Fourier.

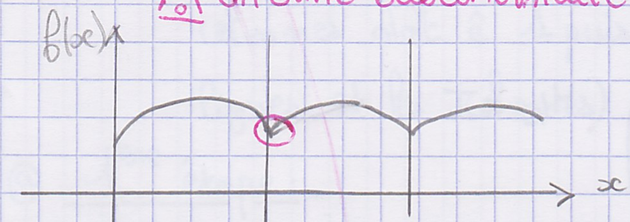
Ces hautes fréquences qui changent les calculs s'appellent des fuites spectrales.

On a dit que les fonctᵒ devraient ê périodiques.

D'où sur le premier exemple, on obtient le schéma suivant :



⚠ énorme discontinuité que l'on observe ds le spectre des modules

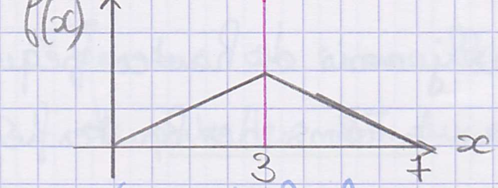


c.f 2ème exemple.

pas de discontinuité

Solutions :

- Le fenêtrage qui atténue les 2 extrémités par pondératᵒ.
- rendre la fonctᵒ paire (solutᵒ de jpeg) mais cela coûte très cher (étude sur un espace 2 fois plus gd)

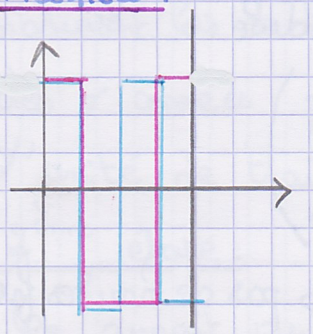


$\Rightarrow$ Le support à étudier est 2 fois plus gd $\Rightarrow$ 2 fois $\oplus$ de calcul.

(cas de la fonct° paire) On verra que ce n'est pas forcé^t vrai.

2) La transformée d'Hadamard : (1899)

ⓐ Présentat° :



$$H_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est la moy^n de la fonct°

ⓑ Exemples :

* $F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,H(n,x)$ transformée directe

$f(x) = \sum_{m=0}^{N-1} F(m)\,H^{-1}(m,x)$ transformée inverse.

Première fois que l'on a fait de la compress° d'images sur la photographie de la Lune (512×512) avec une BP ridicule et des DD ridicule 1962°.

ⓒ La première compression d'image : Applicat° :

* Soit l'image

$$I \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IP va y avoir des hautes fréquences en lignes et en colonnes

Ce qui est interessant c'est le spectre de HI_4.

- Calcule de la matrice ligne :

$$IH_{ligne} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_4 \times I$$

omme C_1

$$HI_4 = \frac{1}{16}\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{12} & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Spectre de la matrice}}$$

h_0 h_1 h_2 h_3 h_4

coeff special : la moyenne de la fonct°

$\Rightarrow moy(HI_4) = \frac{12}{16}$

• Calcule de l'ordre du spectre, suivant l'ordre de la diagonale inverse (⚡)
La matrice est sous forme d'harmonique à partir de 12 (basse harmonique)
↠ à -4 (haute harmonique)

* Calcule d'un autre spectre :
sens fig : plus de haute fréquence en ligne, par contre ∃ des
hautes fréquences en colonne.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On oscille 1 seule fois, donc sur le 1er harmonique est élevé et le dernier est nul

$$I_2 H_{ligne} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H I_{24} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} \boxed{24}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le type de variat° que l'on peut avoir

* le coeff d'essai.

Ces calculs s'appellent des transformées séparables.

3) Marine JPEG :

Soit une image I, on effectue la transformée de Fourier :

$I \longrightarrow TF(I)$

⚠ * Il ne faut pas supprimer ttes les hautes fréquences,
sinon lors du passage à la TF^{-1}, on obtiendrait une image floue.

* contraintes fortes sur l'image : taille des lignes et des colonnes doit ê 1 puissance de 2 (elle peut-ê ≠te entre les lignes et les colonnes)

@ 1ère étape :
découpage de l'image en carrée 8 x 8 (type mosaïque)

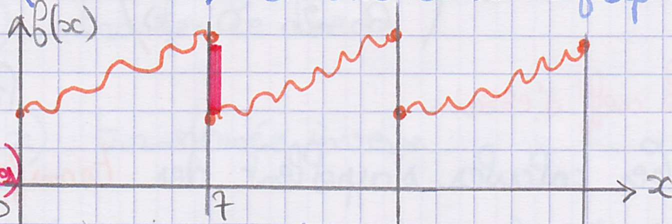
Avantage	Inconvénient
• liberté des dimens°	• effet mosaïque (les carrés mis les uns à côté des autres)
• On ne touche pas aux HF	• perte des basses fréquences (cecité) → on s'en fiche.
• meilleure préservat° des détails	

- Comme on travaille sur les hautes fréquences, on peut se permettre de perdre les BF du carré 8x8 (⚠ ds un carré 16x16, on ne voudrait pas perdre ttes les BF)
- L'effet mosaïque se voit ds les aplats du ciel à cause des coeff d'essais. L'oeil est sensible aux erreurs d'alignet qui se produisent lors de la décompressn. On filtre et on effectue la moyn des ≠ carrées pour obtenir la m̂ image.
- L'unité de traitet est un carré 8x8 que l'on nomme un bloc.

(b) 2ème étape :

On aurait pu faire directet une transformé de Fourier et obtenir un spectre de 8x8 (totalet ≠ à une carte de fréquence...)

Pb : Les fuites spectrales.



- fuite spectrale (HF parasite)

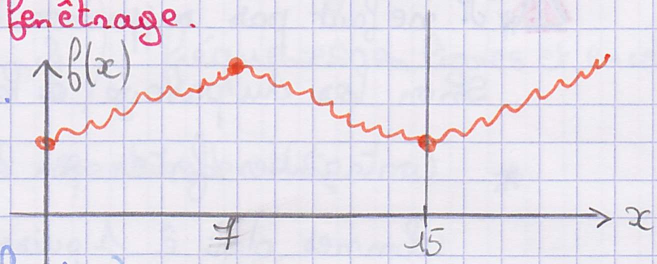
Le spectre va donc être très chargé :

$$FI = \underbrace{\begin{pmatrix} DC & & \\ & BF & \\ & & HF \end{pmatrix}}_{\text{Spectre de la transformée de Fourier appliqué à l'image}}$$

Les hautes fréquences st composées des fuites spectrales et on ne peut pas enlever les Hautes Fréquences.

→ effet mathématique dû au fenêtrage.

Solution : rendre la fonct° paire.



⚠ tous les coefficients impairs deviennent nulls. (c.f : $b_n = 0$ sur le sinus)

Le support est 2 fois plus grand

⇒ DCT (direct cosinus transform)

Il s'agit de la 2ème étape

On obtient de vrai HF sur le spectre.

© 3ème étape : Le coeur de JPEG

- Résolutº de l'enlèvet de certaines hautes fréquences et pas d'autres : LA QUANTIFICATION
- Ce qui va nous intéresser : le signal qui est présent.

Lorsqu'il y a un très gd gradient ds l'image (≠ce noir et blanc) on souhaite garder ce gradiant.

Pour une oscillatº sur une très gde distance, la préservatº de cette oscillatº est importante ⇒ ces coefficients sont fort.

→ On veut enlever les petits coefficients (mise à 0) et préserver celles qui ont des gdes amplitudes.